4 Απριλίου ΗΒ

Εφαρμογή H-B

(έχουν αναρτηθεί έντυπες σημειώσεις)

Θεώρημα $\exists$ γραμμική $f : \ell^\infty \to \mathbb{K}$:

(i) $\|f\| = 1$

(ii) $\forall x = (x(n))$ συγκλίνουσα,
$$f(x) = \lim_n x(n)$$

(iii) αν $x(n) \geq 0$ τότε $f(x) \geq 0$

(iv) ~~f(...)~~
$$f(x(1), x(2), x(3), \dots) = f(x(2), x(3), \dots)$$

Δηλ.
$$T : \ell^\infty \to \ell^\infty$$
$$(x(n)) \to (x(n+1)) \quad \text{τότε } f = f \circ T$$

Απόδ. Παρατ. ο T είναι γραμμικός ~~κ~~ + φραγμ., $\|T\| = 1$

Ονομάζω $Y = \{x - Tx : x \in \ell^\infty\}$
$= im(I - T)$: γραμμικός υπόχωρος

Ψάχνω : $f : \ell^\infty \to \mathbb{K}$: $f|_Y = 0$
αλλά επιπλέον ...

Περιορίζομαι στην περίπτωση : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Παρατ. $\mathbb{1} = (1, 1, 1, \dots) \in \ell^\infty$
$$dist(\mathbb{1}, Y) = 1$$

Απόδ. Εφόσον $\|\mathbb{1} - 0\| = 1$ και $0 \in Y$, $dist(\mathbb{1}, Y)$ " $= \inf\{\|\mathbb{1} - y\| : y \in Y\}$ " ≤ 1

Παίρνω $y \in Y$
ν.δ.ο. $\|\mathbb{1} - y\| \geq 1$

Περίπτωση 1 : $\exists m \in \mathbb{N} : y(m) < 0$
τότε $\|\mathbb{1} - y\|_\infty \geq |1 - y(m)| > 1$

Περίπτωση 2 : $\forall n \in \mathbb{N}, y(n) \geq 0$

$y \in Y$: $y = x - Tx$ για κάποιο $x \in \ell^\infty$

$y(n) = x(n) - x(n+1) \geq 0 \quad \forall n$

$x(n) \geq x(n+1) \quad \forall n$

άρα $(x(n))$ είναι φθίνουσα, και φραγμένη
άρα συγκλίνει

οπότε $y(n) = x(n) - x(n+1) \longrightarrow 0$

οπότε $\|1 - y\|_\infty = \sup\{|1 - y(n)| : n \in \mathbb{N}\} \geq 1$

δηλ. $\forall \varepsilon$ $\exists n_0 : |y(n_0)| < \varepsilon$ οπότε
$\|1 - y_\infty\| \geq 1 - \varepsilon$

Έχω $dist(\mathbb{1}, Y) = 1$
$$\Downarrow$$
$$dist(\mathbb{1}, \overline{Y}) = 1$$

HB ! $\exists f : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ με $\|f\| = 1$ ώστε $f|_{\overline{Y}} = 0$
και $f(\mathbb{1}) = dist(\mathbb{1}, Y) = 1$

$\|f\| = 1$, $f(x - Tx) = 0 \ \forall x$ άρα $f(x) = f(Tx) \ \forall x$
$f(\mathbb{1}) = 1$

νδο αν $x=(x(n))$ συγκλίνει στο λ
τότε $f(x)=\lambda$

$$\iff f(x-\lambda \mathbb{1})=0$$

οπότε αρκεί νδο $\forall x \in c_0$ τότε $f(x)=0$

θδο $c_0 \subseteq \ker f$ ✓

<u>Αποδ</u> $\forall x$ $f(x)=f(Tx)=f(T^2x)=\dots=f(T^n x)$ $\forall n$

Όμως, αν $x\in c_0$, τότε $\|T^n x\|_\infty \to 0$

διότι $T^n(x)=(x(n+1), x(n+2), \dots)$
οπότε αφού $x\in c_0$ $\forall \epsilon>0$
$\exists n_0: \forall n\geq n_0$ να $\sup|x(n)|<\epsilon$
οπότε $\|T^n x\|_\infty \leq \epsilon$

συνεπώς (f συνεχής) $\underset{\displaystyle f(x)}{\overset{\|}{f(T^n x)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ άρα $f(x)=0$

Μένει νδο αν $x(n)\geq 0$ $\forall n$ τότε $f(x)\geq 0$
Αρκεί να υποθ $\|x\|_\infty=1$: $|x(n)|\leq 1$

