Καλώς ήρθατε στην Συναρτησιακή Ανάλυση!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH495/

Χειμερινό Εξάμηνο 2026-27

Περιεχόμενα

1 Γραμμικοί χώροι, χώροι με νόρμα

2 Πρώτες ιδιότητες

3 Χώροι πεπερασμένης διάστασης

4 Γραμμικές μορφές, Γραμμικοί Τελεστές

5 Χώροι Hilbert

Γραμμικοί χώροι

$\mathbb{K}$ είναι το σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός

Ένα $X \neq \emptyset$ λέγεται $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ ώστε

(I) Αξιώματα της πρόσθεσης: $\forall\, x, y, z \in X$,

(i) $x + y = y + x$.

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii) $\exists\, \vec{0} \in X$ *ώστε* $\forall\, x \in X$, $\vec{0} + x = x$.

(iv) $\forall x \in X\ \exists\, (-x) \in X$ *ώστε* $x + (-x) = \vec{0}$.

(II) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού: $\forall\, x, y \in X$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(ii) $1x = x$.

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Παραδείγματα

• Το σύνολο $\mathscr{S}$ όλων των ακολουθιών πραγμ. ή μιγ. αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη:

$$x+y=(\xi_k+\eta_k) \quad , \quad \lambda x=(\lambda\xi_k)$$

για $x=(\xi_k)$, $y=(\eta_k)$ και $\lambda\in\mathbb{K}$.

• Αν $A\neq\emptyset$ και $F(A)$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f:A\to\mathbb{K}$, τότε το $F(A)$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο:
αν $f,g\in F(A)$ και $\lambda\in\mathbb{K}$, ορίζουμε $f+g$, $\lambda f\in F(A)$ θέτοντας

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t)=\lambda f(t) \quad , \quad t\in A.$$

Γραμμική Ανεξαρτησία

Αν X γραμμικός χώρος και $x \in X$, $A \subseteq X$, λέμε ότι το x ανήκει στην γραμμική θήκη του A (γράφουμε $x \in \mathrm{span}(A)$) ή ότι είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του A, αν υπάρχουν (πεπερ. πλήθος) $x_1, \ldots, x_n \in A$ και $\lambda_1, \ldots . \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots \lambda_n x_n.$$

Τα διανύσματα $y_1, \ldots, y_m$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα αν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ισοδύναμα, αν το $\vec{0}$ είναι μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός τους, δηλ. αν υπάρχουν $\mu_1, \ldots \mu_m \in \mathbb{K}$, όχι όλα 0, ώστε

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots \mu_m y_m = \vec{0}.$$

Είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν υπάρχουν τέτοια μ_k, δηλ. αν

$$\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Γραμμικοί χώροι

Ένα μη κενό $M \subseteq X$ (άπειρο ή πεπερασμένο) λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν περιέχει κάποια $y_1, \ldots, y_m$ που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισοδύναμα, αν υπάρχει κάποιο $x \in M$ που είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $M \setminus \{x\}$, δηλ. ανήκει στην γραμμική θήκη του $M \setminus \{x\}$.

Το M είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν για κάθε πεπερ. πλήθος στοιχείων $x_1, \ldots, x_m$ του M ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Ένας $Y \subseteq X$ λέγεται (γραμμικός) υπόχωρος του X αν $\operatorname{span}(Y) \subseteq Y$, δηλαδή αν

$$x, y \in Y \text{ και } \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow x + \lambda y \in Y.$$

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Ορισμός (νόρμα)

Έστω X ένας πραγματικός ή μιγαδικός γραμμικός (:διανυσματικός) χώρος. Νόρμα στον X είναι κάθε συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\|x\| \geq 0$ *για κάθε* $x \in X$ *και* $\|x\| = 0$ *αν και μόνον αν* $x = 0$ *(μη αρνητική).*

(β) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{K}$ *και κάθε* $x \in X$ *(θετικά ομογενής).*

(γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *για κάθε* $x, y \in X$ *(τριγωνική ανισότητα).*

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Ορισμός

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.
Η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x,y) = \|x-y\|, \qquad x,y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του).

δηλαδή για κάθε $x, y, z \in X$,

1. $d(x,y) \geq 0$,
2. $d(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$,
3. $d(x,y) = d(y,x)$ και
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (τριγωνική ανισότητα).

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \to 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε. Για παράδειγμα, η νόρμα supremum στον $C([a,b])$ (δες πιο κάτω) εκφράζει την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \iff f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } [a,b].$$

Χώροι με νόρμα: Παραδείγματα

1.1. Στον $\mathbb{K}^m$ ορίζουμε την νόρμα supremum $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^m \to \mathbb{R}$ ως εξής: αν $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ τότε

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, m\}.$$

1.2. Στον $\mathbb{K}^m$ ορίζουμε την νόρμα ένα $\|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_m| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|.$$

Η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας για την απόλυτη τιμή στο $\mathbb{K}$. Ο χώρος $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_1)$ συμβολίζεται με ℓ_1^m.

Χώροι με νόρμα: Παραδείγματα

1.3. Στον $\mathbb{K}^m$ ορίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2 : \mathbb{K}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Για την τριγωνική ανισότητα, χρειάζεται η

Παρατήρηση (Ανισότητα Cauchy–Schwarz)

Έστω $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ μιγαδικοί αριθμοί. Τότε

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Χώροι με νόρμα: Παραδείγματα

1.4. Γενικότερα, στον $\mathbb{K}^m$ μπορούμε να θεωρήσουμε την p-νόρμα, $1 < p < \infty$, όπου

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Παρατήρηση (Ανισότητα Hölder)

Αν $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ είναι μιγαδικοί αριθμοί και $p, q > 1$ ώστε[1] $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *τότε*

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

Η ανισότητα Cauchy–Schwarz είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας Hölder για $p = q = 2$.

[1] Οι p και q λέγονται συζυγείς εκθέτες.

Χώροι με νόρμα: Παραδείγματα

Παρατήρηση (Ανισότητα Minkowski)

Αν $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ είναι μιγαδικοί αριθμοί και $p > 1$, τότε ισχύει η ανισότητα

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Η τριγωνική ανισότητα $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ για την p-νόρμα είναι ακριβώς η ανισότητα Minkowski. Ο χώρος $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p)$ συμβολίζεται με ℓ_p^m.

Χώροι ακολουθιών

2.1. Ο χώρος $\ell_\infty := \ell_\infty(\mathbb{N})$ των φραγμένων ακολουθιών $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ είναι γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον ℓ_∞ ορίζουμε την supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x(n)| : n = 1, 2, \ldots\}.$$

2.2. Ο χώρος $c_0 := c_0(\mathbb{N})$ των μηδενικών ακολουθιών, δηλαδή

$$c_0 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \exists \lim_{n\to\infty} x(n) = 0 \right\}$$

είναι επίσης γραμμικός χώρος (μάλιστα γραμμικός υπόχωρος του ℓ_∞) με τις κατά σημείο πράξεις. Σε αυτόν θεωρούμε την supremum νόρμα που κληρονομεί από τον ℓ_∞.

