

ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ Α. ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ

Λαβύρινθοι, γνωσιολογικά ρήματα,
φιλοσοφικά σπαράγματα και παρανοίες

29 κείμενα φιλοσοφίας

Διεύθυνση - Συντονισμός εκδόσεως: Χριστιάνα Γ. Χριστοπούλου

Επιμέλεια: Μαρία Κούρση

Σελιδοποίηση: Κωνσταντίνος Γ. Κουκουδάκης

Εξώφυλλο: Λίζα Γεωμπρέ

Λογοτήριο: Ευαγγελία Κοτσίρη

Γραμματεία: Μαρία Τσούτση

Διακίνηση: Γιώργος Καμπέρης

Εκτύπωση - Βιβλιοδεσία: METRON A.E.

ISBN 978-960-213-460-3

Copyright © Νοέμβριος 2016 Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος και Εκδοτική Αθηνών Α.Ε.

Ιπποκράτους 13, Αθήνα 10679

Τηλ: 2103608911-13, fax 2103608914

email: info@ekdotikeathenon.gr

www.ekdotikeathenon.gr

Printed and bound in Greece



ΕΚΔΟΤΙΚΗ ΑΘΗΝΩΝ Α.Ε.

φθεί πλήρως η δομή της έπρεπε να λυθούν διάφορα επί μέρους προβλήματα ή να αποδειχθούν ως ανεπίλυτα, όπως αυτό του τετραγωνισμού του κύκλου.

Η οριστική πλήρωση της πραγματικής ευθείας έλαβε χώρα κάπως αργά, κατά τον 19ο αιώνα. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι η πλήρωση δεν επέπερνε να γίνει ή ότι θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε σε μια άλλη πλήρωση μη-ισόμορφη με την επιτευχθείσα. Η ιστορική συγκυρία δεν είναι δυνατόν να σχετικοποιήσει ιστορικά το αποτέλεσμα. Η ιστορική αιτιακή αλυσίδα, που οδηγεί στο συγκεκριμένο μαθηματικό αποτέλεσμα, είναι δυνατόν να σχετικοποιηθεί ιστορικά. Αυτό που δεν επιτρέπεται να σχετικοποιηθεί ιστορικά είναι το συνεχώς αναδύμενο, δυνητικά προϋπάρχον, μαθηματικό σύμπαν.

Επιστημολογική αναγκαιότητα, μεθοδολογική αναγκαιότητα και οντολογική ανεξαρτησία

Η θέση που υιοθετείται και στηρίζεται στην παρούσα εργασία, ως προς την φύση των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών, είναι αυτή ενός ήπουν πλατωνισμού. Ο χαρακτήρας των αντικειμένων αυτών υποστηρίζεται ότι είναι ανιστορικός, με την έννοια ότι ενώ τα μαθηματικά συμβάντα έχουν ιστορικό χαρακτήρα τα μαθηματικά αντικείμενα, οι αλήθειες γ' αυτά και γενικώς τα μαθηματικά γεγονότα (ως facts, για να χρησιμοποιηθεί ο ακριβέστερος αγγλικός όρος) δεν υπόκεινται, ως προς την φύση τους, σε χωροχρονικές εξαρτήσεις και προσδιορισμούς. Τα βασικά χαρακτηριστικά τους είναι η αντικειμενικότητα, η μοναδικότητα (εξασφαλιζόμενη μέσα από ισομορφισμούς), η επιστημολογική και μεθοδολογική αναγκαιότητα, που τα συνοδεύει, η οικουμενικότητά τους, που οδηγεί σε γλωσσική οικουμενικότητα, καθώς και η οντολογική τους ανεξαρτησία.

Η αντικειμενικότητα είναι χαρακτηριστικό οντοτήτων που δεν εξαρτώνται, ως προς την ύπαρξή τους, από κοινωνικοοικονομικούς, ψυχολογικούς, ιστορικούς και λοιπούς παράγοντες, χωρίς αυτό, βεβαίως, να σημαίνει ότι αποτελεί αποκλειστικό τους χαρακτηριστικό. Η αντικειμενικότητα συνδέεται άμεσα με την οντολογική ανεξαρτησία, με την έννοια ότι οντολογική ανεξαρτησία σημαίνει την ανυπαρξία μη ενδογενών παραγόντων προσδιορισμού του μαθηματικού όντος. Τα μαθηματικά αντικείμενα και οι αλήθειες τους, τα μαθηματικά γεγονότα και τα σημαινόμενά τους, δεν εφευρίσκονται ούτε επιλέγονται από τον εκάστοτε «δημιουργό» τους, σε συγκεκριμένες ιστορικές συνθήκες. Δεν αποτελούν προϊόν ούτε πεδίο άσκησης της ελευθερίας της βούλησης. Εμφανίζονται συνήθως, σε ψυχολογικό επίπεδο, ως αποτελέσματα επιβο-

λής αναγκαιοτήτων επιστημολογικής, μεθοδολογικής κτλ. υφής. Είναι ακριβώς αυτό που ανάγκασε τον Kurt Gödel να ομολογήσει σχετικά με τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων ότι «παρά την απόσταση που έχουν τα αντικείμενα της θεωρίας συνόλων από την αισθητηριακή αντίληψη, έχουμε ένα είδος εποπτείας των αντικειμένων αυτών, πράγμα που μπορεί να δει κανείς από το γεγονός ότι τα αξιώματα [της θεωρίας συνόλων] μας επιβάλλονται από μόνα τους ως αληθή» (βλ. K. Gödel, «What is Cantor's Continuum Problem», *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, P. Benacerraf and H. Putnam (Eds.), Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964, σ. 271).

Η βασική αντίρρηση, που θα μπορούσε να εγείρει κανείς, συνίσταται στο ότι η έννοια της αντικειμενικότητας προέρχεται από την περιοχή του εσωτερικού προσδιορισμού των αντικειμένων της αισθητηριακής αντίληψης και, επομένως, χρησιμοποιείται σε λάθος περιοχή, όπως αυτή της «αντικειμενικότητας», δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιούνται. Η προαναφερθείσα αντίρρηση έχει ως έδαφος εκκίνησης αυτό της βασικής φιλοσοφικής θέσης, ότι αντικειμενικώς υπάρχοντα είναι μόνον τα αντικείμενα του, υπό κανονικές συνθήκες, περιεχομένου της αισθητηριακής αντίληψης. Επίσης, η αντίρρηση αυτή σχετίζεται με την άποψη ότι η παρατήρηση είναι μια διαδικασία αιτιακής αλληλοσύνδεσης του σώματός μας με το φυσικό του περιβάλλον και ότι η αντικειμενικότητα των περιεχομένων της παρατήρησης, στον βαθμό, μάλιστα, που κάτι τέτοιο είναι και διυποκειμενικά ελέγχιμο, στηρίζεται στο ότι δεν επιλέγει ο παρατηρών να παρατηρήσει κάτι που δεν υπάρχει, ως περιεχόμενο της παρατήρησής του, ή καλύτερα του παρατηρησιακού ενεργήματός του. Τέλος, η αντίρρηση στηρίζεται στο ότι, ακόμη και αν υποστηριχθεί η, κατ' αρχήν ορθή, άποψη ότι το τι ακούει, τι βλέπει, τι γεύεται κτλ. κανείς, εξαρτάται και από το εννοιολογικό πλαίσιο του παρατηρητή, το σχηματικό περιεχόμενο της παρατήρησης δεν μπορεί να αλλάξει.