$1\geq x(n)\geq 0$ άρα $|1-x(n)|\leq 1$ $\forall n$
$\|\mathbb{1}-x\|_\infty \leq 1$

$$|f(\mathbb{1}-x)| \leq \|f\| \, \|\mathbb{1}-x\|_\infty \leq 1$$
$$\|$$
$$|1-f(x)|\leq 1 \implies f(x)\geq 0$$

Ασκήσεις από συμπληρώσεις Αργυρού (συνέχεια)
(έχουν ανεβαστεί οι εκφωνήσεις ως Ασκήσεις ΙΙΙ)

(3): $(X, \|\ \|)$ διαχ. $\Rightarrow \exists \{f_n : n=1,2,\dots\} \subseteq S_{X^*}$

ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker f_n = \{0\}$

δηλ. $\forall x \in X$ με $f_n(x)=0 \quad \forall n$ τότε $x=0$

Απόδ. Υπάρχει $\{x_1, x_2, \dots\} \subseteq S_X$ πυκνό στη S_X

Έστω $x \in X$, $x \neq 0$, και τότε $y = \frac{x}{\|x\|} \in S_X$

$\exists n: \quad \|y - x_n\| < 1/2$

από ΗΒ, $\forall n$ υπάρχει $f_n \in X^* : (\|f_n\| = 1)$ και $f_n(x_n) = 1$

Αν υποθέσω $f_n(x) = 0 \ \forall n$ τότε $f_n(y) = 0 \ \forall n$

όπως $|f_n(y - x_n)| = |0 - 1| = 1$
άρα $\leq \|f_n\| \|y - x_n\| < 1/2$ $\Big\}$ άτοπο

οπότε το μόνο $z \in X$ που μηδενίζει $\forall f_n$ είναι το $z = 0$, δηλ. $\bigcap_n \ker f_n = \{0\}$

(4): $A \subseteq (X, \| \ \|)$ τότε $\overline{span(A)} = \bigcap\{\ker f : f \in X^*, \ f|_A = 0\}$

Απόδ.

Αν $f \in X^*$ και $f|_A = 0$ τότε $f|_{spanA} = 0$ (λόγω γραμμικ.)

οπότε $f|_{\overline{span(A)}} = 0$ (λόγω συνέχειας)

Πιο αναλυτικά:

αν $y \in span(A)$:

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \ \lambda_k \in \mathbb{K}, \ x_k \in A$$

$$\Downarrow$$

$$f(y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{f(x_k)}_{=0} \Rightarrow f(y) = 0$$

αν $z \in \overline{span(A)}$ τότε $\exists \ y_n \in span(A)$

$$y_n \to z$$

$$\Downarrow \text{ συν}$$

$$\underbrace{f(y_n)}_{=0} \to f(z)$$

άρα $f(z) = 0$

άρα $\overline{span(A)} \subseteq \bigcap\{\ker f : f \in X^* : f|_A = 0\}$

αλλά, αν $x \notin \overline{span(A)} := Y$, κλειστός υπόχ. του X.

από HB: $\exists f \in X^*$, $f|_Y = 0$ αλλά $f(x) \neq 0$

όπου $A \subseteq Y \subseteq \ker f$ άρα $f|_A = 0$

αλλά $x \notin \ker f$

άρα $\overline{span(A)} = \bigcap\{\ker f : f \in X^*, f|_A = 0\}$

__Πόρισμα__ Αν $A \subseteq X$ τότε

$\mathrm{span}(A)$ πυκνό στο $X \iff (f \in X^* : f|_A = 0 \Rightarrow f = 0)$

η μόνη συνεχής γρ.
μορφή f που $f|_A = 0$
είναι η $f = 0$

__Απόδ__ $\overline{\mathrm{span}\, A} = \bigcap \{ \ker f : f \in X^* \text{ και } f|_A = 0 \}$

(β) ! $Y \subseteq X$ γραμμ υπχ

$$\forall f \in X^* \text{ ορίζω } R(f) = f|_Y$$

τότε $R(f) \in Y^*$.

ΝΔ απεικ: $R : X^* \longrightarrow Y^*$ γραμμική και συνεχής

$$f \longmapsto R(f)$$

και $R(B_{X^*}) = B_{Y^*}$.