2.3. Ο χώρος $\ell_1 := \ell_1(\mathbb{N})$ των 1-αθροίσιμων ακολουθιών (δηλαδή ακολουθιών των οποίων η σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα):

$$\ell_1 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty \right\}.$$

Είναι γραμμικός υπόχωρος του c_0
(αν $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty$ τότε $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$).
Ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\|_1 : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|.$$

2.4. Αν $1 \leq p < \infty$, ο χώρος $\ell_p := \ell_p(\mathbb{N})$ των p-αθροίσιμων ακολουθιών:

$$\ell_p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty \right\}.$$

Ορίζουμε την p–νόρμα

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}.$$

2.5. Ο χώρος $c_{00} := c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών: $x \in c_{00}$ αν και μόνον αν υπάρχει $n_0 := n_0(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $x(n) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Σε αυτό το χώρο μπορούμε να ορίσουμε οποιαδήποτε από τις p–νόρμες, $1 \leq p \leq \infty$.

3.1. Ο χώρος $C([0,1])$ των συνεχών πραγματικών ή μιγαδικών συναρτήσεων στο $[0,1]$:

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \mid f \text{ συνεχής}\}.$$

Είναι γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον $C([0,1])$ ορίζουμε την $\|\cdot\|_\infty : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, με

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Παρατηρήστε ότι το sup όντως υπάρχει, αφού η $|f| : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, και μάλιστα είναι max διότι κάθε συνεχής συνάρτηση, που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα, παίρνει μέγιστη τιμή.

3.2. Αν $1 \leq p < \infty$, στον $C([0,1])$ μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την p–νόρμα

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Για την τριγωνική ανισότητα, χρειάζονται οι ανισότητες Hölder και Minkowski για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις:

Ανισότητα Hölder για συναρτήσεις. *Αν $f, g : [0,1] \to \mathbb{K}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, $1 < p < \infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$\int_0^1 |f(t)g(t)| \, dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

Ανισότητα Minkowski για συναρτήσεις. *Αν $1 \leq p < \infty$, τότε*

$$\left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Χώροι συναρτήσεων (ενημερωτικά)

3.3. Στον $C^1([0,1])$, τον χώρο των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ που έχουν συνεχή παράγωγο, μπορούμε να θεωρήσουμε τη νόρμα

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Παρατηρήστε ότι η

$$\|f\|_d := \|f'\|_\infty$$

δεν είναι νόρμα (και δεν επάγει μετρική) στον $C^1([0,1])$.

3.4. Γενικότερα αν K συμπαγής και Hausdorff (ή συμπαγής μετρικός) και $(E, \|\cdot\|_E)$ χώρος με νόρμα, ορίζουμε $C(K;E)$ τον γραμμικό χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to (E, \|\cdot\|_E)$ και την νόρμα της ομοιόμοφης σύγκλισης :

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(t)\|_E : t \in K\}, \quad f \in C(K;E).$$

Χώροι συναρτήσεων (ενημερωτικά)

3.5. Αν $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, ορίζουμε $H^\infty(\mathbb{B})$ τον χώρο των ολόμορφων και φραγμένων συναρτήσεων $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$, εφοδιασμένο με τη νόρμα supremum.

3.6. Η άλγεβρα του δίσκου $A(\mathbb{D})$ είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ που είναι ολόμορφες στο $\mathbb{D}$, εφοδιασμένος με τη νόρμα supremum του $C(\overline{\mathbb{D}})$.

3.7. Ο χώρος $A(\mathbb{T})$ είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ που έχουν μηδενικούς αρνητικούς συντελεστές Fourier: $\hat{g}(n) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt = 0$ για κάθε $n < 0$, εφοδιασμένος με τη νόρμα supremum του $C([0, 2\pi])$.
Είναι ισομετρικά ισόμορφος με την $A(\mathbb{D})$ μέσω της απεικόνισης $A(\mathbb{D}) \to A(\mathbb{T}) : f \to \tilde{f}$, όπου $\tilde{f}(t) = f(e^{it})$.

Πρώτες ιδιότητες

Πρόταση

Σε κάθε χώρο με νόρμα X, οι συναρτήσεις

- $X \to \mathbb{R} : x \to \|x\|$
- $X \times X \to X : (x, y) \to x + y$
- $\mathbb{K} \times X \to X : (\lambda, x) \to \lambda x$

είναι συνεχείς.

Πρόταση

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, και d η επαγόμενη μετρική. Τότε, για κάθε $x, y, z \in X$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$, έχουμε

(i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$,

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Παράδειγμα: Μετρική σε γραμμικό χώρο

Στον $\mathscr{S}$, αν $x = (\xi_k)$ και $y = (\eta_k)$ η συνάρτηση

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}$$

είναι μετρική. Ο $\mathscr{S}$ είναι γραμμικός χώρος, όμως η d δεν επάγεται από κάποια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathscr{S}$:
Θα έπρεπε να ικανοποιεί την

$$d(2x,0) = \|2x\| = 2\|x\| = 2d(x,0),$$

δηλαδή για κάθε $x = (\xi_k) \in \mathscr{S}$ θα είχαμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{2|\xi_k|}{1 + 2|\xi_k|} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|}.$$

Αυτό δεν ισχύει (πάρτε, για παράδειγμα, $x = (1,0,\ldots)$.)

Πρώτες ιδιότητες

Συμβολισμοί Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.
Αν $x \in X$ και $r \in \mathbb{R}_+$,

$$B(x,r) = \{y \in X : \|y-x\| < r\}$$
$$\hat{B}(x,r) = \{y \in X : \|y-x\| \leq r\}$$
$$S(x,r) = \{y \in X : \|y-x\| = r\}.$$

Η *μοναδιαία μπάλα* B_X του X είναι η *κλειστή μπάλα* με κέντρο 0 και ακτίνα 1. Δηλαδή,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Πρόταση

Σε κάθε χώρο με νόρμα X, η μοναδιαία μπάλα B_X είναι σύνολο κλειστό, φραγμένο, κυρτό (δηλ. αν $x, y \in B_X$ και $\lambda \in (0,1)$ τότε $\lambda y + (1-\lambda)x \in B_X$) και συμμετρικό ως προς το 0, με μη κενό εσωτερικό (κυρτό σώμα).

Πληρότητα: Χώροι Banach

Μια ακολουθία (x_n) στον $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται ακολουθία Cauchy ή βασική ακολουθία αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Ορισμός

Χώρος Banach είναι ένας πλήρης χώρος με νόρμα (δηλαδή, ένας γραμμικός χώρος με νόρμα που είναι πλήρης ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα.)

Δηλαδή, ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach αν για κάθε ακολουθία Cauchy (x_n) στον X υπάρχει $x \in X$ ώστε $\|x_n - x\| \to 0$.

Από τα προηγούμενα Παραδείγματα, τα 1.1 ως 1.4 ορίζουν χώρους Banach, όπως και τα 2.1 ως 2.4. Το Παράδειγμα 2.5 δεν είναι πλήρης χώρος.
Το Παράδειγμα 3.1 είναι χώρος Banach, ενώ τα 3.2 και 3.3 δεν είναι. Το 3.4 ορίζει χώρο Banach αν και μόνον αν ο $(E, \|\cdot\|_E)$ είναι πλήρης. Τέλος, τα 3.5, 3.6 και 3.7 ορίζουν χώρους Banach.

