6/03/2015 (Μαθ 3ο)

Καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$

Καμπύλη είναι μια τροχιά / ένας δρόμος που περνάμε από κάθε σημείο της/του με συνεχή τρόπο.

Παραμετρημένη καμπύλη: $\vec{r} : I (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, I = διάστημα του $\mathbb{R}$, $\vec{r} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ $r_i : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς, $i = 1, 2, \dots, n$

$\Gamma = \vec{r}(I)$ ίχνος της καμπύλης ή καμπύλη.

Ιδιαιτέρως:

- $n=2$ $\Gamma : \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Σε κάποιες περιπτώσεις η Γ μπορεί να είναι το γράφημα μιας απεικόνισης $f : I \to \mathbb{R}$ ή καμπύλη στάθμης μιας $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $n=3$ $\Gamma : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), r(t))$ Σε κάποιες περιπτώσεις η Γ μπορεί να είναι η τομή δύο επιφανειών.

Σημείωση: Υπάρχουν καμπύλες $\vec{r} : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ ή $[0,1]^3$ επί του $[0,1]^2$, $[0,1]^3$

(Δηλ. μπορούμε να περάσουμε όλα τα σημεία του τετραγώνου.

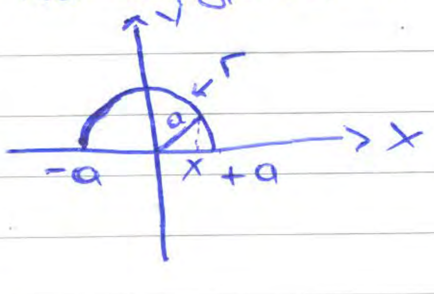
έχουν κατασκευάσει για $n=2$: Peano

$n=3$: Hilbert)

βλ. (2) Συμπληρωματικό υλικό

Παραδείγματα.

1) Να περιγραφεί η καμπύλη Γ του $\mathbb{R}^2$



Παρατηρούμε ότι το Γ είναι γράφημα συνάρτησης.

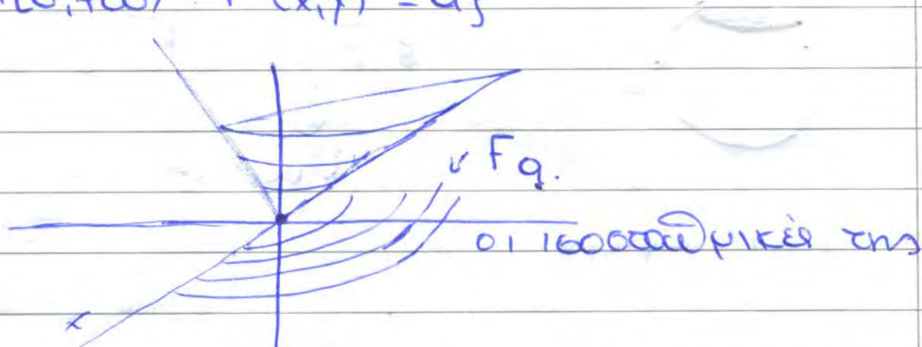
$f(x) := \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, +a]$

$G_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [-$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $y \geq 0$

Παίρνουμε την καμπύλη στάθμης για $y \geq 0$:

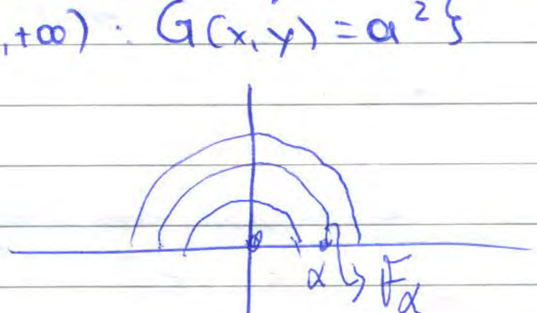
$F_a = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty) : F(x,y) = a\}$



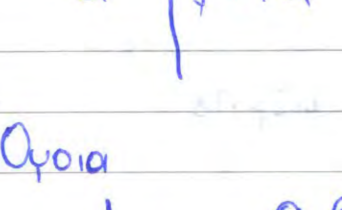
ή

$G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G(x,y) = x^2+y^2$, $y \geq 0$.

$G_{a^2} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty) : G(x,y) = a^2\}$



$\vec{r}(x) = (x, \sqrt{a^2-x^2})$, $x \in [-a,+a]$



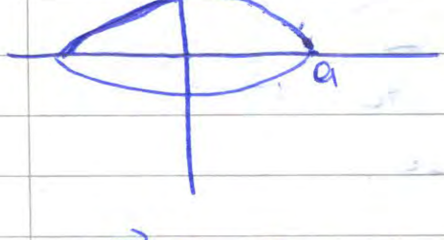
Θυμάμαι αορικυο ημ, συν στα ορθογώνια τρίγωνα

βλέπουμε $\vec{r}(\vartheta) = (\alpha \sigma\upsilon\nu\, \vartheta, \alpha\, \eta\mu\, \vartheta)$, $\vartheta \in [0,\pi]$

ή $\vec{r}(\theta) = (a\, \sigma\upsilon\nu(10\theta), \alpha\, \eta\mu(10\theta))$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{10}]$

ή ...

