

ΤΑ ΜΕΤΑΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΜΕΤΑΞΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΗΣ

Προς το τέλος της μέχρι σήμερα πορείας εμφάνισης και ανάπτυξης των μαθηματικών, είναι δυνατόν, ευθέως, να διαπιστωθεί η ύπαρξη ενός χώρου με μαθηματικά χαρακτηριστικά, που είναι πλέον γνωστός ως ο χώρος των μεταμαθηματικών. Ενός χώρου, δηλαδή, που, με μεθοδολογία ήδη κατακτημένη κατά την μακρά ιστορική διαδρομή της ενηλικίωσης του ανθρώπου ως ελλόγου όντος, διακρίνεται από δύο χαρακτηριστικά. Πρώτον, αυτό της αντικειμενοποίησης και καθολικής θεώρησης της μαθηματικής δραστηριότητας καθ' εαυτήν και, δεύτερον, της χρήσης της μαθηματικής γλώσσας και μεθοδολογίας για την αυτοαποτίμησή της. Η φαινομενική αυτοαναφορικότητα που υπαινικτικά κάνει την εμφάνιση της στην προηγούμενη φράση δεν είναι επικίνδυνη ή, μάλλον, δεν καθίσταται επικίνδυνη πλέον, διότι στο μεταξύ έχουν υποδειχθεί συγκεκριμένες λύσεις που οδηγούν στην άρση της.¹

Η αρχή του χρονικού ορίζοντα εμφάνισης των μεταμαθηματικών και συνακόλουθα της σύγχρονης λογικής είναι δυνατόν να ανιχνευθεί εντός του 19ου αιώνα, η δε μετεωρική ανάπτυξη και των δύο περιοχών εντός του 20ού και των αρχών του 21ου. Η ανάπτυξη αυτή συνδέεται ευθέως με την εμφάνιση ή, μάλλον, την ανακάλυψη των παραδόξων, που είναι δυνατόν να ταξινομηθούν σε λογικά ή συνολοθεωρητικά και ερμηνευτικά, η οποία έλαβε χώρα στα τέλη του 19ου και στις αρχές του 20ού αιώνα. Στα παράδοξα αυτά δεν συμπεριλαμβάνονται εκείνα που απασχόλησαν τους Αρχαίους

1. Βλ., επί παραδείγματι, S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Wolter-Noorhoff, Groningen and North-Holland, London 1971, W. Kneale και M. Kneale, *The Development of Logic*, Oxford University Press, London 1962, και Δ. Α. Αναπολιτάνος, *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, Νεφέλη, Αθήνα 1985.

Έλληνες. Είναι, βεβαίως, γεγονός ότι όλα τα παράδοξα έχουν την ίδια πηγή προέλευσης και συγκεκριμένα προκύπτουν από κατάλληλη χρήση της διαγώνιας μεθόδου, της άρνησης και αντιστοίχων αυτοαναφορικοτήτων. Τα δύο κορυφαία εξ αυτών, τα οποία ανακαλύφθηκαν κατά την περίοδο που προαναφέρθηκε, ήταν αυτά των Russell και Cantor.² Θα πρέπει στο σημείο αυτό να επισημανθεί ότι, στην περίπτωση του παραδόξου του Cantor, δεν γίνεται άμεσα αντιληπτή η χρήση της διαγώνιας μεθόδου, της άρνησης και αντιστοίχων αυτοαναφορικοτήτων κατά την παραγωγή του. Παρά ταύτα, προσεκτικότερη μελέτη οδηγεί στην ανίχνευσή τους. Η περιρρέουσα φιλοσοφική ατμόσφαιρα της εποχής ευνοούσε εντόνως την εμφάνιση ενός μεταλογισμού, με την έννοια της νοητικής ενασχόλησης και επεξεργασίας και των περιοχών της μαθηματικής δραστηριότητας, ως ξεχωριστών αντικειμένων, και της μαθηματικής δραστηριότητας καθ' εαυτήν. Το κορυφαίο εναρκτήριο λάκτισμα για την ενασχόληση των φιλοσοφούντων μαθηματικών και των μαθηματικά ενημερωμένων φιλοσόφων της εποχής με τα παραπάνω αντικείμενα υπήρξε η έκδοση του μνημειώδους έργου των Bertrand Russell και Alfred North Whitehead *Principia Mathematica* (1910).³ Ο, κατά βάσιν, μαθηματικός Whitehead συνεργάστηκε με τον, κατά βάσιν, φιλόσοφο Russell για την νομιμοποίηση της ενασχόλησης με μία περιοχή, αυτή των μεταμαθηματικών, καθώς και με αυτήν της λογικής, με στόχο την αδρανοποίηση των προηγούμενως διαπιστωθέντων παραδόξων. Δεν έχει ουσιώδη σημασία το γεγονός ότι η προταθείσα λύση των διαφορετικών γλωσσικών ιεραρχικών επιπέδων, παρ' ότι ορθή, ήταν ρηξικέλευθα απαγορευτική σημαντικών λογικών δραστηριοτήτων, οι οποίες θα μπορούσαν να διασωθούν (όπως και διασώθηκαν) με μια άλλη προσέγγιση, όπως αυτή του Kurt Gödel.⁴