Συμπληρωματα

Παραδειγμα

Ο χώρος $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ (Παραδειγμα 3.2) δεν ειναι χωρος Banach.

Συμβολισμοι: Εστω Γ οποιοδηποτε μη κενο συνολο.

$$\ell^\infty(\Gamma) := \{x : \Gamma \to \mathbb{K} \mid \|x\|_\infty := \sup_\gamma |x(\gamma)| < \infty\} \text{ (οι φραγμενες)}$$

$$c_{00}(\Gamma) := \{x : \Gamma \to \mathbb{K} \mid \exists \Gamma_x \text{ πεπερασμενο} : \gamma \notin \Gamma_x \Rightarrow x(\gamma) = 0\}$$

$$c_0(\Gamma) := \{x : \Gamma \to \mathbb{K} \mid \forall \varepsilon > 0 \; \exists \Gamma_x^\varepsilon \text{ πεπερασμενο} : \gamma \notin \Gamma_x^\varepsilon \Rightarrow |x(\gamma)| < \varepsilon\}$$

Πρόταση

(α) Ο $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ ειναι χωρος Banach.
(β) Ο $c_0(\Gamma)$ ειναι κλειστος στον $\ell^\infty(\Gamma)$, αρα χωρος Banach.
(γ) Αν K συμπαγης (μετρικος), τοτε ο $C(K)$ ειναι κλειστος στον $\ell^\infty(K)$, αρα χωρος Banach.

Σύγκλιση σειρών σε χώρο με νόρμα

Ορισμός (α) Έστω (x_k) ακολουθία στον $(X, \|\cdot\|)$. Η ακολουθία (s_n) των *μερικών αθροισμάτων* της (x_k) ορίζεται από την

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Αν υπάρχει $s \in X$ τέτοιο ώστε $s_n \to s$ (δηλ. $\|s_n - s\| \to 0$) τότε λέμε ότι *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *συγκλίνει στο* s, και γράφουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

(β) Λέμε ότι *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *συγκλίνει απολύτως*, αν

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$$

(δηλαδή, αν η σειρά πραγματικών αριθμών $\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.)

Σύγκλιση σειρών

Παράδειγμα

Στον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$, η σειρά $\sum_n \frac{e_n}{n^2}$ συγκλίνει απόλυτα, αλλά δεν συγκλίνει μέσα στο χώρο.

Παρατήρηση: Αν $x = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{(k+1)^2}, \ldots)$, τότε $\|s_n - x\|_\infty \to 0$. Όμως το x δεν ανήκει στον c_{00} (αλλά στον c_0).

Πρόταση

Έστω X ένας χώρος Banach. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως στον X, τότε συγκλίνει στον X.

Αντίστροφα:

Πρόταση

Σε ένα χώρο X με νόρμα, Αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά συγκλίνει, τότε ο X είναι πλήρης (είναι χώρος Banach).

Διαχωρισιμότητα

Υπενθύμιση Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται διαχωρίσιμος αν έχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

Παραδείγματα

Ο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, και οι $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ για $1 \leq p < \infty$ είναι διαχωρίσιμοι, ο $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι.

Πρόταση

Ένας χώρος με νόρμα X είναι διαχωρίσμος αν και μόνον αν έχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο E που η γραμμική του θήκη είναι πυκνή στον X, δηλαδή $\overline{\operatorname{span}(E)} = X$.

Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Θεώρημα

Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω Y υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε, ο Y είναι πλήρης. Ειδικότερα, κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα είναι πλήρης.

Χρειάζεται το

Λήμμα

Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X. Υπάρχει μια σταθερά $c > 0$ (που εξαρτάται από τη νόρμα και από τα $x_1, \ldots, x_m$), τέτοια ώστε για κάθε $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ να ισχύει

$$c\,(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_m|) \leq \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m\|.$$

(δηλαδή, αν οι συντελεστές λ_i είναι «μεγάλοι», τότε το διάνυσμα $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ δεν μπορεί να έχει «αυθαίρετα» μικρή νόρμα.)

Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Θεώρημα

Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω Y υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε, ο Y είναι κλειστός στον X.

... γιατί είναι πλήρης.

Εφαρμογή

Αν X είναι ένας απειροδιάστατος χώρος Banach, τότε κάθε βάση Hamel του X είναι υπεραριθμήσιμη.

Ισοδύναμες νόρμες

Ορισμός

Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ στον X λέγονται ισοδύναμες αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί a, b τέτοιοι ώστε, για κάθε $x \in X$

$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|.$$

Πρόταση

Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ ισοδύναμες νόρμες στον X.
(a) Μία ακολουθία (x_n) του X είναι συγκλίνουσα στον $(X, \|\cdot\|)$ αν και μόνο αν είναι συγκλίνουσα στον $(X, \|\cdot\|')$.
(b) Η (x_n) είναι βασική στον $(X, \|\cdot\|)$ αν και μόνο αν είναι βασική στον $(X, \|\cdot\|')$.
Άρα ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης αν-ν ο $(X, \|\cdot\|')$ είναι πλήρης.

Ισοδύναμες νόρμες

Παράδειγμα – Άσκηση

Αν $p, q \in [1, \infty]$, οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_q$ είναι ισοδύναμες στον $\mathbb{K}^m$ (για $m < \infty$), αλλά όχι στον c_{00}.

Παρατήρηση Η ισοδυναμία νορμών είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θεώρημα

Δύο νόρμες σ΄ έναν γραμμικό χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη (σχέδιο) Αν $\{e_1, \dots e_d\}$ είναι αλγεβρική βάση ενός $(X, \|\cdot\|)$, κάθε $x \in X$ γράφεται μοναδικά $x = \sum_{k=1}^{d} \lambda(k) e_k$ και ορίζω $|||x||| := \sum_{k=1}^{d} |\lambda(k)|$. Δείχνω ότι οι $|||\cdot|||$ και $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμες. Άρα όλες είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

Μια άσκηση

Έστω $S = \{x \in \ell_\infty : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq 1\}$. Δείξτε ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_1 (και στον ℓ_∞) ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ και έχει κενό εσωτερικό. Δείξτε ότι ο ℓ_1 με νόρμα την $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι χώρος Banach.

• Κενό εσωτερικό: Αν το S περιείχε μια $B_\infty(x, \delta)$ τότε, αν $y = (\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, \dots)$ (m όροι, με $m\frac{\delta}{4} > 1$), θα είχαμε $x + y \in S$. Επίσης $-x \in S$ αφού $x \in S$ και S συμμετρικό, άρα $\frac{1}{2}(x + y - x) \in S$ αφού S κυρτό. Δηλαδή $\frac{y}{2} \in S^\cdot$ θα έπρεπε λοιπόν $\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \cdots \leq 1$, άτοπο.

Παρατήρηση: Γενικότερα, ένας γνήσιος υπόχωρος χώρου με νόρμα δεν μπορεί να περιέχει μια μη κενή ανοικτή μπάλα. Γιατί τότε θα περιείχε μια ανοικτή μπάλα κέντρου 0 (μεταφορά ανοικτού είναι ανοικτό) οπότε θα περιείχε ένα «αρκετά μικρό» πολλαπλάσιο κάθε διανύσματος, άρα κάθε διάνυσμα!