β) Όμοια



$a, b > 0$

$\cdot F(x,y) = \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^{1/2}$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Gamma,\ G_F = \{(x,y) : F(x,y) = 1\}$

ή

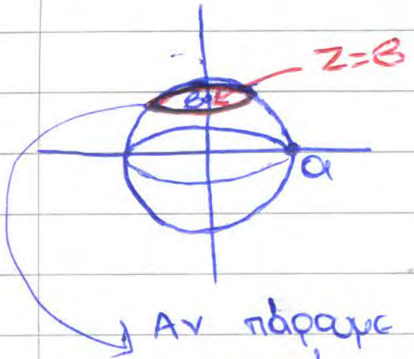
$\cdot G(x,y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$

$G_G = \{(x,y) : G(x,y) = 1\}$

$\cdot \vec{r}(\theta) = (a\, \sigma\upsilon\nu\, \vartheta, b\, \eta\mu\, \vartheta)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$

3) Καμπύλες του $\mathbb{R}^3$

$0 \le b < a$



$\vec{r}(\theta) = \left(\sqrt{a^2-b^2}\,\sigma\upsilon\nu\theta, \sqrt{a^2-b^2}\,\eta\mu\theta, b\right)$

Για να περιγραφεί θέλει (x,y,z)

Αν πάρουμε την προβολή αυτή της επιφάνειας στον $\mathbb{R}^2$ βγαίνει ένας κύκλος ακτίνας $\sqrt{a^2-b^2}$ γιατί

Εδώ θέλουμε να βρούμε την τομή του εξωτερικού της σφαίρας (της φλούδας του πορτοκαλιού) με το επίπεδο

Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 2)$

2-επιφάνειες

$\vec{r}: I \times J \to \mathbb{R}^n$, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ διαστήματα, $\vec{r}(u,v) = (r_1(u,v), \dots, r_n(u,v))$, $r_i: I \times J \to \mathbb{R}$ συνεχείς $(i = 1, \dots, n)$

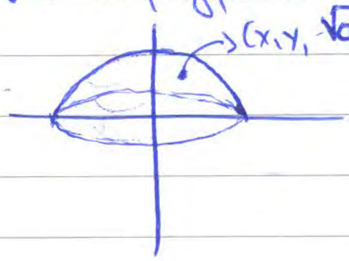
Ιδιαιτέρως

$n=3$ Κάποιες φορές η επιφάνεια μπορεί να περιγραφεί ως γράφημα $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ή ως επιφάνεια στάθμης $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Παραδείγματα

Να περιγραφούν οι επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$

1)

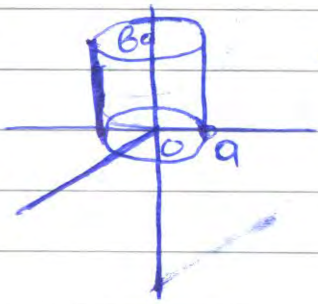


$f: D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$

$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le a^2\}$

• $F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $z\geq 0$
(Ισοσταθμική επιφάνεια $\{(x,y,z): F(x,y,z)=a,\ z\geq 0\}$)
Θέλουμε να την παραμετρήσουμε :
$\vec{r}(x,y)=(x,y,\sqrt{a^2-(x^2+y^2)})$ $(x,y)\in D$.

Η παραμετρησή της είναι: $\vec{r}(\theta,z)=(\sqrt{a^2-z^2}\cos\theta,\ \sqrt{a^2-z^2}\sin\theta,\ z)$
$\theta\in[0,2\pi]$, $z\in[0,a]$.

8) 

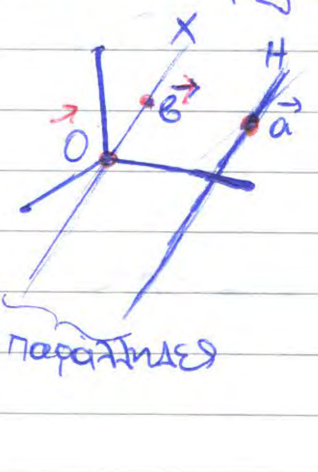
• $F(x,y,z)=x^2+y^2$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,b]$

$S=\{(x,y,z): F(x,y,z)=a^2 \quad z\in[0,b]\}$
$\vec{r}(\theta,z)=(a\cos\theta, a\sin\theta, z)$, $\theta\in[0,2\pi]$, $z\in[0,b]$
η παραμετρησή της.

