Στοχαστικές ανελίξεις
Εξέταση 13 Φεβρουαρίου 2026

Θέμα 1. Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με $\mathbf{E}|X| < \infty$ και $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρες στο Ω. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2\} = \mathbf{E}(X|\mathcal{G}_1),$$
$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{E}(X|\mathcal{G}_1).$$

Θέμα 2. Έστω $X_k : \Omega \to \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^+$ τυχαίες μεταβλητές σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Θέτουμε $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Γνωρίζουμε ότι $\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ και $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι για κάθε $a > 0$ και $n \in \mathbb{N}^+$ ισχύει

$$\mathbf{P}(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge a) \le \frac{1}{a^2}\mathbf{E}(S_n^2)$$

Θέμα 3. Έστω $X_k : \Omega \to \{-1, 1\}, k \in \mathbb{N}^+$ τυχαίες μεταβλητές σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Θέτουμε $\mathcal{F}_0 := \{\Omega, \varnothing\}, \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $S_0 = 1, S_n := 1 + X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\varepsilon \in (0, 1)$ ώστε $\mathbf{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \ge \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Θέτουμε $\phi := (1 - \varepsilon)/(1 + \varepsilon)$ και $Z_n := \phi^{S_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι:

(α) Η $(S_n)_{n\ge 0}$ είναι submartingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$.

(β) Η $(Z_n)_{n\ge 0}$ είναι supermartingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$.

(γ) $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1$.

(δ) $\mathbf{P}(\inf_{n\in\mathbb{N}} S_n \le 0) \le \phi$.

Θέμα 4. Έστω $(B_t)_{t\ge 0}$ μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown. Θέτουμε $X_t := B_{2t} - B_t$ για κάθε $t \ge 0$.

(α) Για δεδομένο $t > 0$, ποια είναι η κατανομή της X_t;

(β) Είναι η ανέλιξη $(X_t)_{t\ge 0}$ κίνηση Brown;

(γ) Για $0 \le s < t$ υπολογίστε τη $\mathbf{E}(B_s e^{B_t})$.

Θέμα 5. Έστω $(B_t)_{t\ge 0}$ μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown. Για κάθε $t > 0$, θέτουμε

$$\overline{B}_t := \sup\{\mathrm{B}_s : s \in [0, t]\},$$
$$\underline{B}_t := \inf\{\mathrm{B}_s : s \in [0, t]\}.$$

Δείξτε ότι:

(α) $\overline{B}_t \overset{d}{=} -\underline{B}_t$ για κάθε $t \ge 0$,

(β) $\overline{B}_t - \underline{B}_t \overset{d}{=} \sqrt{t}(\overline{B}_1 - \underline{B}_1)$ για κάθε $t \ge 0$.

Θέμα 6. (α) Έστω $n \in \mathbb{N}^+$ και $p \in (0, 1)$. Δώστε μία έκφραση (συναρτήσει των n, p) για τη μέση τιμή του πλήθους των τριγώνων που υπάρχουν στο $G(n, p)$.

(β) Έστω $c > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ θέτουμε $p_n := \min\{1, c(\log n)/n\}$ και X_n το πλήθος των μεμονωμένων κορυφών στο $G(n, p_n)$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \ge 1) = \begin{cases} 1 & \text{αν } c < 1, \\ 0 & \text{αν } c > 1. \end{cases}$$

[Υπόδειξη: Υπολογίστε την $\mathbf{E}(X_n)$ και δείξτε ότι $\mathbf{E}(X_n^2) = \mathbf{E}(X_n) + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}$.]

Απαντήσεις

1. Θεωρία.

2. Δείχνουμε ότι η $(S_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ είναι martingale.

4. (α) Από τον ορισμό της κίνησης Brown έχουμε άμεσα ότι $X_t \sim N(0, 2t - t) = N(0, t)$.

(β) Όχι, δεν είναι. Γιατί για κάθε κίνηση Brown $(W_t)_{t>0}$ ισχύει $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = s \wedge t$ για κάθε $s, t \geq 0$, ενώ για την X έχουμε $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = 0$ αν $t > 2s$ λόγω της ανεξαρτησίας προσαυξήσεων της B.

(γ) Έστω $Z \sim N(0, 1)$. Τότε

$$\mathbf{E}(B_s e^{B_t}) = \mathbf{E}(B_s e^{B_s} e^{B_t - B_s}) = \mathbf{E}(B_s e^{B_s})\mathbf{E}(e^{B_t - B_s}) = \sqrt{s}\mathbf{E}(Ze^{\sqrt{s}Z})\mathbf{E}(e^{\sqrt{t-s}Z})$$

Παραγωγίζοντας ως προς t την $\mathbf{E}(e^{tZ}) = e^{t^2/2}$, βρίσκουμε ότι $\mathbf{E}(Ze^{tZ}) = te^{t^2/2}$. Και αντικαθιστώντας στα παραπάνω, βρίσκουμε ότι $\mathbf{E}(B_s e^{B_t}) = se^{t/2}$.

5. (α) Έπεται από το ότι $(B_s)_{s\geq 0} \stackrel{d}{=} (-B_s)_{s\geq 0}$.

(β) Έπεται από το ότι $(\frac{B_{ut}}{\sqrt{t}})_{u\in[0,1]} \stackrel{d}{=} (B_u)_{u\in[0,1]}$.