Σημειώσεις για τους χώρους Hilbert και άλλα

Αριστείδης Κατάβολος

Από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών», εκδ. «Συμμετρία», 2008.

Περιεχόμενα

Μέρος I
Χώροι Hilbert

1 Εσωτερικά γινόμενα

Το εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο $\langle x, y\rangle$ δύο διανυσμάτων x και y του $\mathbb{R}^3$, που ορίζεται από την σχέση $\langle x, y\rangle = \|x\|_2\|y\|_2\cos\theta$, όπου $\|x\|_2$ το (Ευκλείδειο) μήκος του x και θ η γωνία των δύο διανυσμάτων, μπορεί να υπολογισθεί από την σχέση

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε λοιπόν τον ορισμό αυτό σε κάθε $\mathbb{R}^N$ θέτοντας

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k.$$

Παρατηρούμε ότι η Ευκλείδεια νόρμα $\|x\|_2$ ενός διανύσματος $x \in \mathbb{R}^N$ είναι η τετραγωνική ρίζα της *μη αρνητικής* ποσότητας $\langle x, x\rangle$. Στον χώρο $\mathbb{C}^N$ όμως η ποσότητα $\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ δεν είναι κατ'ανάγκη μη αρνητική (βάλε π.χ. $x_k = i$) και επομένως η τετραγωνική της ρίζα δεν ορίζει νόρμα. Γι' αυτό ορίζουμε

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k \bar{y}_k$$

όταν $x, y \in \mathbb{C}^N$, και τότε πράγματι έχουμε $\langle x, x\rangle = \|x\|_2^2$.

Ορισμός 1.1 *Έστω E $\mathbb{K}$-γραμμικός[1] χώρος. Ένα* **εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product)** *στον E είναι μια απεικόνιση*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &(i) && \langle x, x\rangle \geq 0 \\ &(ii) && \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0 \\ &(iii) && \overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle \\ &(iv) && \langle x_1 + \lambda x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \lambda\langle x_2, y\rangle \end{aligned}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Παρατήρηση 1.1 *Από τις (iii) και (iv) προκύπτει ότι*

$$(iv)' \quad \langle x, y_1 + \lambda y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \bar{\lambda}\langle x, y_2\rangle$$

για κάθε $x, y_1, y_2 \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

[1] Στις σημειώσεις αυτές, με το σύμβολο $\mathbb{K}$ θα εννοούμε είτε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών είτε το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

1.0.1 Παραδείγματα

(i) Το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον πραγματικό N-διάστατο χώρο $\mathbb{R}^N$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k.$$

(ii) Το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον μιγαδικό N-διάστατο χώρο $\mathbb{C}^N$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k \bar{y}_k.$$

(iii) Συμβολίζουμε με c_{oo}: τον (μιγαδικό) γραμμικό χώρο των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα, δηλαδή τον χώρο των συναρτήσεων $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ των οποίων ο **φορέας (support)**$\mathrm{supp}(x) \equiv \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Η παράσταση

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον c_{oo} (δεν υπάρχει πρόβλημα σύγκλισης, γιατί το πλήθος των μη μηδενικών όρων είναι πεπερασμένο).

(iv) Ο (μιγαδικός) χώρος ℓ^2 είναι ο χώρος των ακολουθιών $x = (x(n))$ που είναι *τετραγωνικά αθροίσιμες*, δηλαδή ικανοποιούν

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty.$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι ο ℓ^2 είναι *γραμμικός χώρος*.[2] Πράγματι, αν $x, y \in \ell^2$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε $|x(k) + \lambda y(k)|^2 \leq 2|x(k)|^2 + 2|\lambda y(k)|^2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ συνεπώς

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) + \lambda y(k)|^2 \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 + 2|\lambda|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^2 < \infty$$

άρα $x + \lambda y \in \ell^2$. Θέτουμε

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}.$$

Παρατηρούμε ότι η σειρά συγκλίνει, και μάλιστα απόλυτα, διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)\overline{y(k)}|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|^2\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^2\right)$$

[2] με πράξεις κατά συντεταγμένη.

(η πρώτη ανισότητα είναι η κλασική ανισότητα Cauchy-Schwarz για τον $\mathbb{R}^n$) και το δεξιά μέλος είναι πεπερασμένο, αφού οι $x = (x(k))$ και $y = (y(k))$ είναι τετραγωνικά αθροίσιμες. Είναι τώρα άμεσο να ελέγξει κανείς ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες του ορισμού 1.1.

(v) Στον μιγαδικό χώρο $C([-\pi,\pi])$: των συνεχών συναρτήσεων $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ ορίζουμε

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

(όπου το ολοκλήρωμα μιάς $h : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ είναι εξ ορισμού το άθροισμα[3] $\int h = \int \mathrm{Re}(h) + i\int \mathrm{Im}(h)$).

Το $\langle .,.\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι, όλες οι ιδιότητες του ορισμού 1.1, εκτός από την (ii), είναι άμεσες συνέπειες της γραμμικότητας του ολοκληρώματος. Αποδεικνύουμε την (ii): Αν $\langle f, f\rangle = 0$ τότε $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 0$, οπότε, επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση $|f|^2$ είναι *μη αρνητική και συνεχής*, έπεται ότι $|f(t)|^2 = 0$ και συνεπώς $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [-\pi,\pi]$.

Πρόταση 1.2 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) *Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $x, y \in E$ ισχύει*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2}.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη Η ανισότητα ισχύει τετριμμένα όταν $y = 0$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $y \neq 0$. Θέτουμε $y_1 = \langle y, y\rangle^{-1/2}y$. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ έχουμε

$$0 \leq \langle x - \lambda y_1, x - \lambda y_1\rangle = \langle x, x\rangle - \lambda\langle y_1, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, y_1\rangle + |\lambda|^2\langle y_1, y_1\rangle$$

Θέτοντας $\lambda = \langle x, y_1\rangle$ έχουμε, εφόσον $\langle y_1, y_1\rangle = 1$,

$$0 \leq \langle x - \langle x, y_1\rangle y_1, x - \langle x, y_1\rangle y_1\rangle = \langle x, x\rangle - |\langle x, y_1\rangle|^2$$

επομένως $\langle x, x\rangle \geq |\langle x, y_1\rangle|^2$, δηλαδή $\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \geq |\langle x, y\rangle|^2$. Επίσης, η ισότητα $\langle x, x\rangle = |\langle x, y_1\rangle|^2$, ισοδύναμα $\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = |\langle x, y\rangle|^2$, ισχύει αν και μόνον αν $x - \langle x, y_1\rangle y_1 = 0$. $\square$

Πρόταση 1.3 *Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E, δηλαδή ικανοποιεί*

$$\begin{array}{ll} (i) & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ (ii) & \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \\ (iii) & \|x\| = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

[3] Αν $z \in \mathbb{C}$, γράφουμε $\mathrm{Re}z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ για το πραγματικό μέρος του z και $\mathrm{Im}z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ για το φανταστικό του μέρος.

Απόδειξη Η μόνη μη τετριμμένη ιδιότητα είναι η τριγωνική ανισότητα (i), που ισχύει χάρις στην ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle \\ &= \|x\|^2+\|y\|^2+2Re\langle x,y\rangle \\ &\leq \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|.\|y\| \\ &= (\|x\|+\|y\|)^2. \quad \square\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει ότι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι και χώρος με νόρμα. Επομένως ορίζεται απόσταση (μετρική), σύγκλιση, συνέχεια κ.λπ. (βλ. το Παράρτημα). Μάλιστα, το εσωτερικό γινόμενο είναι *συνεχής συνάρτηση* και των δύο μεταβλητών του:

Πόρισμα 1.4 *Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση*

$$(E,\|.\|)\times(E,\|.\|) \to (\mathbb{K},|.|):(x,y) \to \langle x,y\rangle$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη Αν $\|x_n-z\|\to 0$ και $\|y_n-w\|\to 0$ τότε η ανισότητα Cauchy-Schwarz δείχει ότι

$$\begin{aligned}|\langle x_n,y_n\rangle-\langle z,w\rangle| &= |\langle x_n-z,y_n\rangle+\langle z,y_n-w\rangle| \\ &\leq \|x_n-z\|.\|y_n\|+\|z\|.\|y_n-w\|\to 0\end{aligned}$$

εφόσον $\|y_n\|\to\|w\|$. $\square$

Πρόταση 1.5 *Αν $(E,\langle .,.\rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε*
(α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\text{για κάθε } x,y\in E,\ \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\text{αν } x,y\in E \text{ και } \langle x,y\rangle=0,\ \text{ τότε } \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

Η **απόδειξη** των (α) και (β) είναι απλή εφαρμογή των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου.

Πρόταση 1.6 *Αν $\|.\|$ είναι μια νόρμα σε έναν γραμμικό χώρο E που ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τότε ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο στον E τέτοιο ώστε $\|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2}$. Επομένως, ο κανόνας του παραλληλογράμμου χαρακτηρίζει τους χώρους με εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των χώρων με νόρμα.*

Η απόδειξη είναι στοιχειώδης, αλλά μακροσκελής, γι' αυτό παραλείπεται.

2 Ορθοκανονικές Οικογένειες

Ορισμός 2.1 *Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται* **κάθετα** *(συμβολικά $x \perp y$) όταν $\langle x, y\rangle = 0$.*
Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται **ορθοκανονική (orthonormal)** *αν $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.*

Παρατηρήσεις. **(ι)** Το 0 είναι κάθετο σε κάθε στοιχείο του E, και είναι το μόνο στοιχείο του E με την ιδιότητα αυτή (γιατί;). Επομένως, αν $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ για κάθε $z \in E$, τότε $x = y$.
(ιι) Μια ορθοκανονική οικογένεια $\{e_i : i \in I\}$ είναι κατ' ανάγκην γραμμικά ανεξάρτητη.
Πράγματι, κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{e_{i_n} : n = 1, \dots, m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, γιατί αν $\lambda_k \in \mathbb{K}$ και $\sum_{n=1}^m \lambda_n e_{i_n} = 0$, τότε $\lambda_k = \langle \sum_{n=1}^m \lambda_n e_{i_n}, e_{i_k}\rangle = 0$ για $k = 1, \dots, m$.

Το αντίστροφο φυσικά δεν αληθεύει: μία γραμμικά ανεξάρτητη οικογένεια δεν είναι κατ' ανάγκην ορθοκανονική. Μπορώ όμως (τουλάχιστον όταν είναι αριθμήσιμη) να κατασκευάσω επαγωγικά μια ορθοκανονική οικογένεια που, σε κάθε βήμα της επαγωγής, παράγει τον ίδιο γραμμικό χώρο με την δοθείσα:

Πρόταση 2.1 (Διαδικασία Gram-Schmidt) *Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο $(E, \langle ., .\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον E ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει*[4] $[e_n : n = 1, 2, ..., k] = [x_n : n = 1, 2, ..., k]$.

Απόδειξη Με επαγωγή: Θέτω $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Θέτω $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$ (δηλαδή αφαιρώ από το x_2 την ορθή προβολή του στον υπόχωρο $[x_1] = [e_1]$), θέτω $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$ και συνεχίζω κατά τον ίδιο τρόπο: αν δηλαδή έχω κατασκευάσει τα $e_1, e_2, \dots, e_k$ όπως απαιτεί η Πρόταση, θέτω

$$e_{k+1} = \lambda \left(x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i\rangle e_i \right)$$

όπου ο αριθμός λ επιλέγεται ώστε να ισχύει[5] $\|e_{k+1}\| = 1$ (δηλαδή $\lambda = \|x_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle x_{k+1}, e_i\rangle e_i\|^{-1}$). Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η ακολουθία (e_n) που κατασκευάσαμε ικανοποιεί τις απαιτήσεις της Πρότασης. Αξίζει ίσως να παρατηρήσουμε ότι το λ μεγαλώνει, όσο η απόσταση του x_{k+1} από τον υπόχωρο $[x_n : n = 1, 2, ..., k]$ μικραίνει, πράγμα που μπορεί να προκαλέσει δυσκολίες σε υπολογιστικές εφαρμογές. $\square$

Παρατήρηση 2.2 Έπεται ότι κάθε υπόχωρος F πεπερασμένης διάστασης σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αλγεβρική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ που

[4] με $[A]$ θα συμβολίζουμε την γραμμική θήκη ενός υποσυνόλου $A \subseteq E$.
[5] Παρατήρησε ότι $\|x_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle x_{k+1}, e_i\rangle e_i\| \neq 0$ γιατί $x_{k+1} \notin [e_1, \dots, e_k] = [x_1, \dots, x_k]$.

είναι ορθοκανονική. Κάθε $x \in F$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

διότι αν $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ τότε $\langle x, e_m \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, e_m \rangle = \lambda_m$ για $m = 1, \ldots, n$. Επιπλέον, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Παραδείγματα 2.3 **(a)** Η συνηθισμένη βάση $\{e_i : i = 1, \ldots, n\}$ του $\mathbb{K}^n$ είναι ορθοκανονική ακολουθία ως προς το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο.

(b) Η ακολουθία $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ όπου $e_i(j) = \delta_{ij}$ είναι ορθοκανονική στον $\ell^2(\mathbb{N})$.

(c) Θεωρούμε τον χώρο $C([-\pi, \pi])$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Για $k \in \mathbb{Z}$, θέτουμε

$$e_k(t) = \exp(ikt) = \cos(kt) + i\sin(kt), \ t \in [-\pi, \pi].$$

Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η (άπειρη) οικογένεια $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική (αυτή είναι άλλωστε και η σκοπιμότητα του συντελεστή $1/2\pi$ στον ορισμό του εσωτερικού γινομένου).

Οι (μιγαδικοί) αριθμοί

$$\langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-ikt)dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

λέγονται **συντελεστές Fourier** της συνάρτησης f και συμβολίζονται $\hat{f}(k)$.

Στόχος μας είναι τώρα να αποδείξουμε την κρίσιμη (όπως θα δούμε) ανισότητα Bessel. Η ανισότητα είναι άμεση συνέπεια του επομένου λήμματος. Σημειώνουμε ότι το λήμμα αυτό θα γενικευθεί αργότερα (στις Προτάσεις 5.1 και 5.2).

Λήμμα 2.4 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$ και $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ πεπερασμένη ορθοκανονική ακολουθία στον E. Η απεικόνιση*

$$\mathbb{K}^n \ \to \ \mathbb{R}^+ : (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \to \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \ldots, \langle x, e_n \rangle)$. Δηλαδή το διάνυσμα $y_o = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ είναι το πλησιέστερο στο x στοιχείο του υποχώρου $F = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$.
Επιπλέον το $x - y_o$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $y \in F$ και $x - y \perp F$, τότε $y = y_o$.

[**Ερμηνεία:** Σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο, το πρόβλημα της **βέλτιστης προσέγγισης** ενός τυχαίου στοιχείου $x \in E$ από ένα στοιχείο y του υποχώρου $F = [e_i : i = 1, \dots, n]$ έχει πάντα[6] **μοναδική λύση**, την

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Απόδειξη Λήμματος Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k$. Έχουμε $(x - y) \perp F$ αν και μόνον αν $\langle x - y, e_k \rangle = 0$, ισοδύναμα $\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle$ για $k = 1, \dots n$, δηλαδή $y = y_o$.

Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, γράφοντας

$$x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = z + y_1$$

παρατηρούμε ότι $z \perp F$ (γιατί $\langle z, e_k \rangle = 0$ για $k = 1, \dots n$) και $y_1 \in F$, άρα $y_1 \perp z$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι $\|y_1 + z\|^2 = \|y_1\|^2 + \|z\|^2$ δηλαδή

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle - \lambda_k|^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

(για τη νόρμα του y_1 χρησιμοποιήθηκε το Πυθαγόρειο Θεώρημα). Το Λήμμα είναι τώρα προφανές, αφού το δεξιά μέλος της (1) έχει ελάχιστο ακριβώς όταν $\lambda_k = \langle x, e_k \rangle$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. $\square$

Αξίζει να απομονώσουμε μια χρήσιμη ταυτότητα, που είναι στην ουσία άμεση συνέπεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Παρατήρηση 2.5 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{e_1, e_2, \dots\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E. Για κάθε $x \in E$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

Απόδειξη Προφανής αν στην σχέση (1) της απόδειξης του Λήμματος θέσουμε $\lambda_k = 0$ $(k = 1, \dots, n)$.