<u>Σημείωση</u>: Εάν μια επιφάνεια είναι ~~επίπεδο~~ σύνολο σταθμης για
$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $F(x,y,z)=g(x,y)$ ή $h(x,z)$ ή $q(x,z)$ ή
~~$g_1(x)$~~ ή $g_1(x)$ ή $g_2(y)$ ή $g_3(z)$
η επιφάνεια καλείται κυλινδρική.

<u>Ευθείες, Υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$</u>

• <u>Ευθεία στον $\mathbb{R}^n$</u>
$X=\{t\vec{b}\ \ t\in\mathbb{R}\}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ $\dim X=1$ διαν. χ. Αυτόν τον
δ.χ. τον ονομάζουμε ευθεία που περνάει από τα $\vec{0}$, $\vec{b}$.



, $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$ $H=\vec{a}+X=\{\vec{a}+t\vec{b}\quad t\in\mathbb{R}\}$.
(Η ευθεία περιέχει το $\vec{a}$ κ' είναι $//\ \vec{b}$
κ' ορίζουμε σαν διάσταση
$\dim H := \dim X = 1$)

Εφαρμογή $n=2$: $\vec{a}=(x_0,y_0)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)\neq(0,0)$

$\vec{r}(t)=(x_0,y_0)+t(b_1,b_2)$, $t\in\mathbb{R}$

με $x=x_0+tb_1$

$y=y_0+tb_2$

λύνουμε ως προς t: $t=\dfrac{x-x_0}{b_1}$. Για $b_1\neq0$.

άρα $y=y_0+\dfrac{x-x_0}{b_1}\cdot b_2$ (1) ξεχωρίζουμε τα σταθερά

από τα μη σταθερά κ' η (1) παίρνει την μορφή

$y=ax+b$

κ' $x=\gamma y+\delta$ Για $b_2\neq0$

Υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ $(n\geq2)$

Θεωρούμε $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_{n-1}$ γραμ. ανεξ. διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.
κ' θεωρούμε $X=\{t_1\vec{b}_1+t_2\vec{b}_2+\dots+t_{n-1}\vec{b}_{n-1}: t_i\in\mathbb{R}\}$
ο X είναι διανυσμ. χώρος με διάσταση $\dim X=n-1$ κ'
καλείται υπερεπίπεδο που περνά από το $\vec{0},\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_{n-1}$

ΟΡΣ: $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$, $Y=\vec{a}+X$, $\dim Y=\dim X=n-1$.
υπερεπίπεδο που περνάει από το $\vec{a}$ κ' είναι //
$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_{n-1}$

Σημείωση: Στον $\mathbb{R}^2$ τα υπερεπίπεδα είναι οι ευθείες

Ιδιαιτέρως

$n=3$: $\vec{\alpha}=(x_0,y_0,z_0)$

$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ $\quad\vec{b},\vec{\gamma}$ γραμμ. ανεξάρτητα.

$\vec{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$

$\vec{r}(\lambda,\mu)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(b_1,b_2,b_3)+\mu(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

είναι παραμετρημένη επιφ.

άρα $x = x_0 + \lambda\beta_1 + \mu\gamma_1$
$y = y_0 + \lambda\beta_2 + \mu\gamma_2$
$z = z_0 + \lambda\beta_3 + \mu\gamma_3$

ξέρουμε ότι $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ γρ. ανεξάρτητα, άρα τουλ. μία από τις

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad \text{είναι} \neq 0$$

Έστω $\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ λύνουμε ως προς λ, μ αντικαθι-

στούμε $z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0)$

Εξίσωση υπερεπιπέδου συναρτήσει καθέτου διανύσματος

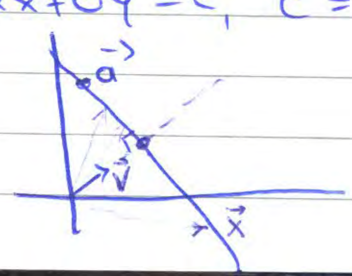
X: δ.χ. $\dim X = n-1$ στον $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n = X \oplus \{\vec{v}\}, \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{v} \perp X$ (Γραμ. Αλγ. ή Αν. Γεωμ.)