Όλα τα παραπάνω δεν έχουν εύκολη αντιμετώπιση, ιδιαιτέρως αν το παιχνίδι αφεθεί να διεξαχθεί στο φιλοσοφικό έδαφος από το οποίο εκπηγάζει η συγκεκριμένη αντίρρηση. Επίσης, επειδή δεν υπάρχει φιλοσοφικά ουδέτερο έδαφος για να διεξαχθεί, καθώς της πρέπει, η φιλοσοφική μάχη, επιλέγεται ένα φιλικότερο φιλοσοφικό περιβάλλον για την διεξαγωγή της. Στο πλαίσιο του ο τομέας του υπαρκτού δεν περιλαμβάνει μόνον αυτόν της εμπειρικής πραγματικότητας, αλλά επεκτείνεται και στην θεωρητική σφαίρα, περιλαμβάνοντας και τα δυνητικά περιεχόμενα του νου του ελλόγου όντος. Είναι με αυτήν την έννοια, που δεν απαιτείται για να εξηγηθεί η χρήση του όρου «αντικειμενικότητα» στην θεωρητική σφαίρα, η χρήση αναλογικών μοντέλων υποκαταστάστασης της αιτιακής αλληλοσύνδεσης παρατηρητή και παρατηρουμένου, πάνω στην οποία εδράζεται η έννοια της «αντικειμενικότητας» για τα εμπει-

ρικά αντικείμενα. Αντικειμενικό, έτσι, είναι απλά αυτό που μας επιβάλλεται, πέραν της περιστασιακά και συγκυριακά προσδιορίσιμης βούλησής μας, ως επιστημολογικά και μεθοδολογικά αναγκαίο για την συγκρότηση ενός, απαλλαγμένου από λογικές αντιφάσεις, εννοιολογικού πεδίου. Το σημαντικό, σ' αυτήν την περίπτωση, είναι ότι το αντικειμενικό κρίνεται, ως τέτοιο, σε επίπεδο μετάδοσης πληροφορίας, από αντίστοιχη διυποκειμενική συναίνεση, η οποία για τις απολύτως αναγκαίες εννοιολογικές συγκροτήσεις, όπως αυτές των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών, έχει επίσης αναγκαίο και ανιστορικό χαρακτήρα.

Το χαρακτηριστικό της μοναδικότητας για τα μαθηματικά αντικείμενα, τις δομές, που σχηματίζουν και τις αλήθειες, που τα αφορούν, είναι θεμελιώδες στοιχείο του επιχειρήματος για την ανεξάρτητη, από τον μαθηματικό και την ιστορικότητα, ύπαρξή τους. Η μοναδικότητα εδώ, όπως ήδη ελέχθη, είναι έννοια, που όχι μόνον σέβεται, αλλά και στηρίζεται στους ισομορφισμούς. Οι φυσικοί αριθμοί και η δομή τους, η πραγματική ευθεία και η πλήρωσή της, πέραν ισομορφικών αντιστοίχων τους, που θα μπορούσε κανένας να σκεφθεί ότι η ιστορική συγκυρία θα ήταν δυνατόν να φέρει στην επιφάνεια, αποτελούν την μοναδική μήτρα γένεσης των μαθηματικών στην ολότητά τους. Όποια εναλλακτικά μαθηματικά και να επικαλεσθεί ο φιλοσοφικός αντίπαλος της μοναδικότητας, ως πιθανά να έχουν υπάρξει ή να υπάρξουν στο μέλλον, οφείλει να καταδείξει την δυνατότητα αντικατάστασης των κλασικών μαθηματικών με δομές, που ούτε οι ίδιες ούτε μέρος τους θα μπορούσαν να εμπεριέχουν ισόμορφο ανάλογο των φυσικών αριθμών, ή περατοκρατικά αποδεκτού μέρους των. Πρέπει να καταδείξει, επίσης, πώς οι εναλλακτικές μαθηματικές δομές, που θα προτείνει, θα μπορούσαν, μη-ισόμορφα προς την πραγματική ευθεία ή περατοκρατικά αποδεκτό μέρος της, να εκφράσουν την ιδιότητα της πυκνότητας, χαρακτηριστικό ακόμη και της ευθείας των ρητών.

Ο ανιστορικός χαρακτήρας των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών δεν έχει να κάνει, μόνον, με τα χαρακτηριστικά της αντικειμενικότητας και της μοναδικότητάς τους. Σχετίζεται, επίσης, με την επιστημολογική αναγκαιότητα της ύπαρξής τους. Τα μαθηματικά, ως μόνη και μοναδική γνωσιολογική βάση για τις υπόλοιπες επιστήμες, δεν αποτελούν ιστορική αλλά γνωσιολογική προϋπόθεση ύπαρξής τους. Τα μαθηματικά, βεβαίως, αποτελούν ιστορική προϋπόθεση της εμφάνισης των υπολοίπων επιστημών, γι' αυτό άλλωστε και εμφανίσθηκαν πρώτα στο ιστορικό προσκήνιο. Δεν αποτελούν, όμως, ιστορική προϋπόθεση της ύπαρξής τους γιατί, πρώτων όπως ήδη ελέχθη, η φύση των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών είναι ανιστορική και, δεύτερον, η ιστορική εμφάνιση των υπολοίπων επιστημών δεν αποτελεί τεκμήριο ιστορικότητας της ύπαρξής τους, δεδομένου ότι τα θεμελιώδη τους χαρακτηριστικά (ιδιαιτέρως

αυτά, που σχετίζονται με την επιστημολογική πλευρά της μαθηματικοποιημένης εξεικόνισής τους, που συνεπάγονται τον δανεισμό πολύτιμων στοιχείων πνευματικής, μεθοδολογικής και επιστημολογικής πειθαρχίας) έχουν, επίσης, ανιστορικό χαρακτήρα. Παρά ταύτα, οι υπόλοιπες επιστήμες στηρίζονται στην δομική ενδεχομενικότητα του παρόντος σύμπαντος και, υπ' αυτήν την έννοια, κατοπτρίζουν τις ενδεχομενικότητες της συγκεκριμένης συμπαντικής δομής.

Τα μαθηματικά αντικείμενα και οι μαθηματικές αλήθειες ανακαλύφθηκαν και ανακαλύπτονται στο πλαίσιο του ιστορικού χρόνου και της συγκεκριμένης, πιθανώς αιτιοκρατικής, αλυσίδας ιστορικών συμβάντων, όπως, ισχυρίζομαστε, ότι θα ανεκαλύπτοντο και στο πλαίσιο κάποιας άλλης, πιθανώς αιτιοκρατικής, αλυσίδας ιστορικών συμβάντων, ικανοποιητικώς και αρκούντως μακράς, που κατά την διάρκειά της θα επετρέπετο η εμφάνιση ελλόγων όντων. Δεν είναι δυνατόν να γίνει αντιληπτό σύμπαν, που θα επέτρεπε την ύπαρξη ελλόγων όντων, χωρίς (στην μακρά του διάρκεια και στον ιστορικό του χρόνο με τα περιστασιακά, συγκυριακά και ενδεχομενικά του χαρακτηριστικά) την εμφάνιση των μαθηματικών της διακριτής και της συνεχούς μέτρησης, χωρίς την εμφάνιση των μαθηματικών των φυσικών αριθμών και της πραγματικής ευθείας. Με δεδομένες τις δυνατότητες του ελλόγου όντος αυτού του κόσμου, ισχυρίζομαστε ότι η εμφάνιση των μαθηματικών της πραγματικής ευθείας θα ήταν δυνατή ακόμη και σε έναν κόσμο διακριτό (δηλαδή μη συνεχιστικά δομημένο) ή ακόμη και μονοδιάστατο. Ο μόνος κόσμος, στον οποίον δεν θα ήταν δυνατή η εμφάνισή τους, θα ήταν αυτός ενός αιώνιου αδιαφοροποίητου παρόντος. Ο λόγος, για τον οποίον κάτι τέτοιο θα εξαφανίζε την δυνατότητα εμφάνισης των μαθηματικών, έχει να κάνει με την αδυναμία διαχωρισμού του ταυτού από το έτερον, πράγμα, που θα εσήμαινε την ανυπαρξία συνελήσης, τον εξ αυτής αποκλεισμό της δυνατότητας αρίθμησης (δεδομένου ότι δεν θα ήταν παρόντα έλλογα όντα για να προβούν σ' αυτήν) και, επομένως, την αδυναμία πραγμάτωσης του βασικού βήματος για την ανακάλυψη των φυσικών αριθμών, που είναι η μετάβαση από το 1 στο 2. Το βασικό αυτό βήμα αποτελεί το θεμελιώδες συγκροτησιακό χαρακτηριστικό του σύμπαντος των φυσικών αριθμών. Είναι το βήμα, που σε τεχνική γλώσσα θα αποκαλούσαμε «πράξη παραγωγής του επομένου» και που συνίσταται στην, δεδομένου ενός φυσικού αριθμού η, παραγωγή του φυσικού αριθμού $n+1$. Κοντολογίς, στο πλαίσιο ενός αιώνιου αδιαφοροποίητου παρόντος θα ήταν αδύνατη η ύπαρξη του ελλόγου όντος, αφού θα απεκλείετο η επιστημολογική διαφοροποίηση και, επομένως, ο διαχωρισμός του ταυτού από το έτερο, με συνακόλουθο τον αποκλεισμό της δυνατότητας αρίθμησης. Η ιστορική προτερότητα εμφάνισης των μαθηματικών, ως προς τις άλλες επιστήμες, αποτελεί αντανάκλαση της επιστημολογικής, ανιστορικής προτερότητάς τους. Η ανιστορικότητα της προτερότητάς τους τα