[6] Αυτό δεν αληθεύει πάντα σε χώρους με νόρμα. Παραδείγματος χάριν, στον $\mathbb{R}^2$ με την νόρμα $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, αν $x = (1, 1)$ και F είναι ο άξονας των x, δηλ. $F = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, η παράσταση

$$\|(1, 1) - (x, 0)\|_\infty = \max\{|1 - x|, 1\}$$

έχει ελάχιστο αν και μόνον αν $|1 - x| \leq 1$ δηλαδή $0 \leq x \leq 2$. Το πρόβλημα δηλαδή εδώ έχει *άπειρες λύσεις*.]

Πρόταση 2.6 (Ανισότητα Bessel) *Αν* $\{e_i : i = 1, \ldots, n\} \subseteq E$ *είναι (πεπερασμένη) ορθοκανονική οικογένεια και* $x \in E$*, τότε:*
(ι) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$
(ιι) Στην (ι) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \ldots, n]$.

Απόδειξη Και τα δύο σκέλη είναι προφανή από τις Παρατηρήσεις 2.2 και 2.5.

Συμβολισμός Αν $\{\alpha_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^+$, θέτουμε[7]

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \equiv \sup\{\sum_{i \in F} \alpha_i : F \subseteq I \text{ πεπερασμένο } \} \in [0, +\infty]$$

Πρόταση 2.7 (Γενικευμένη ανισότητα Bessel) *Αν* $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ *είναι ορθοκανονική οικογένεια και* $x \in E$*, τότε*

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Η **Απόδειξη** είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.6.

Ειδικότερα, έχουμε

Πόρισμα 2.8 *Αν* $\{e_i : i = 1, \ldots\}$ *είναι ορθοκανονική ακολουθία στον* E *και* $x \in E$*, τότε η σειρά* $\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2$ *συγκλίνει και*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Πόρισμα 2.9 *Αν* $\{e_i : i \in I\}$ *είναι ορθοκανονική οικογένεια στον* E *και* $x \in E$*, το σύνολο* $\{i \in I : \langle x, e_i \rangle \neq 0\}$ *είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη Το σύνολο αυτό ισούται με την ένωση $\cup\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου

$$I_n = \{i \in I : |\langle x, e_i \rangle|^2 > \frac{\|x\|^2}{n}\}$$

(γιατί αν $|\langle x, e_i \rangle| \neq 0$ τότε υπάρχει n ώστε $|\langle x, e_i \rangle|^2 > \frac{\|x\|^2}{n}$). Κάθε I_n έχει το πολύ n στοιχεία. Γιατί, αν είχε περισσότερα από n, τότε

$$\sum_{i \in I_n} |\langle x, e_i \rangle|^2 \geq \sum_{i \in I_n} \frac{\|x\|^2}{n} > \|x\|^2$$

Αλλά

$$\sum_{i \in I_n} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

(από την Πρόταση 2.7), άτοπο. Επομένως κάθε I_n είναι πεπερασμένο σύνολο, και συνεπώς η ένωσή τους είναι αριθμήσιμη. □

---

[7] Ο συμβολισμός αυτός είναι συμβιβαστός με τον αντίστοιχο για σειρές (αριθμήσιμου πλήθους) μη αρνητικών όρων. Πράγματι, μια σειρά **μη αρνητικών πραγματικών αριθμών** συγκλίνει αν και μόνον αν είναι φραγμένη, και το άθροισμα της σειράς είναι ακριβώς το supremum των μερικών αθροισμάτων της.

3 Χώροι Hilbert

Ορισμός 3.1 *Ένας χώρος $(E, \langle .,. \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται* **χώρος Hilbert** *αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.*

Παραδείγματα (a) *Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Την αντίστοιχη (Ευκλείδεια) νόρμα συμβολίζουμε $\|.\|_2$. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|.\|_\infty$ (όπου $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le k\le n} |x_k|$), αλλά* **δεν είναι** *χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.*

(b) *Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του. (Την αντίστοιχη νόρμα συμβολίζουμε $\|.\|_2$.)*

Επομένως ο χώρος $(c_{oo}, \|.\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά **όχι** *Hilbert, εφ' όσον δεν είναι πλήρης.*

Απόδειξη (i) Πληρότητα του ℓ^2: Έστω $\{x_n\}$ μια ακολουθία στον ℓ^2 που είναι βασική ως προς την νόρμα $\|.\|_2$. Κάθε x_n είναι μια ακολουθία αριθμών:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (x_1(1), x_1(2), \ldots, x_1(i), \ldots) \\
x_2 &= (x_2(1), x_2(2), \ldots, x_2(i), \ldots) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= (x_n(1), x_n(2), \ldots, x_n(i), \ldots) \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Για κάθε i, η ανισότητα $|x_n(i) - x_m(i)| \le \|x_n - x_m\|_2$ δείχνει ότι η «κατακόρυφη» ακολουθία $(x_n(i))_n$ είναι βασική ακολουθία στον $\mathbb{C}$. Επειδή ο $\mathbb{C}$ είναι πλήρης, για κάθε i υπάρχει $x(i) \in \mathbb{C}$ ώστε

$$x(i) = \lim_n x_n(i).$$

Έχουμε δηλαδή

$$\begin{array}{ccllll}
x_1 & = & (x_1(1), x_1(2), & \ldots & x_1(i), & \ldots) \\
x_2 & = & (x_2(1), x_2(2), & \ldots & x_2(i), & \ldots) \\
\ldots & & \quad\ \ldots & \ldots & & \\
x_n & = & (x_n(1), x_n(2), & \ldots & x_n(i), & \ldots) \\
 & & \quad\downarrow\ \ \downarrow & & \ \downarrow & \\
x & = & (x(1), x(2), & \ldots & x(i), & \ldots)
\end{array}$$

Πρέπει να δείξουμε (α) ότι η ακολουθία $x \equiv (x(i))$ ανήκει στον ℓ^2, είναι δηλ. τετραγωνικά αθροίσιμη και (β) ότι $\|x - x_n\|_2 \to 0$.

Αν δοθεί $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$m, n \ge k \ \Rightarrow\ \|x_n - x_m\|_2 \le \varepsilon.$$

Επειδή για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα

$$\sum_{i=1}^{N} |x_n(i) - x_m(i)|^2 \leq \|x_n - x_m\|_2^2$$

έχουμε

$$m, n \geq k \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{N} |x_n(i) - x_m(i)|^2 \leq \varepsilon^2. \tag{2}$$

Το άθροισμα έχει πεπερασμένο πλήθος προσθετέων. Επομένως, μπορούμε να πάρουμε όριο ως προς n στην (2) και να συμπεράνουμε ότι

$$m \geq k \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{N} |x(i) - x_m(i)|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Επειδή η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $N \in \mathbb{N}$, έπεται ότι

$$m \geq k \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{\infty} |x(i) - x_m(i)|^2 \leq \varepsilon^2$$

πράγμα που δείχνει ότι η ακολουθία $x - x_m = (x(i) - x_m(i))$ είναι τετραγωνικά αθροίσιμη ως προς i (δηλαδή ανήκει στον ℓ^2) για κάθε $m \geq k$, οπότε $x = (x - x_m) + x_m \in \ell^2$ και η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$m \geq k \;\Rightarrow\; \|x - x_m\|_2 \leq \varepsilon$$

επομένως $\|x - x_m\|_2 \to 0$. $\square$

(ii) Πυκνότητα του c_{oo} στον ℓ^2: Αν δοθεί $x = (x(i)) \in \ell^2$ και $\varepsilon > 0$, πρέπει να βρούμε $y \in c_{oo}$ ώστε $\|x - y\|_2 < \varepsilon$. Η ιδέα είναι να φτιάξουμε το y «κόβοντας» το x σε ένα σημείο i, πέρα από το οποίο η νόρμα να είναι μικρότερη από ε:

Αφού $\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^2 < +\infty$, υπάρχει i_o ώστε

$$\sum_{i=i_o}^{\infty} |x(i)|^2 < \varepsilon^2.$$

Θέτουμε τώρα

$$y(i) = \begin{cases} x(i) & \text{όταν } i < i_o \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και έχουμε $y \equiv (y(i)) \in c_{oo}$ και

$$\|x - y\|_2^2 = \sum_{i=i_o}^{\infty} |x(i)|^2 < \varepsilon^2. \qquad \square$$

(c) *Ο χώρος $C([-\pi, \pi])$* **δεν είναι** *πλήρης ως προς την νόρμα $\|.\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο. (Το ίδιο φυσικά ισχύει για τον $C([a, b])$).*

Παράδειγμα: Η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων (f_n), όπου

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & : \quad -\pi \leq t \leq 0 \\ nt & : \quad 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & : \quad \frac{1}{n} < t \leq \pi \end{cases}$$

είναι βασική ως προς την $\|.\|_2$, αλλά δεν συγκλίνει σε **συνεχή** συνάρτηση. Πράγματι, αν $m \geq n$, έχουμε $f_n(t) = f_m(t)$ για $t \notin [0, \frac{1}{n}]$ και $|f_n(t) - f_m(t)| \leq 1$ για κάθε t, επομένως

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n}$$

άρα η (f_n) είναι βασική. Αν υπήρχε **συνεχής** f ώστε $\lim \|f - f_n\|_2 = 0$, θα είχαμε

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{0} |f(t)|^2 dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} |f(t) - 1|^2 dt = \\ &\int_{-\pi}^{0} |f(t) - f_n(t)|^2 dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} |f(t) - f_n(t)|^2 dt \leq \\ &\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_n(t)|^2 dt = 2\pi \|f - f_n\|_2^2 \to 0\,. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_{-\pi}^{0} |f(t)|^2 dt + \int_{0}^{\pi} |f(t) - 1|^2 dt = \int_{-\pi}^{0} |f(t)|^2 dt + \lim_n \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} |f(t) - 1|^2 dt = 0.$$

Δηλαδή $\int_{-\pi}^{0} |f(t)|^2 dt = 0$ και $\int_0^{\pi} |f(t) - 1|^2 dt = 0$ άρα $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [-\pi, 0]$ και $f(t) = 1$ για κάθε $t \in [0, \pi]$, άτοπο.

Παρατήρηση Ο χώρος $C([-\pi, \pi])$ *είναι* πλήρης ως προς την νόρμα $\|.\|_\infty$, όπου $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [-\pi, \pi]\}$. **Δεν είναι** όμως χώρος Hilbert, γιατί η $\|.\|_\infty$ δεν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου. [Πράγματι, αν $f(t) = \max\{t, 0\}$, $g(t) = \min\{t, 0\}$, έχουμε $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = \|f + g\|_\infty = \|f - g\|_\infty$, συνεπώς $\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 \neq 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2$.]

4 Η πλήρωση

Είναι γνωστό ότι κάθε μετρικός χώρος (X, d) εμφυτεύεται ισομετρικά ως πυκνός υπόχωρος ενός πλήρους μετρικού χώρου (Y, ρ), ο οποίος είναι «ουσιαστικά μοναδικός» (ακριβέστερα, αν ο (X, d) είναι ισομετρικά ισόμορφος με έναν πυκνό υπόχωρο ενός άλλου πλήρους μετρικού χώρου (Z, δ), τότε υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός μεταξύ των (Y, ρ) και (Z, δ) που αφήνει τον X κατά σημείο αναλλοίωτο). Γι' αυτό ο (Y, ρ) λέγεται **η πλήρωση** του (X, d).

Έστω τώρα $(E, \langle ., . \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και (H, d) η πλήρωση του E ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο. Θεωρώντας τον E ως πυκνό υποσύνολο του H, μπορούμε να επεκτείνουμε τις γραμμικές πράξεις και το εσωτερικό γινόμενο από τον E στον H ως εξής:

Αν $x, y \in H$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, υπάρχουν ακολουθίες $\{x_n\}, \{y_n\}$ από στοιχεία του E που προσεγγίζουν τα x, y ως προς την μετρική d. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} x + y &= \lim_n (x_n + y_n) \\ \lambda x &= \lim_n (\lambda x_n) \\ \langle x, y \rangle &= \lim_n \langle x_n, y_n \rangle. \end{aligned}$$

(Παρατηρούμε ότι τα όρια αυτά υπάρχουν - γιατί;)

Πρέπει να ελέγξει κανείς ότι οι πράξεις αυτές είναι καλά ορισμένες: δηλαδή, ότι αν τα x, y προσεγγισθούν από άλλες ακολουθίες $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ του E, τότε

$$\begin{aligned} &\lim_n ((\xi_n + \eta_n) - (x_n + y_n)) = 0 \\ &\lim_n ((\lambda \xi_n) - (\lambda x_n)) = 0 \\ &\lim_n (\langle \xi_n, \eta_n \rangle - \langle x_n, y_n \rangle) = 0. \end{aligned}$$

Οι ισότητες αυτές είναι όμως άμεσες από την συνέχεια των πράξεων και του εσωτερικού γινομένου στον E. Είναι τώρα εύκολο (αλλά επίσης αναγκαίο) να ελεγχθεί ότι ο H, εφοδιασμένος με αυτές τις γραμμικές πράξεις και το εσωτερικό γινόμενο, είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Επίσης, η μετρική που ορίζεται στον H από το εσωτερικό γινόμενο ταυτίζεται με την d (γιατί;) και συνεπώς ο $(H, \langle ., . \rangle)$ είναι χώρος Hilbert. Με τον τρόπο αυτό αποδεικνύεται η

Πρόταση 4.1 *Αν $(E, \langle ., . \rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει χώρος Hilbert $(H, \langle ., . \rangle)$ στον οποίο ο E εμφυτεύεται γραμμικά και ισομετρικά ως πυκνός υπόχωρος. Ο H είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν $(K, \langle ., . \rangle)$ είναι χώρος Hilbert και $U : E \to K$* γραμμική ισομετρία *με πυκνή εικόνα, τότε η U επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία V από τον H* επί *του K.*
Ο χώρος Hilbert $(H, \langle ., . \rangle)$ λέγεται **η πλήρωση** *του $(E, \langle ., . \rangle)$.*

(Η μοναδικότητα του H αφήνεται ως άσκηση)

Συμβολισμός *Στις σημειώσεις αυτές, θα συμβολίζουμε με $L^2([a, b])$ την πλήρωση του χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(C([a, b]), \langle ., . \rangle)$.*

Παρατήρηση Στη Θεωρία Μέτρου, ο χώρος $L^2([a, b])$ ορίζεται με διαφορετικό τρόπο: τα στοιχεία του είναι κλάσεις ισοδυναμίας, modulo ισότητα σχεδόν παντού, μετρήσιμων συναρτήσεων $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ με $\int |f|^2 < +\infty$ (όπου το ολοκλήρωμα είναι ως προς το μέτρο Lebesgue), και αποδεικνύεται ότι είναι χώρος Hilbert και ότι ο $C([a, b])$ είναι πυκνός υπόχωρός του (βλ. και Άσκηση 7). Επομένως ο χώρος αυτός ικανοποιεί τις απαιτήσεις της Πρότασης 4.1, πράγμα που δικαιολογεί τον συμβολισμό που υιοθετήσαμε.

