08/10/2014

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ
Μάθημα 1

Δυναμικά Συστήματα: φαινόμενα που η κατάστασή τους αλλάζει με το χρόνο.
Διακρίνονται σε Ντετερμινιστικά και Στοχαστικά
(Σε αυτό το μάθημα μελετούμε τα στοχαστικά :) !)

Στοχαστική Ανέλιξη (Διαδικασία): $\{X(t), t \in T\}$
T = σύνολο δεικτών. $\forall t \in T$ η $X(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή.

Παραδείγματα:
1) $T = \{1, 2, \dots, 10\}$, $X(t)$ = θερμοκρασία το πρωί της ημέρας t
(όπου $t=1$, 09/10/2014)
2) Νοσοκομείο, χώρος αναμονής στα επείγοντα.
Έστω $t=0$ συγκεκριμένη χρονική στιγμή.
Έστω $N(t)$ = αριθμός των ασθενών που περιμένουν στο χώρο αναμονής τη στιγμή t.
Το $\{N(t), t=0\}$ είναι στοχ. ανέλιξη
$T = [0, \infty)$ (αφού δεν έχω πει μέχρι πότε θα μετράω)

T → αριθμήσιμο ⇒ ανέλιξη διακριτού χρόνου
T → υπεραριθμήσιμο ⇒ ανέλιξη συνεχούς χρόνου

$\forall t \in T$, η $X(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή, στο χώρο πιθανότητας (Ω, F, P)
→ κατάσταση τη στιγμή t

Αν $X(t)$ είναι διακριτή, μιλάμε για διακριτό χώρο καταστάσεων.

Αν συνεχής, μιλάμε για συνεχή χώρο καταστάσεων.
$X(t) \in S$, $\forall t \in T$, S: χώρος καταστάσεων
Αν $X(t)$ διακριτή $\Rightarrow$ S αριθμήσιμο
Αν $X(t)$ συνεχής $\rightarrow$ S υπεραριθμήσιμο

(σύγγραμμα Φακίνου)

Κατάσταση $X(t)$ τυχαία μεταβλητή
$\forall t \quad X(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

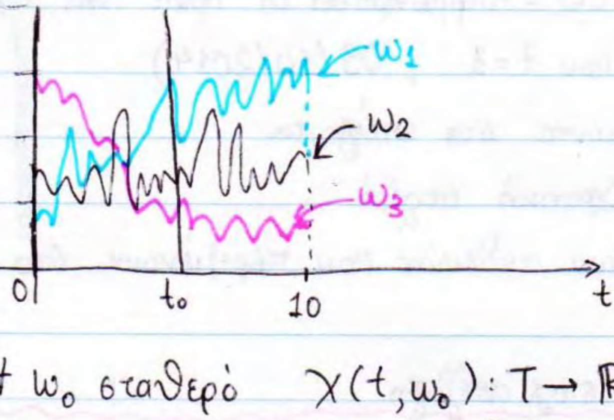
$X(t, \omega)$

χρονική στιγμή

αποτέλεσμα φαινομένου

$X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

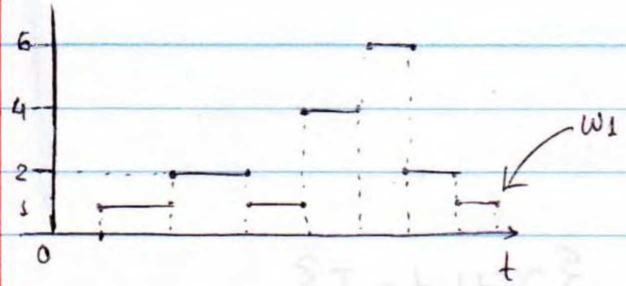
$X(t)$ θερμοκρασία, $T = [0,10]$



$\forall w_0$ σταθερό $\quad X(t, w_0) : T \rightarrow \mathbb{R}$
Υλοποίηση (σενάριο) της διαδικασίας κάτω από το <u>$w = w_0$</u>

$\forall t = t_0 =$ σταθ. $\quad X(t_0, w) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
Τυχαία μεταβλητή

<u>Παράδειγμα 2 (συνέχεια)</u>
$N(t)$ = αριθμός ασθενών τη στιγμή t
$\{N(t), t \in [0, \infty)\}$



Παράδειγμα 3

Ρίχνω δίκαιο ζάρι (ανεξάρτητες ρίψεις)