Έτσι, τα μεταμαθηματικά και η λογική έγιναν σιγά-σιγά της μόδας και διαμορφώθηκε ιδιαιτέρως στην προχιτερική Ευρώπη ένα εξαιρετικά ευνοϊκό κλίμα για την ανάπτυξη μίας μεταγλωσσικής έρευνας, με εργαλεία την διάκριση της συντακτικής από την σημασιολογική (ερμηνευτική) πλευρά της μαθηματικής δραστηριότητας. Οι πνευματικά κυρίαρχες χώρες της

2. Βλ. Αναπολιτάνος, ὥ.π., σσ. 200-216.

3. B. Russell, και A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, London 1910.

4. Βλ. K. Gödel, «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I», *Monatshete für Mathematik und Physik*, 38 (1931), σσ. 349-360, και K. Gödel, «Russell's Mathematical Logic», στο P. Benacerraf και H. Putnam (επιμ.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge 1984, σσ. 211-232.

συγκεκριμένης περιόδου ήταν Αυστρία, Πολωνία, Γερμανία και Αγγλία. Η κατάκτηση της εξουσίας στην Γερμανία από τον Χίτλερ και οι διεθνείς περιπέτειες που ακολούθησαν οδήγησαν κορυφαίους ερευνητές, όπως τον Gödel και τον Tarski, της περιοχής των μεταμαθηματικών και της λογικής στην μετανάστευση στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής, όπου η άνθηση συγκεκριμένων περιοχών ξεκίνησε τότε και διαρκεί μέχρι τις μέρες μας. Αυτό, βεβαίως, δεν εσήμανε το τέλος και της ευρωποκεντρικής ανάπτυξής τους. Η Ευρώπη μετά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο συνέχισε να αποτελεί σημαντικό πόλο έρευνας και ανάπτυξης των συγκεκριμένων περιοχών του επιστημονικής δραστηριότητας μεταφέρθηκε από τις γερμανικές χώρες στις αγγλόφωνες και ιδιαιτέρως στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής.

