

Αρχή ομοιόμορφου φράγματος

Έστω E χώρος Banach και $\mathcal{P} = \{p_i\}$ μια οικογένεια από συνεχείς ημινόρμες $p : E \rightarrow \mathbb{R}$.¹

Τότε

είτε η \mathcal{P} είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δηλαδή υπάρχει M ώστε $p(x) \leq M$ για κάθε $x \in B_E$ και κάθε $p \in \mathcal{P}$

ή αλλιώς (δεν είναι κατά σημείο φραγμένη, μάλιστα) το σύνολο $K = \{x \in E : \sup_i p_i(x) = \infty\}$ είναι πυκνό G_δ υποσύνολο του E .

Απόδειξη Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_n = \{x \in E : \sup_i p_i(x) \leq n\}.$$

Παρατηρούμε ότι το A_n είναι κλειστό: πράγματι, $A_n = \bigcap_i \{x \in E : p_i(x) \leq n\} = \bigcap_i p_i^{-1}([0, n])$ και κάθε p_i είναι συνεχής.

Έστω ότι κάποιο A_{n_0} περιέχει μια ανοιχτή μπάλα $B(x_0, r)$. Τότε, για κάθε $y \in E$, αν θέσουμε $z = \frac{ry}{2\|y\|}$ παρατηρούμε ότι $x_0 + z \in B(x_0, r)$ (γιατί $\|z\| = \frac{r}{2} < r$), και επομένως, για κάθε $p_i \in \mathcal{P}$,

$$p_i(z) \leq p_i(x_0 + z) + p_i(-x_0) = p_i(x_0 + z) + p_i(x_0) \leq n_0 + n_0$$

$$\text{άρα } p_i(y) = p_i\left(\frac{2\|y\|}{r}z\right) = \frac{2\|y\|}{r}p_i(z) \leq \frac{2\|y\|}{r}2n_0$$

$$\text{δηλ. } p_i(y) \leq M\|y\|, \quad \text{άρα } p(x) \leq M \text{ για κάθε } x \in B_E$$

όπου $M = \frac{4n_0}{r}$. Επομένως η οικογένεια \mathcal{P} είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Έπεται ότι αν η οικογένεια \mathcal{P} δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη, τότε κάθε A_n θα έχει κενό εσωτερικό και επομένως το συμπλήρωμά του, $K_n := A_n^c$, θα είναι ανοικτό και πυκνό. Αφού ο E είναι πλήρης, από το Θεώρημα *Baire* έπεται ότι η τομή $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι πυκνό και G_δ (:αριθμήσιμη τομή ανοικτών) υποσύνολο του E . Όμως, η τομή αυτή ισούται με

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : \sup_i p_i(x) > n\} = \{x \in E : \sup_i p_i(x) = \infty\}. \quad \square$$

Θεώρημα Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $T_i : X \rightarrow Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, $i \in I$. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $M_x > 0$ τέτοιος ώστε

$$\text{για κάθε } i \in I, \quad \|T_i x\|_Y \leq M_x.$$

(δηλαδή, το $\{T_i x : i \in I\}$ είναι φραγμένο σύνολο στον Y).

Τότε, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\text{για κάθε } i \in I, \quad \|T_i\| \leq M$$

(δηλαδή, το $\{\|T_i\| : i \in I\}$ είναι φραγμένο στον \mathbb{R}).

Απόδειξη Εφαρμόζουμε το προηγούμενο στον χώρο Banach X θέτοντας $p_i(x) = \|T_i x\|$, $x \in X$: κάθε p_i είναι συνεχής ημινόρμα εφόσον ο T_i είναι συνεχής γραμμικός τελεστής.

¹δηλ. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ και $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.