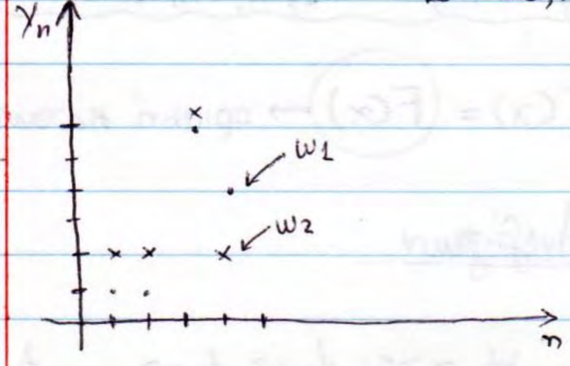
Y_n = αποτέλεσμα της n-οστής ρίψης

$Y_1, Y_2, \dots$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (ατιμ)

$$P(Y_n = i) = \frac{1}{6} \quad \forall\, n = 1, 2, \dots$$
$$\forall\, i = 1, 2, \dots, 6$$

$\{Y_n : n = 1, 2, \dots\}$ $T = \{1, 2, \dots\}$ (Πολύ τετριμμένη :))

$S = \{1, \dots, 6\}$

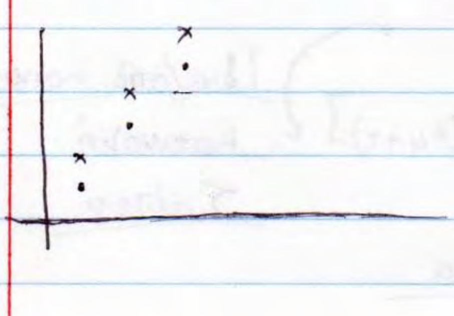


Έστω $X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, $n = 1, 2, \dots$

$\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ $T = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$

$S = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$

(Σαν χώρο καταστάσεων εννοώ όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις X_n, πχ. $X_1 \to \{1, \dots, 6\}$, $X_2 \to \{2, \dots 12\}$ κλπ)



$$\boxed{X_n = Y_{n-1} + Y_n}$$

10/10/2014

Μάθημα 2

Έστω στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$

Μεταβατική Κατανομή

$F_t(x) = P(X(t) \le x),\ x \in \mathbb{R}$

⊛ Για τον πλήρη ορισμό μιας στοχαστικής ανέλιξης απαιτούνται

i) T

ii) S (χώρος καταστάσεων)

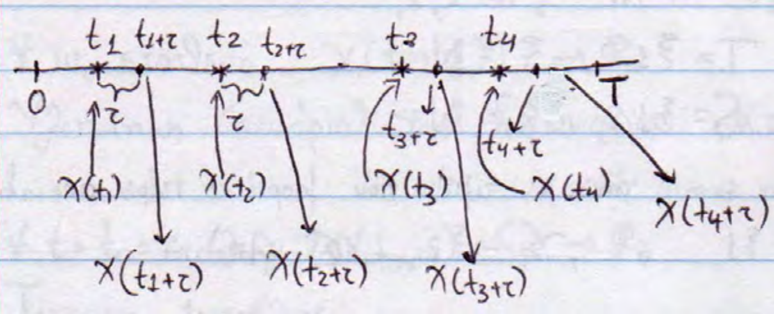
iii) $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \dots, X(t_n) \le x_n)$ $\forall n, \forall t_1, \dots, t_n \in T, \forall x_1, \dots, x_n \in S$

Όταν $t \to \infty$? $\lim_{t \to \infty} F_t(x) = F(x)$ → οριακή κατανομή

Κατηγορίες Στοχαστικών Ανελίξεων

1) Στάσιμες

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n \in T, \forall \tau > 0: t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau \in T$



$[X(t_1)\ X(t_2)\ X(t_3)\ X(t_4)]$

$[X(t_1+\tau)\ X(t_2+\tau)\ X(t_3+\tau)\ X(t_4+\tau)]$ ίδια/από κοινού κατανομή

Συνέπεια

$\forall t, \tau,\ X(t), X(t+\tau)$ ισόνομα

2) Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις

$\forall\ t_1,\dots,t_n,\ t_1<t_2<\dots<t_n$

τότε οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_2)-X(t_1),\ X(t_3)-X(t_2),\ \dots,$ $X(t_n)-X(t_{n-1})$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες

Ομογενείς προσαυξήσεις

Έστω $Y(s,t)=X(t)-X(s)$, $s<t$. Η κατανομή της $Y(s,t)$ εξαρτάται μόνο από το $t-s$ και όχι από τις συγκεκριμένες τιμές των s,t.

