1.2 Βάσεις και υποβάσεις.

Το «καθήκον» του ορισμού μιας τοπολογίας διευκολύνεται αν είμαστε σε θέση να περιγράψουμε αρκετά ανοικτά σύνολα τα οποία να παραγάγουν όλα τα ανοικτά σύνολα.

Ορισμός 1.29 . Έστω (X,τ) τ.χ. μια οικογένεια $B \subseteq \tau$ λέγεται ότι είναι μια βάση για την τ αν κάθε ανοικτό μη κενό σύνολο (δηλαδή κάθε στοιχείο της $\tau \setminus \{\varnothing\}$) είναι ένωση στοιχείων της B.

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ την διαφορά μεταξύ των εννοιών βάση και βάση περιοχών για ένα τοπολογικό χώρο. Η πρώτη είναι έννοια ολική και η δεύτερη τοπική. Επίσης τα μέλη μιας βάσης είναι ανοικτά σύνολα ενώ αυτά μιας βάσης περιοχών δεν είναι όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει αναγκαία ανοικτά σύνολα (πρβλ. τα παραδείγματα 1.23). Η ακόλουθη πρόταση χαρακτηρίζει τις οικογένειες $B \subseteq \tau$ οι οποίες μπορούν να παίξουν τον ρόλο της βάσης για την τ .

Πρόταση 1.30 Έστω $B \subseteq \tau$ οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

(α) Η B είναι μια βάση για την τ .

(β) Για κάθε $U \in \tau$ και κάθε $x \in U$ υπάρχει $V \in B$ ώστε $x \in V \subseteq U$.

(γ) Θέτομε , $B_x = \{V \in B : x \in V\}, x \in X$. Τότε η B_x είναι βάση περιοχών του x για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη (α) $\Rightarrow$(β) Έστω $U \in \tau$ και $x \in U$. Επειδή η B είναι βάση για την τ, $U = \bigcup\{V_i : i \in I\}$, όπου κάθε $V_i \in B$. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $V_i \in B$ ώστε $x \in V_i \subseteq U$.

(β) $\Rightarrow$(γ) Έστω τυχόν $x \in X$ και W περιοχή του x. Τότε υπάρχει $U \in \tau$ ώστε $x \in U \subseteq W$ από την υπόθεσή μας υπάρχει $V \in B$ ώστε $x \in V \subseteq U$. Από τον ορισμό της βάσης περιοχών έχουμε το συμπέρασμα.

(γ) $\Rightarrow$(α) Έστω $U \in \tau$. Αν $x \in U$ τότε από την υπόθεσή μας υπάρχει $V \in B_x$ και άρα $V \in B$, ώστε $x \in V \subseteq U$. Έπεται ότι το U μπορεί να εκφρασθεί ως ένωση μελών της B και έτσι η B είναι μία βάση για την τ.

Παραδείγματα 1.31. 1) Έστω (X,τ) τ.χ. , προφανώς η ίδια η τ είναι βάση της τ. Αν $\tau = P(X)$ είναι η διακριτή τοπολογία στο X τότε η $B = \{\{x\} : x \in X\}$ είναι μια βάση της τ. Παρατηρούμε ήδη ότι μια τοπολογία (και θα το διαπιστώσουμε και στα επόμενα παραδείγματα) μπορεί να έχει διαφορετικές βάσεις.

2) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Θέτουμε $B_1 = \{B(x,\varepsilon) : x \in X \text{ και } \varepsilon>0\}$ και $B_2 = \left\{B\left(x,\frac{1}{n}\right) : x \in X, n \geq 1\right\}$.

Παρατηρούμε ότι, καθώς ένα ανοικτό σύνολο σε ένα μετρικό χώρο είναι ένωση ανοικτών σφαιρών , οι οικογένειες B_1 και B_2 είναι βάσεις για τη μετρική τοπολογία τ_d του X . Σημειώνουμε ότι αν $D \subseteq X$ πυκνό (δηλαδή αν $\overline{D} \subseteq X$) τότε η οικογένεια $B = \{B(x,q) : x \in D \text{ και } q > 0 \text{ ρητός }\}$ είναι επίσης μια βάση για την τ.