$X = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \cdot \vec{v} = 0\}$
$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $Y = \vec{a} + X = \{\vec{a} + \vec{x} : \vec{x} \cdot \vec{v} = 0\} =$
$= \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : (\vec{y} - \vec{a}) \cdot \vec{v} = 0\} = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \vec{y} \cdot \vec{v} = c\}, c = \vec{a} \cdot \vec{v}$

Εξίσωση του $Y = \vec{a} + X$, $y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n = c$
$c = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

→ Υπερεπίπεδο Y είναι το σύνολο στάθμης c της $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = \vec{y} \cdot \vec{v}$, F = γραμμική ($\neq 0$, $\vec{v} \neq \vec{0}$)

για $n = 2$: $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \beta_0)$, $\vec{v} = (a, b) \neq (0,0)$
Η εξίσωση ευθείας που περιέχει το $\vec{a} \perp \vec{v}$ είναι
$\alpha x + \beta y = c$, $c = \alpha_0 \alpha + \beta_0 \beta$



$n=3$: $\alpha x+\beta y+\gamma z=c$

$\vec{V}=(\alpha,\beta,\gamma) \perp$ επ z , c $=(\alpha,\beta,\gamma)\cdot(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$

Σημαντική παρατήρηση: Εάν ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$ δίνεται στην μορφή $A_1x_1+A_2x_2+\dots+A_nx_n=c$, $\vec{A}=(A_1,\dots,A_n)\neq 0$ τότε το $\vec{A}\perp$ υπερεπίπεδο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (3)

1) $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ $\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}$. Να ευρεθεί η παραμετρική εξίσωση
i) της ευθείας που περιέχει τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$,
ii) του ευθ. τμήματος $[\vec{\alpha},\vec{\beta}]$

$\vec{\alpha}\quad\vec{\beta}$

2) Εξίσωση του 2-επιπέδου του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει τα μη συνευθειακά $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$

3) Εξίσωση υπερεπιπέδου του $\mathbb{R}^4$ που περιέχει:
$\vec{e}_1,\ \vec{e}_1+2\vec{e}_2,\ \vec{e}_2+3\vec{e}_3,\ \vec{e}_3+4\vec{e}_4$

4) Έστω $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ και Υ υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$ που διέρχεται από το $\vec{x}_0$, $\vec{v}\perp Y$, $(\vec{v}\neq\vec{0})$. Ν.δ.ο.:

$$d(\vec{x}_0,Y)=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{x}-\vec{v}\cdot\vec{x}_0|}{\|\vec{v}\|}$$

/ Ιδιαιτέρως να γραφεί για $n=2,3$

$(d(\vec{x}_0,Y)=\inf\{\|\vec{x}_0-\vec{y}\|:\vec{y}\in Y\})$

Τετραγωνικές επιφάνειες / Κωνικές τομές

Θεωρούμε $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(\vec{x})=\|\vec{x}\|$ $(n\geq 2)$

ή $G_f=\{(\vec{x},f(\vec{x}))\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\}$ γρ της f

$G_{-f}=\{(\vec{x},-f(\vec{x}))\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\}$ γραφ της $(-f)$.

G_f: ονομ. κώνος στον $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ (επιφάνεια κώνου)

$K=G_f\cup G_{-f}$ διπλός κώνος στον $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$

(ειδικές τετριμμένων περιπτώσεων όπου π.χ. Π=0)

Υ: υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^{n+1}$

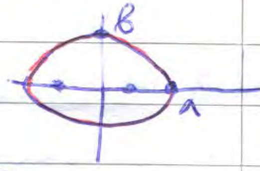
Ορος: Η τομή $K \cap Y$ έχει εξίσωση $\vec{x}\,\Pi\,x^{T}+\vec{a}\cdot\vec{x}+c=0$ ⊛, $\vec{x}\in\mathbb{R}^{n}$, Π: πίνακας, συμμετρικός μη μηδενικός. Η τομή αυτή καλείται κωνική τομή. / Με 2-βαθμού εξίσωση ⊛

· $n=2$ $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

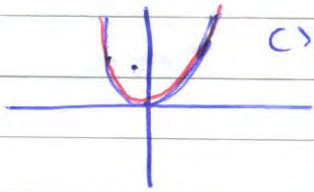
· Οι καμπύλες 2ου βαθμού που παρασιάζονται μετά από στροφές, μεταφορές είναι μια από τις εξής:

ελλειψη: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ $(a,b>0)$

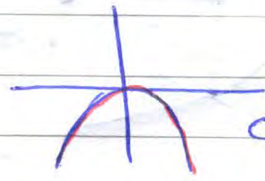
αν $a=b$ κύκλος



παραβολή: $y=cx^2$, $c\neq 0$

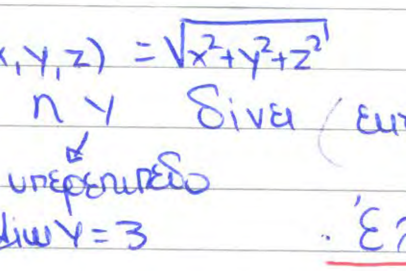


$c>0$

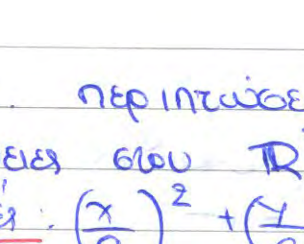


$c<0$.