Παράδειγμα

Έστω X_n = τιμή μιας μετοχής στην αρχή της μέρας n.

$Y_n=X_{n+1}-X_n \qquad X_{n+1}=X_n+Y_n$

Υπόθεση 1

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ αττμ. → αθροιστικό μοντέλο

$\boxed{X_n=Y_1+\dots+Y_{n-1}}$ ανεξάρτητες προσαυξήσεις

π.χ. $\left.\begin{array}{l} X_9-X_7=Y_7+Y_8 \\ X_{13}-X_{10}=Y_{10}+Y_{11}+Y_{12} \end{array}\right\}$ ανεξάρτητες

Πολλαπλασιαστικό μοντέλο

$X_{n+1}=X_n\cdot(1+Y_n) \Rightarrow X_{n+1}-X_n=X_n\cdot Y_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{X_{n+1}-X_n}{X_n}=Y_n$

$Y_n>-1$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ αττμ.

$X_n=(1+Y_1)(1+Y_2)\dots(1+Y_{n-1})\cdot X_1$

$\left.\begin{array}{l} X_2-X_1=(1+Y_1)X_1-X_1=Y_1\cdot X_1 \\ X_3-X_2=(1+Y_2)(1+Y_1)X_1-(1+Y_1)X_1=Y_2(1+Y_1)X_1 \end{array}\right\}$ όχι ανεξάρτητα (εξαρτώνται από το Y_1)

Έστω $Z_n = \log X_n$

$$Z_n = \underbrace{\log(1+X_1)}_{\substack{\text{λογαριθμισμένη} \\ \text{απόδοση}}} + \underbrace{\log(1+X_2) + \ldots + \log(1+X_{n-1}) + \log X_1}_{\text{ανεξ.}}$$

πραγματική απόδοση

3) Ανανεωτικές Διαδικασίες

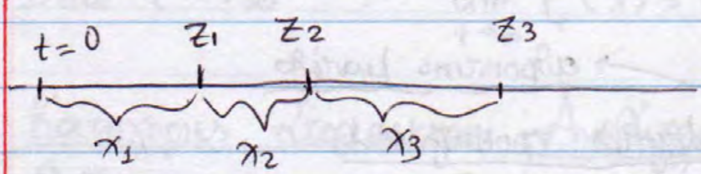
Έστω X_1, X_2 ανεξ. $P(X_1 \le x) = F(x)$

(έστω συνεχείς με σ.π.π. (συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας $f(x) = F'(x)$

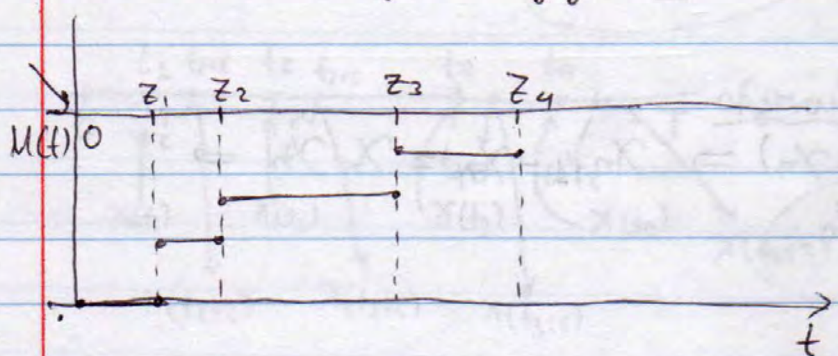
Έστω $Z_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ [τυχαίος περίπατος]

$(Z_0 = 0)$ → ανέλιξη διακριτού χρόνου

Έστω ότι το X_n είναι η διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών γεγονότων.