Το ερώτημα, βεβαίως, που ανακύπτει στο σημείο αυτό έχει μία άμεση προφάνεια. Τι ακριβώς είναι τα μεταμαθηματικά και πώς συνδέονται με την λογική και μάλιστα την μαθηματική λογική; Η απάντηση, ελπίζουμε, που θα δοθεί στην συνέχεια με τρόπο, αφ' ενός, συνοπτικό και, αφ' ετέρου, κατά το δυνατόν πλήρη, θα φωτίσει αρκετά ένα τεχνικά δύσκολο τοπίο. Το αντικείμενο των μεταμαθηματικών είναι η τεχνική μαθηματική αποτίμηση των ιδίων των μαθηματικών, καθώς και των εννοιολογικών διασυνδέσεων που απαιτούνται για την συνολική θεώρηση αυτής καθ' εαυτήν της μαθηματικής δραστηριότητας. Μέσα σε ένα πλαίσιο που απαιτείται να είναι αυτό της πρωτοβάθμιας λογικής,⁵ επιχειρείται να εξετασθούν οι διασυνδέσεις εννοιών, όπως αυτές της απόδειξης και της αλήθειας, καθώς και εγχειρήματα οριστικής απάντησης σε ερωτήματα που αναφέρονται στην ύπαρξη μοναδικού μοντέλου για μαθηματικές θεωρίες που εμπεριέχουν ένα σημαντικό τμήμα των αξιωμάτων της κατά Peano αριθμητικής. Ο οριστικός διαχωρισμός των εννοιών της απόδειξης και της αλήθειας, καθώς και η διασύνδεσή τους, υπήρξε αποτέλεσμα του θεωρήματος πληρότητας του Kurt Gödel, σύμφωνα με το οποίο το συντακτικό μέρος της πρωτοβάθμιας γλώσσας (στα πλαίσια της οποίας διατυπώνεται μια εκάστοτε συγκεκριμένη μαθηματική θεωρία), όντας ουσιωδώς διαφορετικό από το σημασιολογικό (ερμηνευτικό) της αντίστοιχο, συνδέεται αξεδιάλυτα μαζί του. Έτσι:

5. Ως πρωτοβάθμια λογική θεωρείται κάθε λογική στην οποία, ενώ επιτρέπεται η ποσόδειξη επί αντικειμένων, δεν υπάρχει η δυνατότητα ποσόδειξης επί ιδιοτήτων και σχέσεων. Στην γλώσσα μίας τέτοιας λογικής, στα πλαίσια μίας πρωτοβάθμιας δηλαδή γλώσσας, ο καθολικός και ο υπαρκτικός ποσοδεικτής λειτουργούν επί μεταβλητών, οι οποίες αντιπροσωπεύουν αντικείμενα του μοντελοθεωρητικού σύμπαντος, που επιχειρείται να περιγραφεί διά των αξιωμάτων της εκάστοτε συγκεκριμένης μαθηματικής θεωρίας μας.

Η έννοια της απόδειξης, όπως αυτή διαμορφώθηκε κατά τον 20ό αιώνα και στο πλαίσιο της σύγχρονης μαθηματικής λογικής, είναι μία έννοια συντακτικού χαρακτήρα. Είναι μία πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων (ή, καλύτερα, καλοσχηματισμένων τύπων), καθεμία από τις οποίες είτε είναι αξιώμα είτε προκύπτει από τις προηγούμενές της με χρήση κάποιου κανόνα που καλείται αποδεικτικός. Οι κανόνες αυτοί είναι συγκεκριμένοι και ορισμένοι εκ των προτέρων. Η έννοια της αλήθειας, στο πλαίσιο της σύγχρονης μαθηματικής λογικής των πρωτοβάθμιων γλώσσων, είναι μία έννοια ικανοποιησιμότητας στο εσωτερικό ενός σύμπαντος μαθηματικών αντικειμένων εφοδιασμένου με τις απαραίτητες ιδιότητες, σχέσεις και συναρτήσεις, οι οποίες έχουν το γλωσσικό τους ανάλογο σε σύμβολα της γλώσσας που χρησιμοποιείται για την διατύπωση της συγκεκριμένης πρότασης, η οποία πρόταση αληθεύει στο εσωτερικό του συγκεκριμένου σύμπαντος. Οι δύο έννοιες διασυνδέονται με το θεώρημα πληρότητας του Gödel, που ισχύει για τις πρωτοβάθμιες γλώσσες, σύμφωνα με το οποίο μια πρόταση φ αποδεικνύεται από ένα σύνολο αξιωμάτων T (ή, αλλιώς, από μία θεωρία T) αν και μόνον αν η πρόταση αληθεύει σε κάθε σύμπαν μαθηματικών αντικειμένων στο οποίο αληθεύουν τα αξιώματα του συνόλου T . Για να είμαστε απολύτως ακριβείς, το θεώρημα ή, μάλλον, το μεταθεώρημα πληρότητας (που είναι θεώρημα της μεταγλώσσας, δηλαδή της γλώσσας στα πλαίσια της οποίας διενεργείται η μελέτη των γλωσσικών λογικών συστημάτων, όπως αυτά των πρωτοβάθμιων γλώσσων) είναι το ακόλουθο: Αν μια πρόταση φ αληθεύει σε κάθε σύμπαν μαθηματικών αντικειμένων στο οποίο αληθεύουν τα αξιώματα του συνόλου αξιωμάτων T , τότε η πρόταση φ αποδεικνύεται από τα αξιώματα του T . Η αντίστροφη συνεπαγωγή (που έχει ως εξής: Αν μια πρόταση φ αποδεικνύεται από ένα σύνολο αξιωμάτων T , τότε η πρόταση φ αληθεύει σε κάθε σύμπαν μαθηματικών αντικειμένων στο οποίο αληθεύουν τα αξιώματα του συνόλου T) είναι το μεταθεώρημα εγκυρότητας ή ορθότητας (soundness), του οποίου η απόδειξη είναι εξαιρετικά απλούστερη απ' αυτήν του μεταθεωρήματος πληρότητας.⁶