Μια άσκηση II

- $\|\cdot\|_\infty$-Κλειστό: Έστω $x_n \in S$ για κάθε n και $\|x_n - x\|_\infty \to 0$.

Τότε, $x(k) = \lim_n x_n(k)$ για κάθε k, άρα, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε $\sum_{k=1}^N |x(k)| = \sum_{k=1}^N \lim_n |x_n(k)| = \lim_n \sum_{k=1}^N |x_n(k)| \leq 1$ αφού $\sum_{k=1}^N |x_n(k)| \leq 1$ για κάθε n. Συνεπώς $\sum_{k=1}^\infty |x(k)| = \sup_N \sum_{k=1}^N |x(k)| \leq 1$.

Παρατήρηση: Χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι $x_n(k) \to x(k)$ για κάθε k, δηλ. δείξαμε ότι το S είναι κλειστό στην τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο (ασθενέστερη απ' την τοπολογία της $\|\cdot\|_\infty$).

Μια άσκηση III

• Όχι Banach: Δύο τρόποι: Ο κομψός: Για κάθε $x \in \ell^1$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x\|_1 \leq n$, άρα $\frac{x}{n} \in S$. Οπότε $\ell^1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(nS)$: αριθμήσιμη ένωση κλειστών. Αν ήταν πλήρης, από το θεώρημα Baire (!) κάποιο θάπρεπε να περιέχει μια μπάλα.

• Ο στοιχειώδης: Ο ℓ^1 είναι υπόχωρος του c_0 (κάθε αθροίσιμη είναι μηδενική). Αλλά περιέχει τον c_{00} που είναι πυκνός στον $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, άρα κι αυτός είναι πυκνός. Αν ήταν Banach, θάταν κλειστός, οπότε θάταν ίσος με τον c_0. Αλλά δεν είναι (υπάρχουν μηδενικές που δεν είναι αθροίσιμες).

Συμπάγεια και πεπερασμένη διάσταση

Υπενθύμιση:

Ορισμός (συμπάγεια)

Ένας μετρικός χώρος (K, ρ) λέγεται συμπαγής (compact) αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Θεώρημα

Ένας μετρικός χώρος (K, ρ) είναι συμπαγής αν και μόνον αν είναι ακολουθιακά συμπαγής, δηλαδή αν και μόνον αν κάθε ακολουθία (x_n) έχει μια υπακολουθία (x_{n_k}) που συγκλίνει σε κάποιο $x \in K$.

Συμπάγεια και πεπερασμένη διάσταση

Πρόταση

Σε κάθε μετρικό χώρο, κάθε συμπαγές υποσύνολο είναι κλειστό και φραγμένο.

Στον $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_2)$, ισχύει και το αντίστροφο (Θεώρημα Bolzano–Weierstrass).

Στον $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$, δεν ισχύει το αντίστροφο: Η B_X δεν είναι συμπαγής: η ακολουθία (e_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, αφού $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ όταν $n \neq m$.

Θεώρημα

Έστω X χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, και έστω $\emptyset \neq K \subseteq X$. Τότε, το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Συμπάγεια και πεπερασμένη διάσταση

Θεώρημα

Έστω X χώρος με νόρμα. Ο X έχει πεπερασμένη διάσταση αν και μόνο αν η B_X είναι συμπαγής.

Αν X απειροδιάστατος, να δειξω οτι B_X μη συμπαγής. Χρειάζεται ένα γεωμετρικό Λήμμα: Αν Y είναι κλειστός υπόχωρος, σε κάθε υπόχωρο $Z \supsetneq Y$ μπορώ να βρω διάνυσμα «μακριά» από τον Y. Σε Ευκλείδειους χώρους μπορώ να βρώ z με $\|z\| = d(z, Y)$. Γενικότερα

Λήμμα (F. Riesz)

Έστω X χώρος με νόρμα, και Y, Z υπόχωροι του X. Αν Y είναι κλειστός, γνήσιος υπόχωρος του Z. Τότε, για κάθε $\theta \in (0,1)$ υπάρχει $z \in Z$ τέτοιο ώστε $\|z\| = 1$ και

$$d(z, Y) = \inf\{\|z - y\| : y \in Y\} \geq \theta.$$

Γραμμικές μορφές

Υπενθύμιση Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος. Μια απεικόνιση $\phi : E \to \mathbb{K}$ λέγεται γραμμική μορφή ή συναρτησοειδές ή συναρτησιακό αν $\phi(\lambda x_1 + x_2) = \lambda\phi(x_1) + \phi(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Παραδείγματα

(α) $E = \ell^p$: $\phi((x(1), x(2), \dots)) := x(387)$

(β) $E = c_{00}$: $\psi((x(1), x(2), \dots)) := \sum_k x(k)$

(γ) $E = C([0,1])$: $\phi(f) := f(\frac{1}{2})$

(δ) $E = C([0,1])$: $\psi(f) := \int_0^1 f(t)dt.$

(ε) $E = C([0,1])$: $\chi(f) := \|f\|_\infty$: όχι! ($\chi(f) \neq \chi(-f)$)

Σε κάθε γραμμικό χώρο ορίζεται μια γραμμική μορφή (η μηδενική!). Επίσης, σε κάθε μη μηδενικό γραμμικό χώρο ορίζεται μια μη μηδενική γραμμική μορφή (γιατί;;).

Γραμμικές μορφές σε χώρους με νόρμα

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική μορφή τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής στο 0

(β) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής

(γ) Υπάρχει σταθ. $M < \infty$ ώστε $|f(x)| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Η μικρότερη τέτοια M ονομάζεται $\|f\|$. Ισοδύναμα,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

(Θα αποδειχθεί πιό κάτω, γενικότερα: δες το Θεώρημα 7.)

Γραμμικές μορφές σε χώρους με νόρμα

Σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική μορφή είναι συνεχής.

Στον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$: $\phi(x) = x(k)$ συνεχής.
$\psi(x) = \sum_k x(k)$ ασυνεχής.
$f(x) = \frac{1}{n_x} \sum_k x(k)$ συνεχής (όπου $n_x : x(n) = 0$ όταν $n > n_x$).

Στον $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$: $\phi(x) = x(k)$ συνεχής.
$\psi(x) = \sum_k x(k)$ συνεχής.
$\chi(x) = \frac{1}{n_x} \sum_k x(k)$ συνεχής .

Στον $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$: $\delta_t(f) = f(t)$ συνεχής.
$\psi(f) = \int f(t)dt$ συνεχής.

Στον $(C([a,b]), \|\cdot\|_1)$: $\delta_t(f) = f(t)$ συνεχής;
$\psi(f) = \int f(t)dt$ συνεχής;

Υπερεπίπεδα και γραμμικές μορφές

Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος και $f : E \to \mathbb{K}$ γραμμική. Ο πυρήνας (kernel) της f είναι ο γραμμικός υπόχωρος

$$\ker f := \{x \in E : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

Είναι γνήσιος υπόχωρος του E ανν $f \neq 0$.