5 Ορθογώνιες διασπάσεις

Αν E είναι ένας μη τετριμμένος γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή μια ευθεία που περνάει από το 0), μπορώ να βρω έναν υπόχωρο F του $\mathbb{R}^2$ ώστε ο $\mathbb{R}^2$ να είναι το *ευθύ άθροισμα (direct sum)* των E και F: δηλαδή, κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ να διασπάται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $x = y + z$, όπου $y \in E$ και $z \in F$. Το στοιχείο y είναι εξ ορισμού «η προβολή του x στον υπόχωρο E παράλληλα προς τον υπόχωρο F». Υπάρχουν πολλές επιλογές για τον υπόχωρο F και είναι όλες, από την άποψη της γραμμικής άλγεβρας, ισοδύναμες. Ο F είναι «ένα συμπλήρωμα του E». Ως προς την ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$ όμως, ο κάθετος υπόχωρος $E^\perp$ του E είναι το «καλύτερο δυνατό» συμπλήρωμα του E, από την άποψη ότι ισχύει $\|y\|_2 \leq \|x\|_2$, εξαιτίας του Πυθαγορείου Θεωρήματος (ένα σχήμα θα πείσει τον αναγνώστη ότι, αν οι E και F δεν είναι κάθετοι, τότε μπορεί το μήκος της «λοξής» προβολής y του x να είναι μεγαλύτερο από το μήκος του x). Μάλιστα, ο $E^\perp$ είναι το μοναδικό συμπλήρωμα του E με την ιδιότητα αυτή (Άσκηση 8) .

Οι ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν για τον $\mathbb{K}^n$. Σε απειροδιάστατους χώρους, τα πράγματα δεν αλλάζουν όσον αφορά την γραμμική δομή, μόλις όμως εισαγάγουμε *τοπολογική δομή* (θελήσουμε δηλαδή να κάνουμε προσεγγίσεις), η κατάσταση γίνεται ριζικά διαφορετική. Πραγματικά, αν ο E είναι *κλειστός* υπόχωρος ενός χώρου Banach[8] V, δεν είναι πάντα αλήθεια ότι υπάρχει ένας *κλειστός* υπόχωρος F του V τέτοιος ώστε ο V να είναι το (αλγεβρικό) ευθύ άθροισμα των E και F. (Ένα παράδειγμα, όπως αποδεικνύεται, είναι $V = \ell^\infty$ και $E = c_o$).

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι κάθε κλειστός υπόχωρος E ενός χώρου Hilbert H έχει κλειστό συμπλήρωμα, και μάλιστα έχει το «καλύτερο δυνατό» συμπλήρωμα, τον *κάθετο υπόχωρο* $E^\perp$. Η ιδιότητα αυτή έχει θεμελιώδεις επιπτώσεις στην θεωρία[9] αλλά και στις εφαρμογές της. Όπως θα φανεί αμέσως, η ιδιότητα της ύπαρξης καθέτου στηρίζεται κατά ουσιώδη τρόπο στην πληρότητα.

Πρόταση 5.1 (Πλησιέστερο διάνυσμα) *Έστω H χώρος Hilbert, E κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Αν $x \in H \setminus E$, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in E$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x - y\| = d(x, E) \equiv \inf\{\|x - z\| : z \in E\}$. Το μοναδικό αυτό στοιχείο y του E ονομάζουμε* **(ορθή) προβολή** *του x στον E, και το συμβολίζουμε $P_E(x)$ ή $P(E)x$.*

[**Ερμηνεία** Το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης (πρβλ. Λήμμα 2.4) έχει μία, και μάλιστα μοναδική, λύση, ακόμα και ως προς απειροδιάστατους υποχώρους.]

Απόδειξη Αν $\delta = d(x, E)$, υπάρχει μια ακολουθία (y_n) στοιχείων του E ώστε $\|y_n - x\| \to \delta$. Αν εφαρμόσουμε τον κανόνα του Παραλληλογράμμου στα $y_n - x$ και $y_m - x$ βρίσκουμε

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2$$

[8] δηλ. ενός πλήρους χώρου με νόρμα – βλ. το Παράρτημα.

[9] Αποδεικνύεται (J. Lindenstrauss & L. Tzafriri, On the complemented subspace problem, Israel J. Math. **9**, 1971) ότι αν ένας χώρος Banach έχει την ιδιότητα, όλοι οι κλειστοί υπόχωροί του να έχουν κλειστό συμπλήρωμα, τότε είναι ισομορφικός με έναν χώρο Hilbert.

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Επειδή $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in E$, έχουμε $\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\| \geq \delta$, άρα

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2.$$

Όταν $n \to \infty$ και $m \to \infty$, το δεξιά μέλος της ανισότητας τείνει στο $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$, και επομένως η (y_n) είναι βασική ακολουθία. Επειδή ο E είναι *πλήρης* (αφού είναι κλειστός υπόχωρος του πλήρους χώρου H), υπάρχει $y \in E$ ώστε $\|y - y_n\| \to 0$. Τέλος, η συνέχεια της νόρμας δείχνει ότι

$$\|y - x\| = \lim \|y_n - x\| = \delta.$$

Η μοναδικότητα του y έπεται και αυτή από τον κανόνα του παραλληλογράμμου: αν $y_1, y_2 \in E$ και $\|y_1 - x\| = \delta = \|y_2 - x\|$, τότε

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \|y_1 - y_2\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 = \\ & 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 \leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0, \end{aligned}$$

άρα $y_1 = y_2$. $\square$

Παρατήρηση Στην πραγματικότητα, όπως φαίνεται από την απόδειξη, αρκεί ο H να είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και το E να είναι *πλήρες και κυρτό* υποσύνολο του H.

Ειδικότερα το συμπέρασμα της Πρότασης ισχύει όταν ο E είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του H. Μάλιστα στην περίπτωση αυτή, όπως δείξαμε στο Λήμμα 2.4, η προβολή του x στον E δίνεται από τον τύπο

$$P_E(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \,,$$

όπου $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ είναι μια οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του E. Επίσης δείξαμε ότι το διάνυσμα $x - P_E(x)$ είναι κάθετο στον E. Η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει την ορθή προβολή γενικότερα:

Πρόταση 5.2 *Έστω H χώρος Hilbert, E κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Αν $x \in H \setminus E$, τότε το διάνυσμα $x - P_E(x)$ είναι κάθετο στον E. Αντίστροφα αν $y_o \in E$ και $(x - y_o) \perp E$ τότε $y_o = P_E(x)$.*

Απόδειξη[10] Έστω $z = x - P_E x$. Από την Πρόταση 5.1, ισχύει $\|z\| = d(x, E)$. Θα δείξω ότι $z \perp E$. Αν $y \in E$ είναι τυχαίο, αρκεί να δείξω ότι $z \perp y$. Θέτω $y_1 = P_E x$ και ονομάζω $E_o \subseteq E$ τον υπόχωρο που παράγεται από τα y και y_1. Παρατηρώ ότι το y_1 είναι το πλησιέστερο προς το x διάνυσμα του E, άρα[11] και του E_o. Αλλά ο E_o έχει πεπερασμένη διάσταση, συνεπώς από το Λήμμα 2.4 έπεται ότι $(x - y_1) \perp E_o$ άρα $z \perp y$.

[10] Ευχαριστώ τον Β. Νεστορίδη για την απόδειξη αυτή.

[11] $\|y_1 - x\| = \inf\{\|y - x\| : x \in E\} \leq \inf\{\|y - x\| : x \in E_o\} \leq \|y_1 - x\|$, (αφού $y_1 \in E_o$) άρα ισχύει ισότητα.

Αντίστροφα αν $y_o \in E$ και $(x - y_o) \perp E$ τότε για κάθε $y \in E$ τα διανύσματα $x - y_o$ και $y_o - y$ είναι κάθετα, οπότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$\|x - y\|^2 = \|x - y_o\|^2 + \|y_o - y\|^2 \geq \|x - y_o\|^2.$$

Επομένως $\|x - y_o\| = d(x, E)$, οπότε $y_o = P_E(x)$ από την μοναδικότητα του $P_E(x)$. $\square$

Το επόμενο Πόρισμα είναι βέβαια γεωμετρικά προφανές σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Σε απειροδιάστατους χώρους, η απόδειξη στηρίζεται κατά ουσιώδη τρόπο στην πληρότητα (μέσω της Πρότασης 5.1). Πραγματικά, η Πρόταση δεν ισχύει πάντα σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο, όπως δείχνει το παράδειγμα 5.5 που ακολουθεί.

Πόρισμα 5.3 (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος) *Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$ ώστε $z \perp M$. Η απόσταση του z από τον M είναι η μεγαλύτερη δυνατή : $d(z, M) = \|z\|$.*

Απόδειξη Πάρε ένα οποιοδήποτε $x \in H \setminus M$ και εφάρμοσε την Πρόταση 5.2 στο $z = x - P_M x$. $\square$

Πόρισμα 5.4 *Ένας γραμμικός υπόχωρος E ενός χώρου* Hilbert *H είναι πυκνός (dense) στον H αν και μόνον αν το μόνο διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον E είναι το 0.*

Απόδειξη Έστω $M = \overline{E}$. Αν $M \neq H$, τότε από το προηγούμενο πόρισμα υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα κάθετο στον M, άρα και στον E. Το αντίστροφο είναι προφανές. $\square$

Ορισμός 5.1 (κάθετος υπόχωρος) *Αν A είναι μη κενό υποσύνολο ενός χώρου H με εσωτερικό γινόμενο, θέτω*

$$A^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Παρατήρηση Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.
Πράγματι, αν ονομάσω $y^* : H \to \mathbb{K}$ την απεικόνιση $y^*(x) = \langle x, y \rangle$, παρατηρώ ότι (ι) η y^* είναι γραμμική, άρα ο πυρήνας της, $\ker(y^*)$, είναι γραμμικός χώρος και (ιι) η y^* είναι συνεχής άρα ο $\ker(y^*)$ είναι κλειστός. Επειδή ο $A^{\perp}$ είναι η τομή $\cap\{\ker(y^*) : y \in A\}$ των κλειστών γραμμικών υποχώρων $\ker(y^*)$, $y \in A$ του H, είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος.

Παράδειγμα 5.5 *Υπάρχει χώρος E με εσωτερικό γινόμενο και γνήσιος κλειστός υπόχωρος F του E, ώστε $F^{\perp} = \{0\}$.*

Απόδειξη Έστω $E = c_{oo}$, ο χώρος των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο του ℓ^2. Έστω

$$F = \left\{ x = (x(n)) \in E : \sum \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}.$$

Η απεικόνιση $f : x \to \sum \frac{x(n)}{n}$ είναι (γραμμική και) συνεχής ως προς την νόρμα $\|.\|_2$. Πράγματι, από την κλασσική ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε

$$|f(x)| \leq \sum \left|\frac{x(n)}{n}\right| \leq \left(\sum |x(n)|^2\right)^{1/2} \left(\sum \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \left(\sum \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \|x\|_2 \, .$$

Επομένως ο $F = \ker f$ είναι κλειστός υπόχωρος του E (και γνήσιος, αφού $f \neq 0$).

Έστω $y = (y(n)) \in F^{\perp}$. Ισχυρίζομαι ότι $y = 0$. Πράγματι, παρατήρησε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το διάνυσμα $e_1 - ne_n$ ανήκει στον F. Συνεπώς πρέπει $\langle y, e_1 - ne_n\rangle = 0$ ή $\langle y, e_n\rangle = \frac{1}{n}\langle y, e_1\rangle$, δηλαδή $y(n) = \frac{1}{n}y(1)$. Επομένως οι συντεταγμένες του y είναι όλες μη μηδενικά πολλαπλάσια της πρώτης του συντεταγμένης. Εφόσον όμως η y έχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών συντεταγμένων, θα πρέπει $y(1) = 0$ οπότε $y(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Το Πόρισμα 5.3 δείχνει ότι, αν ο M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε ο υπόχωρος $M^{\perp}$ είναι μη μηδενικός. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο: ότι οι υπόχωροι M και $M^{\perp}$ παράγουν (αλγεβρικά) ολόκληρο τον H. Ας παρατηρήσουμε από τώρα ότι, επειδή[12] $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, το άθροισμα $M + M^{\perp}$ είναι *ευθύ*, δηλαδή κάθε $x \in M + M^{\perp}$ διασπάται *μοναδικά* σε άθροισμα $x = x_1 + x_2$, με $x_1 \in M$ και $x_2 \in M^{\perp}$.

Θεώρημα 5.6 (Ορθογώνια διάσπαση) *Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε*

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Απόδειξη Έστω $y \in H$. Πρέπει να βρω $y_1 \in M$, $y_2 \in M^{\perp}$ ώστε $y = y_1 + y_2$. Αν $y \in M$, θέτω $y_1 = y$ και $y_2 = 0$. Αν όχι, από την Πρόταση 5.2 υπάρχει μοναδικό y_1 $(= P_M(y))$ στον M ώστε το $y_2 = y - y_1$ να είναι κάθετο στον M. $\square$

Πόρισμα 5.7 (Ορθή προβολή) *Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση*

$$P_M : H \to H \, : y \to P_M(y)$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Απόδειξη *Γραμμικότητα:* Αν $x, y \in H$ και $\lambda \in \mathbb{K}$ τα x, y και $z = x + \lambda y$ γράφονται μοναδικά

$$x = x_1 + x_2, \; y = y_1 + y_2 \;\text{ και } z = z_1 + z_2$$

όπου $x_1, y_1, z_1 \in M$ και $x_2, y_2, z_2 \in M^{\perp}$. Έχουμε

$$z_1 + z_2 = x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2),$$

άρα $z_1 - (x_1 + \lambda y_1) = (x_2 + \lambda y_2) - z_2$. Επειδή $z_1 - (x_1 + \lambda y_1) \in M$ και $(x_2 + \lambda y_2) - z_2 \in M^{\perp}$, έπεται ότι $z_1 - (x_1 + \lambda y_1) = 0$, δηλαδή

$$P_M(x + \lambda y) = P_M(x) + \lambda P_M(y),$$

[12]γιατί αν $x \in M \cap M^{\perp}$ τότε το x είναι κάθετο στον εαυτό του, άρα $x = 0$.

άρα η P_M είναι γραμμική.

Συνέχεια: Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in H$, τα διανύσματα $P_M(x)$ και $x - P_M(x)$ είναι κάθετα, επομένως από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2,$$

άρα $\|P_M(x)\| \leq \|x\|$. Επομένως η P_M είναι συνεχής.[13]

6 Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Υπενθυμίζω την έννοια του τοπολογικού δυϊκού ενός χώρου με νόρμα:

Ορισμός 6.1 *Έστω $(E, \|.\|)$ χώρος με νόρμα. Ο* **(τοπολογικός) δυϊκός (topological dual)** *του E είναι το σύνολο των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων $f : E \to \mathbb{K}$. Είναι γραμμικός χώρος ως προς τις πράξεις κατά σημείο. Αν $f \in E^*$, ο αριθμός*

$$\|f\| \equiv \sup\{|f(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

είναι πεπερασμένος, και η $\|.\|$ είναι νόρμα στον E^*.

Δεν είναι καθόλου προφανές ότι ο δυϊκός κάθε χώρου με νόρμα E περιέχει μη μηδενικά στοιχεία. Αυτό είναι συνέπεια ενός θεμελιώδους θεωρήματος της Συναρτησιακής Ανάλυσης, του Θεωρήματος Hahn-Banach. Στην περίπτωση όμως που η νόρμα ορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε άμεσα να διαπιστώσουμε ότι ο δυϊκός του E περιέχει άφθονα στοιχεία, «τουλάχιστον όσα ο E»:

Λήμμα 6.1 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, ονομάζουμε f_x την απεικόνιση*

$$f_x : E \to \mathbb{K} \, : \, y \to \langle y, x \rangle.$$

Η f_x είναι γραμμική και συνεχής. Μάλιστα $\|f_x\| = \|x\|$.

Απόδειξη Αρκεί να υποθέσουμε ότι $x \neq 0$. Η γραμμικότητα της f_x είναι προφανής. Η συνέχεια προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$|f_x(y)| = |\langle y, x \rangle| \leq \|y\|.\|x\| \implies \|f_x\| \leq \|x\|.$$

Επειδή όμως

$$f_x\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, x \right\rangle = \|x\|$$

έπεται ότι $\|f_x\| = \|x\|$. $\square$

Πρόταση 6.2 *Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση*

$$T : E \to E^* \, : \, x \to f_x$$

είναι αντιγραμμική [14] (δηλαδή

$$T(x + \lambda y) = Tx + \bar{\lambda} Ty$$

για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$) και ισομετρική, δηλαδή $\|Tx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in E$.

---

[13] αν $x_n \to x$ τότε $\|P_M(x_n) - P_M(x)\| = \|P_M(x_n - x)\| \leq \|x_n - x\| \to 0$.