καθιστά, υπό μια συγκεκριμένη έννοια, και ουτολογικώς πρότερα των επιστημών. Τα μαθηματικά υπηρετούν τις επιστήμες ή, μάλλον, αποτελούν την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να υπάρχουν ως ώριμες επιστημολογικές κατακτήσεις του ελλόγου όντος, αλλά δεν είναι μόνον η επιστημονική επικουρική τους συμβολή, που τα καθιστά χρήσιμα και που οδηγεί την ανάπτυξη των υπολογισμών επιστημών. Τα μαθηματικά, ή μάλλον η μαθηματική δραστηριότητα, ως πρότυπο επιστημονικής δραστηριότητας, δανείζει πολύτιμα στοιχεία πνευματικής, μεθοδολογικής και επιστημολογικής πειθαρχίας, καθώς και συγκεκριμένα επιτεύγματα στις υπόλοιπες επιστήμες. Είναι υπ' αυτήν την έννοια, που θα μπορούσε να ισχυρισθεί κανείς ότι τα μαθηματικά δευτερογενώς υπηρετούν τις επιστήμες και ότι πρωτογενώς, μάλλον, τις οδηγούν παράγοντας πρότυπα πρακτικών και δομές γι' αυτές, πριν απ' αυτές.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό της επιστημολογικής αναγκαιότητας ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών είναι αυτό που έχει να κάνει με την ανακάλυψη του επιστημολογικού εργαλείου της απόδειξης. Η απόδειξη ανακαλύφθηκε εν χρόνω, δεν παρήχθη εν χρόνω. Είναι παρούσα, πλέον, στον ιστορικό χρόνο που διανύουμε, γιατί υπήρχε, ως υφέρπουνσα αναγκαιότητα, στην χώρα του δυνατού. Ο κόσμος κυοφορώντας το έλλογο ον κυοφορούσε τα μαθηματικά και επομένως την μέθοδο της απόδειξης. Τα μαθηματικά δεν είναι εμπειρική επιστήμη. Τα μαθηματικά τής, πριν την εμφάνιση της απόδειξης, περιόδου, παρά τις μικρές γενικευτικού και πραξιακού περιεχομένου προόδους των, δεν ήσαν μαθηματικά, όπως σήμερα γίνονται αντιληπτά. Είχαν έναν λογιστικό, εμπειρικό χαρακτήρα. Η ανακάλυψη της απόδειξης, σήμανε την ανακάλυψη ενός κόσμου κρυμμένου, ενός κόσμου μυστικού, συνεπούς και αυστηρού. Η απόδειξη, ως μέθοδος μετάβασης από μία ή περισσότερες προτάσεις σε κάποια τελική, απετέλεσε το όχημα ανακάλυψης νέας μαθηματικής (και άλλης) γνώσης. Και τούτο διότι η απόδειξη είναι το σίγουρο όχημα (ή ο σίγουρος ιμάντας) μεταφοράς της αλήθειας από τις προκειμένες προτάσεις στην τελικώς προκύπτουσα. Η απόδειξη αποτελεί την σίγουρη μέθοδο, όπως γνωρίζουμε πια σήμερα, της ανακάλυψης νέων αληθών προτάσεων στο πλαίσιο μιας μαθηματικής θεωρίας. Αν τα αξιώματα της θεωρίας είναι αληθή, στο πλαίσιο μιας δομής ή ερμηνείας της γλώσσας της θεωρίας, τότε και τα θεωρήματα, δηλαδή τα αποτελέσματα της αποδεικτικής διαδικασίας είναι αληθή στο πλαίσιο της ιδίας δομής. Μεθοδολογικά αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό, διότι η απ' ευθείας επαληθευτική διαδικασία είναι από δύσκολη έως αδύνατη, ιδιαίτερα αν στην προς επαλήθευση πρόταση υπάρχουν καθολικοί ποσοδείκτες. Η απόδειξη λειτουργεί ως ιμάντας μεταφοράς της αλήθειας από τις προκειμένες προτάσεις στην τελικώς προκύπτουσα γιατί, όπως έχει ήδη λεχθεί, σύμφωνα με το μεταθεώρημα εγκυρότητας ή ορθότητας, όταν μια πρό-

ταση αποδεικνύεται από ένα σύνολο προκειμένων προτάσεων, τότε κάθε δομή μαθηματικών αντικειμένων, που επαληθεύει τις προκειμένες (μοντέλο, δηλαδή, των προκειμένων) επαληθεύει και την πρόταση.

Ως προς το πρόβλημα της ανακάλυψης ή της δημιουργίας της απόδειξης, η θέση του γράφοντος είναι ότι η απόδειξη δεν ήταν απλώς ένα εξαιρετικά σημαντικό εργαλείο, που παρήχθη ή δημιουργήθηκε από τους Αρχαιοέλληνες, βελτιώνοντας αισθητά το επιστημολογικό status των μαθηματικών. Τα μαθηματικά, όπως τα αντιλαμβανόμαστε πλέον, δεν είχαν κάνει την εμφάνισή τους πριν από την ανακάλυψη της απόδειξης. Η ανακάλυψη αυτή σήμανε την ανάδυση από την σφαίρα του δυνατού, αλλά αναγκαίου, στην σφαίρα του πραγματικού, των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών. Η απόδειξη, λοιπόν, δεν ήταν ένα εξαιρετικά σημαντικό εργαλείο που παρήχθη ή δημιουργήθηκε από τους Αρχαιοέλληνες, βελτιώνοντας αισθητά το επιστημολογικό status των μαθηματικών, αλλά ένα εξαιρετικά σημαντικό εργαλείο, που ανακαλύφθηκε από τους Αρχαιοέλληνες και σήμανε την γέννηση των μαθηματικών, όπως τα αντιλαμβανόμαστε σήμερα. Όπως ήδη ελέχθη, δηλαδή, μαζί με την απόδειξη αναδύθηκαν τα μαθηματικά, στο πλαίσιο του μετά την εμφάνιση της απόδειξης ιστορικού χρόνου, από την σφαίρα του δυνατού, αλλά αναγκαίου, στην σφαίρα του πραγματικού.

Η ανιστορικότητα των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών και η οντολογική τους ανεξαρτησία γίνεται ακόμη σαφέστερα αντιληπτή αν την συναρτήσει κανείς και με την μεθοδολογική αναγκαιότητα, που φαίνεται να συνοδεύει την μαθηματική πρακτική και δραστηριότητα. Πρόκειται όχι μόνον για την απόδειξη, το μεθοδολογικά νέο εργαλείο κατάκτησης γνώσης, που αναδύεται ιστορικά μαζί με τα μαθηματικά, όπως τα αντιλαμβανόμαστε σήμερα (η οποία έχει χαρακτηριστικά και επιστημολογικής αναγκαιότητας, όπως ήδη ελέχθη), αλλά και για την μεθοδολογία του ποσοτικού ελέγχου αντικειμένων, ιδιοτήτων και σχέσεων, που εδράζεται σε α priori λογικές δομές οι οποίες έχουν ανιστορικό χαρακτήρα και αποτελούν θεμελιώδες στοιχείο της ύφανσης του κόσμου. Η παραπάνω θέση δεν σημαίνει την αποδοχή της άποψης ότι τα μαθηματικά είναι αναγώγιμα στην λογική. Θεωρούμε την άποψη αυτή λανθασμένη και μόνον εκ του λόγου ότι η λογική, σε αντίθεση με τα μαθηματικά, ως περιοχή, αποτελούσα το υπόβαθρο πάνω στο οποίο μπορεί να στηριχθεί κάθε έλλογος κόσμος, δεν έχει πληροφοριακό περιεχόμενο. Δεν μας πληροφορεί για συγκεκριμένες δομές και σχέσεις με μετρήσιμο, και ποσοτικοποίσιμο περιεχόμενο. Η λογική αποτελεί το άδειο πληροφοριακού περιεχομένου κέλυφος της γενικότερης δυνατής αληθειάς. Άλλωστε, τα κατ' εξοχήν αντικείμενά της είναι οι λογικά έγκυροι τύποι (οι σύγχρονοι απόγονοι των καντιανών a priori, αναλυτικών προτάσεων) που, λόγω της αληθειακής ισχύος τους σε κάθε δυ-

