2.3 **Χώροι πηλίκο και τοπολογία πηλίκο**

Στην παρούσα παράγραφο θα δείξουμε πως μπορούμε μέσω μιας απεικόνισης ενός δεδομένου τοπολογικού χώρου επί ενός συνόλου να εισαγάγουμε τοπολογία στο σύνολο, την τοπολογία πηλίκο. Ο ορισμός είναι απλός παρόλα αυτά επιτρέπει, ταυτίζοντας σύνολα με σημεία, την ακριβή περιγραφή γεωμετρικών αντικειμένων όπως για παράδειγμα είναι ο κύλινδρος ή ο τόρος (σαμπρέλα)

Στις σημειώσεις αυτές θα περιορισθούμε σε κάποια βασικά στοιχεία της σχετικής θεωρίας.

Ορισμός 2.21. Έστω $\mathrm{Y} \neq \varnothing$ σύνολο, X τοπολογικός χώρος και $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ μια απεικόνιση του X επί του Y. Η τοπολογία πηλίκο στον Y η οποία ορίζεται από την f είναι η

$$\tau(f) = \left\{ U \subseteq \mathrm{Y} : f^{-1}(U) \text{ είναι ανοικτό στον } \mathrm{X} \right\}$$

Ο χώρος $(\mathrm{Y}, \tau(f))$ ονομάζεται τότε χώρος πηλίκο.

Η $\tau(f)$ είναι μια τοπολογία στον Y επειδή η f^{-1} διατηρεί τις πράξεις της ένωσης και της τομής . Επειδή η f^{-1} διατηρεί τα συμπληρώματα συνόλων, ένα σύνολο $F \subseteq \mathrm{Y}$ είναι κλειστό αν και μόνο αν το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στον X.

Από τον ορισμό της $\tau(f)$ έπεται αμέσως ότι η f είναι συνεχής και η $\tau(f)$ είναι η μεγαλύτερη τοπολογία επί του Y ώστε η f να είναι συνεχής.

Παραδείγματα 2.22. 1) Έστω $\mathrm{X} = \prod_{i \in I} \mathrm{X}_i$ ένα καρτεσιανό γινόμενο τοπολογικών χώρων με την τοπολογία γινόμενο τ. Έστω $a \in I$, τότε η τοπολογία πηλίκο στον παράγοντα X_a η οποία ορίζεται από την προβολή $\pi_a : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_a$ είναι ακριβώς η τοπολογία του χώρου X_a. Πράγματι το σύνολο $\pi_a^{-1}(U) \in \tau$ αν και μόνο αν το U είναι ανοικτό στον τοπολογικό χώρο X_a.

2)Έστω $f: \mathrm{X} = [0,1] \to \mathrm{Y} = \{0,1\}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $\left[\frac{1}{2},1\right]$. Είναι τότε εύκολο να αποδείξουμε ότι η τοπολογία $\tau(f)$ επί του Y είναι η τοπολογία Sierpinski (πρβλ. το παράδειγμα 1.2 (4)). Παρατηρούμε ότι αν ο Y έχει την $\tau(f)$ τότε η (συνεχής) f δεν είναι ανοικτή αλλά ούτε και κλειστή απεικόνιση (πρβλ. τον ορισμό 2.8)

<u>Ορισμός</u> 2.23. Έστω X και Y τ.χ. και $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ συνεχής απεικόνιση του X επί του Y. Η f ονομάζεται απεικόνιση <u>πηλίκο</u> ή απεικόνιση <u>ταύτισης</u>, αν η τοπολογία του Y είναι η $\tau(f)$, δηλαδή, ένα υποσύνολο U του Y είναι ανοικτό στον Y αν και μόνο αν το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον X.

Ένας άλλος τρόπος περιγραφής μιας απεικόνισης πηλίκο έχει ως ακολούθως:. Έστω $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ μια απεικόνιση του συνόλου X επί του συνόλου Y, θα λέμε ότι ένα υποσύνολο C του X είναι <u>κεκορεσμένο</u> αν $C = f^{-1}\left(f(C)\right)$. Αν X και Y είναι τοπολογικοί χώροι , η f είναι μια απεικόνιση πηλίκο αν και μόνο αν είναι συνεχής και απεικονίζει κεκορεσμένα ανοικτά υποσύνολα του X σε ανοικτά υποσύνολα του Y.