[14] Αν ο E είναι πραγματικός γραμμικός χώρος (δηλαδή αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) τότε βέβαια η T είναι γραμμική.

Απόδειξη Αν $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε, για κάθε $z \in E$,

$$f_{x+\lambda y}(z) = \langle z, x+\lambda y\rangle = \langle z, x\rangle + \bar{\lambda}\langle z, y\rangle = f_x(z) + \bar{\lambda} f_y(z)$$

δηλαδή $f_{x+\lambda y} = f_x + \bar{\lambda} f_y$ και επομένως

$$T(x+\lambda y) = Tx + \bar{\lambda} Ty.$$

Ότι η T είναι ισομετρική έπεται από το Λήμμα: $\|Tx\| = \|f_x\| = \|x\|$. $\square$

Αν ο E δεν είναι πλήρης, η απεικόνιση T δεν είναι επί. (Πράγματι, είναι γνωστό Πρόταση 11.2) ότι ο δυϊκός ενός χώρου με νόρμα είναι πλήρης χώρος. Επειδή η T είναι ισομετρία, αν ήταν επί του E^*, τότε και ο E θα ήταν πλήρης, δηλαδή χώρος Hilbert).

Θα δείξουμε ότι αντίστροφα, αν ο E είναι χώρος Hilbert, τότε η T είναι επί. Ας δούμε πρώτα ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα Στον χώρο c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα θεωρούμε την γραμμική μορφή f όπου

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} x(n), \quad x = (x(1), x(2), \dots) \in c_{oo}.$$

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 5.5, η f είναι συνεχής ως προς την $\|.\|_2$, αλλά δεν είναι της μορφής f_y με $y \in c_{oo}$, γιατί αν ήταν τότε το y θα ήταν κάθετο στον υπόχωρο $\ker f$. Δείξαμε όμως στο 5.5 ότι $(\ker f)^\perp = \{0\}$.

Βλέπουμε ότι η f είναι της μορφής f_y όπου το $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ δεν ανήκει στον c_{oo}, αλλά στην πλήρωση του, τον ℓ^2.

Θεώρημα 6.3 (Riesz) *Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f(y) = \langle y, x\rangle$ για κάθε $y \in H$.*

Απόδειξη Έστω $M = \ker f = \{y \in H : f(y) = 0\}$. Ο M είναι γραμμικός υπόχωρος του H, επειδή η f είναι γραμμική, και είναι κλειστός, επειδή η f είναι συνεχής.

Αν $f = 0$, τότε $f(y) = \langle y, 0\rangle$ για κάθε $y \in H$.

Αν όχι, τότε $M \neq H$. Από το Πόρισμα 5.3, υπάρχει $z \in H$, μη μηδενικό, κάθετο στον M. Θα βρω ένα πολλαπλάσιο $x = \lambda z$ του z ώστε $f = f_x$. Έστω $y \in H$. Παρατηρώ ότι $f(z)y - f(y)z \in M$, γιατί $f(f(z)y - f(y)z) = 0$. Επειδή $z \perp M$, έχω λοιπόν

$$0 = \langle f(z)y - f(y)z, z\rangle = f(z)\langle y, z\rangle - f(y)\langle z, z\rangle$$

άρα

$$f(y) = \frac{f(z)}{\langle z, z\rangle}\langle y, z\rangle.$$

Θέτοντας λοιπόν $x = \dfrac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z$ έχω

$$f_x(y) = \langle y, x\rangle = f(y) \quad \text{για κάθε } y \in H.$$

Η μοναδικότητα του x είναι προφανής: αν $f_x = f_w$, τότε $\langle y, x\rangle = \langle y, w\rangle$ για κάθε $y \in H$, συνεπώς το $x - w$ είναι κάθετο σ' όλον τον H, άρα $x - w = 0$. $\square$

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 6.3 με την Πρόταση 6.2, έχουμε:

Θεώρημα 6.4 *Έστω H χώρος Hilbert. Τότε η απεικόνιση*

$$T : H \to H^* : \ x \to f_x$$

είναι αντιγραμμική [15] *ισομετρία επί του H^*.*

7 Ορθοκανονικές Βάσεις

Στον χώρο Hilbert $\mathbb{K}^n$, η συνηθισμένη βάση $\{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ δεν είναι μόνον ορθοκανονική οικογένεια, είναι (αλγεβρική) *βάση*: κάθε $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως συνδυασμός των e_k:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

Δεν αναμένουμε να ισχύει το ίδιο στον ℓ^2, γιατί το σύνολο των (πεπερασμένων) γραμμικών συνδυασμών των e_k δεν είναι όλος ο ℓ^2, αλλά ο c_{oo}. Παρατηρούμε ότι ο c_{oo} είναι όμως ένας πυκνός υπόχωρός του ℓ^2. Η προηγούμενη ισότητα ισχύει στον ℓ^2 «κατά προσέγγιση»: Κάθε $x = (x(n)) \in \ell^2$ προσεγγίζεται από πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς των e_n και *επιπλέον* οι συντελεστές που εμφανίζονται είναι *μοναδικοί*. Πράγματι, αν

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k$$

τότε $y_n \in c_{oo}$ και $x = \lim_n y_n$. Θα δείξουμε ότι αυτό συμβαίνει σε κάθε διαχωρίσιμο χώρο με εσωτερικό γινόμενο (η διαχωρισιμότητα δεν είναι αναγκαία, αλλά διευκολύνει κάπως τις αποδείξεις).

Ορισμός 7.1 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια*
$\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ***ορθοκανονική βάση***[16] *του E αν*
(i) είναι ορθοκανονική και
(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{[e_i : i \in I]} = E$.

Παρατήρηση Ας τονίσουμε άλλη μια φορά ότι, σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση **δεν είναι συνήθως** αλγεβρική βάση (δες και άσκηση 12).

Παρατήρηση 7.1 *Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο* **Hilbert** *H. Η $\mathcal{C}$ είναι βάση του H αν και μόνον αν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του H (εκτός από την $\mathcal{C}$), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του H που είναι κάθετο στην $\mathcal{C}$ είναι το 0.*

[15] γραμμική, αν ο H είναι πραγματικός χώρος Hilbert
[16] ή **πλήρες ορθοκανονικό σύστημα**

Πράγματι: θα δείξω ότι αν η $\mathcal{C}$ δεν είναι μεγιστική τότε έχει μη μηδενικό κάθετο διάνυσμα, ότι αν έχει μη μηδενικό κάθετο διάνυσμα τότε δεν είναι ορθοκανονική βάση, και ότι αν δεν είναι ορθοκανονική βάση, τότε δεν είναι μεγιστική: Αν υπάρχει ορθοκανονική οικογένεια $\mathcal{F}$ που περιέχει την $\mathcal{C}$ γνήσια τότε κάθε $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{C}$ είναι (μη μηδενικό και) κάθετο στην $\mathcal{C}$. Αν x είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα κάθετο στην $\mathcal{C}$ τότε είναι κάθετο και στην γραμμική της θήκη, άρα αυτή δεν είναι πυκνή, οπότε η $\mathcal{C}$ δεν είναι ορθοκανονική βάση. Και τέλος, αν η γραμμική θήκη της $\mathcal{C}$ δεν είναι πυκνή, τότε (εφόσον ο χώρος είναι Hilbert) από το Πόρισμα 5.3 υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα z κάθετο στην γραμμική θήκη της $\mathcal{C}$, άρα και στη $\mathcal{C}$, και συνεπώς η οικογένεια $\mathcal{C} \cup \{\frac{z}{\|z\|}\}$ είναι ορθοκανονική, άρα η $\mathcal{C}$ δεν είναι μεγιστική.

Πρόταση 7.2 *Κάθε διαχωρίσιμος χώρος E με εσωτερικό γινόμενο περιέχει μια ορθοκανονική βάση.*

Απόδειξη Έστω $X = \{x_n\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του E. Κατασκευάζω μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n\}$ ώστε $\overline{[e_n : n \in \mathbb{N}]} = E$ ως εξής: Παραλείποντας διαδοχικά εκείνα τα x_n που είναι γραμμικά εξαρτημένα από τα προηγούμενά τους $x_k \, (k < n)$, βρίσκω ένα αριθμήσιμο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο Y του X ώστε $[Y] = [X]$. Από την διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt (Πρόταση 2.1), υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n\}$ ώστε $[e_n : n \in \mathbb{N}] = [Y] = [X]$, επομένως $\overline{[e_n : n \in \mathbb{N}]} = \overline{[X]} = E$. $\square$

Παρατήρηση 7.3 *Επομένως αν E είναι διαχωρίσιμος χώρος με εσωτερικό γινόμενο και F ένας οποιοσδήποτε πυκνός υπόχωρός του, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του E που αποτελείται από στοιχεία του F.*

Πράγματι, αν εφαρμόσω την Πρόταση 7.2 στον χώρο F, θα έχω μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n\} \subseteq F$ που η γραμμική της θήκη θα είναι πυκνή στον F, άρα και στον E.

Για παράδειγμα, στον χώρο $(C[-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (ή και στον $(L^2[-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικές βάσεις που να αποτελούνται από πολυώνυμα. Μια τέτοια βάση προκύπτει από την ορθοκανονικοποίηση (Πρόταση 2.1) του συνόλου $\{p_n : n = 0, 1, \ldots\}$, όπου $p_n(t) = t^n$, που είναι γραμμικά ανεξάρτητο και πυκνό στον $(C([-\pi, \pi]), \|.\|_2)$ (γιατί;).

Παρατήρηση *Αν ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση, τότε είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ η απόδειξη είναι ανάλογη (και απλούστερη). Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια ορθοκανονική βάση στον E. Αφού $\overline{[e_n : n \in \mathbb{N}]} = E$, αν $x \in E$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει (πεπερασμένος) γραμμικός συνδυασμός

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \quad \text{όπου} \quad \lambda_k = a_k + ib_k, \; a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

των e_n ώστε $\|x-y\| < \varepsilon/2$. Για $k=1,\ldots,n$, υπάρχουν ρητοί c_k, d_k ώστε $|a_k-c_k|^2+|b_k-d_k|^2 < \varepsilon^2/4n$. Επομένως

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{k=1}^n (c_k+id_k)e_k\right\| &\le \|x-y\| + \left\|\sum_{k=1}^n ((a_k+ib_k)-(c_k+id_k))e_k\right\| \\ &= \|x-y\| + \left(\sum_{k=1}^n |(a_k+ib_k)-(c_k+id_k)|^2\right)^{1/2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Επομένως, το αριθμήσιμο σύνολο D που αποτελείται από όλα τα (πεπερασμένα) αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k=1}^n (a_k+ib_k)e_k \quad \text{όπου} \quad a_k, b_k \in \mathbb{Q},\ n\in\mathbb{N}$$

είναι πυκνό στον E, άρα ο E είναι διαχωρίσιμος. $\square$

Θα δείξουμε ότι μια ορθοκανονική βάση σ' έναν (διαχωρίσιμο) χώρο Hilbert H συμπεριφέρεται όπως η συνηθισμένη βάση του ℓ^2:

Θεώρημα 7.4 *Έστω $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο.*[17] *Τότε, για κάθε $x\in E$,*
(ι) Η σειρά $\sum\langle x,e_n\rangle e_n$ συγκλίνει στο x.
(ιι) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle x,e_n\rangle|^2$.

Απόδειξη Έστω $x\in E$ και $\varepsilon>0$. Αφού $\overline{[e_n : n\in\mathbb{N}]} = E$, υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ και $\lambda_1,\ldots\lambda_n\in\mathbb{K}$ ώστε

$$\left\|x-\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right\| < \varepsilon.$$

Ξέρουμε όμως (Λήμμα 2.4) ότι

$$\left\|x-\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right\|^2 \ge \left\|x-\sum_{k=1}^n \langle x,e_k\rangle e_k\right\|^2$$

και άρα (από την Παρατήρηση 2.5)

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x,e_k\rangle|^2 = \left\|x-\sum_{k=1}^n \langle x,e_k\rangle e_k\right\|^2 < \varepsilon^2 .$$

Αν $m\ge n$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^n |\langle x,e_k\rangle|^2 \le \sum_{k=1}^m |\langle x,e_k\rangle|^2$$

[17] Το Θεώρημα ισχύει και για υπεραριθμήσιμες βάσεις, αρκεί να ορίσει κανείς κατάλληλα την έννοια της σύγκλισης μιάς σειράς με υπεραριθμήσιμο πλήθος όρων.

και συνεπώς

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \le \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \varepsilon^2$$

για κάθε $m \ge n$. Επομένως

$$\lim_m \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_m \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2. \quad \square$$

Πόρισμα 7.5 *Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E για κάθε $x, y \in E$ έχουμε*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Απόδειξη Εφόσον $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n$, αν $x_N = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n$ έχουμε $\langle x, y \rangle = \lim_N \langle x_N, y \rangle$. Αλλά

$$\langle x_N, y \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n, y \right\rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle .$$

'ρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$ συγκλίνει στο $\langle x, y \rangle$. $\square$

Παράδειγμα 7.6 Έχουμε δείξει (Παράδειγμα 2.3) ότι η οικογένεια $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq C([-\pi, \pi])$ (όπου $e_n(t) = \exp(int)$) είναι ορθοκανονική. Το σημαντικό όμως είναι ότι αποτελεί ορθοκανονική *βάση* του $L^2([-\pi, \pi])$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί, όπως θα δούμε, με την βοήθεια του Θεωρήματος Féjer (Πόρισμα **;;**). Ειδικότερα, κάθε $f \in C([-\pi, \pi])$ προσεγγίζεται, *ως προς την* $\|\cdot\|_2$, από γραμμικούς συνδυασμούς της μορφής

$$s_n = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k$$

όπου

$$\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \exp(-iks) ds \quad (k \in \mathbb{Z})$$

είναι ο k-οστός συντελεστής Fourier της f. Επιπλέον

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

(ισότητα Parseval). Αυτό **δεν σημαίνει** ότι η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων s_n (δηλαδή, η *σειρά Fourier* της f) συγκλίνει στην f κατά σημείο ούτε, πολύ περισσότερο, ότι συγκλίνει ομοιόμορφα. Αντιθέτως, υπάρχουν παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων f που η σειρά Fourier τους

$$\sum_k \hat{f}(k)\exp(ikt)$$

αποκλίνει, και μάλιστα για άπειρο πλήθος σημείων $t \in [-\pi, \pi]$.

8 Ισομορφισμοί

Είδαμε στο Θεώρημα 7.4 ότι κάθε (απειροδιάστατος) διαχωρίσιμος χώρος E με εσωτερικό γινόμενο έχει μια (άπειρη, αριθμήσιμη) ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$, ως προς την οποία κάθε $x \in E$ γράφεται

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του E. Μάλιστα, ισχύει

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2. \tag{3}$$

Η ισότητα αυτή δείχνει ότι η ακολουθία $(\lambda(n))$ όπου $\lambda(n) = \langle x, x_n \rangle \in \mathbb{K}$ είναι τετραγωνικά αθροίσιμη, είναι δηλαδή στοιχείο του ℓ^2. Ορίζεται λοιπόν μια απεικόνιση

$$U : E \to \ell^2 \ : \ x \to (\langle x, x_n \rangle)_n$$

η οποία είναι προφανώς γραμμική: αν $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$ τότε

$$\begin{aligned} \langle x + \lambda y, x_n \rangle &= \langle x, x_n \rangle + \lambda \langle y, x_n \rangle \ \text{ για κάθε } n, \\ \text{δηλαδή } \ (\langle x + \lambda y, x_n \rangle)_n &= (\langle x, x_n \rangle)_n + \lambda (\langle y, x_n \rangle)_n \\ \text{δηλαδή } \qquad U(x + \lambda y) &= Ux + \lambda U(y)\,. \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της νόρμας του ℓ^2 βλέπουμε ότι η σχέση (3) λέει ακριβώς ότι η U είναι *ισομετρία*. Ειδικότερα, είναι 1-1.