υπερβολή: $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=c$ $(a,b>0,\ c\neq 0)$



$c>0$



$c<0$

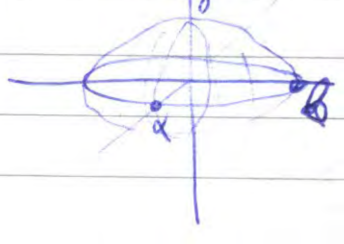
Η μορφή εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του Π (Αν. γεωμ.).

- $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$K \cap Y$ είναι (εκτός τετρ. περιπτώσεων) τις εξής επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$:

Υ: υπερεπίπεδο $\dim Y=3$

· Ελλειψοειδές: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2=1$. $a,b,\gamma>0$

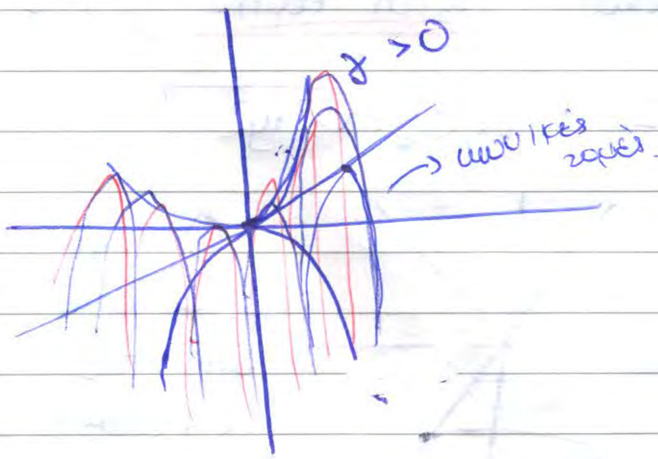


αν $a=b=\gamma$ σφαίρα.

2) Υπερβολικό παραβολοειδές (ή Σέλλα)

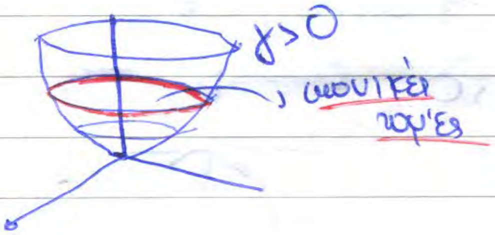
Η εξίσωση του είναι: $\frac{z}{\gamma} = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2$, $\alpha, \beta > 0$, $\gamma \neq 0$

(Ισοσταθμικές καμπύλες για $\gamma = c = 1 > 0$ σελ. 16)



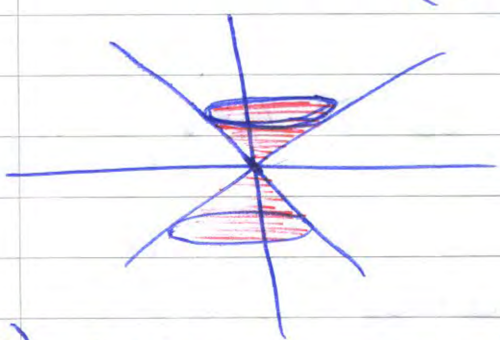
3) Ελλειπτικό παραβολοειδές

Η εξίσωσή του είναι: $\frac{z}{\gamma} = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2$, $\alpha, \beta > 0$, $\gamma \neq 0$



4) Ελλειπτικός κώνος

με εξίσωση: $\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2$ $\alpha, \beta, \gamma > 0$