<u>Πρόταση 2.24</u>. αν η $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ είναι συνεχής ανοικτή (ή κλειστή) απεικόνιση του τ.χ. X επί του τ.χ. Y τότε η f είναι μια απεικόνιση πηλίκο.

<u>Απόδειξη</u> Έστω τ η τοπολογία του Y. Επειδή η f είναι συνεχής (και $\tau(f)$ είναι η μεγαλύτερη τοπολογία επί του Y ώστε η f να είναι συνεχής) έπεται ότι $\tau \subseteq \tau(f)$. Για το αντίστροφο, έστω $U \in \tau(f)$, τότε το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο X και επειδή η f είναι ανοικτή και επί του Y έπεται ότι $U = f\left(f^{-1}(U)\right)$. Άρα το $U \in \tau$. Η απόδειξη είναι ανάλογη όταν η f είναι κλειστή απεικόνιση.

<u>Παραδείγματα</u> 2.25. 1) Έστω X, Y τ.χ. και $\pi_1: \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ η πρώτη προβολή. Τότε η π_1 είναι συνεχής ανοικτή και επί του Y, αλλά εν γένει δεν είναι κλειστή απεικόνιση (πρβλ. πρόταση 2.9)

2) Έστω X ο υπόχωρος $[0,1]\cup[2,3]$ του R και Y ο υπόχωρος $[0,2]$ του R. Η απεικόνιση η οποία ορίζεται ως $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ x-1, & x\in[2,3] \end{cases}$,

εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι συνεχής κλειστή και επί του Y. Η f δεν είναι ανοικτή, εφόσον η εικόνα του ανοικτού υποσυνόλου $[0,1]$ του X δεν είναι ανοικτό στον Y.

(Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες).

3) Το παράδειγμα 2.22 (2) είναι μια απεικόνιση πηλίκο η οποία δεν είναι ανοικτή αλλά ούτε κλειστή.

4) Έστω $f:R\to S^1$ η απεικόνιση η οποία ορίζεται από τον τύπο $f(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t), t\in R$ (πρβλ. την άσκηση 9 της παραγράφου 1.4)

Είναι σαφές ότι η f είναι συνεχής και επί του μοναδιαίου κύκλου S^1. Επίσης αν (a,β) είναι ένα ανοικτό διάστημα του R με μήκος $0<\beta-a<1$ τότε η f απεικονίζει το (a,β) σε ένα ανοικτό τόξο του S^1 και άρα η f είναι ανοικτή απεικόνιση. Η f δεν είναι κλειστή

(γιατί;).

Ο περιορισμός $g=f\big|_{[0,1]}:[0,1]\to S^1$ είναι συνεχής και επί του S^1 και επί πλέον μια κλειστή απεικόνιση, η οποία δεν είναι όμως ανοικτή (γιατί;).

5) Μία απεικόνιση $f:X\to Y$ συνεχής και επί του Y δεν είναι αναγκαία απεικόνιση πηλίκο. Πράγματι, έστω τ_1,τ_2 τοπολογίες επί του συνόλου X ώστε $\tau_2 \underset{\neq}{\subset} \tau_1$. Τότε η ταυτοτική $I:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ είναι συνεχής, αλλά δεν είναι απεικόνιση πηλίκο (γιατί;)