Πρόταση

Αν $x_0 \in E$ με $f(x_0) \neq 0$, τότε κάθε $x \in E$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο

$$x = \lambda x_0 + y \quad \textit{όπου} \quad \lambda = \frac{f(x)}{f(x_0)} \in \mathbb{K} \textit{ και } \quad y \in \ker f.$$

Δηλαδή $E = \operatorname{span}(\ker f, x_0)$.

Απόδειξη. Ύπαρξη: Αν $y_x := f(x_0)x - f(x)x_0$ βλέπω ότι $f(y_x) = 0$. Λύσε ως προς x και κάνε πράξεις...
Μοναδικότητα: Γραμμ. ανεξαρτησία ...

Υπερεπίπεδα και γραμμικές μορφές

Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος.

Πόρισμα

Αν f, g είναι δύο μη μηδενικές γραμμικές μορφές, τότε $\ker f = \ker g$ *αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{K}$ ώστε $f = \lambda g$.*

Γενίκευση:

Άσκηση

Έστω $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ γραμμικές μορφές στον E. Υποθέτουμε ότι

$$f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

(δηλαδή ότι $\bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k \subseteq \ker f$). Τότε η f είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{f_1, \ldots, f_n\}$: υπάρχουν $a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε $f(x) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)$ για κάθε $x \in E$.

(Το αντίστροφο είναι προφανές.)

Κλειστά υπερεπίπεδα και συνεχείς γραμμικές μορφές

Τώρα γυρνάμε στην Ανάλυση: Έστω X χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{K}$ γραμμική μορφή. Αν η f είναι συνεχής, τότε ο πυρήνας της, $f^{-1}(\{0\})$ είναι βέβαια κλειστός υπόχωρος. Το ενδιαφέρον είναι ότι ισχύει το αντίστροφο. Μάλιστα, υπάρχει μια ίσως απροσδόκητη διχοτομία:

Πρόταση (Για γραμμικές μορφές $f : X \to \mathbb{K}$ μόνο)

(α) f *συνεχής* $\iff$ $\ker f$ *κλειστός υπόχωρος του* X.
(β) f *ασυνεχής* $\iff$ $\ker f$ *πυκνός και γνήσιος υποχ. του* X.

Απόδειξη. Αν είναι ασυνεχής, δεν θα είναι φραγμένη, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $|f(x_n)| > n\|x_n\|$ (άρα και $f(x_n) \neq 0$). Έστω $x \in X$: θα βρώ $y_n \in \ker f$ ώστε $\|x - y_n\| \to 0$. Για κάθε n, εφαρμόζω την προηγούμενη πρόταση με το x_n στη θέση του x_0: υπάρχει $y_n \in \ker f$ ώστε $x = \frac{f(x)}{f(x_n)} x_n + y_n$. Έπεται ότι $\|x - y_n\| = \left\| \frac{f(x)}{f(x_n)} x_n \right\| = |f(x)| \frac{\|x_n\|}{|f(x_n)|} < |f(x)| \frac{1}{n}$, άρα $\|x - y_n\| \to 0$.

Γεωμετρική ερμηνεία της νόρμας μιας γραμμικής μορφής

Υπενθύμιση Αν X χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{K}$ συνεχής γραμμική μορφή,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Πρόταση

Έστω X χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{K}$ συνεχής γραμμική μορφή, $f \neq 0$. Τότε $\|f\| = \frac{1}{d}$, όπου d η απόσταση του $0 \in X$ από το $M_1 := \{x \in X : f(x) = 1\}$.

Απόδειξη. Αν $x \in M_1$, τότε $1 = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$, άρα $\|x\| \geq \frac{1}{\|f\|}$. Συνεπώς $d = \inf\{\|0 - x\| : x \in M_1\} \geq \frac{1}{\|f\|}$.
Από την άλλη, ξέρω ότι $\|f\| = \sup\{|f(y)| : y \in B_X\}$ άρα για κάθε $\varepsilon \in (0, \|f\|)$ υπάρχει $y \in B_X$ με $\|f\| - \varepsilon < |f(y)|$ (οπότε $f(y) \neq 0$). Έστω $x = \frac{y}{f(y)}$. Τότε $x \in M_1$ και $|f(y)| \, \|x\| = \|f(y)x\| = \|y\| \leq 1$ άρα $|f(y)| \leq \frac{1}{\|x\|}$ οπότε τελικά $\|f\| - \varepsilon < |f(y)| \leq \frac{1}{\|x\|}$ ή $\|x\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$. Συνεπώς $d = \inf\{\|x\| : x \in M_1\} < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$ άρα τελικά $d \leq \frac{1}{\|f\|}$ αφού το ε ήταν τυχόν.

Φραγμένοι τελεστές

Μια απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ γραμμικών χώρων είναι γραμμική αν $T(\lambda x_1 + x_2) = \lambda T(x_1) + T(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Ο *πυρήνας* της T είναι το σύνολο $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$, και η *εικόνα* της T είναι το σύνολο $\mathscr{R}(T) = \{Tx : x \in X\}$. Ο πυρήνας και η εικόνα μιας γραμμικής $T : E \to F$ είναι γραμμικοί υπόχωροι των E και F αντίστοιχα.

Θεώρημα

Αν $(E, \|.\|_E)$ και $(F, \|.\|_F)$ είναι χώροι με νόρμα και $T : E \to F$ είναι γραμμική απεικόνιση, τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) *Η T είναι συνεχής.*

(β) *Η T είναι συνεχής στο $0 \in E$.*

(γ) *Η T είναι συνεχής σε κάποιο σημείο του E.*

(δ) *Υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ για κάθε $x \in E$.*

(ε) *Ο περιορισμός της T στην μοναδ. μπάλα του E είναι φραγμ. συνάρτηση, δηλαδή το σύνολο $\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\}$ είναι φραγμένο.(Ισοδύναμα, η T στέλνει φραγμένα σε φραγμένα.)*

(στ) *Η T είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Φραγμένοι τελεστές

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική απεικόνιση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη σε όλον το χώρο.
(διότι $T(nx) = nT(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Ορισμός

Μία γραμμική απεικόνιση $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator) αν ο περιορισμός της T στην μοναδιαία μπάλα του E είναι φραγμένη συνάρτηση.

Αν $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ είναι γραμμική απεικόνιση, θέτουμε

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \in [0, +\infty].$$

Η T είναι φραγμένη αν και μόνον αν $\|T\| < +\infty$.

Φραγμένοι τελεστές: Η νόρμα

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}.$$

Πρόταση

Αν $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *είναι χώροι με νόρμα και* $T : E \to F$ *φραγμένος τελεστής, τότε*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E = 1\}$$

$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\}$$

$$= \inf\{k > 0 : \|Tx\|_F \leq k\|x\|_E \text{ για κάθε } x \in E\}.$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\|Tx\|_F \leq \|T\|\|x\|_E$$

για κάθε $x \in E$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

Πολλαπλασιαστικοί τελεστές. Αν $h : [0,1] \to \mathbb{K}$ είναι συνεχής συνάρτηση, ορίζουμε $M_h : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ με

$$M_h f = hf\,.$$

Είναι καλά ορισμένος, φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Ολοκληρωτικοί τελεστές. Αν $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ είναι συνεχής συνάρτηση, ορίζουμε $T : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ με

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s) ds.$$

Είναι καλά ορισμένος, φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Διαφορικοί τελεστές. Ορίζουμε
$D : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ με

$$Df = f'.$$

Είναι καλά ορισμένος και γραμμικός, αλλά όχι φραγμένος τελεστής.