Έστω τώρα ότι ο E είναι χώρος *Hilbert*. Ισχυρίζομαι ότι τότε η U είναι *επί*. Πράγματι, αν δοθεί οποιοδήποτε στοιχείο $y = (\lambda(1), \lambda(2), \ldots)$ του ℓ^2, θα δείξω ότι υπάρχει $z \in E$ ώστε $Uz = y$.

Απόδειξη Αν θέσω

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda(k) x_k \quad \text{και} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} |\lambda(k)|^2$$

τότε $z_n \in E$ και, αν $n > m$,

$$\|z_n - z_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\lambda(k)|^2 = |s_n - s_m|$$

από το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Επειδή $y \in \ell^2$, η (s_n) συγκλίνει, οπότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $|s_n - s_m| < \varepsilon$ όταν $n > m \geq n_o$. Έπεται από την προηγούμενη ισότητα ότι η ακολουθία (z_n) είναι βασική στον E, επομένως, **λόγω πληρότητας**, συγκλίνει σε κάποιο $z \in E$. Επειδή

$$\langle z, x_k \rangle = \lim_n \langle z_n, x_k \rangle = \lambda(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, είναι φανερό ότι $Uz = y$.

Αποδείξαμε λοιπόν το βασικό

Θεώρημα 8.1 *Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος* [18] *χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.*

Ακριβέστερα, αν $\{x_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του H, η απεικόνιση

$$U : H \to \ell^2 \ : \ x \to (\langle x, x_n \rangle)_n$$

απεικονίζει τον H (γραμμικά και) ισομετρικά επί *του ℓ^2.*

Σημείωση Με τον ίδιο τρόπο (και ευκολότερα) αποδεικνύεται ότι κάθε n-διάστατος χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathbb{K}^n$.

Παρατήρηση Το Θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: όλοι οι απειροδιάστατοι διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφοι μεταξύ τους, ή ακόμα, υπάρχει «ουσιαστικά» ένας και μόνο απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, ο ℓ^2. Πρέπει όμως να παρατηρήσουμε δυο πράγματα:

(ι) Οι συγκεκριμένοι χώροι Hilbert που συναντάει κανείς «στην πράξη» έχουν, πολλές φορές, και άλλα δομικά στοιχεία και ιδιότητες πέρα από το εσωτερικό γινόμενο και την πληρότητα. Παραδείγματος χάριν, μπορεί κανείς να θεωρήσει τον χώρο H^2 όλων των ολομόρφων συναρτήσεων που οι συντελεστές των δυναμοσειρών τους είναι τετραγωνικά αθροίσιμοι. Μολονότι οι χώροι ℓ^2 και H^2 «ταυτίζονται» όσον αφορά την δομή χώρου Hilbert (είναι δηλαδή ισομετρικά ισόμορφοι), είναι διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα: ο πρώτος αποτελείται από ακολουθίες μιγαδικών αριθμών, ο δεύτερος από ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις.

(ιι) Ο ισομορφισμός U που κατασκευάσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος *εξαρτάται από την ορθοκανονική βάση* $\{x_n\}$ που επιλέξαμε, δεν είναι δηλαδή «φυσιολογικός». Κάθε επιλογή ορθοκανονικής βάσης του H ορίζει και έναν διαφορετικό ισομορφισμό του H με τον ℓ^2, ακριβώς όπως η επιλογή μιάς ορθοκανονικής βάσης (ενός «συστήματος συντεταγμένων») σ' έναν Ευκλείδειο χώρο διάστασης n ορίζει έναν ισομορφισμό του χώρου αυτού με τον $\mathbb{R}^n$. Η επιλογή της κατάλληλης κάθε φορά ορθοκανονικής βάσης εξαρτάται από το συγκεκριμένο πρόβλημα. Παραδείγματος χάριν, αν έχει κανείς να λύσει ένα πρόβλημα που αφορά πολυώνυμα, η ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του $C([-\pi, \pi])$ που ορίσαμε προηγουμένως δεν είναι και πολύ χρήσιμη, γιατί κάθε (μη σταθερό) πολυώνυμο έχει άπειρους μη μηδενικούς συντελεστές Fourier. Θα ήταν πολύ πιό σκόπιμο να χρησιμοποιήσει κανείς μια ορθοκανονική βάση που να αποτελείται από πολυώνυμα (δες την Παρατήρηση 7.3). 'λλες ορθοκανονικές βάσεις προκύπτουν από λύσεις διαφορικών εξισώσεων.

[18] Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για μη διαχωρίσιμους χώρους, βλ. Παράδειγμα 8.3 και Άσκηση 17.

Παράδειγμα 8.2 (Ο Μετασχηματισμός Fourier) ***(Fourier Transform)***

Έστω $f \in C([-\pi,\pi])$. Η ισότητα Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|^2$$

(βλ. Παράδειγμα 7.6) δείχνει ότι η (διπλή) ακολουθία $\{\hat{f}(k) : k \in \mathbb{Z}\} \equiv \hat{f}$ είναι τετραγωνικά αθροίσιμη, ανήκει δηλαδή στον χώρο $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Η ίδια ισότητα δείχνει ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{F} : C([-\pi,\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : \ f \to \{\hat{f}(k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

(ο **μετασχηματισμός Fourier**), που είναι προφανώς γραμμική,[19] είναι ισομετρία. Επειδή απεικονίζει την ορθοκανονική βάση $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ του $L^2([-\pi,\pi])$ (όπου $e_k(t) = \exp(ikt)$) στην συνηθισμένη βάση του $\ell^2(\mathbb{Z})$, επεκτείνεται σε ισομετρία από τον $L^2([-\pi,\pi])$ επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι λοιπόν ένας ισομετρικός ισομορφισμός μεταξύ των χώρων $L^2([-\pi,\pi])$ και $\ell^2(\mathbb{Z})$.

***Παράδειγμα 8.3 (Ένας μη διαχωρίσιμος χώρος Hilbert)**

Έστω Γ μη κενό σύνολο (π.χ. $\Gamma = [0,1]$). Ονομάζουμε $\ell^2(\Gamma)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $x : \Gamma \to \mathbb{C}$ που είναι *τετραγωνικά αθροίσιμες*, δηλαδή ικανοποιούν

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|^2 \equiv \|x\|_2^2 < \infty$$

(υπενθυμίζω ότι το άθροισμα αυτό είναι εξ ορισμού το supremum των αθροισμάτων πάνω σε όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα του Γ).

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η $\|.\|_2$ είναι νόρμα στον $\ell^2(\Gamma)$. Η *πληρότητα* του $\ell^2(\Gamma)$ αποδεικνύεται ακριβώς όπως στην περίπτωση που το Γ είναι αριθμήσιμο (άσκηση 17).

Παρατηρούμε ότι ο υπόχωρος $c_{oo}(\Gamma)$ των $x \in \ell^2(\Gamma)$ που έχουν πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός στον $(\ell^2(\Gamma), \|.\|_2)$. Πράγματι, για κάθε $x \in \ell^2(\Gamma)$ και κάθε $\varepsilon > 0$, από τον ορισμό της νόρμας υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $F_o \subseteq \Gamma$ ώστε

$$\sum_{\gamma\in F_o}|x(\gamma)|^2 > \|x\|_2^2 - \varepsilon^2.$$

Αν λοιπόν $F \subseteq \Gamma$ είναι πεπερασμένο σύνολο που περιέχει το F_o και ονομάσουμε x_F την συνάρτηση που ορίζεται από τις σχέσεις

$$x_F(\gamma) = \begin{cases} x(\gamma) & \text{όταν } \gamma \in F \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε $x_F \in c_{oo}(\Gamma)$ και

$$\|x_F - x\|_2^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus F}|x(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|^2 - \sum_{\gamma\in F}|x(\gamma)|^2 \le \|x\|^2 - \sum_{\gamma\in F_o}|x(\gamma)|^2 < \varepsilon^2.$$

[19] Η απόδειξη γίνεται όπως στην προηγούμενη παράγραφο, εφόσον $\hat{f}(k) = \langle f, e_k\rangle$.

Στον πυκνό υπόχωρο $c_{oo}(\Gamma)$ μπορούμε να ορίσουμε

$$\langle x, y\rangle \equiv \sum_{\gamma} x(\gamma)\overline{y(\gamma)}$$

όπου το άθροισμα έχει βεβαίως πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων. Είναι φανερό ότι το $\langle .,.\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $c_{oo}(\Gamma)$ που επάγει την $\|.\|_2$. Επομένως επεκτείνεται[20] σε εσωτερικό γινόμενο στον $\ell^2(\Gamma)$, που συμβολίζουμε πάλι με $\langle .,.\rangle$.

Αποδεικνύεται μάλιστα[21] ότι για κάθε $x, y \in \ell^2(\Gamma)$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $F_o \subseteq \Gamma$ ώστε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $F \subseteq \Gamma$ με $F \supseteq F_o$ να ικανοποιεί

$$\left| \langle x, y\rangle - \sum_{\gamma \in F} x(\gamma)\overline{y(\gamma)} \right| < \varepsilon.$$

Λέμε τότε ότι η σειρά $\sum_{\gamma} x(\gamma)\overline{y(\gamma)}$ *συγκλίνει* στο $\langle x, y\rangle$.

Παρατηρούμε επίσης ότι η οικογένεια $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ όπου

$$e_\gamma(\delta) = \begin{cases} 1 & : \quad \delta = \gamma \\ 0 & : \quad \delta \neq \gamma \end{cases}$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\ell^2(\Gamma)$, γιατί δεν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα κάθετο σ' όλη την οικογένεια. Επομένως, αν το Γ δεν είναι αριθμήσιμο, ο $\ell^2(\Gamma)$ δεν είναι διαχωρίσιμος (και αν είναι αριθμήσιμο, ο $\ell^2(\Gamma)$ είναι διαχωρίσιμος, ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\mathbb{N}) = \ell^2$ ή με τον $\mathbb{K}^n$, αν το Γ έχει n στοιχεία).

Αποδεικνύεται, όπως στο Θεώρημα 8.1, ότι αν ένας χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, τότε είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$ (άσκηση 17).

9 Ασκήσεις

1 Έστω $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$. Δείξτε ότι η παράσταση

$$\langle x, y\rangle_a = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \bar{y}_i$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$ αν και μόνον αν όλοι οι a_i είναι γνήσια θετικοί (πραγματικοί) αριθμοί.

2 Δείξτε ότι, αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας μιγαδικών αριθμών, η παράσταση

$$\langle x, y\rangle_A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \bar{y}_i$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$ αν και μόνον αν $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ για κάθε i, j και οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι γνήσια θετικές.

---

[20] Για κάθε $x \in c_{oo}(\Gamma)$ η απεικόνιση $y \to \langle x, y\rangle$ είναι *ομοιόμορφα* συνεχής στον $c_{oo}(\Gamma)$, άρα επεκτείνεται στον $\ell^2(\Gamma)$, επομένως έχει νόημα η παράσταση $\langle x, y\rangle$, όταν $x \in c_{oo}(\Gamma)$ και $y \in \ell^2(\Gamma)$. Τώρα παρατηρώ ότι για κάθε $y \in \ell^2(\Gamma)$ η απεικόνιση $x \to \langle x, y\rangle$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στον $c_{oo}(\Gamma)$, άρα επεκτείνεται στον $\ell^2(\Gamma)$.

[21] Επιλέγουμε πεπερασμένο υποσύνολο $F_o \subseteq \Gamma$ ώστε για κάθε πεπερασμένο υπερσύνολο F του F_o να ισχύει $\|x - x_F\|.\|y\| < \varepsilon/2$ και $\|y - y_F\|.\|x\| < \varepsilon/2$. Τότε $|\langle x, y\rangle - \langle x_F, y_F\rangle| < \varepsilon$. Αλλά $\langle x_F, y_F\rangle = \sum_{\gamma \in F} x(\gamma)\overline{y(\gamma)}$.

3 Αν $\langle\!\langle .,. \rangle\!\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$, δείξτε ότι υπάρχει $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ ώστε $\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle = \langle x, y \rangle_A$ για κάθε $x, y \in \mathbb{C}^n$. (Υπόδειξη: $a_{ij} = \langle\!\langle e_j, e_i \rangle\!\rangle$).

4 Έστω $1 \le p < +\infty$. Στον χώρο $\mathbb{C}^n$, ορίζω

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n).$$

Δείξτε ότι ο $(\mathbb{C}^n, \|.\|_p)$ είναι χώρος Hilbert μόνον όταν $p = 2$.

5 Αποδείξτε πλήρως την Πρόταση 4.1.

6 Έστω E γραμμικός χώρος και $\langle\!\langle .,. \rangle\!\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ απεικόνιση με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου (Ορισμός 1.1) εκτός της (ι).

(α) Αποδείξτε ότι $|\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle|^2 \le \langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle . \langle\!\langle y, y \rangle\!\rangle \quad (x, y \in E)$.

(β) Αποδείξτε ότι το σύνολο $N = \{x \in E : \langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E.

(γ) Στον χώρο πηλίκο E/N, ορίζουμε

$$\langle [x], [y] \rangle = \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle \qquad x, y \in E$$

όπου $[x] = \{x + z : z \in N\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle .,. \rangle$ είναι (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον E/N.

7 (*) Αν $\mathcal{L}^2([0,1])$ είναι ο χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ ώστε $\int |f|^2 < +\infty$ (ολοκλήρωμα Lebesgue στο $[0,1]$), και

$$N = \{f \in \mathcal{L}^2([0,1]) : \int |f|^2 = 0\},$$

να δειχθεί ότι

$$N = \{f \in \mathcal{L}^2([0,1]) : f(t) = 0 \text{ σχεδόν παντού }\}.$$

Ορίζουμε $L^2([0,1]) = \mathcal{L}^2([0,1])/N$.

Να δειχθεί ότι κάθε κλάση $[f] \in L^2([0,1])$ περιέχει το πολύ μια συνεχή συνάρτηση.

Θεωρώντας γνωστό ότι, για κάθε $f \in \mathcal{L}^2([0,1])$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $g \in C([0,1])$ ώστε $\int |f - g|^2 < \varepsilon^2$, να δειχθεί ότι ο γραμμικός χώρος $C([0,1])$ εμφυτεύεται ως πυκνός υπόχωρος του $L^2([0,1])$.

8 Έστω E_1, E_2 υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$ ώστε $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ και $E_1 + E_2 = \mathbb{C}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ γράφουμε $x = x_1 + x_2$ όπου $x_i \in E_i$. Αν $\|x_1\| \le \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ (όπου $\|.\|$ η Ευκλείδεια νόρμα), δείξτε ότι οι E_1, E_2 είναι κάθετοι.

9 Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $A \subseteq E$, να αποδειχθεί ότι $A^\perp = (\overline{[A]})^\perp$.

10 Δείξτε ότι το άθροισμα δύο καθέτων κλειστών υποχώρων ενός χώρου Hilbert είναι κλειστός υπόχωρος.

11 (*) Στόχος της άσκησης είναι να δειχθεί ότι το άθροισμα $M+N$ δύο κλειστών υποχώρων M,N ενός χώρου H, ακόμα και χώρου Hilbert, δεν είναι κατ' ανάγκη κλειστό: Στον χώρο Hilbert ℓ^2 ορίζω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = e_{2n-1} \quad \text{και} \quad y_n = \cos(1/n)e_{2n-1} + \sin(1/n)e_{2n}$$

και ονομάζω M την κλειστή γραμμική θήκη του $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και N την κλειστή γραμμική θήκη του $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. (Παρατηρήστε ότι η «γωνία» μεταξύ των x_n και y_n είναι $1/n$.) Δείξτε ότι η τομή $M \cap N$ ισούται με $\{0\}$, και επομένως το άθροισμα $M+N$ είναι (αλγεβρικά) ευθύ.

Δείξτε ότι το διάνυσμα $y = (0, \sin(1), 0, \sin(1/2), 0, ...)$ ανήκει στο $\overline{M+N}$ αλλά όχι στο $M+N$.