Έστω $N(t)$ = αριθμός γεγονότων στο διάστημα $(0, t]$, $\forall\, t > 0$



15/10/2014

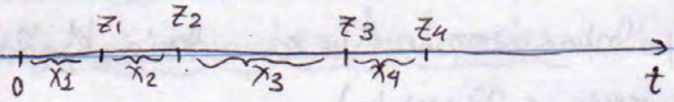
Μάθημα 3

Υπενθύμιση: Ανανεωτικές Διαδικασίες

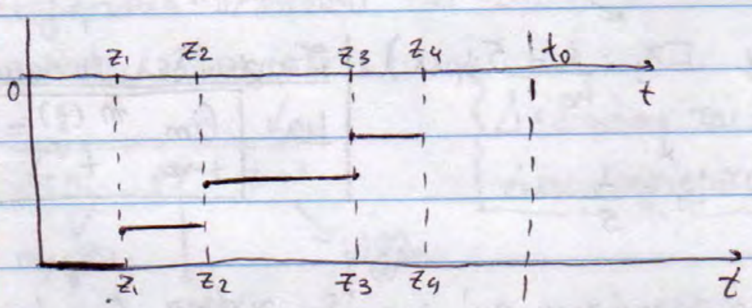
Έστω X_1, X_2, αιτμ (συνεχείς) με σ.π.π. $f(x)$, $E(X_1)=\frac{1}{\mu}$

X_n = χρόνος μεταξύ $(n-1)^{\text{οστού}}$ και $n^{\text{οστού}}$ συμβάντος

$Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$



$\underbrace{\{N(t),\ t \geq 0\}}_{\text{Ανανεωτική διαδικασία}}$, $N(t)$ = αριθμός συμβάντων στο διάστημα $(0,t]$



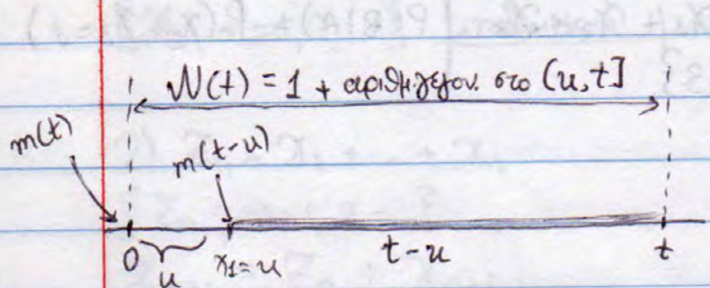
(Τα φαινόμενα που έχουμε υποθέσει ανεβαίνουν ένα-ένα: με άλλα λόγια κάθε μετάβαση/άλμα που συμβαίνει έχει τιμή 1)

Έστω $m(t) = E(N(t))$, $t \geq 0$: <u>ανανεωτική συνάρτηση</u>

$$m(t) = E(N(t)) = \int_0^\infty E[N(t) \mid X_1 = u] f(u)du$$

Αν $u > t$ $\quad E[N(t) \mid X_1 = u] = 0 \Rightarrow m(t) = \int_0^t E[N(t) \mid X_1 = u] f(u)du$

Έστω $X_1 - u < t$



$$E[N(t) \mid X_1 = u] = 1 + \underbrace{E[\#\ \text{γεγ. στο}\ (u,t]]}_{m(t-u)}$$

$\Rightarrow m(t) = \int_0^t [1+m(t-u)] f(u)du = \int_0^t f(u)du + \int_0^t m(t-u) f(u) du$

$= F(t) + \int_0^t m(t-u) f(u)du$ $\boxed{m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-u) f(u)du}$

(Είναι σημαντικός για το μάθημα ο τρόπος με τον οποίο βγάλαμε τον τύπο της $m(t)$. Ο Ανανεωτικός συλλογισμός)

$\lim_{t\to\infty} m(t) = \infty$ (όταν $EX_1 < \infty$)

η αναμενόμενη τιμή του X_1

$E(X_1) = \frac{1}{\mu}$ (π.χ. $EX_1 = \frac{1}{\mu_1} = 5$ ώρες)

$\downarrow$

$\mu = \frac{1}{5}$

Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα: $\boxed{\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \mu}$

μ = μέσος αριθμός γεγονότων ανά μονάδα χρόνου (συχνότητα)
($\approx m(t) \approx \mu_1 \cdot t$)

<u>Πιθανότητες</u>

A, B ανεξάρτητα
$P(B|A) = P(B)$
A, B <u>ανεξάρτητα δεδομένου του Γ</u>
$P(B|A\Gamma) = P(B|\Gamma)$

<u>Παράδειγμα</u>: X_1, X_2, X_3 α.τ.μ., $\in \{0, 1, 2, 3\}$ (P_0, P_1, P_2, P_3)