Φραγμένοι τελεστές

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,*
D *πυκνός υπόχωρος του* E *και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
H T *δέχεται συνεχή επέκταση*

$$T_1 : E \to F \quad \delta\eta\lambda. \ T_1|_D = T$$

αν και μόνον αν είναι συνεχής.

Η επέκταση T_1 *είναι μοναδική (αν υπάρχει) και* $\|T_1\| = \|T\|$.

Φραγμένοι τελεστές

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ μεταξύ χώρων με νόρμα λέγεται ισομορφισμός αν είναι 1-1, επί, συνεχής, και η αντίστροφή της είναι επίσης συνεχής. Η T λέγεται ισομετρικός ισομορφισμός αν επι πλέον είναι ισομετρία. Οι E και F λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός από τον E επί του F, και λέγονται ισομετρικά ισόμορφοι αν υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός από τον E επί του F.

Παρατηρήσεις (α) Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι ισομορφισμός στην εικόνα της $T(E)$ αν-ν υπάρχουν θετικές σταθερές m, M ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει

$$m \|x\|_E \leq \|Tx\|_F \leq M \|x\|_E .$$

Ο T είναι ισομετρία ανν $m = M$ (οπότε $m = 1$).

(β) Μια ισομετρία είναι βέβαια 1-1, όχι όμως πάντα επί (σε απειροδιάστατους χώρους). Παράδειγμα: το shift στον ℓ^2.

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|.\|), (F, \|.\|)$ *είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε* $\mathscr{B}(E, F)$ *το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων*

$$T : (E, \|.\|) \to (F, \|.\|).$$

Όταν $E = F$, *γράφουμε* $\mathscr{B}(E)$ *αντί για* $\mathscr{B}(E, E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S)(x) = Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E).$$

το σύνολο $\mathscr{B}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to \|T\|$ *είναι νόρμα στον χώρο* $\mathscr{B}(E, F)$.
Αν επί πλέον ο F *είναι πλήρης, ο* $\mathscr{B}(E, F)$ *είναι χώρος Banach.*

Ο τοπολογικός δυϊκός

Ορισμός

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, ο τοπολογικός δυϊκός X^* του X είναι ο γραμμικός χώρος όλων των γραμμικών και συνεχών απεικονίσεων $f : X \to \mathbb{K}$, δηλαδή $X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$.

Πόρισμα

Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε ο X^* με νόρμα την $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\|_X = 1\}$ είναι χώρος Banach.

Παρατήρηση Αν $(X, \|\cdot\|_X)$ είναι χώρος με νόρμα και $Y \subseteq X$ είναι πυκνός γραμμικός υπόχωρος, τότε $(Y, \|\cdot\|_X)^* \simeq (X, \|\cdot\|_X)^*$ (ισομετρικά ισόμορφοι).

Για παράδειγμα, Ο δυϊκός του $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό του $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, δηλαδή τον $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$.

Παρατήρηση Δεν ξέρουμε ακόμα αν $X^* \neq \{0\}$ για οποιονδήποτε X: θα δειχθεί αργότερα (Θεώρημα Hahn-Banach). Για συγκεκριμένους όμως χώρους X ή κατηγορίες χώρων, βρίσκουμε εύκολα $f \in X^* \setminus \{0\}$:

Παραδείγματα τοπολογικών δυϊκών

Πρόταση

Θεωρούμε τον $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2) = \ell^2(n)$. *Ο δυϊκός του χώρος είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον* $\ell^2(n)$. *Γράφουμε* $(\ell^2(n))^* \simeq \ell^2(n)$.

$$T : (\ell^2(n))^* \to \ell^2(n) : f \to (f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Πρόταση

Ο $(\ell_1)^*$ *είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον* ℓ_∞.

Πρόταση

Αν $1 < p < +\infty$, *τότε ο* ℓ_p^* *είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον* ℓ_q, *όπου* q *ο συζυγής εκθέτης του* p, *δηλαδή* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Πρόταση

Θεωρούμε τον c_0 *με τη supremum νόρμα* $\|\cdot\|_\infty$. *Ο δυϊκός του χώρος* $(c_0)^*$ *είναι ισόμορφος με τον* ℓ_1.

Παραδείγματα τοπολογικών δυϊκών

Πρόταση

Αν $1 < p < +\infty$, τότε ο ℓ_p^* είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_q, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p, δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Σχέδιο Απόδειξης Αν $b = (b_n) \in \ell^q$ ορίζω f_b από τη σχέση $f_b(x) = \sum_{k=1} b_k x(k)\ \forall x$.
Δείχνω $f_b \in (\ell^p)^*$ με $\|f_b\| \leq \|b\|_q$.
Δείχνω $S : \ell^q \to (\ell^p)^* : b \mapsto f_b$ γραμμική και $\|S(b)\| \leq \|b\|_q$.

Αν $f \in (\ell^p)^*$ ορίζω b_f από τη σχέση $(b_f)_n = f(e_n)\ \forall n$.
Δείχνω $b_f \in \ell^q$ με $\|b_f\|_q \leq \|f\|$ (!).
Έχω $S(b_f) = f$ άρα S επί του $(\ell^p)^*$.
Αλλά $\|b_f\|_q \leq \|f\| = \|S(b_f)\| \leq \|b_f\|_q$ άρα S ισομετρία (οπότε και 1-1).

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο [2]

Ορισμός

Έστω E $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \langle f_1 + \lambda f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \lambda \langle f_2, g \rangle \\
&(ii) \quad \overline{\langle f, g \rangle} = \langle g, f \rangle \\
&(iii) \quad \langle f, f \rangle \geq 0 \\
&(iv) \quad \langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0
\end{aligned}$$

για κάθε $f, f_1, f_2, g \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα $\quad (i)' \, \langle f, g_1 + \lambda g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle f, g_2 \rangle .$

Παράδειγμα Στον $C([0,1])$: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ οπότε $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

[2] Δες το αρχείο part.pdf: Σημειώσεις για τους χώρους Hilbert και άλλα

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,
(α) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

(β) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο: Παρατηρήσεις

(α) Μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες (ι), (ιι) και (ιιι) του ορισμού του εσωτερικού γινομένου λέγεται ημι–εσωτερικό γινόμενο.
Ένα ημι–εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την θεμελιώδη ανισότητα Cauchy-Schwarz (όχι όμως και το (β) της Πρότασης).

(β) Αρκετοί συγγραφείς (ιδιαίτερα σε συγγράμματα μαθηματικής φυσικής ή άλλων εφαρμογών) ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο ώστε να είναι γραμμικό ως προς την δεύτερη μεταβλητή και αντιγραμμικό ως προς την πρώτη. Έτσι, ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$ ως εξής: $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x(k)} y(k)$.