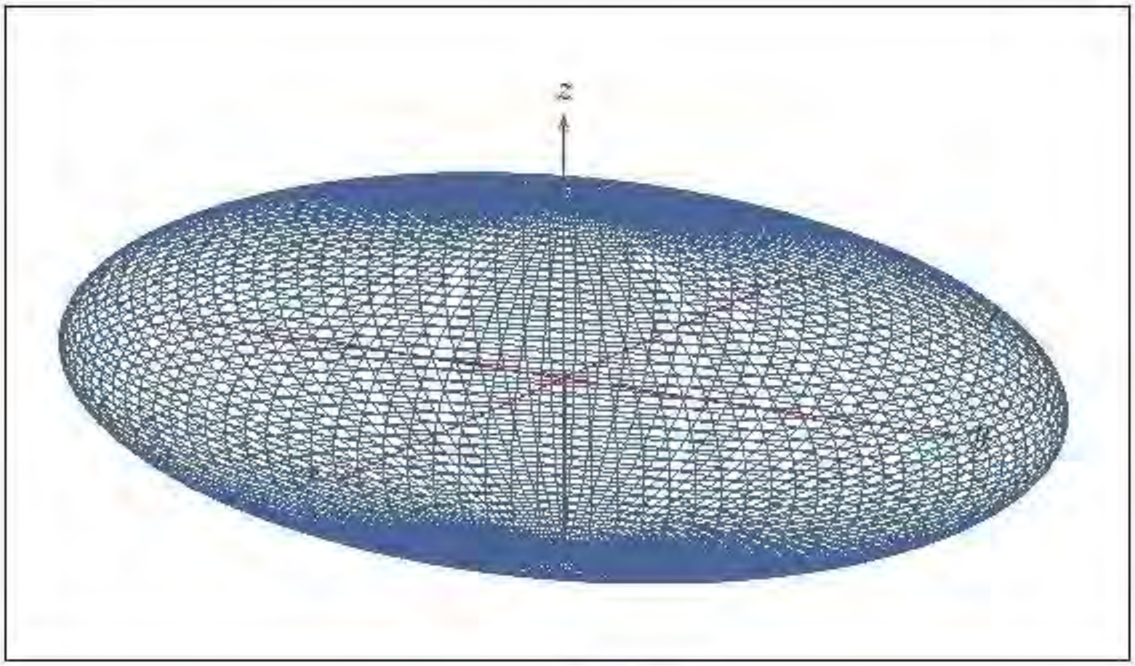
5) Μονόχωρο υπερβολοειδές

6) δίχωρο -||-

Η μορφή των επιφανειών αυτών εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα Π (Αν. Γεωμετρία)

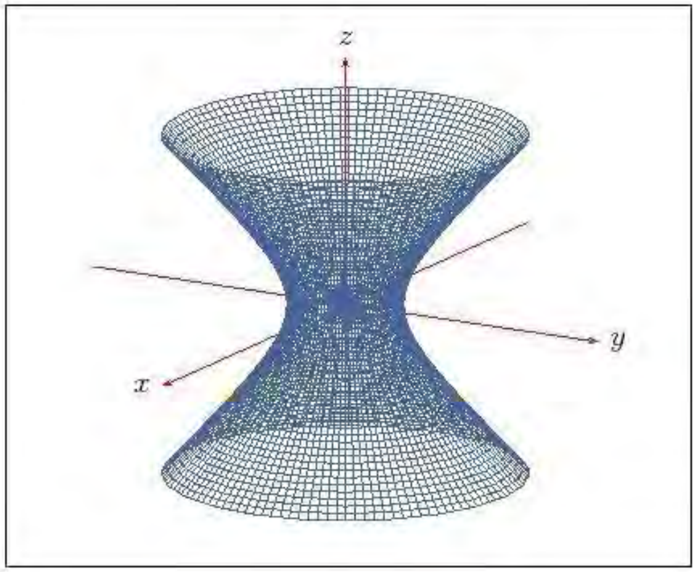
Επιυ άνειες 2οσ βαθμού (τετραγωνικές) στον ^{3}

Ελλειψοειδές



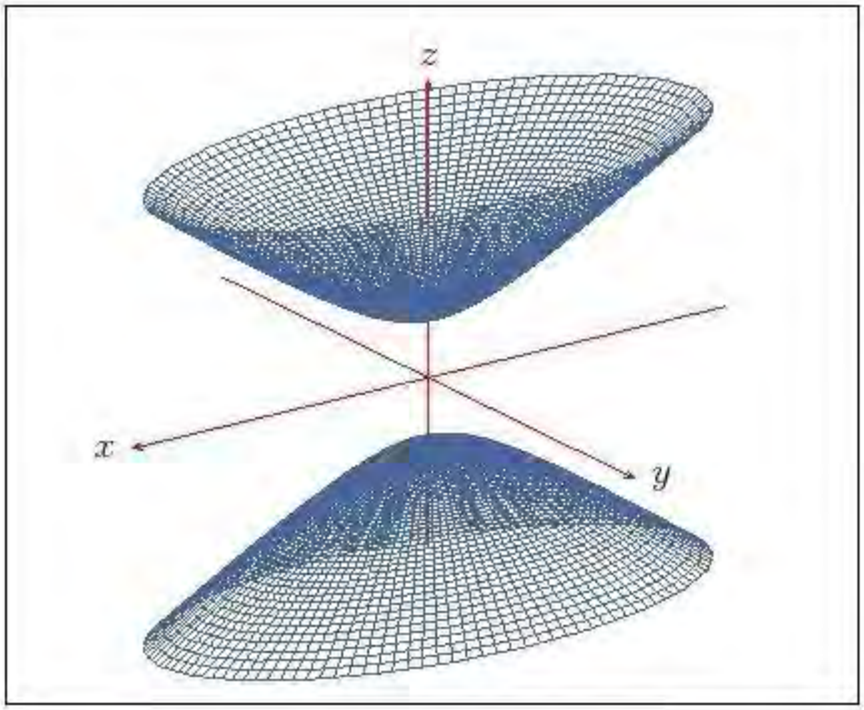
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Μονόχωνο Υπερβολοειδές