<u>Απόδ</u> (i) Προφανώς ο περιορισμός $R(f)$ μιας γραμμ. απεικ f είναι γραμμ απεικ και ο περιορ μιας συνεχούς είναι συνεχής

οπότε έχω $R : X^* \longrightarrow Y^*$

Επίσης
$$\|R(f)\| = \sup\{|R(f)(y)| : y \in B_Y\}$$
$$= \sup\{|f(y)| : y \in B_Y\}$$
$$\leq \sup\{|f(x)| : x \in B_X\} = \|f\|$$

άρα $\|R(f)\| \leq \|f\|$

να ελέγξω ότι R είναι <u>γραμμ</u> απεικ:

$f, g \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$R(f + \lambda g) = R(f) + \lambda R(g)$$

<u>ΝΔΟ</u> $\forall y \in Y$

$$R(f+\lambda g)(y) = (f + \lambda g)(y)$$

$$\| ? \qquad\qquad \|$$

$$R(f)y + \lambda R(g) y = f(y) + \lambda g(y)$$

άρα προφανώς

τελικά έχω γραμμ συνεχή $R : X^* \longrightarrow Y^*$

μένει $R(B_{X^*}) = B_{Y^*}$

- $f \in B_{X^*}$ τότε $\|R(f)\| \leq \|f\|$ άρα $R(f) \in B_{Y^*}$
- $g \in B_{Y^*}$ $g : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ γρ με $\|g\| \leq 1$
  από HB, $\exists\, \tilde{g} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ γρ με $\|\tilde{g}\| = \|g\| \leq 1$

Αρκεί $\tilde{g} \in B_{X^*}$ ώστε $R(\tilde{g}) = g$.

Από την εμφύτευση: $Y \hookrightarrow X$

προκύπτει η

$R: X^* \to Y^*$ γρ., συνεχής

και $R(B_{X^*}) = B_{Y^*}$.

ειδικότερα, R είναι <u>επί</u>

<u>Προσ.</u> R δεν είναι εν γένει 1-1

Μπορεί δύο $f_1, f_2 \in X^*$ με $f_1 \neq f_2$

να έχουν τον ίδιο περιορισμό: $R(f_1) = R(f_2)$

στον Y

ισοδύναμα, μπορεί για $f \in X^*$, $f \neq 0$

να ικανοποιεί $R(f) = 0$

<u>δηλ.</u> $f \neq 0$ αλλά $f|_Y = 0$

Υπάρχει τέτοια f <u>ανν</u> Y <u>δεν</u> είναι πυκνός

(7) $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0,1]$ διαφ. ανά δύο
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\varphi : C([0,1]) \to \mathbb{K}$$
$$f \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(t_k)$$

Ν.δ.ο φ γραμμ. + συνεχής, με $\|\varphi\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$.

Απόδ. $\forall t \in [0,1]$ ονομάζω: $d_t(f) = f(t)$

$$\to \varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k d_{t_k}$$

Αρκεί αφού d_t είναι γραμμ. διότι:

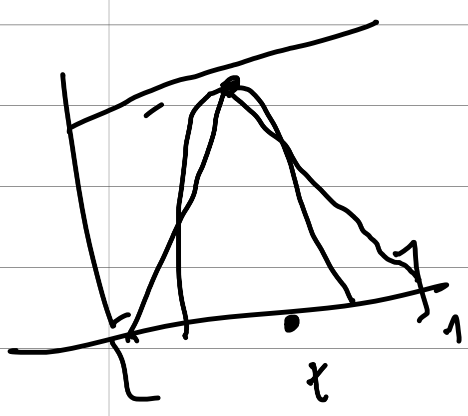
$$d_t(f+\lambda g) = (f+\lambda g)(t)$$

$\forall f,g \in C([0,1])$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$= f(t) + \lambda g(t) = d_t(f) + \lambda d_t(g)$$

Επίσης d_t συνεχής διότι

$$\forall f \quad |d_t(f)| = |f(t)| \le \|f\|_\infty$$



και μάλιστα $\|d_t\| \le 1$
στην πραγματικότητα, $\|d_t\| = 1$

Γιατί $\exists f \in C([0,1])$, $\|f\|_\infty \le 1$
τ.ω. $f(t) = 1$

Άρα: $\varphi \in C([0,1])'$ με $\|\varphi\| \le \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|d_{t_k}\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$

ν.δ.ο $\|\varphi\| = \sum |\lambda_k|$

Αρκεί να βρω $f \in C([0,1])$, $\|f\|_\infty = 1$
τ.ω. $|\varphi(f)| = \sum |\lambda_k|$
ισοδύναμα
$$\left|\sum \lambda_k f(t_k)\right| = \sum |\lambda_k|$$

Θα αρκούσε: να βρω f : $\lambda_k f(t_k) = |\lambda_k|$ $\forall k = 1, \dots, n$

ισοδύναμα $f(t_k) = \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}$ όταν $\lambda_k \ne 0$
$= 1$ όταν $\lambda_k = 0$

$\exists$? $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ συνεχής, $\|f\|_\infty = 1$
ώστε $f(t_k) = \mu_k$ $k = 1, 2, \dots, n$
(όπου $\mu_k = \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}$ όταν $\lambda_k \ne 0$ και $\mu_k = 1$ όταν $\lambda_k = 0$).