(γ) Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αποκαλείται καμμιά φορά και χώρος προ-Hilbert (pre-Hilbert space).

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πόρισμα

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση

$$(E, \|.\|) \times (E, \|.\|) \to (\mathbb{K}, |.|) : (x, y) \to \langle x, y \rangle$$

είναι συνεχής.

Πρόταση

(α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

για κάθε $x, y \in E$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

αν $x, y \in E$ *και* $\langle x, y \rangle = 0$, *τότε* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Καθετότητα

Ορισμός

Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται κάθετα (συμβολικά $x \perp y$) όταν $\langle x, y\rangle = 0$.
Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική (orthonormal) αν $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.

ορθοκανονική $\Rightarrow$ γραμμικά ανεξάρτητη. Αντίστροφα όχι. Όμως:

Πρόταση (Διαδικασία Gram-Schmidt)

Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο $(E, \langle ., .\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον E ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει[3] $[e_n : n = 1, 2, ..., k] = [x_n : n = 1, 2, ..., k]$.

Κάθε υπόχωρος $F \subseteq E$ πεπερασμένης διάστασης έχει μια αλγεβρική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ που είναι ορθοκανονική. Κάθε $x \in F$ γράφεται μοναδικά $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$. (γιατι;)

[3] με $[A]$ ή $\operatorname{span} A$ θα συμβολίζουμε την γραμμική θήκη ενός $A \subseteq E$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (Ι)

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $f \in E$ και F πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του E.
(1) Υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα $S(f) \in F$ που είναι πλησιέστερο στο f.
(2) Επιπλέον το $f - S(f)$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $g \in F$ και $f - g \perp F$, τότε $g = S(f)$.

Για την αποδειξη: $\rightsquigarrow$

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (Ι)

Λήμμα

Εστω $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ *ορθοκανονικη οικογενεια σ΄ έναν χώρο* $(E, \langle .,. \rangle)$ *με εσωτερικό γινόμενο.*
Τοτε, για καθε $f \in E$ *εχουμε*

$$(\alpha) \quad \|f\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

οπου $S_n(f) := \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$.

$$(\beta)\ (\textit{Ανισοτητα Bessel}) \quad \|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Το (β) έπεται άμεσα από το (α).

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (Ι)

Λήμμα (συνεχεια)

Αν $F_n = \text{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ *τοτε, για καθε* $f \in E$,

$$(\gamma) \quad f - S_n(f) \perp F_n$$

και το $S_n(f)$ *ειναι το μοναδικό διάνυσμα* $g \in F_n$ *που ειναι καθετο στον* F_n.

$$(\delta) \quad \text{dist}(f, F_n) = \|f - S_n(f)\|,$$

δηλαδη $\|f - g\| \geq \|f - S_n(f)\|$ $\forall g \in F_n$ *με ισοτητα αν-ν* $g = S_n(f)$.

Απόδειξη του (γ) Κάθε $g \in F_n$ γράφεται $g = \sum_{k=1}^{n} \langle g, e_k \rangle e_k$.

Τώρα: $(f - g) \perp F_n \iff \langle f - g, e_k \rangle = 0 \; \forall k \in [n] \iff$

$\langle g, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle \; \forall k \in [n] \iff g = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k = S_n(f)$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (α), (δ))

(α) Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = u + v$$

παρατηρούμε ότι $u \perp F_n$ (γιατί $\langle u, e_k \rangle = 0$ για $k = 1, \ldots n$) και $v \in F_n$, άρα $v \perp u$. Πυθαγόρειο: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ δηλαδή

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2$$

$$\overset{\text{Πυθ}}{=} \|x - S_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle - \lambda_k|^2 \qquad (1)$$

$$\geq \|x - S_n(x)\|^2, \text{ ισότητα αν-ν } \langle x, e_k \rangle = \lambda_k \, \forall k.$$

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (Ι)

Υπενθύμιση:

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $f \in E$ και F πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του E.
(α) Υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα $S(f) \in F$ που είναι πλησιέστερο στο f.
(β) Επιπλέον το $f - S(f)$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $g \in F$ και $f - g \perp F$, τότε $g = S(f)$.

- Αν $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ είναι καποια ορθοκανονική βάση του F, το $S(f)$ δίνεται από τον τύπο $S(f) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$.
- Η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ : \vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \to \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο
$\vec{\lambda} = (\langle f, e_1 \rangle, \langle f, e_2 \rangle, \ldots, \langle f, e_n \rangle) \in \mathbb{K}^n$.

Bessel κ.λπ.

Έστω E χώρος με εσωτ. γιν. και $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ορθοκανονική ακολουθία.

Παρατήρηση

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}.$$

(από την (1) με $\lambda_k = 0$).

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

(ι) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$
(ιι) Στην (ι) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \ldots, n]$.

Πρόταση (Γενικευμένη ανισότητα Bessel)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Υπενθύμιση Ένα υποσύνολο X ενός $\mathbb{K}$-γραμμικού χώρου V είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \neq 0$.
Το X είναι *(αλγεβρική) βάση* του V αν η γραμμική του θήκη $\operatorname{span}(X)$ ισούται με V, δηλαδή αν κάθε $v \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ στοιχείων $x_k \in X$.

Ορισμός

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική βάση του E αν
(i) είναι ορθοκανονική και
(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}} = E$.

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι συνήθως αλγεβρική βάση (π.χ. στον ℓ^2).

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παραδείγματα

1. Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική στον ℓ^2. Είναι αλγεβρική βάση του c_{00}, άρα και ορθοκανονική βάση (του c_{00}).
2. Η ίδια οικογένεια δεν είναι αλγεβρική βάση του ℓ^2, γιατί $\operatorname{span}\{e_m : m \in \mathbb{N}\} \neq \ell^2$. Επειδή ο υπόχωρος $\operatorname{span}\{e_m\} = c_{00}$ είναι πυκνός στον ℓ^2, η $\{e_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του ℓ^2.
3. Στον χώρο $(C([-\pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ η οικογένεια $\{f_m : m \in \mathbb{Z}\}$ όπου $f_m(t) = e^{imt} = \cos(mt) + i \sin(mt)$ είναι ορθοκανονική. Ο γραμμικός χώρος που παράγει είναι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, συνεπώς η $\{f_m\}$ δεν είναι αλγεβρική βάση του $(C([-\pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Είναι κλασικό θεώρημα στην Ανάλυση Fourier ότι κάθε $f \in (C([-\pi, \pi])$ προσεγγίζεται ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Συνεπώς η $\{f_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $(C([-\pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Πρόταση

Κάθε διαχωρίσιμος χώρος E με εσωτερικό γινόμενο περιέχει μια ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα, όπως έχουμε δείξει).

Μάλιστα, αν $F \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθοκανονική βάση του E *μέσα στον* F (π.χ. $E = (C([0,1]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ και $F =$ πολυώνυμα).