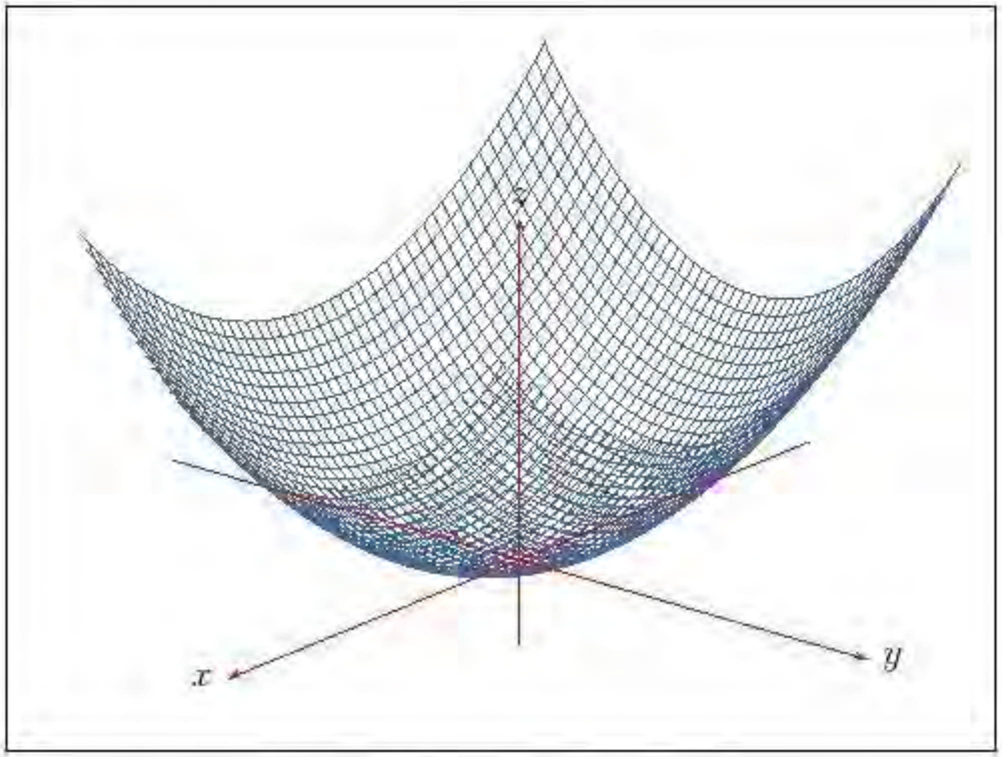
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Δίχωνο Υπερβολοειδές



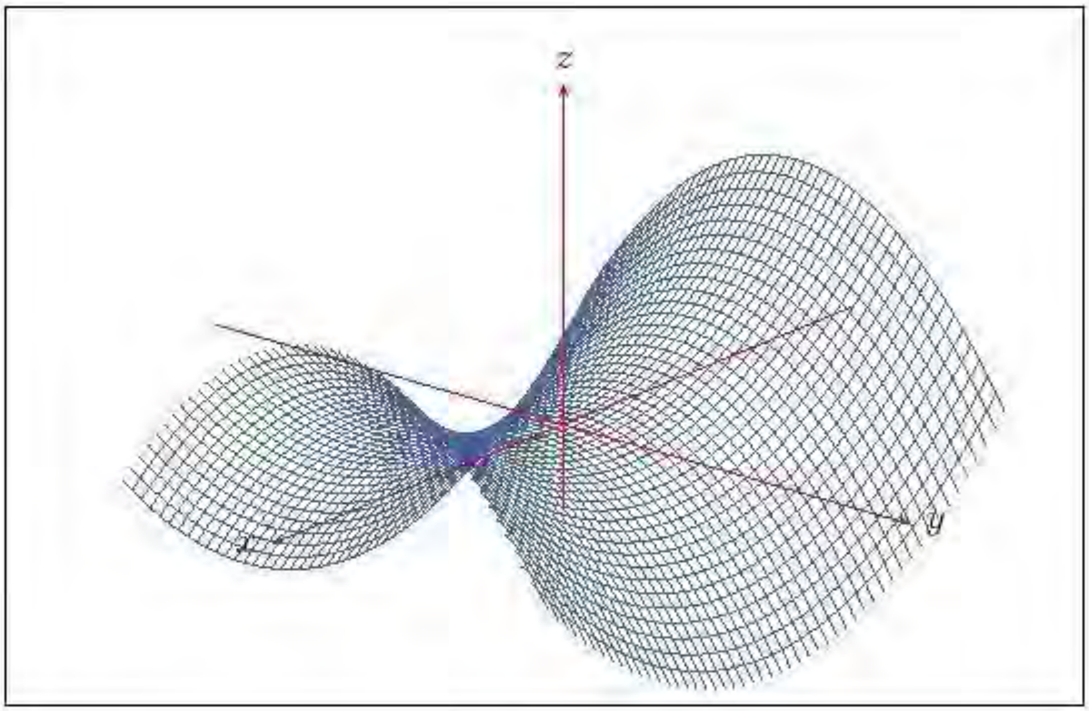
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Ελλειπτικό Παραβολοειδές