$Z_1 = X_1$, $Z_2 = X_1 + X_2$, $Z_3 = X_1 + X_2 + X_3$
$A = \{X_1 = 2\}$, $B = \{Z_3 = 3\}$
A, B ανεξάρτητα? <u>ΟΧΙ</u>

$P(B|A) = P(X_2 + X_3 = 1)$

Έστω $\Gamma = \{Z_2 = 2\}$
$P(B|\underset{A\cap\Gamma}{A\Gamma}) = P(B|(X_1 = 2, X_2 = 0)) = P(X_3 = 1)$

$P(B|\Gamma) = P(B|X_1+X_2=2) = P(X_3=1)$

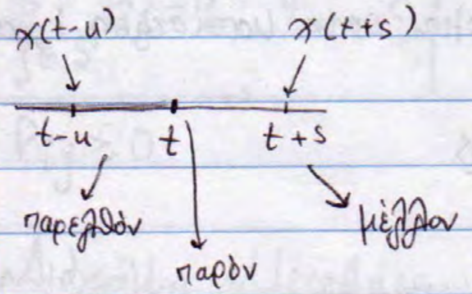
Δηλαδή $P(B|A\Gamma) = P(B|\Gamma)$, άρα A, B ανεξάρτητα δεδομένου Γ

(ενώ τα A, B από μόνα τους όχι ανεξάρτητα)

4) Μαρκοβιανές Διαδικασίες

$\{X(t), t \geq 0\}$

Μαρκοβιανή Ιδιότητα: $\forall\ t, s, u > 0$, $X(t+s)$, $X(t-u)$ ανεξάρτητες δεδομένου ότι $X(t) = x$



$\boxed{\text{Δεδομένου του παρόντος, το μέλλον είναι ανεξάρτητο από το παρελθόν}}$

Σε διακριτό χρόνο $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$

X_{n+k}, X_{n-l} ανεξάρτητα δεδομένου του $X_n = x$, $\forall\ k, l > 0$

X_n = κατάσταση βήματος n

Παραδ. ανεξ. ρίψεις ζαριού

1) X_n = αποτέλεσμα $n^{οστής}$ ρίψης

X_{n+1} ανεξάρτητη της X_n

της X_{n-1}

της X_{n-2}

$\vdots$

$\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ μηδενική μνήμη

2) $Z_n = X_1 + \ldots + X_n$

$\{Z_n, n = 1, 2, \ldots\}$

$Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1}$

Μαρκοβιανή (το μέλλον ανεξάρτητο από το παρελθόν)

μνήμη 1

$P(Z_{n+1}=k \mid Z_n=\ell, Z_{n-1}=w) = P[Z_{n+1}=k \mid Z_n=\ell]$

<u>Μαρκοβιανή Διαδικασία Διακριτού Χρόνου</u>

Χώρος καταστάσεων $S \subseteq \{0,1,2,\dots\}$ (<u>διακριτές</u>)

Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου (ΜΑ, ΑΔ, Χ)

Έστω $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$, $X_n \in S$

Αν $X_n=i$ η X_{n+1} εξαρτάται μόνο από το i

$P[X_{n+1}=j \mid X_n=i] = P_{ij}$ = Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος

$\forall\, i,j \in S$

(η πιθανότητα αν σήμερα βρίσκομαι στην κατάσταση i, αύριο να βρίσκομαι στη κατάσταση j)

<u>Πίνακας Πιθανοτήτων μετάβασης</u>

Αν $S=\{0,1,\dots,M\}$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0M} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1M} \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{M0} & P_{M1} & \dots & P_{MM} \end{pmatrix}_{(M+1)\times(M+1)} \quad \begin{matrix} \rightarrow X_n=0 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$i \backslash j$

γραμμές = παρόν

στήλες = μέλλον

$$\left.\begin{aligned} &i)\ P_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i,j \\ &ii)\ \forall\, i \in S, \ \sum_{j \in S} P_{ij} = 1 \end{aligned}\right\} \text{ στοχαστικός πίνακας.}$$

$P_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$ (ομογενής ως προς n)

17/10/2014

<u>Μάθημα 4</u>

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου

$\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$

Χώρος Καταστάσεων $X_n \in S \subseteq \{0,1,2,\dots\}$

$$P_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = P(X_1=j \mid X_0=i) \quad \forall n$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