Ορίζω $f(t_k) = \mu_k$ και επεκτείνω (πχ) στα διαστήματα $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 2, 3, \dots, n$ ώστε $Gr(f)$ πολυγωνική γραμμή (ΘΝΞ $\mathbb{K} \cdot \mathbb{K}$)
(μπορώ να γράψω και f : πολυώνυμο)

Παρατηρήσεις:

$$\varphi : f \longmapsto \sum \lambda_n f(t_n)$$

μοιάζει με προσέγγιση στο $\int f(t)\lambda(t)\,dt$
(λ: κατάλληλη συνάρτ.)

δηλαδή: $\|\varphi\| = \sum |\lambda_n|$

(προσεγγίζει το $\int |\lambda(t)|\,dt$)

Ποια είναι η γενική μορφή μιας $\varphi \in (C[0,1])^*$;

Ας θεωρήσω $\langle f, g\rangle = \int f(t)\overline{g(t)}\,dt$ ($f,g \in C[0,1]$)

τότε $|\langle f,g\rangle| \le \|f\|_2 \|g\|_2$ όπου νόρμα $\|f\|_2 = \sqrt{\int |f|^2}$
$\le \|f\|_\infty$

Αν μια $\varphi : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$
είναι (γραμμική και) συνεχής ως προς $\|\ \|_2$

τότε (Riesz) $\exists\, g \in L^2([0,1])$:

$$\varphi(f) = \int f(t)\overline{g(t)}\,dt \quad \forall f \in C([0,1])$$

Ερώτηση

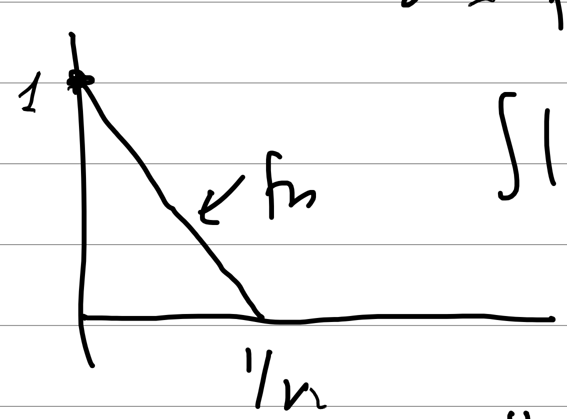
Η γραμμ. μορφή $\delta_t : f \longmapsto f(t)$ είναι συνεχής ως προς τη $\|\cdot\|_2$;;;

(Ξέρω ότι είναι συνεχής ως προς $\|\cdot\|_\infty$, αλλά: $\|\cdot\|_\infty \geq \|\cdot\|_2$)

Αν) αν έχω (f_n) από συνεχείς: $\|f_n\|_2 \to 0$
είναι αλήθεια ότι $\delta_t(f_n) \to 0$

δηλ. $f_n(t) \to 0$ ΟΧΙ

πχ $t=0$



$\int |f_n|^2 \le \int |f_n| = \frac{1}{2n}$

$\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0$

αλλά $f_n(0) = 1 \ \forall n$

Άσκ.

(7) $(X, \|\ \|)$ χώρος με νόρμα

$\{x_1 \dots x_n\}$ γραμμ. ανεξ. $(n=351)$

τότε $\exists \{f_1 \dots f_n\} \subseteq X^*$ γραμμ. ανεξ.

Απόδ. Γρ. ανεξ. $\forall x_i, i=1\dots n$

$$x_i \notin \underbrace{\text{span}\{x_j : j\neq i\}} = Y_i$$

ο Y_i έχει πεπερ. διάσταση $n-1$

άρα είναι κλειστός

από HB, $\exists f_i \in X^*$: $f_i(x_i)=1$

$\forall i=1\dots 351$ και $f_i|_{Y_i}=0$

άρα $f_i(x_j)=0$ για $j\neq i$

Ισχ. $\{f_1,f_2 \dots f_n\} \subseteq X^*$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα

δηλ. αν $\sum \lambda_k f_k = 0$ τότε

$\forall x \quad \sum \lambda_k f_k(x) = 0$

ειδικότερα $\sum \lambda_k \underbrace{f_k(x_i)}_{= \delta_{ki}} = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$

