

1. Ο ΝΟΜΟΣ 0-1 ΤΩΝ HEWITT-SAVAGE

Ορισμός. Δεδομένου ενός συνόλου X , μια οικογένεια $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ονομάζεται άλγεβρα στο X αν

- (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- (2) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε και $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
- (3) Για κάθε $N \in \mathbb{N}^+$ and $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι $\cup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{A}$.

Άσκηση. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $\mathcal{A}$ άλγεβρα στο Ω με $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Να δειχθεί ότι για κάθε $B \in \mathcal{F}$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{P}(B \Delta A) < \varepsilon$.

Ας υποθέσουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$, και ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο

$$A := \{X_1 + X_2 + \dots + X_n \in (-1, 1) \text{ για άπειρα } n\}. \quad (1)$$

Γενικά, αυτό το σύνολο δεν ανήκει στην τελική σ-άλγεβρα των $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$. Το αν ένα $\omega \in \Omega$ ανήκει στο A εξαρτάται από τις τιμές όλων των $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$, δεν μπορούμε να αγνοήσουμε κάποιαν. Ωστόσο, αν μεταθέσουμε οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο των $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ στον ορισμό του A , το σύνολο A μένει το ίδιο. Σε σύνολα που έχουν αυτή την ιδιότητα αναφέρεται ο νόμος 0-1 των Hewitt και Savage. Λέει ότι αν οι $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, τότε αυτά τα σύνολα μπορούν να έχουν μόνο πιθανότητα 0 ή 1. Το ακριβές πλαίσιο είναι ως εξής. Δεδομένου ενός μετρήσιμου χώρου $(G, \mathcal{G})$, ένα σύνολο $B \in \otimes_{i \in \mathbb{N}^+} \mathcal{G}$ ονομάζεται *συμμετρικό* αν για κάθε πεπερασμένη μετάθεση $^1 \pi : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ ισχύει

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}^+} \in B \Leftrightarrow (x_{\pi(i)})_{i \in \mathbb{N}^+} \in B.$$

Το σύνολο, έστω $\mathcal{S}$, των συμμετρικών υποσυνόλων του $G^{\mathbb{N}^+}$ είναι μια σ-άλγεβρα.

Έστω τώρα $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος και $X_n : \Omega \rightarrow G, n \in \mathbb{N}^+$ μετρήσιμες. Θέτουμε $X : \Omega \rightarrow G^{\mathbb{N}^+}$ με $X(\omega) = (X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^+}$. Η X είναι μετρήσιμη (Άσκηση) και

$$X^{-1}(\otimes_{i \in \mathbb{N}^+} \mathcal{G}) = \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)).$$

Η αριθμήσιμη ένωση στην τελευταία σχέση είναι άλγεβρα αλλά όχι απαραίτητα σ-άλγεβρα. Η οικογένεια

$$\mathcal{E} := X^{-1}(\mathcal{S}) \quad (2)$$

περιέχεται στην $\mathcal{F}$ και τα στοιχεία της λέγονται *ανταλλάξιμα ενδεχόμενα*.

Παράδειγμα. Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ όπως στην αρχή της παραγράφου. Το σύνολο (1) είναι ανταλλάξιμο, και ανάμεσα στα σύνολα

$$B := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < 10 \right\}, C := \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n X_k < \infty \right\}, D := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|X_n|}{n} > 3 \right\},$$

τα B και C είναι ανταλλάξιμα, ενώ το D γενικά δεν είναι.

Θεώρημα 1 (Νόμος 0-1 των Hewitt-Savage, 1955). Έστω $(G, \mathcal{G})$ μετρήσιμος χώρος και $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με $X_n : \Omega \rightarrow G$, και $\mathcal{E}$ όπως στην (2). Για κάθε $A \in \mathcal{E}$ έχουμε $P(A) = 0$ ή $P(A) = 1$.

Proof. Το σχέδιο είναι να δείξουμε ότι το A είναι ανεξάρτητο από τον εαυτό του. Γράφουμε $X(\omega)$ για την ακολουθία $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^+}$ και $X_{\pi}(\omega)$ για την $(X_{\pi(n)}(\omega))_{n \in \mathbb{N}^+}$, όπου $\pi : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση. Επίσης, για $m < n$ θετικούς ακεραίους, συμβολίζουμε με $X_m^n(\omega)$ το διάνυσμα $(X_m(\omega), X_{m+1}(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

¹ Η π λέγεται πεπερασμένη μετάθεση αν είναι 1-1 και επί και υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^+$ ώστε $\pi(n) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ με $n \geq n_0$.