νατή δομή ή ερμηνεία (σε κάθε δυνατό κατά Leibniz κόσμο) δεν μας πληροφορούν για κανέναν κόσμο. Τα μαθηματικά, από την άλλη μεριά, στηρίζομενα μεθοδολογικά στην λογική, έχουν μη κενό πληροφοριακό περιεχόμενο. Και μόνον το γεγονός ότι η αλήθεια στο πλαίσιο τους έχει αντικειμενικό μεν αλλά όχι απόλυτο χαρακτήρα, ότι, δηλαδή, πρόκειται για αλήθεια ενδοσυστηματικής και σχεσιακής υφής, καταδηλώνει την ανεξαρτησία από την μεθοδολογική βάση στήριξή τους.

Μια πιθανή αντίρρηση, που θα μπορούσε να εγερθεί, σχετικά με την ανιστορικότητα των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών, είναι ότι και τα ίδια αλλά και η λογική τους βάση έχουν ιστορικά αμφισβητηθεί. Έχουν προταθεί ή και δημιουργηθεί λογικές και μαθηματικές δομές διαφορετικές των κλασικών, που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως ιστορικά αντιπαραδείγματα της μοναδικότητας, αντικειμενικότητας και ανιστορικότητάς τους. Σχετικά με την αντίρρηση, που αναφέρεται στα μαθηματικά αντικείμενα και τις μαθηματικές αλήθειες, η απάντηση έχει δοθεί ήδη σε προηγούμενο στάδιο. Κοντολογίς, οι μαθηματικές δομές, που έχουν προταθεί στα πλαίσια αυτών των εγχειρημάτων, διακρίνονται ως προερχόμενες από την αγωνιώδη προσπάθεια ανάκτησης, όσο το δυνατόν, μεγαλυτέρου ισομορφικά μέρους των βασικών δομών για τα κλασικά μαθηματικά και, περισσότερο συγκεκριμένα, των φυσικών αριθμών και της πραγματικής ευθείας. Ακόμη και οι αντιρρήσεις αντιλαμβάνονται ότι δεν νοούνται μαθηματικά χωρίς γεύσεις από το διακριτό και το συνεχές. Όσο για το άπειρο ας μην το συζητήσουμε. Αυτό βάλλεται πανταχόθεν. Προς υποστήριξή του θα πούμε μόνον ότι αποτελεί τον πειθαρχημένο θρίαμβο της ανθρώπινης πνευματικής ελευθερίας. Η ανακάλυψη του είναι αποτέλεσμα νοητικού άλματος, αποτέλεσμα, πέραν μεμψίμοιρων παραπόνων, αποδοχής συμπάντων ως αντικειμένων, τα οποία δεν είναι προσιτά με διαδικασίες εσωτερικής πρόσβασης των στοιχείων των ιδίων αυτών συμπάντων. Επί παραδείγματι, η ανακάλυψη του συνόλου των φυσικών αριθμών ως αντικειμένου, αποτελεί δημιουργική άρνηση της αδυναμίας κατάκτησης του με την πράξη του επομένου, που αποτελεί το εργαλείο με το οποίο καθίσταται προσιτός κάθε φυσικός αριθμός, αλλά όχι το εργαλείο με το οποίο καθίσταται προσιτό το σύνολο των φυσικών αριθμών ως νέο αντικείμενο.

Γιατί μια τέτοια άσκηση πειθαρχημένης ανθρώπινης, πνευματικής ελευθερίας δεν θα πρέπει, κατά κάποιους, να γίνει αποδεκτή; Επειδή, ίσως το ανθρώπινο ον είναι νοητικά πεπερασμένο; Επειδή αυτό μόνον που του επιτρέπεται είναι η ελεγχόμενη βήμα-βήμα αλγορίθμική μετάβαση από ένα μαθηματικό αντικείμενο σε ένα άλλο ή, καλύτερα, από μια νοητική πράξη στην επόμενη της, που μεταφράζεται ως μετάβαση από οποιονδήποτε φυσικό αριθμό στον επόμενό του; Γιατί απαγορεύεται να δεχόμαστε όχι μόνον την ύπαρξη απείρων

αντικειμένων αλλά και πεπερασμένων αντικειμένων (φυσικών αριθμών εν προκειμένω) τα οποία είναι τόσο μεγάλα, ώστε κάτω από συγκεκριμένα κριτήρια προσβασιμότητάς μας να είναι, για τα ανθρώπινα μέτρα, μετρησίμως απρόσιτα; Η απάντηση στα ερωτήματα αυτά είναι δυσχερής, αν ως φιλοσοφικό έδαφος συζήτησης γίνει αποδεκτό αυτό των αντιρρησιών. Από την άλλη μεριά, η απάντηση είναι εξαιρετικά εύκολη αν το έδαφος ή η βάση εικινήσης της φιλοσοφικής συζήτησης μετακινηθεί. Η αποδοχή της ύπαρξης αντικειμένων μη προσβάσιμων με πεπερασμένες κατασκευαστικές διαδικασίες αποτελεί νοητικό άλμα, επιτρέπτο να επιχειρηθεί, αν αυτό δεν οδηγεί σε αντιφάσεις και αντινομίες. Είναι προνόμιο του ανθρωπίνου πνεύματος, που δεν επιτρέπεται να εγκαταλείπεται ή να εκχωρείται· και αυτό για τους εξής λόγους: Ο πρώτος είναι ουσιαστικός και έχει να κάνει με την πιθανή αποκάλυψη κόσμων μη προσβάσιμων με απλή ψηλάφηση. Ο δεύτερος αισθητικός γιατί τα άλματα αυτά οδηγούν στην γνώση δομών υψηλής αισθητικής αξίας με πολλά στοιχεία ηδονικής γνωσιακής έκπληξης. Υπάρχει και ένας τρίτος. Η αποδοχή της ύπαρξης μεγάλων οντοτήτων μπορεί να οδηγήσει σε επίλυση δομικών προβλημάτων, που εμφανίζονται σε χαμηλότερα επίπεδα της ιεραρχίας ταξινόμησης μεγάλων αντικειμένων.

Στο επίπεδο των εναλλακτικών λογικών, που έχουν προταθεί, πέραν της θεωρητικού ενδιαφέροντος μελέτης των, εμφανίζονται αντιρρήσεις για την χρήση της κλασικής λογικής σε συλλογές αντικειμένων άπειρης πληθυκότητας, όταν συγκεκριμένες αρχές όπως αυτή, επί παραδείγματι, της που τρίτου αποκλείσεως μπορούν με σιγουριά να χρησιμοποιηθούν μόνον σε πεπερασμένες συλλογές αντικειμένων ή σε συλλογές αντικειμένων πεπερασμένα ελέγχιμες. Η απάντηση στην παραπάνω αντίρρηση είναι η ίδια, με αυτήν που δόθηκε για την περίπτωση των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών. Η απαγόρευση της χρήσης λογικών αρχών με επίκληση την αδυναμία αλγορίθμικού, πεπερασμένου, αποτελεσματικού ελέγχου των συλλογών αντικειμένων, στις οποίες επιχειρείται αυτή η χρήση, είναι αντίθετη προς την ελευθερία δράσης του ανθρώπινου νού. Η δράση αυτή είναι επιβεβλημένο να παραμείνει ελεύθερη, γιατί εφ' όσον δεν οδηγεί σε αντινομίες ή αντιφάσεις, είναι δυνατόν να είναι αποκαλυπτική δομών υψηλής οντολογικής αξίας.