→ δεσμευμένη κατανομή της $X_1 | X_0 = 0$

(μπορεί να είναι άπειρος, μπορεί να είναι πεπερασμένος. Αν είναι πεπερασμένος, είναι τετραγωνικός)

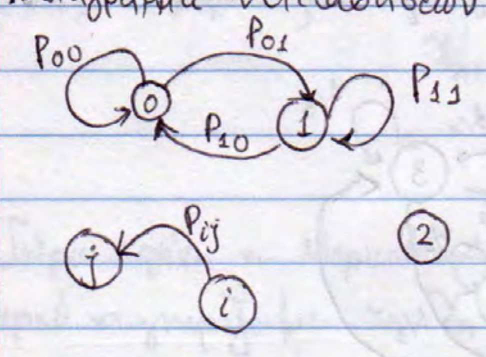
→ στοχαστικός πίνακας

Κάθε γραμμή του πίνακα είναι διάνυσμα πιθανότητας, παρουσιάζει μία δεσμευμένη κατανομή

$$\boxed{\sum_{j \in S} P_{ij} = 1 \quad \forall i \in S}$$

$P_{ij} \geq 0$

Διάγραμμα Μεταβάσεων ενός βήματος



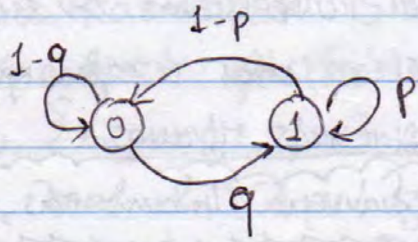
Παραδείγματα

1) Φως $\begin{cases} \text{ανοιχτό} \\ \text{κλειστό} \end{cases}$

Αν ανοιχτό $\xrightarrow{\text{επόμενη στιγμή}}$ → ανοιχτό με πιθανότητα p
→ κλειστό με πιθανότητα 1-p

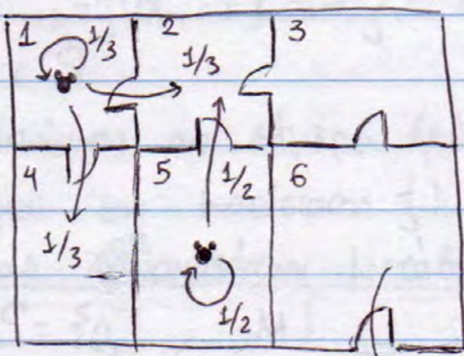
Αν κλειστό → ανοιχτό q
→ κλειστό 1-q

$X_n = \begin{cases} 0 & \text{κλειστό} \\ 1 & \text{ανοιχτό} \end{cases}$ $\quad S = \{0, 1\}$



$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-q & q \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

2)



← σπίτι (λαβύρινθος)

ποντίκι

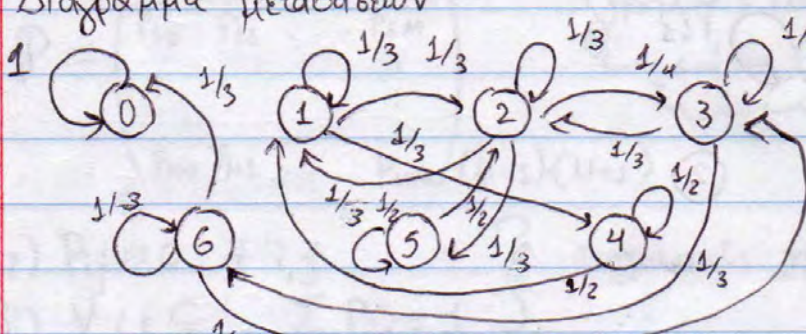
(κοιτάμε τη μετακίνηση του ποντικού)

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

0: έξω

(αν βγει έξω δεν επιστρέφει!)