Έστω $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ συνάρτηση από το σύνολο X επί του συνόλου Y, τότε η f μπορεί να ερμηνευθεί και ως η κανονική απεικόνιση $\left(x \in \mathrm{X} \to [x] \in \mathrm{X}/\sim\right)$ μιας σχέσης ισοδυναμίας $\sim$ επί του συνόλου X και ο Y ως ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathrm{X}/\sim$ αυτής της σχέσης. Πράγματι, έστω $x, y \in \mathrm{X}$, ορίζουμε $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο X ($x \sim x$ για $x \in \mathrm{X}$, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ και $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$). Αν $x \in \mathrm{X}$ τότε η κλάση ισοδυναμίας του x είναι το υποσύνολο $[x] = f^{-1}\left(f(x)\right)$ του X, επίσης η απεικόνιση $y \in \mathrm{Y} \to f^{-1}\left(\{y\}\right) \in \mathrm{X}/\sim$ είναι $1-1$ και επί. (Υπενθυμίζουμε ότι μια σχέση ισοδυναμίας επί ενός συνόλου X ορίζεται και από μια διαμέριση του X σε ξένα ανά δύο μη κενά σύνολα, τα οποία παίζουν το ρόλο των κλάσεων ισοδυναμίας.)

Έτσι αν X είναι τοπολογικός χώρος Y σύνολο και $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ μια συνάρτηση του X επί του Y μπορούμε να θεωρούμε την f ως την κανονική απεικόνιση $x \in \mathrm{X} \xrightarrow{\pi} [x] \in \mathrm{X}/\sim$ μιας σχέσης ισοδυναμίας $\sim$ επί του X και βέβαια τον Y ως ταυτιζόμενο με τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathrm{X}/\sim$.

Μπορούμε τότε να περιγράψουμε την τοπολογία πηλίκο του $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\sim$ με τον ακόλουθο τρόπο. Ένα υποσύνολο U του $\mathrm{X}/\sim$ είναι μια οικογένεια κλάσεων ισοδυναμίας και το σύνολο $\pi^{-1}(U)$ είναι η ένωση των κλάσεων που ανήκουν στο U. Επομένως ένα ανοικτό υποσύνολο U του $\mathrm{X}/\sim$ είναι μια οικογένεια κλάσεων ισοδυναμίας των οποίων η ένωση είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

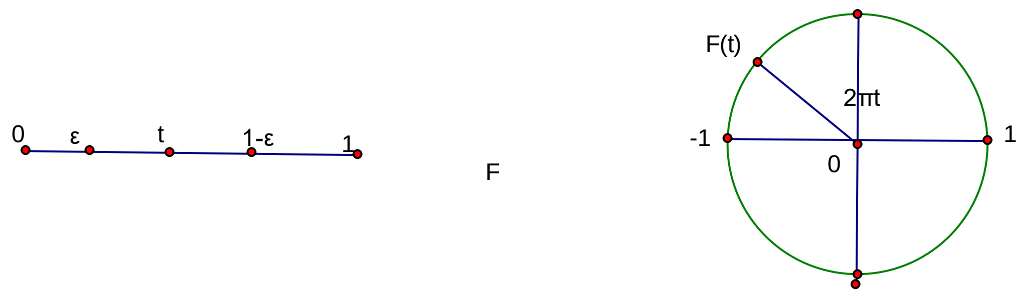
Υπό το « φως» των παραπάνω παρατηρήσεων τίθεται το ακόλουθο φυσιολογικό πρόβλημα: Αν X είναι τ.χ. και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στον X (ισοδύναμα, αν P είναι μια διαμέριση του X σε ξένα ανά δύο μη κενά σύνολα) να προσδιοριστεί (ταυτοποιηθεί) ο χώρος πηλίκο $\mathrm{X}/\sim$ με την τοπολογία πηλίκο.

Παράδειγμα 2.26. Έστω $\mathrm{X} = [0,1]$. Ορίζουμε μια διαμέριση P του X, της οποίας τα μέλη είναι τα μονοσύνολα του $(0,1)$ και το δισύνολο $\{0,1\}$.