Πέραν όμως τούτων, αυτό που έχει σημασία είναι ότι η πρόταση για εναλλακτικές λογικές ή για την αποδοχή μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών, που να ικανοποιούν ορισμένα ad hoc επιστημολογικά κριτήρια, και τα χρησιμοποιούμενα προς τούτο επιχειρήματα, δεν είναι δυνατόν να επισκιάσουν το γεγονός της μοναδικότητας της αντικειμενικότητας και της ανιστορικότητας των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών. Οι εναλλακτικές λογικές και τα αντίστοιχα μαθηματικά, που προτείνονται, δεν οδηγούν σε άλλα μαθηματικά

γεγονότα άγνωστα και νέα. Το κοινό τους στοιχείο είναι η προσπάθεια περιορισμού του σύμπαντος των κλασικών μαθηματικών και όχι η αντικατάστασή του. Κανένα, επί παραδείγματι, από τα προτεινόμενα συστήματα δεν προτείνει τον εξοστρακισμό των φυσικών αριθμών ή, τέλος πάντων, ενός αποδεκτού μέρους των. Πώς θα ήταν, άλλωστε, δυνατή η κατανόηση και ο διαχωρισμός του ταυτού από το έτερο, και η εξ αυτού προκύπτουσα δυνατότητα αριθμησης; Τα μαθηματικά αντικείμενα και οι αλήθειες τους είναι κατανοητά από εχθρούς και φίλους. Αυτό αποτελεί έμμεση απόδειξη της ανιστορικής ύπαρξής τους. Εν τούτοις, η αποδοχή ή μη της ανιστορικής ύπαρξής τους είναι, σε τελική ανάλυση, φιλοσοφική θέση, εξαρτώμενη τελικώς από το αντίστοιχο φιλοσοφικό σύστημα, στο οποίο αυτή ανήκει ή οφείλει να ανήκει.

Μαθηματικά και εμπειρική πραγματικότητα

Μια άποψη που, συνήθως, γίνεται με ευκολία δεκτή και που αναφέρεται στην φύση των μαθηματικών αντικειμένων και στο αληθειακό περιεχόμενο των προτάσεων, που τα αφορούν, έχει εμπειριοκρατική προέλευση. Σύμφωνα με αυτήν τα μαθηματικά, που αναπτύχθηκαν είναι, με τρόπο άμεσο, συναρτημένα με την εμπειρική πραγματικότητα. Έτσι, ιδιαίτερα στο επίπεδο της ιστορίας των προαρχαιοελληνικών μαθηματικών, αναπτύσσεται η άποψη ότι η εμφάνιση κάποιας στοιχειώδους εμπειρικής αριθμητικής και αντίστοιχης γεωμετρίας είχε να κάνει με την εμπειρική πραγματικότητα στοιχειωδών πρακτικών υπολογισμών, που εμφανίσθηκαν ως απαραίτητες για την διενέργεια πράξεων ανταλλαγής προϊόντων καθώς και για την καταμέτρηση εκτάσεων γης και την διασφάλιση ιδιοκτησιακών δικαιωμάτων σε περιοχές όπως αυτές εκατέρωθεν των οχθών του Νείλου, οι οποίες, συνήθως, πλημμύριζαν από τα νερά του ποταμού, με αποτέλεσμα κάθε φορά να απαιτείται η επαναχάραξη των συνόρων των διαφόρων κτημάτων. Η θέση αυτή έχει στοιχεία αληθοφάνειας γιατί είναι γεγονός ότι εμπειρικές ανάγκες είναι δυνατόν να βοηθήσουν στην γνωσιακή ανάδυση του δυνάμει υπάρχοντος. Επίσης είναι προφανές ότι εμπειρικές ανάγκες φαίνεται να οδηγούν το έλλογο ον στην διαδικασία της αριθμησης. Η διαφορά, όμως, ανάμεσα σ' αυτή την εμπειριοκρατικά προσανατολισμένη θέση και στην θέση, που υποστηρίζεται σ' αυτή την εργασία, έχει να κάνει, σύμφωνα με την δεύτερη, με την αποδοχή μεν της βοήθειας της εμπειρικής πραγματικότητας για την γνωσιακή ανάδυση του δυνάμει υπάρχοντος, αλλά και την υποστήριξη της άποψης ότι τα αναδύμενα και οι αλήθειες γι' αυτά είχαν, ως υπαρκτική αφορμή εν χρόνω και χώρω, την συγκεκριμένη εμπει-

ρική πραγματικότητα και υπαρκτική αιτία την αναγκαία ανάδυσή τους στο πλαίσιο αυτού του ελλόγου κόσμου.

Δίδεται η εντύπωση ότι το έλλογο ον εκ της εμπειρίας μαθαίνει να αριθμεί. Αυτή η άποψη δεν είναι ορθή. Το έλλογο ον εκ της φύσεώς του έχει την δυνατότητα της αριθμησης. Όπως ήδη έχει λεχθεί, πώς αλλιώς θα μπορούσε να έχει συνείδηση της δυάδας αν δεν είχε την δυνατότητα διαχωρισμού του ταυτού από το έτερον ή του μνημονικού διαχωρισμού του πριν από το τώρα; Η δυνατότητα αυτή, όπως θα έλεγαν και οι ιντονισιονιστές, είναι προεμπειρική. Δεν είναι δηλαδή αποτέλεσμα αλλά προϋπόθεση της εμπειρίας.

Σχετικά με το πιθανό αντεπιχείρημα ότι αν για την αριθμητική τα πράγματα φαίνονται σχετικώς εύκολα, για την γεωμετρία τα πράγματα δεν είναι καθόλου εύκολα, δεδομένου ότι η αναπτυχθείσα γεωμετρία έχει να κάνει με την συγκεκριμένη γεωμετρία του σύμπαντος, η οποία σε τοπικό επίπεδο και για μικρές ταχύτητες εμφανίζεται παρατηρησιακά ως ευκλείδεια, θα πρέπει να λεχθούν τα ακόλουθα: Για να αντιμετωπισθεί αυτό το αντεπιχείρημα είναι αναγκαίο να ληφθούν υπ' όψιν συγκεκριμένα γνωσιακά επεισόδια στην διάρκεια της ιστορίας του ελλόγου όντος. Τι ακριβώς επιχειρείται να υποστηριχθεί μέσω του αντεπιχειρήματος; Επιχειρείται να υποστηριχθεί η άποψη, ότι η επιλογή ενασχόλησης με την ευκλείδεια γεωμετρία δεν είναι επιλογή, αλλά ενέργεια εξηρτημένη από την γεωμετρία του συγκεκριμένου σύμπαντος και, επομένως, αιτιακά καθορισμένη από την ίδια την φύση της εμπειρικής πραγματικότητας. Το αντεπιχείρημα έχει μια δόση αλήθειας. Βεβαίως και η ενασχόληση με την συγκεκριμένη γεωμετρία είχε να κάνει με την φύση της συγκεκριμένης εμπειρικής πραγματικότητας. Θα μπορούσαμε να δεχθούμε, ακόμη, ως απολύτως πιθανό, το έλλογο ον να αναγκαζόταν από μια διαφορετική εμπειρική πραγματικότητα να υιοθετήσει την μελέτη μιας άλλης μη-ευκλείδειας γεωμετρίας. Αυτό, όμως, δεν σημαίνει ότι η εμπειρική πραγματικότητα «εδίδαξε» ή ότι επέβαλε στο γνωσιακό κενό του ανθρώπινου νού αυτήν ή την άλλη γεωμετρία. Κάτι τέτοιο θα μας οδηγούσε στην άποψη ότι η εμπειρική πραγματικότητα είναι η μόνη γεννήτωρ των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών. Το λανθασμένο της άποψης αυτής δεν καταδεικνύεται μόνον στο πλαίσιο μιας φιλοσοφικής συζήτησης, που έτσι και αλλιώς δεν μπορεί να διεξαχθεί σε φιλοσοφικά ουδέτερο έδαφος. Η μελέτη της ιστορικής πορείας του ελλόγου όντος και των επιτευγμάτων του παρέχει το κατάλληλο έδαφος για την κατάδειξη αυτής. Είναι λανθασμένο να ισχυριστεί κανείς ότι η εμπειρική πραγματικότητα επέβαλε αυτήν ή την άλλη γεωμετρία. Η συγκεκριμένη εμπειρική πραγματικότητα δεν επέβαλε αυτήν ή την άλλη γεωμετρία. Απλώς, απετέλεσε την κατάλληλη αφορμή για την, κατά προτεραιότητα, ανάδυσή της.