12 Έστω H απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του H. Δείξτε ότι η $\{e_n\}$ δεν είναι αλγεβρική βάση του H. (Υπόδειξη: Αν το $x \in H$ είναι τέτοιο ώστε $\langle x, e_k\rangle \neq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ (υπάρχουν πάντα τέτοια x;) τότε $x \notin [e_n : n \in \mathbb{N}]$).

13 Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία στον χώρο Hilbert H και $M = \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$, δείξτε ότι $P_M(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, x_k\rangle x_k$ για κάθε $x \in H$.

14 Αν H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και N είναι κλειστός υπόχωρός του, δείξτε ότι ο N είναι διαχωρίσιμος. Δείξτε επίσης ότι κάθε ορθοκανονική οικογένεια $\{x_i\}$ σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert είναι αριθμήσιμη.
[Υπόδειξη: Επειδή $\|x_i - x_j\| = \sqrt{2}$ όταν $i \neq j$, οι ανοικτές μπάλλες $B(x_i, \frac{1}{2})$ είναι μη κενές και ξένες ανά δύο.]

15 Αποδείξτε ότι η απεικόνιση

$$\phi : f \longrightarrow \int_{1/2}^{1} f(t)dt$$

είναι γραμμική μορφή στον $C([0,1])$ και ότι είναι $\|.\|_2$-συνεχής, αλλά δεν υπάρχει *συνεχής* συνάρτηση g ώστε $\phi(f) = \langle f, g\rangle$ για κάθε $f \in C([0,1])$.

16 Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε ότι ο τοπολογικός δυϊκός E^* του E είναι χώρος Hilbert, αντιγραμμικά και ισομετρικά ισομορφικός με την πλήρωση του E.

17 Έστω Γ τυχαίο σύνολο.

(α) Αποδείξτε ότι ο $(\ell^2(\Gamma), \langle .,. \rangle)$ είναι χώρος Hilbert.

(β) Αν H είναι χώρος Hilbert με ορθοκανονική βάση $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, δείξτε ότι ο H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$.

18 (*) Αποδείξτε την εξής ασθενή μορφή της Αρχής του Ομοιομόρφου Φράγματος για χώρους Hilbert, χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος Baire:

Έστω H χώρος Hilbert, και F σύνολο συνεχών γραμμικών μορφών στον H που είναι κατά σημείο φραγμένο, δηλαδή έχει την ιδιότητα: για κάθε $x \in H$ υπάρχει $M(x) < +\infty$ ώστε $|f(x)| \leq M(x)$ για κάθε $f \in F$.
Τότε το F είναι ομοιόμορφα φραγμένο, δηλαδή $\sup\{\|f\| : f \in F\} < +\infty$.

Υπόδειξη: Για κάθε $f \in F$ υπάρχει μοναδικό $y \in H$ ώστε $f(x) = \langle x, y \rangle$ για κάθε $x \in H$. Υποθέστε ότι $\dim H = +\infty$ (η απόδειξη είναι εύκολη όταν $\dim H < +\infty$). Αν $\sup\{\|f\| : f \in F\} = +\infty$, κατασκευάστε επαγωγικά μια ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ και μια ακολουθία $\{f_n\} \subseteq F$ ώστε τα αντίστοιχα y_n να ικανοποιούν $\langle x_k, y_n \rangle = 0$ για $k > n$ και $|\langle x_n, y_n \rangle| \geq n\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} M(x_j) + n\right)$. Καταλήξτε σε άτοπο χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} x_j$.

19 (*) Αν $\{y_n\}$ είναι ακολουθία μιγαδικών αριθμών ώστε, για κάθε $\{x_n\} \in \ell^2$, η σειρά $\sum_j x_j y_j$ να συγκλίνει, δείξτε ότι $\{y_n\} \in \ell^2$ (μπορείτε να χρησιμοποιείστε την Αρχή του Ομοιομόρφου Φράγματος για την ακολουθία $\{f_n\}$ όπου $f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$, $x = \{x_j\} \in \ell^2$).

Μέρος II

Φραγμένοι Τελεστές

Από το Κεφάλαιο αυτό όλοι οι γραμμικοί χώροι και όλες οι γραμμικές απεικονίσεις θα είναι **μιγαδικοί**, εκτός αν ρητά αναφέρεται κάτι διαφορετικό.

10 Ορισμοί και παραδείγματα.

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, οι γραμμικές απεικονίσεις είναι αυτομάτως συνεχείς (βλ. Παράδειγμα 10.5). Αυτό δεν ισχύει πάντα σε απειροδιάστατους χώρους. Παραδείγματος χάριν, η απεικόνιση $T : (c_{oo}, \|.\|_2) \to (c_{oo}, \|.\|_2)$ όπου $T((x(n))) = (nx(n))$ δεν είναι συνεχής, γιατί αν $x_n = e_n/n$ τότε $x_n \to 0$ ενώ $T(x_n) \nrightarrow 0$ (βλ. και Παράδειγμα 10.7). Παρατηρούμε ότι στο παράδειγμα αυτό η ποσότητα

$$\sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

είναι άπειρη.

Όπως θα δούμε, μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ οποιωνδήποτε χώρων με νόρμα είναι συνεχής ακριβώς όταν η ποσότητα αυτή είναι πεπερασμένη.

Θεώρημα 10.1 *Αν $(E, \|.\|_E)$ και $(F, \|.\|_F)$ είναι χώροι με νόρμα και $T : E \to F$ είναι γραμμική απεικόνιση, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η T είναι συνεχής.*

(β) *Η T είναι συνεχής στο $0 \in E$.*

(γ) *Η T είναι συνεχής σε κάποιο σημείο του E.*

(δ) *Υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ για κάθε $x \in E$.*

(ε) *Ο περιορισμός της T στην μοναδιαία σφαίρα του E είναι φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή το σύνολο $\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\}$ είναι φραγμένο.*

(στ) *Η T είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη (α) $\Rightarrow$ **(β)** Προφανές.
(β) $\Rightarrow$ **(γ)** Προφανές.
(γ) $\Rightarrow$ **(δ)** Αν η T είναι συνεχής στο $x_o \in E$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$z \in E, \|z - x_o\| < \delta \Longrightarrow \|Tz - Tx_o\| < 1.$$

Επομένως, αν $y \in E$, $y \neq 0$, επειδή $\|(\frac{\delta}{2\|y\|}y + x_o) - x_o\| < \delta$, έχουμε

$$\left\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| = \frac{2}{\delta}\left\|T\left(\frac{\delta}{2\|y\|}y + x_o\right) - Tx_o\right\| < \frac{2}{\delta},$$

άρα $\|T(y)\| \leq \frac{2}{\delta}\|y\|$, και βέβαια η τελευταία ανισότητα ισχύει και για $y = 0$.
(δ) $\Leftrightarrow$ **(ε)** Αν $\|Tx\| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in E$, τότε $\|Tx\| \leq M$ για κάθε x στη μοναδιαία σφαίρα του E. Αντίστροφα, αν M είναι ένα φράγμα του συνόλου $\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$, τότε για κάθε $x \in E$, $x \neq 0$ ισχύει $\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq M$, άρα $\|Tx\| \leq M\|x\|$, και η ανισότητα ισχύει και για $x = 0$.

(δ) ⇒ (στ) Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $x, y \in E$ με $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{M}$, τότε $\|Tx - Ty\| \leq M\|x - y\| < \varepsilon$, άρα η T είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(στ) ⇒ (α) Προφανές. $\square$

Σημείωση Επομένως, για να ελέγξουμε αν μια γραμμική απεικόνιση είναι συνεχής, αρκεί να ελέγξουμε αν είναι συνεχής στο 0.

Ορισμός 10.1 (i) *Μία γραμμική απεικόνιση* $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *λέγεται* **φραγμένη** *ή* **φραγμένος τελεστής (bounded operator)** *αν ο περιορισμός της* T *στην μοναδιαία σφαίρα του* E *είναι φραγμένη συνάρτηση.*

(ii) *Αν* $T : E \to F$ *είναι γραμμική απεικόνιση, θέτουμε*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \in [0, +\infty].$$

Η T *είναι φραγμένη αν και μόνον αν* $\|T\| < +\infty$.

Παρατηρήσεις (i) Από το Θεώρημα 10.1 προκύπτει ότι, σε χώρους με νόρμα, μια *γραμμική* απεικόνιση είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι φραγμένη.

(ii) Η έννοια του φραγμένου τελεστή διαφέρει από την έννοια της φραγμένης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Είναι φανερό ότι μια γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν μπορεί να είναι φραγμένη με την συνηθισμένη έννοια, εκτός αν $f = 0$ (Άσκηση 20).

Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι φραγμένος τελεστής αν και μόνον αν η συνάρτηση[22] $T|_{B_E} : B_E \to F$ είναι φραγμένη με την συνηθισμένη έννοια.

(iii) Ισοδύναμα, μια γραμμική απεικόνιση είναι φραγμένη αν και μόνον αν απεικονίζει φραγμένα σύνολα του E σε φραγμένα σύνολα του F (Άσκηση 21).

(iv) Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\|T\|$ εξαρτάται και από τις δύο νόρμες $\|.\|_E$, $\|.\|_F$. Παραδείγματος χάριν, η ταυτοτική απεικόνιση $I : c_{oo} \to c_{oo}$ είναι φραγμένη ως απεικόνιση $(c_{oo}, \|.\|_2) \to (c_{oo}, \|.\|_\infty)$, όχι όμως ως απεικόνιση $(c_{oo}, \|.\|_\infty) \to (c_{oo}, \|.\|_2)$ (Άσκηση 22). Συνήθως παραλείπουμε τους δείκτες $\|.\|_E, \|.\|_F$ στις νόρμες, εκτός αν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

Πρόταση 10.2 *Αν* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *είναι χώροι με νόρμα και* $T : E \to F$ *φραγμένος τελεστής, τότε*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E = 1\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\} \\ &= \inf\{k > 0 : \|Tx\|_F \leq k\|x\|_E \text{ για κάθε } x \in E\}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\|Tx\|_F \leq \|T\|.\|x\|_E$$

για κάθε $x \in E$.

[22] Με B_E συμβολίζουμε την κλειστή μοναδιαία μπάλλα $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ ενός χώρου με νόρμα E.

Απόδειξη Θέτουμε

$$A = \{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E = 1\}, \qquad \alpha = \sup A$$

$$B = \left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0 \right\}, \qquad \beta = \sup B$$

$$\Gamma = \{k > 0 : \|Tx\|_F \leq k\|x\|_E \text{ για κάθε } x \in E\}, \quad \gamma = \inf \Gamma$$

Θα δείξουμε ότι $\|T\| \geq \alpha \geq \beta \geq \gamma \geq \|T\|$.

Αφού $\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E = 1\} \subseteq \{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$, έχουμε $\alpha \leq \|T\|$.

Επίσης, αν $x \in E \setminus \{0\}$, τότε

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \|T\frac{x}{\|x\|_E}\|_F \leq \alpha$$

(αφού $\|\frac{x}{\|x\|_E}\|_E = 1$), άρα $\beta \leq \alpha$.

Αν $x \in E \setminus \{0\}$, τότε $\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq \beta$ άρα $\|Tx\|_F \leq \beta\|x\|_E$. Η τελευταία ανισότητα ισχύει και για $x = 0$, άρα $\beta \in \Gamma$ και συνεπώς $\gamma \leq \beta$.

Αν $k \in \Gamma$, τότε για κάθε $x \in E$ με $\|x\|_E \leq 1$ έχουμε $\|Tx\|_F \leq k$, άρα $\|T\| \leq k$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $k \in \Gamma$, έχουμε $\|T\| \leq \gamma$.

Έπεται ότι $\gamma = \beta = \alpha = \|T\|$.

Η σχέση $\sup B = \|T\|$ δείχνει ότι $\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq \|T\|$, άρα $\|Tx\|_F \leq \|T\|.\|x\|_E$ για κάθε $x \in E \setminus \{0\}$, και η ανισότητα αυτή ισχύει και για $x = 0$. Η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Παρατήρηση 10.3 Οι ισότητες της Πρότασης αληθεύουν και για μη φραγμένους τελεστές, αν συμφωνήσουμε ότι $\inf \emptyset = +\infty$ (Άσκηση 23).

Στην πράξη, πολλές φορές μια γραμμική απεικόνιση T είναι κατ' αρχήν ορισμένη μεταξύ δύο χώρων με νόρμα που δεν είναι πλήρεις, και ενδιαφερόμαστε να την επεκτείνουμε σε μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των πληρώσεων των δύο χώρων. Η επόμενη Πρόταση καθορίζει πότε μια τέτοια επέκταση είναι δυνατή. Σημειώνουμε ότι, επειδή κάθε χώρος με νόρμα εμφυτεύεται ισομετρικά (δηλαδή, «με την ίδια νόρμα») σε έναν χώρο Banach (την πλήρωσή του), μπορούμε εξ αρχής να υποθέσουμε ότι η T παίρνει τιμές μέσα σε έναν χώρο Banach.

Πρόταση 10.4 *Έστω $(E, \|.\|_E)$ χώρος με νόρμα, $(F, \|.\|_F)$ χώρος Banach, D πυκνός υπόχωρος του E και $T : D \to F$ γραμμική απεικόνιση. Η T είναι συνεχής αν και μόνον αν υπάρχει συνεχής επέκταση $T_1 : E \to F$ της T στον E. Η επέκταση T_1 είναι μοναδική (αν υπάρχει) και $\|T_1\| = \|T\|$.*

Απόδειξη. Ο περιορισμός μιας συνεχούς απεικόνισης είναι, βέβαια, συνεχής.

Έστω αντίστροφα ότι η T είναι συνεχής στο D. Θα την επεκτείνουμε κατά συνεχή τρόπο στο τυχόν $x \in E$. Επειδή ο D είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}$ στον D με $x_n \to x$.

(1) Υπάρχει $y_x \in F$ ώστε $Tx_n \to y_x$.
Πράγματι, η ανισότητα

$$\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\|.\|x_n - x_m\|$$

δείχνει ότι η ακολουθία $\{Tx_n\}$ είναι βασική στον F, άρα, εφόσον ο F είναι πλήρης, συγκλίνει.

(2) Παρατηρούμε ότι το y_x εξαρτάται μόνον από το x, και όχι από την $\{x_n\}$. Πράγματι, αν $\{z_n\}$ είναι μια άλλη ακολουθία στον D που επίσης συγκλίνει στο x, τότε $\lim(x_n - z_n) = 0$, συνεπώς

$$\|Tx_n - Tz_n\| \leq \|T\|.\|x_n - z_n\| \to 0,$$

άρα $\lim_n Tx_n = \lim_n Tz_n$.

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την T_1 σ' όλον τον E θέτοντας $T_1 x = y_x$, δηλαδή

$$T_1(\lim x_n) \overset{\text{ορ}}{=} \lim Tx_n\,.$$

Είναι φανερό ότι $T_1|D = T$ (πράγματι, αν $x \in D$, θέτοντας $x_n = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $T_1 x = \lim Tx_n = Tx$). Η γραμμικότητα της T_1 ελέγχεται άμεσα: αν $x, y \in F$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, υπάρχουν ακολουθίες $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ στον D με $x_n \to x$ και $y_n \to y$, οπότε $Tx_n \to T_1 x$ και $Ty_n \to T_1 y$, άρα

$$T_1(x + \lambda y) = \lim_n T(x_n + \lambda y_n) = \lim_n Tx_n + \lambda \lim_n Ty_n = T_1 x + \lambda T_1 y.$$

Για να ελέγξουμε αν η T_1 είναι συνεχής (ισοδύναμα, από την Πρόταση 10.1, φραγμένη) παρατηρούμε ότι ο ορισμός της συνεπάγεται ότι, για κάθε $x \in E$ και $\{x_n\} \subseteq D$ με $x = \lim x_n$, ισχύει

$$\|T_1 x\| = \lim \|Tx_n\| \leq \|T\|.\lim \|x_n\| = \|T\|.\|x\|\,.$$

Επομένως (Πρόταση 10.2) η T_1 είναι φραγμένη στον E και μάλιστα $\|T_1\| \leq \|T\|$. Εφόσον όμως $\|T_1 x\| = \|Tx\|$ όταν $x \in D$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in D, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|T_1 x\| : x \in D, \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T_1 x\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} = \|T_1\|\end{aligned}$$

άρα $\|T_1\| = \|T\|$.