(Πράγματι, έστω $U \subseteq X$ ανοικτό και $x \in U$ τότε υπάρχει $\in >0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq U$. Έστω $q > 0$ ρητός με $q < \varepsilon$. Αν $y \in D$ με $d(x,y) < \frac{q}{3}$, τότε $x \in B\left(y,\frac{q}{3}\right) \subseteq B(x,q) \subseteq B(x,\varepsilon)$. Από την πρόταση 1.30 έχουμε το συμπέρασμα)

Έπεται ιδιαίτερα ότι, αν D αριθμήσιμο και πυκνό στον X (δηλαδή αν X διαχωρίσιμος) τότε ο X έχει αριθμήσιμη βάση (λέμε τότε ότι ο X είναι 2ος αριθμήσιμος.)

3) Έστω $X = R$ με την συνήθη τοπολογία, τότε η οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων του R, $B = \{(a,b) : a < b, a,b \in R\}$ είναι μια βάση για την τοπολογία του R. Αυτό προκύπτει (και) από το προηγούμενο παράδειγμα αφού $(a,b) = B(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, όπου $x = \frac{a+b}{2}$ και $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Λόγω της πυκνότητας

των ρητών στο R έπεται από το παράδειγμα (2), ότι και η οικογένεια $B' = \{(a,b) : a,b \in Q$ με $a < b\}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση για το χώρο R.

4) Έστω $X = R^2$ το ευκλείδειο επίπεδο. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $D = \{(p,q) : p,q \in Q\}$ είναι ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του R^2 (γιατί;).

Έτσι από το παράδειγμα (2) έχουμε ότι η οικογένεια B όλων των ανοικτών δίσκων $B(x,r)$ του R^2 με κέντρα $x \in D$ και ακτίνα r θετικό ρητό αριθμό είναι μια αριθμήσιμη βάση για το R^2.

Μια διαφορετική βάση B' του R^2 αποτελείται από όλα τα ανοικτά ορθογώνια $V = (a,b) \times (c,d)$ (γιατί;). Το ανωτέρω παράδειγμα γενικεύεται σε κάθε Ευκλείδειο χώρο R^n. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες .)

Θα εξετάσουμε στην συνέχεια κάτω από ποιες συνθήκες μια (τυχούσα) οικογένεια B υποσυνόλων ενός συνόλου X μπορεί να είναι βάση για κάποια τοπολογία στο X.

<u>Πρόταση</u> 1.32. Έστω X και $B \subseteq P(X)$. Τότε το B είναι βάση για μια (μοναδική) τοπολογία στο X, αν και μόνο αν, ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.

(α) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $U \in B : x \in U$ (δηλαδή $X = \cup\{U : U \in B\}$.

(β) Για κάθε $U_1, U_2 \in B$ και κάθε $x \in U_1 \bigcap U_2$ υπάρχει $U_3 \in B$ ώστε $x \in U_3 \subseteq U_1 \bigcap U_2$.

<u>Απόδειξη</u> $''\Rightarrow''$. Έστω ότι το B είναι βάση κάποιας τοπολογίας τ στο X. Εφ’όσον το X είναι ανοικτό η (α) ικανοποιείται από τον ορισμό της βάσης. Αν $U_1, U_2 \in B$ και $x \in U_1 \bigcap U_2$ τότε επειδή το $U_1 \bigcap U_2$ είναι ανοικτό από την πρόταση 1.30 έχουμε το συμπέρασμα.

$'' \Leftarrow ''$ Θέτομε $\tau = \left\{ V \subseteq X : \exists \{U_i : i \in I\} \subseteq B \text{ ώστε } V = \bigcup_{i \in I} U_i \right\}$.

Θα αποδείξουμε ότι η τ ικανοποιεί τον ορισμό της τοπολογίας.

Από την ιδιότητα (α) έχουμε : $X \in \tau$ και για $I = \varnothing$, $\varnothing = \bigcup_{i \in \varnothing} U_i \in \tau$.