Το δεύτερο μεγάλο μεταμαθηματικό επίτευγμα μετά την διατύπωση και απόδειξη του μεταθεωρήματος πληρότητας από τον Kurt Gödel υπήρξε αυτό της διατύπωσης και απόδειξης του μεταθεωρήματος μη πληρότητας (που πια είναι γνωστό ως μια δέσμη αντιστοίχων μεταθεωρημάτων) από τον ίδιο. Τα μεταθεωρήματα αυτά παρήχθησαν ως αρνητική απάντηση στο πρόγραμμα του David Hilbert,⁷ σύμφωνα με το οποίο θα μπορούσε να

6. Δ. Α. Αναπολιτάνος, «Η φύση των μαθηματικών αντικειμένων και το πληροφοριακό περιεχόμενο των μαθηματικών αληθειών», στο *Λαζύρινθοι*, γνωσιολογικά ρήγματα, φιλοσοφικά σπαράγματα και παραμυθίες. 29 κείμενα φιλοσοφίας, Εκδοτική Αθηνών, Αθήνα 2016, σσ. 197-198.

7. Βλ., επί παραδείγματι, G. Kreisel, «Hilbert's Program», στο P. Benacerraf και H. Putnam (επιμ.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Prentice-Hall, Englewood

νπάρξει, με χρήση περατοκρατικών μεθόδων, απόδειξη της μη αντιφατικότητας (συνέπειας) των τυπικών μαθηματικών θεωριών στο πλαίσιο των ιδίων αυτών θεωριών. Το πρόγραμμα αυτό του David Hilbert, όπως ήδη ελέχθη εμμέσως, ήταν καταδικασμένο σε αποτυχία. Ο Kurt Gödel το 1931 κατόρθωσε να κατασκευάσει μία μη αποκρίσιμη (undecidable) πρόταση της γλώσσας της κατά Peano αριθμητικής: κατόρθωσε, δηλαδή, να κατασκευάσει μία πρόταση της συγκεκριμένης γλώσσας, που ούτε αυτή ούτε η άρνησή της είναι αποδείξιμες από τα αξιώματα του Peano. Η πρόταση αυτή, κατάλληλα αποκωδικοποιημένη, αντιστοιχεί στην αυτοαναφορική μεταγλωσσική φράση «δεν αποδεικνύομαι». Σε ένα επόμενο επίπεδο μπορεί να αποδειχθεί (και αποδεικνύεται) ότι στα πλαίσια της κατά Peano αριθμητικής δεν μπορούμε να αποδείξουμε μία άλλη πρόταση που, κατάλληλα μεταφραζόμενη, εκφράζει την συνέπεια της ίδιας της κατά Peano αριθμητικής. Έτσι, το όνειρο του David Hilbert για εσωτερική απόδειξη της μη αντιφατικότητας (συνέπειας) μίας μαθηματικής θεωρίας (δηλαδή, για μία απόδειξη της μη αντιφατικότητας μίας μαθηματικής θεωρίας στο ίδιο το πλαίσιο της) αποδεικνύεται οριστικά ανεκπλήρωτο.