Τέλος, η επέκταση T_1 είναι μοναδική: αν T_2 είναι μια επέκταση της T, τότε ταυτίζεται με την T_1 στον πυκνό υπόχωρο D, επομένως, λόγω συνέχειας, παντού: για κάθε $x \in E$, αν (x_n) είναι ακολουθία στον D και $x_n \to x$, έχουμε

$$T_2 x = \lim_n T_2 x_n = \lim_n Tx_n = T_1 x. \quad \square$$

10.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 10.5 (Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης)
Έστω $(E, \|.\|)$ χώρος με νόρμα και $\dim E = n < +\infty$. Σταθεροποιούμε μια βάση

$\{e_k : k = 1, ..., n\}$ του E. Κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to E$ καθορίζεται από την δράση της πάνω στην βάση, δηλαδή από τα διανύσματα $\{Te_k : k = 1, ..., n\}$. Όμως κάθε Te_k είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{e_i\}$:

$$Te_k = \sum_{i=1}^{n} t_{ik} e_i \qquad (t_{ik} \in \mathbb{C}) \tag{4}$$

δηλαδή η T καθορίζεται από τον $n \times n$ πίνακα (t_{ik}) (η k-οστή στήλη του πίνακα αποτελείται από τις συντεταγμένες του Te_k ως προς την βάση $\{e_i\}$). Αντίστροφα, κάθε $n \times n$ πίνακας (s_{ik}) ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$$S : E \to E$$

θέτοντας $Se_k = \sum_{i=1}^{n} s_{ik} e_i$ για κάθε k και επεκτείνοντας γραμμικά, δηλαδή

$$S\left(\sum_{k=1}^{n} x(k) e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x(k). \sum_{i=1}^{n} s_{ik} e_i$$

Επομένως, η σχέση (4) ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $\mathcal{L}(E)$ των γραμμικών απεικονίσεων $E \to E$ και του συνόλου $M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ πινάκων μιγαδικών αριθμών. Τονίζουμε ότι η απεικόνιση αυτή *εξαρτάται από την επιλογή της βάσης*.

Ειδικότερα, αν ο E είναι χώρος Hilbert (διάστασης n) και η $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση, η παραπάνω αντιστοιχία ορίζεται από την σχέση

$$\langle Te_k, e_i \rangle = t_{ik}, \quad i, k = 1, ..., n$$

που προκύπτει άμεσα από την (4).

Σε χώρους με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση είναι αναγκαστικά συνεχής.

Πράγματι, αν $\|\cdot\|$ είναι μια οποιαδήποτε νόρμα στον E και $S : E \to E$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε αν $\{e_i\}$ είναι μια βάση του E, για κάθε $x = \sum x(k) e_k \in E$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|Sx\|^2 &= \left\| S\left(\sum_{k=1}^{n} x(k) e_k\right) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} x(k) Se_k \right\|^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|.\|Se_k\|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \|Se_k\|^2\right) \end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz στον $\mathbb{R}^n$. Αν τώρα $\{x_i\}$ είναι ακολουθία στοιχείων του E ώστε $\|x_i\| \to 0$, τότε οι ακολουθίες $\{x_i(k)\}$ $(k = 1, ..., n)$ των συντεταγμένων του κάθε x_i είναι όλες μηδενικές ακολουθίες (γιατί;), επομένως

$$\lim_i \left(\sum_{k=1}^{n} |x_i(k)|^2\right)^{1/2} = 0, \text{ άρα } \lim_i \|Sx_i\| = 0$$

από την προηγούμενη ανισότητα.

Παράδειγμα 10.6 *Αν* $(E, \|.\|), (F, \|.\|)$ *είναι χώροι με νόρμα με* $\dim E < \infty$ *και* $S : E \to F$ *γραμμική απεικόνιση, τότε η* S *είναι κατ' ανάγκη συνεχής.*
Πραγματικά, στην προηγούμενη απόδειξη δεν χρησιμοποιήθηκε πουθενά ότι η S παίρνει τιμές σε χώρο πεπερασμένης διάστασης.

Παρατήρηση 10.7 *Αν* $(E, \|.\|), (F, \|.\|)$ *είναι χώροι με νόρμα με* $\dim F < \infty$ *και* $S : E \to F$ *γραμμική απεικόνιση, τότε η* S **δεν** *είναι κατ' ανάγκη συνεχής, αν* $\dim E = +\infty$*. Παραδείγματα σε συγκεκριμένους χώρους θα δούμε στην συνέχεια. Εδώ θέλουμε να δείξουμε ότι, οποτεδήποτε ο* E *είναι απειροδιάστατος, υπάρχουν πάντα και συνεχείς (μη τετριμμένες) και ασυνεχείς γραμμικές απεικονίσεις* $S : E \to F$*, όποιος και να είναι ο* F.

Απόδειξη Έστω $f : E \to \mathbb{C}$ μη μηδενική γραμμική μορφή και $y \in F \setminus \{0\}$. Ορίζουμε[23]

$$S : E \to F : x \to f(x)y.$$

Η γραμμικότητα της S έπεται άμεσα από την γραμμικότητα της f.

Η S είναι συνεχής αν και μόνον αν η f είναι συνεχής. Επομένως, αν αποδείξω την ύπαρξη συνεχών και ασυνεχών γραμμικών μορφών στον E, θα έχω αποδείξει την ύπαρξη συνεχών και ασυνεχών γραμμικών απεικονίσεων από τον E σε οποιονδήποτε χώρο με νόρμα F.

(a) Η ύπαρξη μιας μη μηδενικής συνεχούς γραμμικής μορφής εξασφαλίζεται από το Θεώρημα Hahn – Banach.

(b) Μια ασυνεχής γραμμική απεικόνιση:

Ο E, όπως κάθε γραμμικός χώρος, έχει μια *αλγεβρική βάση*, δηλαδή ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο B ώστε $[B] = E$. Αφού ο E δεν είναι πεπερασμένης διάστασης, το σύνολο B είναι άπειρο, περιέχει επομένως μια άπειρη ακολουθία $\{x_n\}$. Θέτουμε $\{y_\alpha : \alpha \in A\} = B \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Κάθε $x \in E$ γράφεται μοναδικά ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της B:

$$x = \sum_n \lambda_n x_n + \sum_\alpha \mu_\alpha y_\alpha$$

όπου μόνον πεπερασμένο πλήθος συντελεστών λ_n και μ_α είναι μη μηδενικοί. Θέτουμε:

$$f(x) = \sum_n n\lambda_n \|x_n\| + 0$$

(δηλαδή η f απεικονίζει κάθε x_n στο $n\|x_n\|$ και τα υπόλοιπα στοιχεία της B (αν υπάρχουν) στο 0). Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η f είναι γραμμική. Δεν είναι όμως συνεχής, γιατί ενώ $\frac{x_n}{n\|x_n\|} \to 0$, έχουμε $\lim f(\frac{x_n}{n\|x_n\|}) = 1 \neq 0$.

Σημείωση. Και τα δύο παραδείγματα στηρίζονται ουσιαστικά στο αξίωμα της επιλογής: το μεν πρώτο μέσω του Θεωρήματος Hahn – Banach, το δε δεύτερο μέσω της ύπαρξης αλγεβρικής βάσης σε κάθε γραμμικό χώρο (ακόμα και απειροδιάστατο).

[23] Ο τελεστής S λέγεται *τελεστής πρώτης τάξης*, γιατί το πεδίο τιμών του $\mathrm{im}\, S$ είναι μονοδιάστατος υπόχωρος του F. Περισσότερα στο Κεφάλαιο 3.

Παράδειγμα 10.8 (Διαγώνιοι τελεστές) Αν $a = \{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{C}$, είναι τυχούσα ακολουθία, ορίζω

$$D_a x = (a_1 x(1), a_2 x(2), a_3 x(3), \ldots), \qquad x \in \ell^2$$

Τότε (α) Ο D_a ορίζει φραγμένο τελεστή $\ell^2 \to \ell^2$ αν και μόνον αν η a είναι φραγμένη ακολουθία, και τότε $\|D_a\| = \sup_n |a_n|$.

(β) Αν $D_a(\ell^2) \subseteq \ell^2$ τότε η a είναι φραγμένη ακολουθία (Άσκηση 24).

Παρατηρούμε ότι, όποια κι αν είναι η ακολουθία a, η απεικόνιση D_a ορίζεται στον (πυκνό) υπόχωρο c_{oo} του ℓ^2, είναι γραμμική και έχει πεδίο τιμών μέσα στον c_{oo}. Επεκτείνεται όμως σ' όλον τον ℓ^2 αν και μόνον αν η a είναι φραγμένη ακολουθία. Ο D_a λέγεται **διαγώνιος τελεστής** γιατί ο $(\infty \times \infty)$ πίνακας που αντιστοιχεί στον D_a ως προς την συνηθισμένη ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του ℓ^2 είναι διαγώνιος: $\langle D_a e_n, e_m \rangle = a_n$ αν $n = m$ και $\langle D_a e_n, e_m \rangle = 0$ αν $n \neq m$.

Παράδειγμα 10.9 (Τελεστές μετατόπισης (shift operators)) Υπενθυμίζω ότι ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2 < +\infty$. Έχει (αριθμήσιμη) ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$, όπου $e_n(m) = \delta_{nm}$ $(m \in \mathbb{Z})$. Ιδιαίτερα σημαντικοί είναι οι τελεστές της μετατόπισης (shift) που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} Ue_n &= e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \\ \text{και } U^* e_n &= e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

και επεκτείνονται, πρώτα γραμμικά στον πυκνό υπόχωρο $c_{oo}(\mathbb{Z}) = [e_n : n \in \mathbb{Z}]$, και μετά, επειδή είναι συνεχείς (Άσκηση 25), σ' όλον τον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (Πρόταση 10.4). Οι τελεστές αυτοί είναι και οι δύο ισομετρίες και ικανοποιούν $U^* \circ U = U \circ U^* = I$ (Άσκηση 25). Είναι επομένως ισομετρίες επί.

Παράδειγμα 10.10 Ο χώρος $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ μπορεί να θεωρηθεί ως ο κλειστός υπόχωρος του $\ell^2(\mathbb{Z})$ που $\overline{\text{παράγεται από τα}}$ $\{e_n : n = 0, 1, \ldots\}$. Παρατηρούμε ότι $U(\ell^2) \subseteq \ell^2$, ενώ $U^*(\ell^2) = \overline{[e_{-1}, e_0, e_1, \ldots]}$. Ορίζουμε λοιπόν

$$S = U|_{\ell^2}$$

$$S^* e_n = \begin{cases} U^* e_n & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases}$$

(επειδή $U^* e_0 = e_{-1} \notin \ell^2$). Έτσι, οι S και S^* είναι τελεστές από τον ℓ^2 στον εαυτό του.

Ο S είναι και αυτός, όπως ο U, ισομετρία, δεν είναι όμως επί. Ο S^* έχει νόρμα 1 και είναι επί, δεν είναι όμως ένα προς ένα, συνεπώς δεν είναι ισομετρία. Η σχέση $S^* \circ S = I$ δείχνει ότι ο S έχει αριστερά αντίστροφο και ο S^* έχει δεξιά αντίστροφο, κανένας από τους δύο όμως δεν είναι αντιστρέψιμος, γιατί $S \circ S^* \neq I$. (Απόδειξη: Άσκηση 26)

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι η κατάσταση είναι ριζικά διαφορετική από εκείνη των χώρων πεπερασμένης διάστασης.[24]

[24]Στη Γραμμική 'λγεβρα μαθαίνουμε ότι, αν $\dim E < +\infty$, μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to E$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνον αν είναι ένα προς ένα, αν και μόνον αν είναι επί, αν και μόνον αν έχει αριστερά αντίστροφο, αν και μόνον αν έχει δεξιά αντίστροφο.

Παράδειγμα 10.11 (Τελεστές πολλαπλασιασμού) Αν $f \in C([0,1])$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$M_f^o : C([0,1]) \to C([0,1]) : g \to f.g$$

(δηλαδή $(M_f^o g)(t) = f(t)g(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$). Είναι σαφές ότι η M_f^o είναι γραμμική. Εξάλλου

$$\|M_f^o g\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)g(t)|^2 dt \le \sup\{|f(t)|^2 : t \in [0,1]\} \int_0^1 |g(t)|^2 dt = \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2$$

πράγμα που δείχνει (Πρόταση 10.4) ότι η M_f^o επεκτείνεται σε έναν φραγμένο τελεστή, που τον συμβολίζουμε M_f, από τον $L^2([0,1])$ στον εαυτό του, με νόρμα $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$ (Η f είναι φραγμένη, αφού είναι συνεχής στο συμπαγές $[0,1]$, άρα $\|f\|_\infty < +\infty$).

Στην πραγματικότητα, ισχύει $\|M_f\| = \|f\|_\infty$. Πραγματικά, αν θέσω $K = \|f\|_\infty$, τότε για κάθε $\varepsilon \in (0, K)$ υπάρχει ένα διάστημα $J \subseteq [0,1]$ ώστε $|f(t)| \ge K - \varepsilon$ για κάθε $t \in J$. Υπάρχει όμως συνάρτηση $g \in C([0,1])$, $g \ne 0$, που μηδενίζεται έξω από το J, οπότε

$$\|M_f\|^2 \|g\|_2^2 \ge \|M_f g\|_2^2 = \int_J |f(t)g(t)|^2 dt \ge (K-\varepsilon)^2 \int_J |g(t)|^2 dt = (K-\varepsilon)^2 \|g\|_2^2$$

πράγμα που σημαίνει ότι $\|M_f\| \ge K - \varepsilon$ και επομένως, επειδή το ε είναι αυθαίρετο, ότι $\|M_f\| \ge K = \|f\|_\infty$. Ο τελεστής M_f λέγεται τελεστής πολλαπλασιασμού[25] που αντιστοιχεί στην f.

Παράδειγμα 10.12 (Ολοκληρωτικοί τελεστές) Αν $H = L^2([0,1])$ και $k \in C([0,1] \times [0,1])$, ορίζουμε

$$(Kf)(x) = \int k(x,y) f(y) dy, \quad f \in C([0,1]).$$

Η συνάρτηση Kf είναι συνεχής στο $[0,1]$ (Άσκηση 27) και η απεικόνιση $K : f \to Kf$ είναι προφανώς γραμμική. Αν θέσουμε

$$\|k\|_{22} = \left(\iint |k(x,y)|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

αποδεικνύεται ('σκηση 27) ότι $\|Kf\|_2 \le \|k\|_{22} \, \|f\|_2$. Επομένως η K επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $K : H \to H$ με νόρμα το πολύ ίση με $\|k\|_{22}$. Ο τελεστής αυτός λέγεται **ολοκληρωτικός τελεστής με πυρήνα** k (integral operator with kernel k). Η σχέση

$$(Kf)(x) = \int k(x,y) f(y) dy$$

[25] Χρησιμοποιώντας Θεωρία Μέτρου, μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι ο τελεστής M_f ορίζεται και είναι φραγμένος για κάθε (ουσιωδώς) φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{C}$.

που ορίζει τον τελεστή K από τον πυρήνα k αποτελεί το συνεχές ανάλογο της σχέσης

$$(Tx)_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$$

που ορίζει τον τελεστή $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ από τον πίνακα (t_{ij}). Μάλιστα, θα δείξουμε αργότερα ότι ένας τέτοιος ολοκληρωτικός τελεστής προσεγγίζεται από τελεστές T που ορίζονται από $n \times n$ πίνακες.

