

Στοχαστικές ανελίξεις

Εργασία 1

Άσκηση 1. Έστω $n \in \mathbb{N}^+$ και $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. Δείξτε ότι $\mathbf{E}(X_1|S_n) = S_n/n$.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $\mathbf{E}(X_j|S_n) = \mathbf{E}(X_1|S_n)$ (ισότητα με πιθανότητα 1) για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$.

Άσκηση 2. Άσκηση 3.10 από το «Εισαγωγή στον στοχαστικό λογισμό». Επιπλέον, να δειχθούν τα εξής.

(ε) Με πιθανότητα 1 ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.

(ζ) Η τυχαία μεταβλητή $R := -\inf\{S_k : k \in \mathbb{N}\}$ ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή (τιμές $0, 1, 2, \dots$) με παράμετρο $a := 1 - (q/p)$ (η R μετράει πλήθος αποτυχιών ως την πρώτη επιτυχία σε μια ακολουθία δοκιμών που καθεμία έχει πιθανότητα επιτυχίας a).

Άσκηση 3. Άσκηση 3.16 από το «Εισαγωγή στον στοχαστικό λογισμό».

Άσκηση 4. Durrett (έκδοση 2019), Άσκηση 4.3.3.

Υπόδειξη: Για την εύρεση του supermartingale που αναφέρει, γράψτε τη δοσμένη ανισότητα ως $\mathbf{E}(X_{n+1} - X_n - Y_n | \mathcal{F}_n) \leq 0$. Η ποσότητα μέσα στη δεσμευμένη μέση τιμή πρέπει να είναι η μεταβολή σε ένα βήμα αυτού του supermartingale. Έπειτα, μιμηθείτε τη απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1.

Άσκηση 5. Έστω κλαδωτή ανέλιξη $(Z_n)_{n \geq 0}$ με $Z_0 = 1$ και $X_{n,i}$ το πλήθος των παιδιών του i ατόμου της $n - 1$ γενιάς. Υποθέτουμε ότι καθεμία από τις $X_{n,i}$ έχει μέση τιμή $\mu \in \mathbb{R}$ και διασπορά $\sigma^2 \in (0, \infty)$.

(α) Να δειχθεί ότι

$$\text{Var}(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} & \text{αν } \mu \neq 1, \\ n\sigma^2 & \text{αν } \mu = 1. \end{cases}$$

(β) Για κάθε $n \geq 1$ να υπολογιστεί η συνδιακύμανση $\text{Cov}(Z_{n+1}, Z_n)$.

Άσκηση 6. Έστω ότι σε μια κλαδωτή ανέλιξη η κατανομή του πλήθους παιδιών κάθε ατόμου έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$p_k := \begin{cases} 1 - \frac{b}{p} & \text{αν } k = 0, \\ b(1 - p)^{k-1} & \text{αν } k \in \mathbb{N}^+, \\ 0 & \text{αν } k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

όπου $p \in (0, 1)$ και $b > 0$.

(α) Ποιες είναι οι επιτρεπτές τιμές για το b ;

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα εξαφάνισης του πληθυσμού για τις διάφορες τιμές του b .