Έστω τώρα $A \in \mathcal{E}$ and $\varepsilon \in (0, 1)$ αυθαίρετο. Με βάση την πιο πάνω άσκηση, υπάρχει $n \in \mathbb{N}^+$ και $A_\varepsilon \in \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ώστε $\mathbf{P}(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$. Υπάρχουν $B \in \otimes_{i \in \mathbb{N}^+} \mathcal{G}$ συμμετρικό και $B_\varepsilon \in \otimes_{i=1}^n \mathcal{G}$ ώστε

$$A = \{\omega : X(\omega) \in B\}, \quad (3)$$

$$A_\varepsilon = \{\omega : X_1^n(\omega) \in B_\varepsilon\}. \quad (4)$$

Επίσης, ορίζουμε

$$\tilde{A}_\varepsilon = \{\omega : X_{n+1}^{2n}(\omega) \in B_\varepsilon\}. \quad (5)$$

Θεωρούμε τώρα την πεπερασμένη μετάθεση με τιμές ως εξής:

$$\begin{array}{c|cccccccccccccc} n & 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \cdots \\ \pi(n) & n+1 & n+2 & \cdots & 2n & 1 & 2 & \cdots & n & 2n+1 & 2n+2 & \cdots \end{array}$$

Τότε

$$\varepsilon > \mathbf{P}(A \Delta A_\varepsilon) = \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\} \Delta \{\omega : X_1^n(\omega) \in B_\varepsilon\}) \quad (6)$$

$$= \mathbf{P}(\{\omega : X_\pi(\omega) \in B\} \Delta \{\omega : X_{n+1}^{2n}(\omega) \in B_\varepsilon\}) = \mathbf{P}(A \Delta \tilde{A}_\varepsilon). \quad (7)$$

Στη δεύτερη ισότητα, χρησιμοποιήσαμε το ότι οι $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, ενώ στην τελευταία ισότητα το γεγονός ότι το B είναι συμμετρικό. Η σχέση

$$A_\varepsilon \Delta \tilde{A}_\varepsilon \subset (A_\varepsilon \Delta A) \cup (A \Delta \tilde{A}_\varepsilon)$$

δίνει ότι $\mathbf{P}(A_\varepsilon \Delta \tilde{A}_\varepsilon) < 2\varepsilon$. Επειδή οι $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, έχουμε ότι τα $A_\varepsilon, \tilde{A}_\varepsilon$ είναι ανεξάρτητα με ίσες πιθανότητες, και ισχύει $|\mathbf{P}(A_\varepsilon) - \mathbf{P}(A)| \leq \mathbf{P}(A_\varepsilon \Delta A) < \varepsilon$. Άρα,

$$2\varepsilon > \mathbf{P}(A_\varepsilon \Delta \tilde{A}_\varepsilon) = 2(\mathbf{P}(A_\varepsilon) - \mathbf{P}(A_\varepsilon)^2) > 2(\mathbf{P}(A) - \varepsilon - (\mathbf{P}(A) + \varepsilon)^2),$$

το οποίο δίνει ότι $(0 \leq) \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)^2 < 5\varepsilon$. Επειδή το $\varepsilon \in (0, 1)$ ήταν αυθαίρετο, παίρνουμε ότι $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A)^2$, που είναι αυτό που θέλαμε.

Με λόγια, σε αδρές γραμμές, η απόδειξη είναι η εξής: Το αν ένα ω είναι στοιχείο του A καθορίζεται «λίγο πολύ» από τις τιμές $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ για κάποιο μεγάλο n . Επειδή το A είναι ανταλλάξιμο και οι X_i ανεξάρτητες και ισόνομες, το αν ένα ω είναι στοιχείο του A καθορίζεται «λίγο πολύ» από τις τιμές $X_{n+1}(\omega), X_{n+2}(\omega), \dots, X_{2n}(\omega)$. Αλλά αυτά τα δύο σύνολα τυχαίων μεταβλητών είναι ανεξάρτητα, επομένως το A είναι ανεξάρτητο από τον εαυτό του, το οποίο δίνει ότι $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A)^2$. $\square$