Το αποτέλεσμα της εύρεσης (κατασκευής) μίας μη αποκρίσιμης πρότασης της γλώσσας της κατά Peano αριθμητικής είναι πλέον γνωστό ως πρώτο θεώρημα μη πληρότητας, ενώ το αποτέλεσμα της απόδειξης της οριστικής αδυναμίας μας να αποδείξουμε στα πλαίσια μίας πρωτοβάθμιας θεωρίας⁸ την μη αντιφατικότητά (συνέπεια) της ως δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας. Το εξαιρετικά σημαντικό είναι ότι, αν θελήσουμε να επεκτείνουμε κατάλληλα την θεωρία μας, προσθέτοντας στα αξιώματά της, ως νέο αξιώμα, μία πρόταση που θα εξέφραζε την μη αντιφατικότητα της προηγούμενης θεωρίας, θα καταλήγαμε, πάλι, σε μία θεωρία στην γλώσσα διατύπωσης της οποίας θα υπήρχε μία μη αποκρίσιμη πρόταση που θα εξέφραζε την μη αντιφατικότητα της νέας μας θεωρίας. Αυτό θα μπορούσε να συνεχιστεί επ' άπειρον χωρίς αποτέλεσμα.⁹

Μια σημαντική συνέπεια των μεταθεωρημάτων μη πληρότητας είναι το γεγονός ότι καμία μαθηματική αξιωματική θεωρία που περιλαμβάνει τα

Cliffs 1964, σσ. 157-180, και C. Smorynski, «The Incompleteness Theorems», στο J. Barwise (επιμ.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam 1977, σσ. 821-865.

8. Μία πρωτοβάθμια θεωρία είναι μία αξιωματική θεωρία διατυπωμένη στα πλαίσια μίας πρωτοβάθμιας (first-order) γλώσσας, μίας γλώσσας, δηλαδή, όπου, όπως έχει ήδη λεχθεί, η ποσόδειξη επιτρέπεται μόνον επί αντικειμένων του σκοπούμενου να περιγραφεί από την θεωρία σύμπαντος.

9. Στην γενικότερη περίπτωσή τους, οι παραπάνω επεκτάσεις θα μπορούσαν να είναι αναδρομικές (recursive).

αξιώματα του Peano ή, ακριβέστερα, ενός σημαντικού τμήματός των δεν μπορεί να έχει μοναδικό μοντέλο. Αυτό, για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, σημαίνει ότι, επί παραδείγματι, τα αξιώματα αυτά δεν έχουν και δεν μπορούν να έχουν ένα μοναδικό μοντέλο. Είναι, δηλαδή, αδύνατο να περιγραφεί κατ' αποκλειστικότητα το σύνηθες σύμπαν των φυσικών αριθμών. Το εκπληκτικό στην προκείμενη περίπτωση είναι ότι δεν υπάρχει αναδρομικά ελεγχόμενη επέκταση των αξιωμάτων αυτών, τέτοια που, δι' αυτής, να επιτυγχάνεται η κατ' αποκλειστικότητα περιγραφή ενός και μοναδικού σύμπαντος μαθηματικών αντικειμένων όπως του προαναφερθέντος.