Αν κανείς μελετήσει προσεκτικά την εμφάνιση των μη-ευκλείδειων γεω-

μετριών στις αρχές του 19ου αιώνα εντυπωσιάζεται από τα εξής δύο πράγματα. Πρώτον, από το γεγονός ότι δεν υπάρχει καμμία, εμπειρική, ακόμη και σε επίπεδο τεχνητού μοντέλου, αναπαράσταση ενός μη-ευκλείδειου χώρου. Δεν υπάρχουν, προφανώς, εμπειρικά στοιχεία, που να οδηγούν στην υιοθέτηση εκδοχών άρνησης του αιτήματος των παραλλήλων, εκτός αν ως στοιχείο εμπειρικό θεωρήσει κανείς την συσσώρευση, στην διάρκεια των προηγουμένων αιώνων, αποτυχημένων προσπαθειών απόδειξης ότι το αίτημα των παραλλήλων προκύπτει ως συνέπεια των υπολοίπων αξιωμάτων της ευκλείδειας γεωμετρίας. Δεύτερον, από το γεγονός ότι οι μη-ευκλείδειες γεωμετρίες εμφανίζονται περίπου την ίδια εποχή ως αποτέλεσμα της, ανεξάρτητης του ενός από τον άλλον, πνευματικής εργασίας τριών σημαντικών μαθηματικών της εποχής, των Bolyai, Lobachevsky και Gauss. Τα δύο αυτά γεγονότα, το καθένα με τον τρόπο του, καταδεικνύουν ότι δεν είναι η εμπειρική, κατ' ανάγκην, πραγματικότητα, που οδηγεί στην εμφάνιση μαθηματικών θεωριών, μαθηματικών δομών, μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών, αλλά η περιρρέουσα γνωσιακή ατμόσφαιρα, πέραν ορίων τόπου και χρόνου, η οποία, κατά την άποψή μας, επιτρέπει την, τελικώς, αναγκαία εμφάνιση των δυνάμει υπαρχόντων μαθηματικών συμπάντων.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονισθεί ότι, λίγο αργότερα και μέσα στον ίδιο αιώνα, κατασκευάσθηκαν από μαθηματικούς, όπως οι Klein, Riemann και Poincaré, μοντέλα αναπαράστασης μη-ευκλείδειων χώρων. Ακόμη, ότι η εμφάνιση των μη-ευκλείδειων γεωμετριών επέτρεψε, περίπου 80 χρόνια μετά, την απογείωση της φυσικής και την μετάβασή της στην μετα-νευτώνεια εποχή. Παρενθετικά, η χρονική αυτή επαλληλία αποτελεί το κλασικό παράδειγμα υποστήριξης της άποψης ότι τα μαθηματικά δεν είναι η θεραπαινίδα των υπολοίπων επιστημών, αλλά η οντολογικά και επιστημολογικά πρότερη κοιτίδα τους. Τα μαθηματικά, δηλαδή, δεν καθορίζονται ούτε δημιουργούνται ούτε ανακαλύπτονται με βάση τις γνωσιακές ανάγκες που ανακύπτουν με την ανάπτυξη των υπολοίπων επιστημών, χωρίς να σημαίνει ότι κάτι τέτοιο αποκλείεται εντελώς. Σε μια τέτοια περίπτωση, γνωσιακές ανάγκες, που ανακύπτουν κατά την ανάπτυξη των υπολοίπων επιστημών, βοηθούν στην ανακάλυψη (και όχι στην εφεύρεση) νέων μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών. Επίσης, θα πρέπει να τονισθεί ότι στο ιστορικό παράδειγμα της εμφάνισης των μη-ευκλείδειων γεωμετριών, πριν από την εμφάνιση μοντέλων αναπαράστασης και ψευδοεμπειρικής στήριξής τους, αναστρέφεται η εικόνα γνωσιακής εξάρτησης της εμφάνισης των μαθηματικών δομών, θεωριών, αντικειμένων, και αληθειών από την εμπειρική πραγματικότητα. Ακόμη, θα πρέπει να λεχθεί ότι, κατά πάσα πιθανότητα, η αρχική εμφάνιση της ευκλείδειας γεωμετρίας, και όχι μιας μη-ευκλείδειας, έχει να κάνει με την συγκεκριμένη γεωμετρία του σύμπα-

ντος η οποία σε τοπικό επίπεδο και για μικρές ταχύτητες εμφανίζεται παρατηρησιακά ως ευκλείδεια. Αυτή η άποψη, όπως ήδη ελέχθη, αφήνει περιθώρια να υποστηριχθεί η συγγενής της άποψη, ότι σε συνθήκες άλλου σύμπαντος η γεωμετρία, που θα εμφανίζοταν ως γνωσιακώς πρώτη, πιθανώς θα ήταν άλλη (και όχι πάντως η ευκλείδεια), μέσα στο πλαίσιο των γνωσιακών δυνατοτήτων του ελλόγου όντος. Αυτό ακριβώς, μαζί με το ιστορικό γεγονός της εμφάνισης, επί παραδείγματι, των μη-ευκλείδειων γεωμετριών, χωρίς να προηγηθεί εμπειρική παρότρυνση, αποτελεί ισχυρό στοιχείο στήριξης της άποψης ότι τα μαθηματικά αντικείμενα και οι αλήθειες που τα αφορούν, έχουν ανιστορική και προεμπειρική υπαρκτική υφή. Η ιστορική συγκυρία και περιστασιακότητα της εμφάνισης κάποιας γεωμετρίας δεν αποτελεί το αίτιο, αλλά την αφορμή ανάδυσής της από το επίπεδο του δυνατού (του ισχυρώς δυνάμει υπαρκτού, δηλαδή) και συγχρόνως αναγκαίου στο επίπεδο του χωροχρονικά πραγματοποιημένου.

Σημαντικό στοιχείο της σχέσης μαθηματικών και εμπειρικής πραγματικότητας αποτελεί το γεγονός ότι, πέραν του γεωμετρικού μοντέλου, το οποίο ταιριάζει περισσότερο ή λιγότερο στην συγκεκριμένη χωροχρονική πραγματικότητα, η αναπαράστασή της επιτυγχάνεται με τον συνεχιστικό μηχανισμό των μαθηματικών. Ακόμη και η πιθανή διακριτή (κβαντική ή άλλη) δομή του κόσμου έχει ανάγκη, για την ποσοτικοποιημένη απόδοση των σχέσεων, το εκφραστικό εργαλείο των συνεχιστικών μαθηματικών. Με τον όρο συνεχιστικά μαθηματικά, εννοούμε τα μαθηματικά της πραγματικής ευθείας και τις επεκτάσεις τους. Τα μαθηματικά της πραγματικής ευθείας θεωρούνται ως το εργαλείο της απόλυτης ακρίβειας, με την έννοια ότι σέβονται απολύτως τις προσεγγίσεις. Ο τρόπος που ορίζεται η παραγώγιση και η ολοκλήρωση, η εύρεση δηλαδή των στιγμαίων ρυθμών μεταβολής μεγεθών και του ποσοτικού περιεχομένου των μεγεθών αυτών, είναι απολύτως επιτυχής γιατί η εμπειρική πραγματικότητα αναπαρίσταται, έτσι ώστε η πειραματική προσέγγισή της να καθίσταται απολύτως σεβαστή.