Διάγραμμα μεταβάσεων



0 = απορροφητική κατάσταση

άσκηση: να φτιάξουμε τον πίνακα

3) Καιρός → 0 βροχή

→ 1 λιακάδα

Χθες	Σήμερα	Αύριο
0	0	→ 0 (0,75) → 1 (0,25)
0	1	→ 0 (0,40) → 1 (0,60)
1	0	→ 0 (0,70) → 1 (0,30)

Χ	Σ	Α
1	1	→ 0 (0,2) → 1 (0,8)

α) $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ $X_n = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ (καιρός ημερ. n)

Μαρκοβιανή ιδιότητα (δεν ισχύει)

(0,8) $P(X_2=1 \mid X_0=1, X_1=1) \neq$

(0,6) $P(X_2=1 \mid X_0=0, X_1=1) = P(X_2=1 \mid X_1=1)$

β) Έστω $Y_n = (X_{n-1}, X_n)$

$S = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

Έστω $Y_n = (0,0)$ $\left[\Rightarrow \begin{array}{l} X_{n-1}=0 \\ X_n = 0 \end{array} \right.$ $Y_{n+1} = (X_n, X_{n+1})$

$\{Y_n, n=1,2,\dots\}$

$X_{n+1} = \begin{cases} \nearrow 0 \ (0{,}75) & Y_{n+1} = (0,0) \\ \searrow 1 \ (0{,}25) & Y_{n+1} = (0,1) \end{cases}$

Τώρα ισχύει η Μαρκοβιανή Ιδιότητα, γιατί για να βρούμε το Y_{n+1} αρκεί να γνωρίζουμε το Y_n

Μεταβατική Κατανομή: $P_j^{(n)} = P(X_n = j)$, $n=0,1,\dots$, $j \in S$

(η πιθανότητα μετά από n βήματα το σύστημα μου να είναι στην κατάσταση j)

$\forall n$, $P^{(n)} = (P_0^{(n)}, P_1^{(n)}, \dots)$ διάνυσμα πιθανότητας.

Δίνονται $P_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$

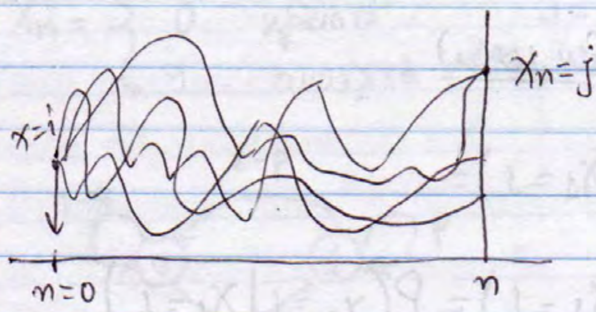
$P(X_1 = 0) = ? = \sum_i P(X_0 = i) \underline{P_{i0}}$

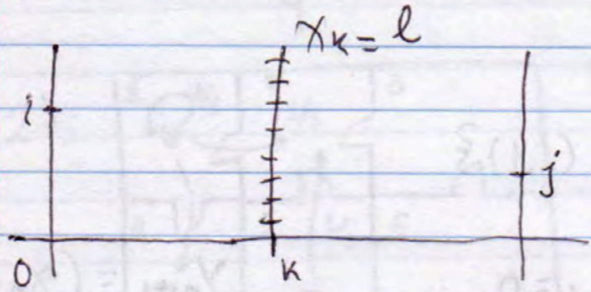
$P^{(0)}(j) = P(X_0 = j)$

$\underbrace{P^{(0)} = (P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, \dots)}_{\text{αρχική κατανομή}}$

Έστω $P_{ij}^{(n)} = P(X_n=j \mid X_0=i) = \sum_{l\in S} \overbrace{P(X_n=j \mid \cancel{X_0=i}, X_k=l)}^{P_{lj}^{(n-k)}} \cdot \underbrace{P(X_k=l \mid X_0=i)}_{P_{il}^{(k)}}$

λόγω της μαρκοβιανής ιδιότητας





$0<k<n$

$X_k \in \{0,1,2,\dots\}$

$$\boxed{P_{ij}^{(n)} = \sum_{l\in S} P_{il}^{(k)} \cdot P_{lj}^{(n-k)}} \quad \forall\ k=1,2,\dots,n-1$$

$n=2,\ k=1$

$$P_{in}^{(2)} = \sum_{l} P_{il} P_{lj}$$

$$\mathbb{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} P_{ij}^{(2)} & \\ & \ddots \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c|c} & j \\ i & \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0M} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1M} \\ \vdots & & & \\ P_{M0} & P_{M1} & \dots & P_{MM} \end{pmatrix} \end{array} \quad P_{il},\ l=0,1,\dots$$

$P_{lj},\ l=0,1,\dots$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^2} \Longrightarrow \boxed{\mathbb{P}^{(k)} = \mathbb{P}^k} \quad \forall k$$