Ασκήσεις II

1. Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, δείξτε ότι η απεικόνιση

$$E \times E \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής (ως προς καποια μετρικη γινομενο στον $E \times E$). Δειξτε οτι ο περιορισμός της σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του $E \times E$ *είναι* ομοιόμορφα συνεχής.

2. Εστω $E = C([a, b])$ και $\phi : E \to \mathbb{C}$ μια γραμμικη μορφη που ειναι *θετικη* δηλ. για καθε $f \in C([a, b])$ με $f \geq 0$ ισχυει $\phi(f) \in \mathbb{R}^+$. Δειξτε οτι η απεικονιση $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : C([a, b]) \times C([a, b]) \to \mathbb{C}$ οπου

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle := \phi(\bar{g}f),\ f, g \in C([a, b])$$

ειναι ημι-εσωτερικο γινόμενο στον $C([a, b])$. Ποια ειναι η διασταση του χωρου πηλικο E/N στις περιπτωσεις (α) $\phi(f) = f(a)$ και (β) $\phi(f) = \int_a^b f$;

3. Έστω E_1, E_2 υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$ ώστε $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ και $E_1 + E_2 = \mathbb{C}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ γράφουμε $x = x_1 + x_2$ όπου $x_i \in E_i$. Αν $\|x_1\| \leq \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ (όπου $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα), δείξτε ότι οι E_1, E_2 είναι κάθετοι.

4. Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό. Δείξτε ότι

1) $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
2) $A^\perp = (\overline{\text{span}\, A})^\perp$.
3) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
4) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
5) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.
6) Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $E = E^{\perp\perp}$.
7) Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $E + F$ κλειστός.

5. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ συγκλίνει [1] και ότι
$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ αν και μόνον αν $x \in \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Μάλιστα

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \text{dist}(x, K)^2$$

όπου $K = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

6. (α) Εξετάστε αν η γραμμική απεικόνιση $\phi : f \longrightarrow f(\frac{1}{2})$ είναι $\|\cdot\|_2$-συνεχής γραμμική μορφή στον $C([0, 1])$.

(β) Εξετάστε αν η γραμμική μορφή $\psi : f \mapsto \int_{1/2}^{1} f(t)dt$ είναι (i) $\|\cdot\|_2$-συνεχής και (ii) της μορφής $f \mapsto \langle f, g \rangle$ για κάποια $g \in C([0, 1])$.

7. Ο *χώρος του Hardy* H^2 αποτελείται από όλες τις δυναμοσειρές $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ που ικανοποιούν $\sum_k |a_k|^2 < \infty$ (παρατηρείστε ότι μια τέτοια δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για $|z| < 1$).
Αν επίσης $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \in H^2$, θέτουμε $\langle f, g \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια
$\{\zeta_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ όπου $\zeta_k(z) = z^k, k = 0, 1, \ldots$ είναι ορθοκανονική βάση του H^2. Να συμπεράνετε ότι ο H^2 είναι χώρος Hilbert.

Αν $|w| < 1$, δείξτε ότι η $\phi_w : f \longrightarrow f(w)$ είναι γραμμική μορφή στον H^2 και είναι συνεχής.

Βρείτε την (μοναδική) $k_w \in H^2$ που ικανοποιεί $\langle f, k_w \rangle = \phi_w(f)$ για κάθε $f \in H^2$.

---

[1] προαιρετικά: εξεταστε αν συγκλίνει στον E η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$