Banach Limits: μια εφαρμογή του Θεωρήματος Hahn-Banach

Θεωρούμε τον υπόχωρο c του ℓ^∞ που αποτελείται από τις *συγκλίνουσες* ακολουθίες. Η απεικόνιση

$$f_0 : c \to \mathbb{K} : (x(n))_n \to \lim x(n)$$

είναι γραμμική, νόρμας 1, και έχει τις ιδιότητες:
$\lim x(n) = \lim x(n+1)$ και: αν $x(n) \geq 0$ για κάθε n τότε $\lim x(n) \geq 0$.

Banach Limit ονομάζεται κάθε επέκταση της f_0 σε μια $f : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ που διατηρεί αυτές τις ιδιότητες.

Θεώρημα 1 *Υπάρχει γραμμική μορφή $f : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ με τις ιδιότητες*

(i) $\|f\| = 1$.

(ii) $f(x) = \lim x(n)$ *όταν η* $x = (x(n))$ *συγκλίνει.*

(iii) Αν $x(n) \geq 0$ *για κάθε* n *τότε* $f(x) \geq 0$.

(iv) $f(x(1), x(2), x(3), \dots) = f(x(2), x(3), \dots)$ *για κάθε* $x = (x(n)) \in \ell^\infty$.

Απόδειξη Θεωρούμε τον τελεστή της μετατόπισης $T : \ell^\infty \to \ell^\infty : x \to Tx$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x(1), x(2), x(3), \dots) = (x(2), x(3), \dots).$$

Είναι (γραμμικός και) φραγμένος τελεστής, μάλιστα $\|T\| = 1$.

Περιοριζόμαστε (για ευκολία) στην πραγματική περίπτωση, στον χώρο $X = \ell^\infty_{\mathbb{R}}$. Θέτουμε

$$Y = \{x - Tx : x \in \ell^\infty\}.$$

Αφού ο $I - T$ είναι γραμμικός, ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Ισχυρισμός 1. Έστω $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{dist}(\mathbf{1}, Y) = 1$, άρα και $\mathrm{dist}(\mathbf{1}, \overline{Y}) = 1$.

Απόδειξη Αφού $0 \in Y$, έχουμε $\mathrm{dist}(\mathbf{1}, Y) \leq \|\mathbf{1} - 0\|_\infty = 1$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, έστω $y = x - Tx \in Y$. Δείχνουμε ότι $\|\mathbf{1} - y\|_\infty \geq |1 - y(m)| \geq 1$.

Αν υπάρχει m ώστε $y(m) < 0$, τότε $\|\mathbf{1} - y\|_\infty \geq |1 - y(m)| \geq 1$.
Αν πάλι $y(n) \geq 0$ για κάθε n, τότε $x(n) - x(n+1) = x(n) - (Tx)(n) \geq 0$, οπότε $x(n) \leq x(n+1)$ για κάθε n. Επομένως η x είναι φραγμένη και μονότονη ακολουθία, άρα συγκλίνουσα. Έπεται τώρα ότι $\lim y(n) = \lim(x(n) - x(n+1)) = 0$ και συνεπώς $\|\mathbf{1} - y\|_\infty \geq 1$ (διότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε $|y(n_0)| < \epsilon$ και άρα $|1 - y(n_0)| \geq 1 - \epsilon$). $\square$

Από πόρισμα του Θεωρήματος Hahn-Banach, υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$, $f|_{\overline{Y}} = 0$ και $f(\mathbf{1}) = \mathrm{dist}(\mathbf{1}, \overline{Y}) = 1$. Επομένως η f ικανοποιεί τα *(i)* και *(iv)*.

Για να δείξουμε το *(ii)* αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in c_0$ (γιατί αν μια $(x(n))$ συγκλίνει, έστω στο a, τότε $x - a\mathbf{1} \in c_0$ οπότε $f(x) - a = f(x) - af(\mathbf{1}) = f(x - a\mathbf{1}) = 0$).

Ισχυρισμός 2 $c_0 \subseteq \ker f$.

Απόδειξη Έστω $x \in c_0$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f(Tx) = f(T^2x) = \cdots = f(T^n x).$$

Όμως, $T^n x = (x(n), x(n+1), \dots)$ άρα $\|T^n x\|_\infty = \sup\{|x(k)| : k \geq n\}$. Αλλά $x \in c_0$, οπότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε $|x(n)| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ οπότε $\|T^n x\|_\infty \leq \epsilon$. Δηλαδή $\lim_n \|T^n x\|_\infty = 0$.

Αφού η f είναι συνεχής, έχουμε λοιπόν $|f(x)| = \lim_n |f(T^n x)| = 0$ και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε. $\square$

Μένει να δειχθεί η *(iii)*. Έστω $x \in X$ με $x(n) \geq 0$ για κάθε n. Για να δείξουμε ότι $f(x) \geq 0$, αντικαθιστώντας εν ανάγκη το x με το $\frac{x}{\|x\|}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x\|_\infty = 1$. Τότε έχουμε $1 \geq x(n) \geq 0$, άρα $|1 - x(n)| \leq 1$ για κάθε n. Συνεπώς $\|\mathbf{1} - x\|_\infty \leq 1$ άρα $|f(\mathbf{1} - x)| \leq 1$, πράγμα που δείχνει ότι $1 - f(x) \leq 1$, δηλαδή $f(x) \geq 0$.