Η τ είναι κλειστή για τις ενώσεις . Πράγματι, έστω$\{U_j : j \in J\} \subseteq \tau$. Τότε, από τον ορισμό της τ για κάθε $j \in J$ θα είναι$U_j = \bigcup_{i \in I_j} B_i$. Κατά συνέπεια ,

$\bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I_j} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} B_i$ όπου $I = \bigcup_{j \in J} I_j$. Άρα $\bigcup_{j \in J} U_j =$ ένωση μελών της B και έτσι ανήκει στην τ .

Η τ είναι κλειστή για τις πεπερασμένες τομές. Αρκεί να το αποδείξουμε για τις 2-τομές (γιατί;).

Έστω $U_1, U_2 \in \tau$, τότε $U_1 = \bigcup_{i \in I_1} B_i$ και $U_2 = \bigcup_{i \in I_2} B_i$. Άρα $U_1 \cap U_2 = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} \left(B_i \cap B_j \right)$. (1).

Από την ιδιότητα (β) έχουμε ότι αν $B_i, B_j \in B$ και $x \in B_i \cap B_j$ τότε υπάρχει $B_x \in B : x \in B_x \subseteq B_i \cap B_j$.

Έπεται ότι $B_i \cap B_j =$ ένωση μελών της B και άρα από την (1) $U_1 \cap U_2$ είναι ένωση μελών της B και έτσι ανήκει στην τ .

Η μοναδικότητα της τ είναι φανερή από τον ορισμό της και τον ορισμό της βάσης.

Παραδείγματα 1.33. 1) Έστω (X_1, τ_1) και (X_2, τ_2) τοπολογικοί χώροι. Θεωρούμε την οικογένεια B όλων των ΄΄ανοικτών ορθογωνίων΄΄ του καρτεσιανού γινομένου $X_1 \times X_2$. Δηλαδή των ορθογωνίων της μορφής $U \times V$ όπου $U \in \tau_1$ και $V \in \tau_2$. Η B ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) και (β) της πρότασης 1.32. Πράγματι η (α) είναι προφανής. Όσο για την (β) παρατηρούμε ότι, αν $U_1 \times V_1$ και $U_2 \times V_2$ είναι μέλη της B τότε $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2)$. Συνεπώς η B (ικανοποιεί την ισχυρότερη ιδιότητα να) είναι κλειστή για τις 2- τομές και άρα για τις πεπερασμένες τομές.

Η τοπολογία τ που ορίζεται στον χώρο $X_1 \times X_2$ και η οποία έχει ως βάση την B, είναι σημαντική, ονομάζεται τοπολογία γινόμενο και θα μελετηθεί διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο. Επί του παρόντος γενικεύστε το παράδειγμα για ένα πεπερασμένο πλήθος $X_1, X_2, ..., X_n$ χώρων.

2. Έστω R το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την οικογένεια B όλων των ημιανοικτών διαστημάτων της μορφής $[x, r)$, όπου $x, r \in R, x < r$.
Εύκολα αποδεικνύεται ότι η B ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) και (β) της πρότασης 1.32.

Έτσι ορίζεται μια τοπολογία στο R η οποία έχει ως βάση την B. Ο χώρος R εφοδιασμένος με αυτή την τοπολογία έστω τ_s, ονομάζεται ευθεία Sorgenfrey και συμβολίζεται με R_S. Είναι απλό να εξακριβώσουμε ότι η συνήθης (ευκλείδεια) τοπολογία του R είναι μικρότερη της τ_s και ακόμη ότι, το σύνολο των ρητών αριθμών είναι πυκνό υποσύνολο του χώρου R_S (άρα ο R_S είναι διαχωρίσιμος).

