Ασκήσεις I

1. Δείξτε ότι σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, για κάθε $x \in X$ και $r > 0$ ισχύουν

$$\hat{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}, \;\; \text{int}\left(\hat{B}(x,r)\right) = B(x,r) \;\; \text{και} \;\; \partial\hat{B}(x,r) = \partial B(x,r) = S(x,r).$$

2. Έστω X πραγματικός χώρος με νόρμα.

(α) Αν $Y \subseteq X$ πυκνό στον X δείξτε ότι το $Y' = \{\frac{x}{\|x\|} : x \in Y, x \neq 0\}$ είναι πυκνό στην $S(0,1)$.

(β) Αν $D \subseteq S(0,1)$ πυκνό στην $S(0,1)$ δείξτε ότι το $D_1 = \{\lambda x : x \in D, \lambda \in \mathbb{Q}\}$ είναι πυκνό στον X.

(γ) Δείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα είναι διαχωρίσιμος αν και μόνον αν η μοναδιαία σφαίρα του είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (με την επαγόμενη μετρική).

3. Έστω X γραμμικός χώρος, και $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ δύο νόρμες στον X. Δείξτε ότι $\|x\| \leq \|x\|'$ για κάθε $x \in X$, αν και μόνο αν $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$.

4. Θεωρούμε τον c_{00} ως υπόχωρο του ℓ_∞. Έστω $y_n = \frac{1}{n^2}e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $\sum_n \|y_n\|$ συγκλίνει, αλλά η $\sum_n y_n$ δεν συγκλίνει στον c_{00}. Τι συμπεραίνετε;

5. Δείξτε την εξής παραλλαγή του Λήμματος του Riesz: αν ο Y είναι υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $d(x,Y) = 1$.

[*Υπόδειξη:* Πάρτε $v \in X\backslash Y$. Ο Y είναι κλειστός, άρα $d(v,Y) = a > 0$. Βρείτε $y_n \in Y$ τέτοια ώστε $a \leq \|v - y_n\| < a + \frac{1}{n}$. Η (y_n) περιέχεται σε κατάλληλη κλειστή μπάλα του Y, η οποία είναι *συμπαγής*.]

6. Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δύο ισοδύναμες νόρμες στο γραμμικό χώρο X. Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : B_{(X,\|\cdot\|)} \to B_{(X,\|\cdot\|')}$. Δηλαδή, η f είναι συνεχής, ένα προς ένα και επί, και η f^{-1} είναι συνεχής.

7. Ο c_{00} περιέχεται σε κάθε ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$. Δείξτε ότι είναι πυκνός στον ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$, όχι όμως στον ℓ_∞. Ποιά είναι η κλειστή θήκη του c_{00} μέσα στον ℓ_∞;

8. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας τελεστής που ικανοποιεί την ανισότητα $\|Tx\| \geq m\|x\|$ για κάθε $x \in X$, όπου $m > 0$ μια σταθερά. Να δείξετε ότι ορίζεται ο $T^{-1} : T(X) \to X$ και είναι φραγμένος. Τι μπορείτε να πείτε για τη νόρμα του;

9. Ορίζουμε $T : \ell_2 \to \ell_2$ τον τελεστή της αριστερής μετατόπισης ως εξής: αν $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$, θέτουμε $Tx = (\xi_2, \xi_3, \ldots)$.

(α) Δείξτε ότι ο T ορίζεται καλά, και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(β) Ορίζουμε $T_n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n φορές). Βρείτε την $\|T_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, και το $\lim_n \|T_n\|$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, βρείτε το $\lim_n \|T_n x\|$.

10. Έστω $f \in C([0,1])$. Δείξτε οτι ο τύπος $T_f(g) := fg$, $g \in C([0,1])$ ορίζει καλά έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή

$$T_f : (C([0,1]), \|\cdot\|_1) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_1)$$

(όπου $\|g\|_1 := \int_0^1 |g(t)|\, dt$).