Παράδειγμα 10.13 Ο τελεστής του Volterra ορίζεται από τον τύπο

$$(Vf)(t) = \int_t^1 f(s)ds \quad t \in [0,1]$$

όπου $f \in C([0,1])$. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση Vf είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επειδή $\|Vf\|_2 \le (1/\sqrt{2})\|f\|_2$ (γιατί;) και η απεικόνιση V είναι προφανώς γραμμική, επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $V : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$. Παρατηρείστε ότι $(Vf)(t) = \int_0^1 \chi(t,s)f(s)ds \;\; (t \in [0,1])$ όπου

$$\chi(t,s) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le s \le t \le 1 \\ 1 & , \quad 0 \le t < s \le 1 \end{cases}$$

είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του τριγώνου $\{(s,t) \in [0,1]^2 : s > t\}$. Επομένως ο τελεστής του Volterra είναι και αυτός ολοκληρωτικός τελεστής, μόνο που ο πυρήνας του δεν είναι συνεχής συνάρτηση.

Παράδειγμα 10.14 (Ένας διαφορικός τελεστής) Αν $C^1([0,1])$ είναι ο χώρος των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων και $f \in C^1([0,1])$, ορίζουμε

$$(Df)(t) = f'(t), t \in [0,1].$$

Έτσι κατασκευάσαμε μια απεικόνιση

$$D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$$

που είναι προφανώς γραμμική. Παρόλο που ο $C^1([0,1])$ είναι πυκνός στον $L^2([0,1])$ (Άσκηση 29), η D δεν επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή από τον $L^2([0,1])$ στον εαυτό του, γιατί δεν είναι $\|.\|_2$-συνεχής. Πραγματικά, αν $f_n(t) = t^n$ τότε $\|f_n\|_2 = (2n+1)^{-1/2} \to 0$, ενώ $\|Df_n\|_2 = n(2n-1)^{-1/2} \to +\infty$.

Παράδειγμα 10.15 (Ένας τελεστής σύνθεσης) Έστω $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ γνησίως αύξουσα, επί και συνεχώς διαφορίσιμη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $f \in C([c,d])$ η συνάρτηση $t \to (\varphi'(t))^{1/2} f(\varphi(t))$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $[a,b]$. Ορίζουμε

$$C_\varphi^o : C([c,d]) \to C([a,b]) : f \to (\varphi')^{1/2}(f \circ \varphi)$$

και παρατηρούμε ότι

$$\|C_\varphi^o(f)\|_2^2 = \int_a^b \varphi'(t)|f(\varphi(t))|^2 dt = \int_c^d |f(s)|^2 ds = \|f\|_2^2$$

επομένως ο C_φ^o επεκτείνεται σε ισομετρία $C_\varphi : L^2([c,d]) \to L^2([a,b])$. Μάλιστα, αν η φ' δεν μηδενίζεται πουθενά, ο C_φ είναι επί, γιατί αν θέσω $\psi = \varphi^{-1}$, τότε για κάθε $g \in C([a,b])$ έχω

$$C_\varphi(C_\psi(g)) = C_\varphi((\psi')^{1/2}(g \circ \psi)) = (\varphi')^{1/2}(\psi' \circ \varphi)^{1/2}(g \circ \psi \circ \varphi) = g$$

εφόσον $\psi' \circ \varphi = \frac{1}{\varphi'}$.

11 Χώροι Τελεστών

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε ιδιότητες μεμονωμένων γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ χώρων με νόρμα. Θα μελετήσουμε τώρα την δομή του συνόλου όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T : (E, \|.\|) \to (F, \|.\|)$.

Ορισμός 11.1 *Αν $(E, \|.\|), (F, \|.\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E,F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων*

$$T : (E, \|.\|) \to (F, \|.\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E,E)$.

Παρατηρήσεις 11.1 **(i)** Όπως είδαμε στο παράδειγμα 10.7, το $\mathcal{B}(E,F)$ είναι πάντα μη τετριμμένο (δηλαδή $\neq \{0\}$). Μάλιστα, αν $\dim E > 1$, το $\mathcal{B}(E)$ δεν περιέχει μόνον τα πολλαπλάσια του ταυτοτικού τελεστή.
(ii) Αν $T, S \in \mathcal{B}(E,F)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, ορίζουμε τον τελεστή $T + \lambda S$ από την σχέση

$$(T + \lambda S)(x) = Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E).$$

είναι φανερό ότι $T + \lambda S \in \mathcal{B}(E,F)$ και επομένως το σύνολο $\mathcal{B}(E,F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Πρόταση 11.2 *Η απεικόνιση $T \to \|T\|$ είναι νόρμα στον γραμμικό χώρο $\mathcal{B}(E,F)$. Αν επί πλέον ο F είναι πλήρης, ο $\mathcal{B}(E,F)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. **(i)** Αν $T, S \in \mathcal{B}(E,F)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε
(α) Για κάθε $x \in E$,

$$\|(T+S)x\| = \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\|,$$

συνεπώς $T + S \in \mathcal{B}(E,F)$ και $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$ (Πρόταση 10.2).
(β) $\|\lambda T\| = \sup\{\|(\lambda T)x\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\lambda|\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$
$= |\lambda|.\sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} = |\lambda|.\|T\|$.
(γ) Αν $\|T\| = 0$ τότε $\|Tx\| \leq \|T\|.\|x\| = 0$ για κάθε $x \in E$, άρα $Tx = 0$ για κάθε $x \in E$ δηλαδή $T = 0$.
Συνεπώς η $\|\cdot\|$ είναι πράγματι νόρμα στον $\mathcal{B}(E,F)$.

(ii) Έστω ότι ο F είναι πλήρης. Αν $\{T_n\}$ είναι μια ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{B}(E,F)$ που είναι βασική ως προς την νόρμα του, πρέπει να βρούμε έναν $T \in \mathcal{B}(E,F)$ ώστε $\|T_n - T\| \to 0$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in E$ έχουμε $\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|.\|x\|$, επομένως η ακολουθία $\{T_n x\}$ είναι βασική ακολουθία στοιχείων του F. Εφόσον ο F είναι *πλήρης*, η ακολουθία αυτή συγκλίνει. Ονομάζουμε Tx το όριό της. Ορίζουμε έτσι μιαν απεικόνιση

$$T : E \to F : x \to Tx = \lim_n T_n x\,.$$

(α) Η T είναι γραμμική. Πράγματι, αν $x_1, x_2 \in E$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$\begin{aligned} T(x_1 + \lambda x_2) &= \lim_n T_n(x_1 + \lambda x_2) = \lim_n (T_n x_1 + \lambda T_n x_2) \\ &= \lim_n T_n x_1 + \lambda \lim_n T_n x_2 = Tx_1 + \lambda T x_2. \end{aligned}$$

(β) Αν $\varepsilon > 0$, επειδή η $\{T_n\}$ είναι $\|.\|$-βασική, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$m, n \geq k \Rightarrow \|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in E$ με $\|x\| \leq 1$,

$$m, n \geq k \Rightarrow \|T_n x - T_m x\| < \varepsilon\,.$$

Επειδή $Tx = \lim T_n x$, παίρνοντας όριο ως προς n, βρίσκουμε

$$m \geq k \Rightarrow \|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon.$$

Επειδή η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x \in E$ με $\|x\| \leq 1$, και το k δεν εξαρτάται από το x, έπεται ότι, για κάθε $m \geq k$, η γραμμική απεικόνιση $T - T_m$ είναι φραγμένη, και

$$m \geq k \Rightarrow \|T - T_m\| = \sup\{\|(T - T_m)x\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \leq \varepsilon\,.$$

Επομένως και η $T = (T - T_m) + T_m$ είναι φραγμένη, δηλαδή $T \in \mathcal{B}(E, F)$. Έχουμε όμως δείξει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $m \geq k \Rightarrow \|T - T_m\| < \varepsilon$, άρα $\|T_n - T\| \to 0$. $\square$

Παρατήρηση Σημειώνουμε ότι ο $\mathcal{B}(E, F)$ είναι χώρος Banach οποτεδήποτε ο F είναι χώρος Banach, ανεξάρτητα από την πληρότητα ή μη του E.

Ειδικότερα, το σύνολο E^* των συνεχών (μιγαδικών) γραμμικών μορφών σε έναν χώρο με νόρμα E, δηλαδή ο χώρος $\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$, είναι χώρος Banach.

Παρατήρηση Αν E, F, G είναι χώροι με νόρμα, $S : E \to F$ και $T : F \to G$ γραμμικές απεικονίσεις, τότε η σύνθεση

$$\begin{aligned} TS \equiv T \circ S \quad : \quad & E \to F \to G \\ & x \longrightarrow T(S(x)) \end{aligned}$$

ορίζεται και είναι γραμμική απεικόνιση. Αν επιπλέον οι S, T είναι φραγμένες, τότε η TS είναι συνεχής. Μάλιστα, για κάθε $x \in E$,

$$\|(TS)x\| = \|T(S(x))\| \leq \|T\|.\|Sx\| \leq \|T\|.\|S\|.\|x\|,$$

επομένως $\|TS\| \leq \|T\|.\|S\|$.

Η παρατήρηση αυτή έχει ιδιαίτερη σημασία στην περίπτωση που $E = F = G$ και ο E είναι χώρος Banach, γιατί δείχνει ότι ο χώρος Banach $\mathcal{B}(E)$ είναι εφοδιασμένος με μια ακόμη πράξη, την σύνθεση απεικονίσεων (που ορίζεται για κάθε $T, S \in \mathcal{B}(E)$), η οποία είναι συμβιβαστή με την γραμμική και την τοπολογική του δομή:

Πρόταση 11.3 *Αν ο E είναι χώρος Banach, τότε το σύνολο $\mathcal{B}(E)$ είναι* **άλγεβρα Banach**, *δηλαδή*

(i) είναι (μιγαδική) άλγεβρα ως προς τις γραμμικές πράξεις κατά σημείο και την σύνθεση απεικονίσεων,

(ii) είναι χώρος Banach ως προς την νόρμα τελεστή και

(iii) $\|TS\| \leq \|T\|.\|S\|$ για κάθε $T, S \in \mathcal{B}(E)$.

(Θυμίζουμε ότι μια μιγαδική (προσεταιριστική) **άλγεβρα** $\mathcal{A}$ είναι μια τετράδα $(\mathcal{A}, +, \cdot, \circ)$ ώστε η τριάδα $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ να είναι (μιγαδικός) γραμμικός χώρος, η τριάδα $(\mathcal{A}, +, \circ)$ να είναι δακτύλιος και επιπλέον $\lambda \cdot (a \circ b) = (\lambda \cdot a) \circ b = a \circ (\lambda \cdot b)$ για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.)

Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή των ορισμών (Άσκηση 31).

Παρατήρηση 11.4 Σημειώνουμε ότι η ανισότητα $\|TS\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$ εξασφαλίζει ότι ο πολλαπλασιασμός (η σύνθεση απεικονίσεων) είναι συνεχής ως απεικόνιση

$$(\mathcal{B}(E), \|.\|) \times (\mathcal{B}(E), \|.\|) \to (\mathcal{B}(E), \|.\|).$$

Πράγματι, αν $\|T_n - T\| \to 0$ και $\|S_n - S\| \to 0$, τότε

$$\begin{aligned} \|T_n S_n - TS\| &= \|T_n S_n - T S_n + T S_n - TS\| = \|(T_n - T)S_n + T(S_n - S)\| \\ &\leq \|(T_n - T)S_n\| + \|T(S_n - S)\| \\ &\leq \|T_n - T\|.\|S_n\| + \|T\|.\|S_n - S\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι η άλγεβρα $\mathcal{B}(E)$ έχει μονάδα (ως δακτύλιος) τον ταυτοτικό τελεστή $I : E \to E$, αλλά δεν είναι μεταθετική όταν $\dim E > 1$, δηλαδή η ισότητα $ST = TS$ δεν αληθεύει για κάθε $S, T \in \mathcal{B}(E)$. Για παράδειγμα, αν $x, y \in E$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δεν είναι δύσκολο να βρεθούν $T, S \in \mathcal{B}(E)$ ώστε $Sx = y$, $Sy = 0$, $Tx = 0$ και $Ty = x$, οπότε $STx = 0$ ενώ $TSx = x$ (Άσκηση 32).

12 Ασκήσεις

20 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια γραμμική συνάρτηση. Τότε ο περιορισμός f_1 της f στο $[-1, 1]$ είναι φραγμένη συνάρτηση. Αν όμως η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη ως συνάρτηση, τότε $f = 0$.

21 Αν $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ είναι χώροι με νόρμα, μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν απεικονίζει φραγμένα σύνολα του E σε φραγμένα σύνολα του F.

22 Η ταυτοτική απεικόνιση $I : c_{oo} \to c_{oo}$ είναι φραγμένη ως απεικόνιση $(c_{oo}, \|.\|_2) \to (c_{oo}, \|.\|_\infty)$, όχι όμως ως απεικόνιση $(c_{oo}, \|.\|_\infty) \to (c_{oo}, \|.\|_2)$.

23 Δείξτε ότι μια γραμμική απεικόνιση $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ μεταξύ χώρων με νόρμα δεν είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\begin{aligned}\sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} &= \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\} = \infty.\end{aligned}$$

24 Έστω $a = \{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{C}$ τυχούσα ακολουθία. Θέτουμε

$$D_a x = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \ldots) \quad (x \in \ell^2).$$

(α) Ο D_a ορίζει φραγμένο τελεστή $\ell^2 \to \ell^2$ αν και μόνον αν η a είναι φραγμένη ακολουθία, και τότε $\|D_a\| = \|a\|_\infty$.
(β) Αν η a δεν είναι φραγμένη ακολουθία, τότε υπάρχει $x \in \ell^2$ ώστε $D_a x \notin \ell^2$.

25 Δείξτε ότι οι τελεστές της μετατόπισης U και U^* είναι συνεχείς, μάλιστα ισομετρίες, στον πυκνό υπόχωρο $[e_n : n \in \mathbb{Z}]$ του $\ell^2(\mathbb{Z})$. Δείξτε επίσης ότι $U^* \circ U = U \circ U^* = I$.

26 Αν S και S^* είναι οι τελεστές του $\ell^2(\mathbb{N})$ που ορίζονται από τις σχέσεις

$$Sx = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots), \quad S^* x = (x_2, x_3, \ldots), \quad (x \in \ell^2)$$

δείξτε ότι οι τελεστές αυτοί ταυτίζονται με εκείνους που ορίσθηκαν στο Παράδειγμα 10.10. Δείξτε ότι οι S και S^* έχουν νόρμα 1, και ότι ο S είναι ισομετρία, ενώ ο S^* όχι. Δείξτε επίσης ότι ισχύει $S^* \circ S = I$, και υπολογίστε τον τελεστή $S \circ S^*$.

27 Αν $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, θέτουμε

$$(Kf)(x) = \int k(x,y) f(y) dy, \qquad f \in C([0,1]). \qquad (*)$$

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση Kf είναι συνεχής στο $[0,1]$, και ότι ο τελεστής K επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή του $L^2([0,1])$ με νόρμα $\|K\| \leq \|k\|_{22}$, όπου

$$\|k\|_{22}^2 = \iint |k(x,y)|^2 dx dy.$$

Να εξετασθεί αν ισχύει $\|K\| = \|k\|_{22}$.

28 Ονομάζουμε $K_c : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ τον τελεστή που ορίζεται από την (*). Να εξετασθεί αν ο τελεστής αυτός είναι φραγμένος και να βρεθεί ένα άνω φράγμα για την νόρμα του (αν υπάρχει).

29 Αποδείξτε ότι ο γραμμικός χώρος $C^\infty([0,1])$ των απεριόριστα παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι πυκνός στον $L^2([0,1])$.

30 Αν $E \neq \{0\}$ και F είναι χώροι με νόρμα και ο χώρος $\mathcal{B}(E, F)$ είναι πλήρης, δείξτε ότι ο F είναι πλήρης. [Υπόδειξη: Σταθεροποιώντας ένα μη μηδενικό $x^* \in E^*$, θεωρείστε τελεστές $T_y : E \to F$ της μορφής $T_y x = x^*(x)y$ $(y \in F)$.]

31 Αν E είναι χώρος Banach, δείξτε ότι ο $\mathcal{B}(E)$ είναι άλγεβρα Banach.

32 Αν E είναι χώρος με νόρμα και $\dim E > 1$, δείξτε ότι η άλγεβρα $\mathcal{B}(E)$ δεν είναι μεταθετική. Τι συμβαίνει όταν $\dim E = 1$;