

Στοχαστικές ανελίξεις
Εργασία 2

Άσκηση 1. Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ submartingale. Ναδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\mathbf{P}(\min_{0 \leq k \leq n} X_k \leq -x) \leq \frac{1}{x} \{\mathbf{E}(X_n^+) - \mathbf{E}(X_0)\}.$$

[Υπόδειξη: Μιμηθείτε την απόδειξη της Πρότασης 4.4.2 (ανισότητα Doob) στον Durrett (έκδοση 2019).]

Άσκηση 2. Έστω $s > 0$ και $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με

$$Z_n = \begin{cases} -1 & \text{με πιθανότητα } n^{-s}/2, \\ 1 & \text{με πιθανότητα } n^{-s}/2, \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 1 - n^{-s}. \end{cases}$$

Θέτουμε $Y_0 = 0$ και για $n \in \mathbb{N}^+$, θέτουμε $Y_n := n^s Y_{n-1} |Z_n| + Z_n \mathbf{1}_{Y_{n-1}=0}$.

(α) Ναδειχθεί ότι η $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς κατάλληλη διήθηση (ορίστε την) και για κάθε $x > 0$ και $n \in \mathbb{N}^+$ ισχύει

$$\mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq n} Y_k \geq x) \leq \frac{1}{2x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^s} (1 - k^{-s}).$$

(β) Ναδειχθεί ότι $Y_n \rightarrow 0$ κατά πιθανότητα και συγκλίνει στο 0 σχεδόν βέβαια αν και μόνο αν $s > 1$. Τέλος, ναδειχθεί ότι δεν συγκλίνει στο 0 στον L^1 .

Άσκηση 3. Έστω $(Z_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε $Z_1 \equiv 1$ για κάθε $n \geq 1$, η Z_n δεδομένων των $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή Z_{n-1} . Ποια είναι η συμπεριφορά της ακολουθίας $(Z_n)_{n \geq 1}$ για μεγάλα n ;

Άσκηση 4. (Για τη σύγκλιση στο κεντρικό οριακό θεώρημα) Έστω $(\xi_k)_{k \geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με $\mathbf{E}(\xi_1) = 0, \mathbf{E}(\xi_1^2) = 1$. Έστω $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ και $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\{\xi_k : k \in \mathbb{N}^+\})$. Θέτουμε

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \xi_k$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. [Το κεντρικό θεώρημα δίνει τη σύγκλιση κατά κατανομή $Z_n \Rightarrow Y \sim N(0, 1)$.]

(α) Ναδειχθεί ότι για κάθε $W \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$ ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(W Z_n) = 0$.

(β) Ναδειχθεί ο ισχυρισμός του (α) για κάθε $W \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

(γ) Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει $Z_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ώστε $Z_n \rightarrow Z_\infty$ στον L^2 .

(δ) Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει τυχαία μεταβλητή Z_∞ ώστε $Z_n \rightarrow Z_\infty$ κατά πιθανότητα.

Άσκηση 5. Βρείτε μια λύση της Άσκησης 4.6.4 του Durrett (έκδοση 2019) χωρίς χρήση του Θεωρήματος 4.6.9 (δηλαδή όχι αυτήν που κάναμε στην τάξη).