Η εικόνα μοιάζει ειδυλλιακή. Δεν είναι όμως. Είναι μια εικόνα, που, εκ πρώτης όψεως, δίνει την εντύπωση μιας απόλυτης συμφωνίας εμπειρικής πραγματικότητας και συνεχιστικών μαθηματικών, μιας συμφωνίας, που επιτρέπει την ισομορφία μεταξύ τους. Τα πράγματα, όμως, δεν είναι καθόλου έτσι. Για να τεκμηριωθεί ο ισχυρισμός αυτός θα πρέπει να δούμε πώς οικοδομείται η πραγματική ευθεία και τι συνεπάγεται για την δομή της εμπειρικής πραγματικότητας ο ισχυρισμός της ισομορφίας της με μια εμπειρική ευθεία. Θα πρέπει να δούμε τι μπορεί να σημαίνει για την εμπειρική πραγματικότητα ο στιγμαίος ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους, ή ο ποσοτικός προσδιορισμός του περιεχομένου του. Ποιο είναι δηλαδή, επί παραδείγματι, το εμπειρικό αντίστοιχο της στιγμαίας ταχύτητας ή του διανυομένου διαστήματος; Ποιο είναι το εμπειρικό

αντίστοιχο του δί' ολοκληρώματος υπολογιζόμενου συγκεκριμένου εμβαδού ή όγκου; Ποιο είναι, σε τελευταία ανάλυση, το εμπειρικό αντίστοιχο της οικοδόμησης ενός $n+1$ -διαστατού μαθηματικού αντικειμένου από n -διάστατα μαθηματικά αντικείμενα, όπου n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από ή ίσος με το 0; Έχουν εμπειρικό αντίστοιχό τους μαθηματικά αντικείμενα, όπως η περιφέρεια κύκλου, το τρίγωνο κτλ., και ποιο είναι αυτό;

Πώς οικοδομείται, λοιπόν, η πραγματική ευθεία; Η οικοδόμησή της εννοείται, βεβαίως, στο πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας και δεν έχει σχέση με την οικοδόμηση ενός εμπειρικού αντικειμένου. Η πραγματική ευθεία δεν είναι εμπειρικό αντικείμενο για να είναι ορατή, απτή ή ηχητικά παρούσα. Δημιουργούνται ψευδοεμπειρικές εξεικονίσεις της, με μια κιμωλία σε έναν πίνακα, επί παραδείγματι, ή με το ποντίκι ενός υπολογιστή στην οθόνη του, η ίδια όμως παραμένει εμπειρικώς διαφεύγουσα, εμπειρικώς απούσα και διολισθαίνουσα. Τι ακριβώς σημαίνει αυτό; Η πραγματική ευθεία των μαθηματικών μας είναι ένα αντικείμενο του νου του ελλόγου όντος με δομικούς λίθους τα αδιάστατα σημεία της και συγκολλητική ουσία τους τις μεταξύ τους συναρτησιακές και άλλες σχέσεις τους. Είναι ένα μονοδιάστατο αντικείμενο, που οικοδομείται από αδιάστατες οντότητες. Αυτό ακριβώς το γεγονός απαγορεύει την εμπειρική παρουσία της. Δεν μπορεί να υπάρξει μονοδιάστατο εμπειρικό αντικείμενο με ακρογωνιάους λίθους του αδιάστατες οντότητες, γιατί τέτοιες οντότητες δεν μπορούν να υπάρξουν στο πλαίσιο της εμπειρικής πραγματικότητας. Τα εμπειρικά αντικείμενα έχουν διαστάσεις. Πέραν τούτου η εμπειρική πραγματικότητα δεν περιέχει επιφάνειες ή όγκους, με το μαθηματικό σημασιολογικό περιεχόμενο των όρων αυτών. Μια επίπεδη επιφάνεια, επί παραδείγματι, στο πλαίσιο της μαθηματικής θεωρίας είναι μια νοητική οντότητα που παράγεται από την κάθετη προς εαυτήν συνεχή κίνηση μιας ευθείας γραμμής. Αποτελείται, δηλαδή, από ένα σύνολο ευθειών και, ως δισδιάστατο νοητικό αντικείμενο, οικοδομείται από μονοδιάστατα νοητικά αντικείμενα με συγκολλητική τους ουσία τις μεταξύ τους συναρτησιακές ή μη σχέσεις τους. Κατ' αντίστοιχαν προς την οικοδόμηση της πραγματικής ευθείας από σημεία, μια επίπεδη επιφάνεια είναι ένα νοητικό αντικείμενο με οικοδομικούς λίθους τις μονοδιάστατες ευθείες της. Είναι ένα δισδιάστατο αντικείμενο, που οικοδομείται από μονοδιάστατες οντότητες. Κάτι τέτοιο είναι εμπειρικώς ανέφικτο γιατί κανένα n -διάστατο εμπειρικό αντικείμενο δεν είναι δυνατόν να οικοδομηθεί από $(n-1)$ -διάστατα εμπειρικά αντικείμενα, όπου n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από ή ίσος με την μονάδα. Ακόμη, δηλαδή, και με την υπόθεση (σωστή ή λανθασμένη δεν έχει σημασία) ότι η γύρω μας εμπειρική πραγματικότητα είναι τρισδιάστατη, δεν μας είναι δυνατή η εμπειρική διαπίστωση της ύπαρξης δισδιάστατων εμπειρικών οντοτήτων οι οποίες, ως επιφάνειες, να ορίζουν ή, κατά

μείζονα λόγο, να δημιουργούν όγκους. Η μαθηματική επιφάνεια δεν διαθέτει όγκο. Παρά ταύτα, με ένα λογικά συνεπή και μαθηματικά μαγικό τρόπο όγκοι παράγονται και οριοθετούνται από επιφάνειες. Πώς αυτός ο μαγικός μαθηματικός τρόπος μεταφέρεται σε αυτό, που το έλλογο ον θεωρεί ότι αποτελεί το βασίλειο της εμπειρικής πραγματικότητας; Για να μεταφέρθουμε σε χαμηλότερη διάσταση και να αλλάξουμε λίγο το πλαίσιο των παραδειγμάτων μας, πώς ορίζουμε την εμπειρική αρχή ενός χρονικού διαστήματος; Πώς ορίζεται (αν ορίζεται) η αρχή, η έναρξη του κουδουνίσματος του κουδουνιού της εξώπορτας του σπιτιού μας και πώς το τέλος του; Τι είναι εμπειρικά η χρονική στιγμή, το χρονικό σημείο; Γνωρίζω καλά τι είναι χρονικό σημείο στο πλαίσιο της μαθηματικής απεικόνισης της χρονικής μεταβολής. Όταν μεταφέρω αυτή μου την γνώση σ' αυτό που, νομίζω, ότι αποτελεί το βασίλειο της εμπειρικής πραγματικότητας, μένω μετέωρος. Τα πράγματα χάνουν το, μέχρι εκείνο το σημείο, ακριβές νόημά τους. Ο εμπειρικά μετρήσιμος χρόνος έχει ως απαραίτητο στοιχείο του την διάρκεια. Δεν υπάρχει χρονική οντότητα χωρίς διάρκεια. Μια τέτοια ανύπαρκτη οντότητα θα ήταν η εμπειρική έναρξη ή το τέλος του κουδουνίσματος του κουδουνιού της εξώπορτας του σπιτιού μου.

Τα συνεχιστικά μαθηματικά της πραγματικής ευθείας, με την λεπτοφυή τους δομή και την αποτελεσματικότητα των θεωρητικών εξεικονίσεων της εμπειρικής πραγματικότητας, που επέτρεψαν, οδήγησαν στην εντύπωση ότι η επιτυχία τους οφειλόταν στην ακριβή και ισόμορφη προς τις παραχθείσες δομές φύση της εμπειρικής πραγματικότητας. Η εντύπωση αυτή ευνόησε εμπειριστικές (ή αλλιώς, εμπειριοκρατικές) φιλοσοφικές αποτιμήσεις του μαθηματικού γεγονότος. Η έντονη οντολογική ασυμμετρία μεταξύ των μαθηματικών μας αντικειμένων και μοντέλων και αυτού, που θεωρούμε ότι αποτελεί το βασίλειο της εμπειρικής πραγματικότητας, δεν αφήνει περιθώρια για εμπειριστικές παρεκκλίσεις. Η οντολογική αυτή ασυμμετρία γίνεται ιδιαίτερα εμφανής αν εξετασθεί με προσοχή τι μπορεί να σημαίνει για την εμπειρική πραγματικότητα ο στιγματος ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους (όπως, επί παραδείγματι, η στιγματική ταχύτητα) ή ο ποσοτικός προσδιορισμός του περιεχομένου του μεγέθους αυτού, όπως εκφράζεται στην περίπτωση του δί' ολοκληρώματος υπολογισμού ενός συγκεκριμένου εμβαδού.