Θεώρημα

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$,

(ι) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του E).*

(ιι) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Απόδειξη Έστω $x \in E$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Όμως πάντα

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 \geq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

Ξέρουμε όμως (Πυθαγόρειο)

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2 . \quad \rightsquigarrow$$

$$\text{Αν } m \geq n, \text{ έχουμε} \quad \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

και συνεπώς

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \varepsilon^2$$

για κάθε $m \geq n$. Επομένως

$$\lim_m \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_m \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2. \quad \square$$

Πόρισμα

Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E, για κάθε $x, y \in E$ έχουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Χώροι Hilbert

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle ., . \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Χώροι Hilbert

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|.\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E < \infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του.
Επομένως ο χώρος $(c_{oo}, \|.\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά όχι Hilbert, εφ' όσον δεν είναι πλήρης.
(d) Ο χώρος $C([a,b])$ δεν είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|.\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο. Ο $(L^2([a,b]), \|.\|_2)$ (δες αργοτερα) είναι Hilbert.

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$.

Άρα η απεικόνιση $(E, \|\cdot\|) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \to (\langle x, x_n \rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2.

Παράδειγμα: Μετασχηματισμός Fourier

$$\mathscr{F} : (C([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_2) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2) : f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$$

όπου $\hat{f}(n) := \langle f, f_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}$.

Ισομορφισμοί

Θεώρημα

Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος [4] *χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.*
Ακριβέστερα, για κάθε επιλογή μιας ορθοκανονικής βάσης $\{x_n\}$ του H, η αντίστοιχη απεικόνιση

$$U : H \to \ell^2 \ : \ x \to (\langle x, x_n \rangle)_n$$

απεικονίζει τον H (γραμμικά και) ισομετρικά επί του ℓ^2.

[4] Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ. (Αποδ. παραλείπεται.)

Θεώρημα (Πλησιέστερο διάνυσμα (III))

Έστω F χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $E \neq \emptyset$ κυρτό και πλήρες υποσύνολο του F. Αν $x \in F \setminus E$, τότε υπάρχει μοναδικό $y_x \in E$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x - y_x\| = d(x, E) := \inf\{\|x - z\| : z \in E\}$.

Πρόταση (Κάθετο διάνυσμα)

Έστω F χώρος με εσωτερικό γινόμενο, E πλήρης γραμμικός υπόχωρος του F. Αν $x \in F \setminus E$, το πλησιέστερο προς το x στοιχείο $y_x \in E$ είναι το μοναδικό $y \in E$ ώστε $x - y \perp E$.

Ορισμός

Το μοναδικό αυτό στοιχείο y_x του E ονομάζουμε (ορθή) προβολή του x στον E, και το συμβολίζουμε $P_E(x)$ ή $P(E)x$.

Θεώρημα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Έστω H είναι χώρος Hilbert και M κλειστός υπόχωρος του H. Αν $M \neq H$, υπάρχει $z \in H, z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Η πληρότητα δεν μπορεί να παραλειφθεί:

Παράδειγμα

Στον $(c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ υπάρχει γνήσιος κλειστός υπόχωρος M, ώστε $M^{\perp} = \{0\}$.

$$M = \left\{ x = (x(n)) \in c_{00} : \sum \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Δηλαδή

$\forall y \in H$ γράφεται μοναδικά $y = y_M + y_{\perp}$ όπου $y_M \in M$, $y_{\perp} \in M^{\perp}$.

Πυθαγόρειο: $\|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_{\perp}\|^2 \quad \forall y \in H.$

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H : y \to y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ότι η P_M είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται (ως γνωστόν) από τις σχέσεις $M + M^\perp = H$ και $M \cap M^\perp = \{0\}$. Η συνέχεια της P_M προκύπτει απ' το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 = \|y\|^2$$

$$\text{άρα} \qquad \|P_M(y)\| = \|y_M\| \le \|y\|$$

οπότε, αν $y_n \to y$ έχουμε
$\|P_M(y_n) - P_M(y)\| = \|P_M(y_n - y)\| \le \|y_n - y\| \to 0.$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Παρατήρηση - Άσκηση Όταν H είναι χώρος Hilbert:
$A^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \text{span}(A)$ πυκνός στον H.

Ισοδύναμα Ένας γραμμικός υπόχωρος E ενός χώρου *Hilbert* H είναι πυκνός (dense) στον H αν και μόνον αν το μόνο διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον E είναι το 0.

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, ονομάζουμε f_x την απεικόνιση

$$f_x : E \to \mathbb{K} : y \to \langle y, x \rangle.$$

Η f_x είναι γραμμική και συνεχής.

Παράδειγμα

Στον $E = c_{00}$, η γραμμική μορφή

$$f : E \to \mathbb{K} : (x(1), x(2), \dots) \mapsto \sum_n \frac{1}{n} x(n)$$

δεν είναι της μορφής $f = f_x$ με $x \in c_{00}$.

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \to \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f = f_x$, δηλ.

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \textit{για κάθε} \quad y \in H.$$

Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη ορθοκανονικών βάσεων.

(2) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος.

(3) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

Το Θεώρημα Hahn - Banach

Το πρόβλημα της επέκτασης συνεχών γραμμικών μορφών

Έστω X χώρος με νόρμα, Y γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Y \to \mathbb{K}$ συνεχής γραμμική μορφή.

Πάντα μπορώ να επεκτείνω την f σε $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ γραμμική.
Μπορώ όμως επιπλέον να πετύχω $\tilde{f}$ συνεχή;

Ειδικότερα: υπάρχουν άραγε πάντα σε ένα χώρο με νόρμα μη μηδενικές συνεχείς γραμμικές μορφές; (Ξεκίνα από $Y = \mathrm{span}(\{x\})$ όπου $x \neq 0$ και $f(\lambda x) = \lambda \|x\|$. Μπορείς να επεκτείνεις διατηρώντας και τη συνέχεια;)

Αν X Hilbert, τότε ΝΑΙ: γράφω $x = P_Y(x) + (x - P_Y(x))$ και ορίζω $\tilde{f}(x) = f(P_Y x)$, δηλ. $\tilde{f}(z) = 0$ αν $z \in Y^{\perp}$.

Αλλιώς;

Το Θεώρημα Hahn - Banach

Θεώρημα

Έστω X χώρος με νόρμα, Y γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Y \to \mathbb{K}$ φραγμένη γραμμική μορφή.
Τότε, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ φραγμένη γραμμική μορφή με $\tilde{f}|_Y = f$ και $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Y^*}$. (Δηλαδή, υπάρχει συνεχής και γραμμική επέκταση του f στον X, με διατήρηση της νόρμας.)

Πρώτο (και κρίσιμο) βήμα για την απόδειξη:

Λήμμα

Με τις ίδιες υποθέσεις, έστω $x \in X \setminus Y$ και $Y_1 = \mathrm{span}(Y \cup \{x\})$.
Τότε, υπάρχει $f_1 : Y_1 \to \mathbb{K}$ φραγμένη γραμμική μορφή με $f_1|_Y = f$ και $\|f_1\| = \|f\|_{Y^*}$.

Συνεχίζω: αν $x_2 \in X \setminus Y_1$ θέτω $Y_2 = \mathrm{span}(Y_1 \cup \{x_2\})$ και βρίσκω $f_2 : Y_2 \to \mathbb{K}$ κ.ο.κ. Θα τελειώσει ποτέ η διαδικασία;

Δείτε το αρχείο `hbdiaxN.pdf` για μια ειδική περίπτωση.