Θα αποδείξουμε ότι ο χώρος R_S δεν είναι μετρικοποιήσιμος. Επειδή είναι διαχωρίσιμος, αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν έχει αριθμήσιμη βάση (πρβλ. παράδειγμα 1.31. (2))

Έστω $B_1 = \{U_n : n \geq 1\}$, μια αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του R_S. Θέτομε $a_n = \inf U_n, n \geq 1$. Είναι τότε σαφές ότι υπάρχει $x_0 \in R$ ώστε $x_0 \neq a_n, n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι τότε το διάστημα $[x_0, x_0 + 1)$ (που είναι ανοικτό υποσύνολο του R_S) δεν μπορεί να εκφρασθεί ως ένωση μιας υποοικογένειας της B_1 (γιατί;) και έτσι η B_1 δεν μπορεί να είναι βάση για τον χώρο R_S.
Σημειώνουμε ότι ο τοπολογικός χώρος R_S είναι ένα <u>σημαντικό</u> παράδειγμα το οποίο θα μας χρησιμεύσει αργότερα.

Σε αυτό το σημείο μπορεί να διατυπωθεί η ακόλουθη ερώτηση. Τι θα συμβεί αν ξεκινήσουμε από μια τυχούσα οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X, επισυνάψουμε σε αυτήν όλες τις πεπερασμένες τομές και εν συνεχεία θεωρήσουμε όλες τις δυνατές ενώσεις τέτοιων συνόλων ; έτσι οδηγούμαστε στην έννοια της υποβάσης για μια τοπολογία.

<u>Ορισμός</u> 1.34 Έστω (X,τ) τ. χ. και $\Sigma \subseteq \tau$. Η Σ λέγεται <u>υποβάση</u> για την τ , αν και μόνο αν, η οικογένεια $B = \left\{ U \subseteq X : \text{ υπάρχουν } C_1, C_2, ... C_n \in \Sigma : U = \bigcap_{k=1} C_k \right\}$ είναι βάση για την τ .

<u>Πρόταση</u> 1.35 . Έστω $X \neq \varnothing$ σύνολο και $\Sigma \subseteq P(X)$ ώστε $X = \bigcup \{ C : C \in \Sigma \}$. Τότε το Σ είναι υποβάση για μια (μοναδική) τοπολογία στο X .

<u>Απόδειξη.</u> Θέτομε $B = \left\{ U \subseteq X : \text{ υπάρχουν } C_1, ..., C_n \in \Sigma : U = \bigcap_{k=1}^{n} C_k \right\}$ προφανώς $\Sigma \subseteq B$. Παρατηρούμε ότι η B ικανοποιεί τις συνθήκες (α) και (β) της πρότασης 1.32 και συνεπώς είναι βάση για μια τοπολογία τ στο X . Πράγματι η (α) είναι φανερή αφού $\Sigma \subseteq B$ και $X = \bigcup \{ C : C \in \Sigma \}$. Έστω $B_1, B_2 \in B$ τότε $B_1 = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$ και $B_2 = \bigcap_{j=1}^{m} C_j^{'}$.

Κατά συνέπεια το $B_1 \bigcap B_2$ είναι πεπερασμένη τομή μελών της Σ. Έτσι το B είναι κλειστό για τις πεπερασμένες τομές και η ιδιότητα (β) ικανοποιείται.

<u>Παραδείγματα</u> 1.36 1) Έστω (X,τ) τ.χ. τότε η ίδια η τοπολογία τ είναι μια υποβάση για την τ .

2) Έστω $X = R$ με την συνήθη τοπολογία τ . Τότε όλα τα υποδιαστήματα της μορφής $(-\infty, a)$ και $(b, +\infty)$ όπου $a, b \in R$ είναι μια υποβάση για την τ . Η εξακρίβωση είναι απλή.

3) Στον χώρο R_S (= η ευθεία Sorgenfrey) τα υποδιαστήματα της μορφής $[a, +\infty)$ και $(-\infty, b)$, όπου $a, b \in R$ είναι μια υποβάση για την τοπολογία του χώρου. Ο έλεγχος είναι και πάλι απλός.

4) Έστω $\left(X,\tau_1\right)$, $\left(X,\tau_2\right)$ τοπολογικοί χώροι τότε η τοπολογία γινόμενο τ στον $X_1 \times X_2$ (πρβλ παράδειγμα 1.33 (1)) είναι εκείνη η οποία έχει ως υποβάση την οικογένεια $\Sigma = \left\{X_1 \times V : V \in \tau_2\right\} \bigcup \left\{U \times X_2 : U \in \tau_1\right\}$.