Η έννοια της ταχύτητας (ή γενικότερα του ρυθμού μεταβολής ενός μεγέθους) φαίνεται προστιθή στο έλλογο όν μέσω της διαδικασίας διαίρεσης του διανυομένου διαστήματος από ένα κινητό, διά του χρονικού διαστήματος εντός του οποίου η διάνυση αυτή συντελείται. Αντιστοίχως ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους A δίδεται από το πηλίκο της διαίρεσης της διαφοράς $A_2 - A_1$, διά του χρονικού διαστήματος $t_2 - t_1$, όπου (με χρήση της ποτισμένης με μαθηματικές έννοιες ψευδοεμπειρικής φυσικής μας γλώσσας) A_1 η τιμή του μεγέ-

θους A την χρονική στιγμή t_1 και A_2 η τιμή του μεγέθους A την χρονική στιγμή t_2 . Η ταχύτητα έτσι ορισμένη συνήθως καλείται και μέση ταχύτητα, με την έννοια ότι εκφράζει το, κατά μέσον όρον διανυόμενο διάστημα στην μονάδα του χρόνου. Ανάγκες ακριβέστερης απεικόνισης του νέου αυτού μεγέθους οδηγούν στην συνεχή σμίκρυνση, χωρίς όριο, του χρονικού διαστήματος εντός του οποίου συντελείται η μεταβολή, με αποτέλεσμα το νοητικό άλμα της ανακάλυψης (στο πλαίσιο της μαθηματικής θεωρίας, που επιβάλλουν τα συνεχιστικά μαθηματικά) της έννοιας του ορίου, στο οποίο, πιθανώς, τείνει το πηλίκο αυτό όταν το χρονικό διάστημα τείνει στο μηδέν. Το όριο αυτό, εφ' όσον μαθηματικώς υπάρχει, ονομάζεται στιγμαία ταχύτητα.

Στο σημείο αυτό αρχίζει η φιλοσοφική περιπέτεια. Ο ευφυής αλλά μη εθισμένος σε φιλοσοφικές διαδρομές μαθηματικός, επηρεασμένος από την επέκταση του όρου «ταχύτητα» (μαζί με τον επιθετικό προσδιορισμό «στιγμαία») στο αντικείμενο της παραπάνω ανακάλυψης, η οποία σέβεται τις προσεγγίσεις, που είναι δυνατόν να επιχειρηθούν μέσω της παλιάς έννοιας της μέσης ταχύτητας, αρχίζει να ψάχνει τι εκφράζει και σε τι αντιστοιχεί σε επίπεδο εμπειρικής πραγματικότητας η νέα έννοια. Θεωρεί, κατά πάσα πιθανότητα, ότι ο όρος «ταχύτητα» εκφράζει εννοιολογικές εκδοχές σημασιολογικά ανιχνεύσιμες σ' αυτό που θεωρεί ότι είναι η εμπειρική πραγματικότητα. Και ψάχνει να βρεί, απελπισμένα, ποιο είναι το εμπειρικό ανάλογο της στιγμαίας ταχύτητας. Τα γνωσιολογικά πάθη, που προκύπτουν από την επέκταση της χρήσης όρων σε περιοχές χωρίς εμπειρικό αντίστοιχο, είναι συνήθη για τον εθισμένο και οδυνηρά για τον αμύητο. Παρασυρμένος ο αμύητος από το ψευδοεμπειρικό γεγονός ότι η μέση ταχύτητα φαίνεται να έχει εμπειρικό σημασιολογικό ανάλογο, θεωρεί ότι και η στιγμαία ταχύτητα (αφού είναι ταχύτητα!) θα πρέπει να διαθέτει αντίστοιχο. Του διαφεύγει ότι η δημιουργία ή η επέκταση χρήσης όρων συχνά συγχέεται με την ουσιοκρατική δημιουργία η «ανακάλυψη» ανύπαρκτων σημασιολογικών αντιστοίχων τους.

Ποια είναι η λύση στο φαινομενικό φιλοσοφικό αδιέξοδο; Η αποδοχή του γεγονότος ότι το σημασιολογικό περιεχόμενο του όρου «στιγμαία ταχύτητα» δεν έχει σχέση με την εμπειρική πραγματικότητα, όπως αυτή κατανοείται, ως τέτοια, από το έλλογο όν, αλλά με την μαθηματική εξεικόνισή της. Η μαθηματική εξεικόνιση της, η εξεικόνισή της, δηλαδή, στο πλαίσιο μιας μαθηματικής θεωρίας, δεν αποτελεί μια λεπτομερή, ακριβώς αντίστοιχη, ισόμορφη αδελφή της. Το να επιχειρείται η με χειρουργική ακρίβεια εμβάπτιση της μαθηματικής πραγματικότητας στην εμπειρική πραγματικότητα αποτελεί ενέργεια ουτοπική, αντιγνωσιολογική και τελικώς αντιφιλοσοφική. Είναι, βεβαίως, προφανές, πως τα συνεχιστικά μαθηματικά σέβονται τις εμπειρικές προσεγγίσεις. Τα ίδια, όμως, δεν αποτελούν γνήσιο τέκνο της εμπειρίας.

Η περίπτωση του δί' ολοκληρώματος υπολογισμού ενός συγκεκριμένου εμβαδού είναι αντίστοιχη, κατά μια έννοια, αυτής της στιγμαίας ταχύτητας, ως προς την πηγή προέλευσής τους, που είναι η εισαγωγή ή, καλύτερα, η ανακάλυψη της έννοιας του ορίου στα μαθηματικά. Είναι γεγονός, παρά τις ομοιότητες, ότι η διαδικασία της ολοκλήρωσης είναι μαθηματικώς αντίστροφη της έννοιας της παραγώγισης, ειδική περίπτωση της οποίας είναι η έννοια της στιγμαίας ταχύτητας. Εν τούτοις, το πρόβλημα της εμπειρικής αντιστοιχίσης του ολοκληρώματος είναι ακριβώς ανάλογο αυτού της παραγώγισης. Η εύρεση του εμβαδού του χωρίου, που περικλείεται από μία ή περισσότερες καμπύλες, δεν έχει ακριβές εμπειρικό ανάλογο, με την έννοια ότι το περικλειόμενο τμήμα περικλείεται από μονοδιάστατες οντότητες, το μαθηματικό status των οποίων είναι ακριβές, χωρίς να σημαίνει ότι ισχύει το ίδιο για το εμπειρικό τους status. Η εύρεση ενός πραγματικού αριθμού με οριακές διαδικασίες, ο οποίος αποτελεί την αριθμητική απεικόνιση του εμβαδού του χωρίου, σημαίνει απλώς την εύρεση του κοινού μαθηματικού ορίου όλων των δυνατών προσεγγίσεων (άνω, κάτω αλλά και ενδιαμέσων). Η εμπειρική πραγματικότητα δεν έχει χώρο για τα όρια πάρα μόνο προσεγγιστικά.

Τα μαθηματικά αντικείμενα και η ανακάλυψη τους είναι αυτού του κόσμου. Οι μαθηματικές αλήθειες και το πληροφοριακό τους περιεχόμενο είναι επίσης αυτού του κόσμου. Ο κόσμος αυτός, από την άλλη μεριά, δεν ταυτίζεται με την εμπειρική του πλευρά, απλώς την περιλαμβάνει. Η νοητή πλευρά του κόσμου είναι συμβατή, μεν, αλλά όχι ισόμορφη προς την εμπειρική τόν πλευρά. Τέλος, η χωροχρονικότητα δεν είναι η μοναδική μήτρα προέλευσης και πιστοποίησης της ύπαρξης. Το ανεξάρτητα από χωροχρονικότητα αναγκαία κυοφορούμενο είναι, κατά μια έννοια, προεμπειρικά υπαρκτό.