Τα θεωρήματα πληρότητας και μη πληρότητας του Kurt Gödel αποτελούν τα χαρακτηριστικότερα δείγματα μαθηματικής δραστηριότητας, όχι στο σύνηθες επίπεδο των μαθηματικών, αλλά στο μεταεπίπεδο των μεταμαθηματικών, εκεί δηλαδή που τα αντικείμενα σπουδής και έρευνας δεν είναι οι συνήθεις ένοικοι των μαθηματικών δομών, αλλά οι ίδιες οι μαθηματικές δομές, καθώς και οι περιγράφουσες τις δομές αυτές αντίστοιχες μαθηματικές θεωρίες. Η διάκριση μεταξύ απόδειξης και αλήθειας, καθώς και η εννοιολογική και λογική μελέτη τους δεν ανήκει στα μαθηματικά, αλλά στα μεταμαθηματικά, όπου η μεθοδολογία εξέτασής τους είναι αποδεικτικοαληθειακή με τον ίδιο ή, μάλλον, με απολύτως αντίστοιχο τρόπο αυτού που χρησιμοποιείται στα συνήθη μαθηματικά. Αυτή η φαινομενική κυκλικότητα μοιάζει να είναι αυτοαναφορική, αλλά δεν είναι. Η αποδειξιμότητα και η επαληθευσιμότητα στο επίπεδο των μεταμαθηματικών είναι μεθοδολογικά απολύτως συγγενής με την αποδειξιμότητα και την επαληθευσιμότητα στο επίπεδο των μαθηματικών. Παρά ταύτα, διαφέρουν ουσιαδώς τα πεδία εφαρμογής τους, με την έννοια ότι αποτελούν διαφορετικά επίπεδα μίας και της αυτής ιεραρχίας.

Θα πρέπει να επισημανθεί και να συζητηθεί εν συντομίᾳ η σχεδόν σύγχρονη ανάδειξη και μελέτη των μεταμαθηματικών με την εισαγωγή, ανάδειξη και μελέτη της έννοιας του συνόλου. Η καντοριανή σύλληψη της αρχικής έννοιας είχε ψεγάδια, με την έννοια ότι οδηγούσε σε παράδοξα και αντιφάσεις. Έτσι, με κατάλληλες διορθωτικές κινήσεις, προέκυψε η κατά Zermelo-Fraenkel κυριαρχούσα, πλέον, θεμελίωση της θεωρίας των συνόλων, στην οποία προστίθεται συνήθως το αξιώμα της επιλογής. Η αξιωματική αυτή θωράκιση της έννοιας του συνόλου αποτελείται από ένα αξιώμα εξασφάλισης της μοναδικότητας κάθε συνόλου του οποίου πιστοποιείται αποδεικνύμενη η ύπαρξη, από τέσσερα αξιώματα που αναφέρονται σε πραξιακές διαδικασίες δημιουργίας νέων συνόλων, ένα αξιώμα αρχιτεκτονικού χαρακτήρα και, τέλος, το αξιώμα της επιλογής, το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός συνόλου αποτελούμενου από στοιχεία κάθε ένα εκ των