$\forall \{x_1,x_2,\dots x_n\}$ γρ. ανεξ. $\subseteq X$

βρήκα $\{f_1 \dots f_n\}$ " $\subseteq X^*$

τ.ω. $f_i(x_j) = \begin{cases}0, & j\neq i\\ 1, & j=i\end{cases}$

$\{(x_i,f_i) : i=1\dots n\}$

ονομάζεται διορθογώνιο σύστημα

(8) $(X, \|\ \|) \xrightarrow{T} (Y, \|\ \|)$

T γραμμική

Δείξε T φραγμ. $\iff \underbrace{\sup\{|f(Tx)| : x \in B_X, f \in B_{Y^*}\}}_{M} < +\infty$

και τότε

$\|T\| = M$

Προφ. $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : x \in B_X\}$.

T φραγμένη $\iff \|T\| < +\infty$

Λύση

Έστω ότι T φραγμ.

τότε $\forall f \in B_{Y^*}$, $\forall x \in B_X$:

$$|f(Tx)| \le \|f\|\,\|Tx\| \le \|f\|\,\|T\|\,\|x\| \le \|T\|$$

$\Rightarrow M = \sup\{\quad\} \le \|T\|$

Αντίστροφα: Υποθέτω ότι $M < +\infty$

τότε $\forall f \in B_{Y^*}$, $\forall x \in B_X$

$|f(Tx)| \le M$

Σταθ. $x \in B_X$, ας πάρουμε $\underbrace{\sup\{|f(Tx)| : f \in B_{Y^*}\}}_{\|Tx\| \text{ (HB)}} \le M$

(θυμάμαι: $\forall y \in Y$, $\|y\| = \max\{|f(y)| : f \in B_{Y^*}\}$)

οπότε $\|Tx\|_Y \le M \quad \forall x \in B_X$

οπότε $\underbrace{\sup\{\|Tx\|_Y : x \in B_X\}}_{\|T\| \text{ (op)}} \le M$

οπότε έδειξα T φραγμ. και επιπλέον $\|T\| \le M$

άρα τελικά ισχύει ισότητα: $\|T\| = M$.

(9): Ορίζουμε $c = \{x=(x(n)) : \lim x(n) \ \exists\}$

$(c, \|\ \|_\infty)$ είναι Banach

$c = \{x + \lambda \mathbb{1} : x \in c_0 ,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$

$\mathbb{1} = (1,1,1,\dots)$

• Ο c_0 είναι γν. υπόχωρος του c, $\dim(c/c_0) = 1$

<u>Άσκ</u> Δείξτε ότι ο $(c_0, \|\ \|_\infty)$ ισόμορφος με $(c, \|\ \|_\infty)$

<u>Υποδ</u>: Ορίζω $T : c \longrightarrow c_0$ ως εξής

Αν $x = (x(n))$ έχει $\lim x(n) = \lambda$

θέτω $T(x) = (\lambda, x(1) - \lambda, x(2) - \lambda, \dots)$

τότε $T(x) \in c_0$ και $x(n) \to \lambda$
άρα $x(n) - \lambda \to 0$

Έχω $T : c \longrightarrow c_0$
εύκολο: T γραμμική

$\|Tx\|_\infty = \sup\{|\lambda|, |x(n) - \lambda| : n \in \mathbb{N}\}$

$\le \sup\{|\lambda|, |x(n)| + |\lambda| \ \dots$

$\le 2\|x\|_\infty$: φραγ, $\|T\| \le 2$
(διότι $|\lambda| = \lim|x(n)| \le \|x\|_\infty$)

πρέπ $T^{-1}((y(n))) = (y(2)+y(1), y(3)+y(1), y(4)+y(1), \dots)$
(Έλεγχος;;)

για να δούμε αν η T^{-1} είναι φραγμένη:

$\|T^{-1}((y(n)))\| = \sup\{|y(2)+y(1)|, |y(3)+y(1)|, \dots\}$

$\le 2\|(y(n))\|_\infty$ <u>φραγ</u>

<u>Επομένως</u> $T : c \longrightarrow c_0$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και ομοιομορφισμός.

<u>Ερώτηση</u>: Είναι οι χώροι αυτοί <u>ισομετρικά</u> ισόμορφοι; ΟΧΙ (γιατί;)

<u>Ισχύει</u> παρόλα αυτά ότι οι δυϊκοί τους χώροι είναι ισομετρικά ισόμορφοι
(είναι $c^* \cong \ell^1 \cong c_0^*$)