Ύπαρξη ορθοκανονικής βάσης

Υπενθύμιση: Μια οικογένεια $\{x_i : i \in I\}$ σε έναν χώρο $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται *ορθοκανονική βάση* του E αν

(1) είναι ορθοκανονική, δηλαδή $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$

και

(2) η *κλειστή* γραμμική θήκη $\overline{\text{span}\{x_i : i \in I\}}$ ισούται με E.

Θεώρημα 1 *Κάθε μη μηδενικός χώρος Hilbert H (διαχωρίσιμος ή μη) έχει ορθοκανονική βάση.*

Θα αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο:

Πρόταση 1 *Κάθε ορθοκανονική οικογένεια $\{x_i : i \in I\}$ σε έναν χώρο Hilbert H επεκτείνεται σε ορθοκανονική βάση.*

Απόδειξη Έστω $A_0 \subseteq H$ ορθοκανονική οικογένεια. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{M}$ όλων των υποσυνόλων $A \subseteq H$ που (α) είναι ορθοκανονικά και (β) περιέχουν το A_0.

Η οικογένεια $\mathcal{M}$ δεν είναι κενή, και διατάσσεται μερικά από τη σχέση $\subseteq$. Παρατηρούμε ότι το $(\mathcal{M}, \subseteq)$ έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

> Κάθε υποσύνολο $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ που είναι ολικά διατεταγμένο (αλυσίδα) έχει άνω φράγμα στο $\mathcal{M}$, δηλ. υπάρχει $A_\infty \in \mathcal{M}$ ώστε $A \subseteq A_\infty$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Πράγματι: ονομάζουμε A_∞ την ένωση όλων των στοιχείων της $\mathcal{A}$. Εφόσον κάθε $A \in \mathcal{A}$ περιέχει το A_0, είναι φανερό ότι η ένωσή τους A_∞ περιέχει το A_0. Επίσης, το A_∞ είναι ορθοκανονικό: γιατί αν $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subseteq A_\infty$, τότε υπάρχουν $\{A_1, A_2 \ldots, A_m\} \subseteq \mathcal{A}$ ώστε $y_k \in A_k$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι ολικά διατεταγμένη, κάποιο από τα $\{A_1, A_2 \ldots, A_m\}$, έστω το A_j, θα περιέχει όλα τα $\{A_1, A_2 \ldots, A_m\}$ οπότε $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subseteq A_j$ και συνεπώς το $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ είναι ορθοκανονικό. Επομένως δείξαμε ότι $A_\infty \in \mathcal{M}$ και βεβαίως $A_\infty \supseteq A$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Αυτή ακριβώς είναι η υπόθεση του *Λήμματος του Zorn*. Έπεται λοιπόν ότι η μερικά διατεταγμένη οικογένεια $(\mathcal{M}, \subseteq)$ έχει *μεγιστικό στοιχείο*: υπάρχει δηλαδή $M \in \mathcal{M}$ με την ιδιότητα, αν $N \in \mathcal{M}$ και $M \subseteq N$ τότε $M = N$.

Ισχυρισμός Το M είναι ορθοκανονική βάση του χώρου, που επεκτείνει την A_0.

Απόδειξη Αφού $M \in \mathcal{M}$, το M είναι ορθοκανονικό σύνολο και περιέχει την A_0. Πρέπει να δείξουμε ότι η κλειστή γραμμική του θήκη $E := \overline{\text{span}(M)}$ είναι όλος ο χώρος H.

Ας θυμηθούμε όμως ότι ο χώρος H είναι χώρος Hilbert. Επομένως, αν ο κλειστός υπόχωρος E δεν είναι ίσος με τον H, τότε υπάρχει $x \in H$ κάθετο στον E και μη μηδενικό, οπότε μπορούμε (διαιρώντας με τη νόρμα του) να υποθέσουμε ότι $\|x\| = 1$. Τότε όμως το σύνολο $M \cup \{x\}$ είναι ορθοκανονικό και περιέχει το A_0, δηλαδή ανήκει στην $\mathcal{M}$. Αυτό είναι άτοπο, καθώς το M είναι μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{M}$, δεν μπορεί λοιπόν να περιέχεται σε ένα γνησίως μεγαλύτερο στοιχείο του $\mathcal{M}$. Επομένως $E = H$, άρα η M είναι ορθοκανονική βάση του H. $\square$

Σχόλιο Με τους ίδιους συλλογισμούς αποδεικνύεται ότι κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου επεκτείνεται σε αλγεβρική (Hamel) βάση του χώρου, και επομένως *κάθε μη μηδενικός γραμμικός χώρος (ενδεχομένως απειροδιάστατος) έχει αλγεβρική βάση*. Αρκεί στα προηγούμενα να αντικαταστήσει κανείς τον όρο "ορθοκανονικό σύνολο" με τον όρο "γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο" και τον όρο "κλειστή γραμμική θήκη" μα τον όρο "γραμμική θήκη".