οποίων αποτελεί στοιχείο ενός και μόνον ενός συνόλου που ανήκει σε μια δεδομένη συλλογή συνόλων, έτσι ώστε από κάθε τέτοιο σύνολο να επιλέγεται ένα μόνον τέτοιο στοιχείο. Διευκρινιστικά, θα πρέπει να τονισθεί ότι η ισχύς του αξιώματος της επιλογής έγκειται στο γεγονός ότι επιτρέπει την επιλογή χωρίς να προϋποτίθεται συγκεκριμένος αλγόριθμος, που θα μπορούσε να οδηγήσει σε αυτήν. Το πρώτο αξιώμα, το οποίο ονομάζεται και αξιώμα εκτάσεως, μας καθορίζει ότι δύο σύνολα είναι ταυτόσημα όταν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Το δεύτερο μας επιβάλλει την ύπαρξη ενός συνόλου που περιέχει ακριβώς εκείνα τα σύνολα, ως στοιχεία του, τα οποία αποτελούν στοιχεία τουλάχιστον ενός εκ των συνόλων μίας δεδομένης συλλογής συνόλων. Το τρίτο μας εισάγει στην αντίληψη της ύπαρξης του συνόλου όλων των υποσυνόλων ενός οιουδήποτε δεδομένου συνόλου. Το τέταρτο, το οποίο δεν είναι ένα αξιώμα, αλλά μία δέσμη αξιωμάτων (είναι, δηλαδή, ένα αξιωματικό σχήμα), μας λέει ότι δεδομένου ενός συνόλου α και ενός συναρτησιακού μηχανισμού γ υπάρχει ένα σύνολο β που αποτελείται από όλες τις εικόνες των στοιχείων του α μέσω του δεδομένου συναρτησιακού μηχανισμού. Το πέμπτο αξιώμα μας επιβάλλει την ύπαρξη και απείρων συνόλων. Το έκτο αξιώμα, το οποίο είναι, όπως ήδη ελέχθη, αρχιτεκτονικού χαρακτήρα, επιτρέπει ή, μάλλον, επιβάλλει την ταξινόμηση των συνόλων σε μια συσσωρευτική ιεραρχία, όπου δεν επιτρέπεται η ύπαρξη απείρων αλυσίδων προς τα κάτω της μορφής ... ∈ $\alpha_3 \in \alpha_2 \in \alpha_1$, δηλαδή, της μορφής το α_2 ανήκει στο α_1 , το α_3 ανήκει στο α_2 , το α_4 ανήκει στο α_3 και ούτω καθεξής.

Η ανάπτυξη της θεωρίας των συνόλων συνέπεσε με την ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής και της μεταμαθηματικής σπουδής των εργαλείων και των εννοιών της μαθηματικής δραστηριότητας. Ευρύτατες περιοχές των μεταμαθηματικών ανήκουν στην μαθηματική λογική, με κορυφαία παραδείγματα τα θεωρήματα ή, μάλλον, τα μεταθεωρήματα, πληρότητας και μη πληρότητας. Αυτό που είναι εντυπωσιακό και καταδεικνύει τις απίστευτες γνωσιακές δυνατότητες του ανθρώπου ως ελλόγου όντος είναι ότι η κατά Zermelo-Fraenkel θεωρία των συνόλων, επεκτεταμένη ή όχι με την προσθήκη του αξιώματος της επιλογής, της υπόθεσης του συνεχούς, των αξιωμάτων περί της ύπαρξης μεγάλων πληθαρίθμων κτλ., μαζί με το σημασιολογικό της συμπλήρωμα, την συσσωρευτική ιεραρχία, εμπεριέχουν ικανοποιητικά ομοιώματα και της πρωτοβάθμιας λογικής και των μεταμαθηματικών. Αυτό σημαίνει ότι στο εσωτερικό της συσσωρευτικής ιεραρχίας μπορεί να απεικονισθεί πλήρως και η μαθηματική και η μεταμαθηματική μας δραστηριότητα. Άλλωστε, αυτό καθίσταται προφανές και από το γεγονός ότι, στην καθομιλουμένη ελληνική, αγγλική ή οποιαδήποτε άλλη γλώσ-

σα, περιγράφεται, αλλά και λαμβάνει χώρα, όλη η παραπάνω δραστηριότητα. Απλώς δεν συνειδητοποιείται πλήρως ότι στην περιγράφουσα γλώσσα προϋποτίθενται και ενυπάρχουν ήδη όλα τα εργαλεία που έγιναν απτά και συνειδητοποιήθηκαν ως επίσης υπάρχοντα στο επίπεδο της γλώσσας-αντικείμενο. Η θεωρία των συνόλων με την συσσωρευτική της ιεραρχία αποτελεί μία αυστηρή συστηματοποίηση οντοτήτων και πρακτικών, που ήδη υπάρχουν και χρησιμοποιούνται στην φυσική μας γλώσσα.