Είναι σαφές ότι αν ταυτίσουμε το 1 με το 0, τότε ο χώρος πηλίκο $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\sim$ ταυτίζεται με το ημιανοικτό διάστημα $[0,1)$ και τότε η κανονική απεικόνιση $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}/\sim$ είναι η

$\pi(0)=\pi(1)=0$ και $\pi(x)=x$ για κάθε $x\in(0,1)$. Η τοπολογία πηλίκο $\tau(\pi)$ στον $\mathrm{X}/\sim$ έχει τότε ως βάση όλα τα ανοικτά διαστήματα (a,β) με $0\le a<\beta\le 1$ και ακόμη όλα τα σύνολα της μορφής $[0,\varepsilon)\cup(1-\varepsilon,1)$ όπου $0<\varepsilon<1$. Έπεται ότι η απεικόνιση $F:\mathrm{X}/\sim\to S^1$, $F(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$, $t\in[0,1)$ είναι ένας ομοιομορφισμός και συνεπώς ο χώρος $\mathrm{X}/\sim$ μπορεί να ταυτισθεί και με τον μοναδιαίο κύκλο (πρβλ. το παράδειγμα 2.25(4)). Αυτό γεωμετρικά σημαίνει ότι η απεικόνιση F «τυλίγει» το διάστημα $[0,2\pi)$ στον μοναδιαίο κύκλο S^1.

(Παρατηρούμε ακόμη ότι το $[0,1)$ ταυτίζεται με την ομάδα πηλίκο R/Z. Πράγματι αν $x\in R$ τότε το σύνολο $x+Z$ τέμνει το $[0,1)$ σε ένα ακριβώς σημείο, το οποίο είναι το δεκαδικό μέρος $x-[x]$ του x, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x. Έτσι η απεικόνιση $x+Z\in R/Z\to x-[x]\in[0,1)$ είναι $1-1$ και επί του $[0,1)$.)



Ασκήσεις

1)Έστω X,Y τ.χ. και $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ συνεχής και επί συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ ώστε $fog=\mathrm{I}_{\mathrm{Y}}$ (=η ταυτοτική στον Y) τότε η f είναι μια απεικόνιση πηλίκο.

2)Έστω X,Y τ.χ. , και $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ συνεχής και επί συνάρτηση. Αποδείξτε ότι : α)Η f είναι μια απεικόνιση πηλίκο $\Leftrightarrow$ για κάθε χώρο Z και για κάθε απεικόνιση $g:\mathrm{Y}\to Z$ η συνέχεια της gof έπεται την συνέχεια της g.

(β) Αν η f είναι απεικόνιση πηλίκο τότε μια απεικόνιση $g:\mathrm{Y}\to Z$ είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ η gof είναι συνεχής.

3)Έστω X τ.χ. και A υπόχωρος του X. Υποθέτομε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $r:\mathrm{X}\to\mathrm{X}:\ r(\mathrm{X})=\mathrm{A}$ και $r\big|_{\mathrm{A}}=\mathrm{I}_{\mathrm{A}}$. (Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται μια retraction του X επί του A.) Αποδείξτε ότι η r είναι μια απεικόνιση πηλίκο.

4)έστω X και Y τ.χ. και $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ συνεχής και επί συνάρτηση. Θέτομε $R=\{(x,y):\ f(x)=f(y)\}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι ανοικτή και το R κλειστό υποσύνολο του $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ τότε ο Y είναι χώρος Hausdorff.

(β)Αν ο X είναι κανονικός χώρος και η f είναι κλειστή απεικόνιση τότε το R είναι κλειστό στον $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$.

(γ) Αν ο X είναι κανονικός χώρος και η f είναι ανοικτή και κλειστή απεικόνιση τότε ο Y είναι χώρος Hausdorff.(Για τους ορισμούς των κανονικών και χώρων Hausdorff παραπέμπουμε στο κεφάλαιο των διαχωριστικών αξιωμάτων.)

5)Συμπληρώστε την απόδειξη των ιδιοτήτων των παραδειγμάτων 2.25 (4), (5) και 2.26.

6)Έστω $\mathrm{I}=[0,1]$. Στο μοναδιαίο τετράγωνο I^2 ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ώστε: $(0,y)\sim(1,y)$ για κάθε $y\in\mathrm{I}$. Αποδείξτε ότι ο χώρος πηλίκο $\mathrm{I}^2/\sim$ (με την τοπολογία πηλίκο) ταυτίζεται με τον κύλινδρο $S^1\times\mathrm{I}$.