

Στοχαστικές ανελίξεις
Εργασία 3

Άσκηση 1. Έστω B, W ανεξάρτητες τυπικές κινήσεις Brown και $r \in [-1, 1]$. Θεωρούμε την ανελίξη $(X(t))_{t \geq 0}$ με $X(t) = rB(t) + \sqrt{1-r^2}W(t)$ για κάθε $t \geq 0$. Να δειχθεί ότι η X είναι τυπική κίνηση Brown.

Άσκηση 2. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $X := \int_0^1 s\{B(s)\}^2 ds$.

Άσκηση 3. Για $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε $T_a := \inf\{s \geq 0 : B(s) = a\}$. Δείξτε ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει

$$T_a \stackrel{d}{=} \frac{a^2}{Z^2}$$

με $Z \sim N(0, 1)$.

Άσκηση 4. Έστω δύο τυχαία γραφήματα Erdos-Renyi $G(n, p_1), G(n, p_2)$ ανεξάρτητα μεταξύ τους και με σύνολο κορυφών $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ το καθένα. Να δειχθεί ότι και η ένωσή τους $G(n, p_1) \cup G(n, p_2)$ είναι γράφημα της μορφής $G(n, p)$ για κατάλληλο p το οποίο να προσδιορίσετε.

[Η ένωση τους είναι το γράφημα με κορυφές $[n]$ και σύνολο ακμών την ένωση των συνόλων ακμών των δύο γραφημάτων.]

Άσκηση 5. S. Roch. Άσκηση 2.19. [Θεωρείστε δεδομένη τη 2.18.]

Άσκηση 6. Έστω $n \in \mathbb{N}^+$ και $\mathcal{P}_n$ το σύνολο των γραφημάτων στο $[n]$ που έχουν τουλάχιστον μια κορυφή με βαθμό τουλάχιστον 2. Έστω και $(p(n))_{n \in \mathbb{N}^+}$ ακολουθία αριθμών στο $[0, 1]$. Να δειχθεί ότι

(i) $\mathbf{P}(G(n, p) \in \mathcal{P}_n) \rightarrow 0$ αν $p(n) \ll 1/n^{3/2}$,

(ii) $\mathbf{P}(G(n, p) \in \mathcal{P}_n) \rightarrow 1$ αν $p(n) \gg 1/n^{3/2}$.

[Στο (ii) ενδεχομένως να είναι χρήσιμο να το δείξετε πρώτα υποθέτοντας επιπλέον ότι $p(n) \ll 1/n$ και έπειτα να χρησιμοποιήσετε ένα επιχείρημα σύζευξης. Δείτε την Παράγραφο 3.2 Thresholds, στο σύγγραμμα των Frieze-Karonski.]