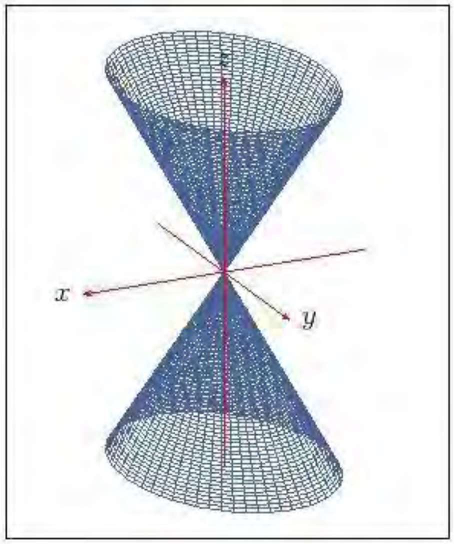
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

Υπερβολικό Παραβολοειδές



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Ελλειπτικός Κώνος



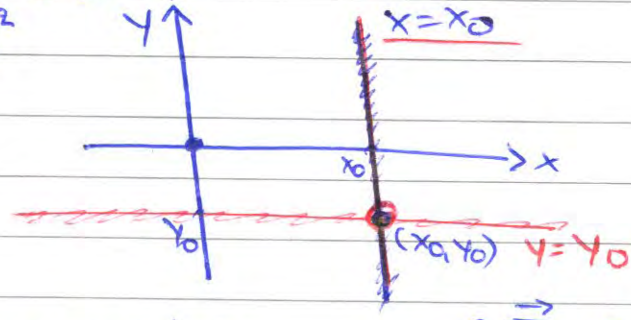
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

Η μορφή των επιφανειών αυτών εξαρτάται από τις ιδιότητες του Π (Αν. γεωμετρία)

Συστήματα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^2$

- Καρτεσιανές στον $\mathbb{R}^2$

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

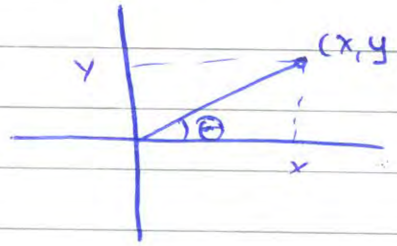


- Πολικές συντεταγμένες.

Παίρνουμε έναν μετασχηματισμό:
$$\begin{cases} \vec{T}: [0,+\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ (επί)} \\ T(r,\theta) = (r\,\text{συν}\theta, r\,\text{ημ}\theta) \end{cases}$$

Για να την κάνουμε 1-1 την περιορίζουμε:
$$\vec{T} = (0,+\infty)\times[0,2\pi) \to \mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$$
(έτσι όμως χάνουμε το $(0,0)$)

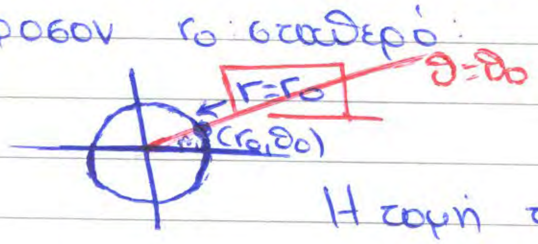
άρα: $x = r\,\text{συν}\theta$, $y = r\,\text{ημ}\theta$ | $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$, $\text{εφ}\theta = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$



$\theta = \pi/2 \quad x=0 \ y>0$

$\theta = 3\pi/2 \quad x=0 \ y<0.$

αν θέλουμε να βρούμε το (r_0,θ_0):
$$\vec{T}(r_0,\theta) = (r_0\,\text{συν}\theta, r_0\,\text{ημ}\theta) = \vec{r}(\theta)$$
εφόσον r_0 σταθερό:



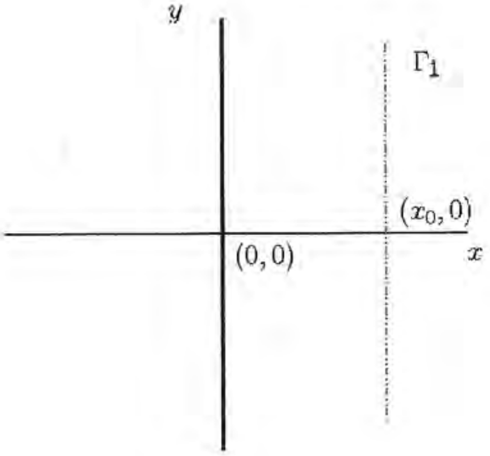
ενώ $\vec{r}(r) = (r\,\text{συν}\theta_0, r\,\text{ημ}\theta_0)$ είναι μια ημιευθεία.

Η τομή του κύκλου κ' της ημιευθείας είναι το (r_0, θ_0)

Συστήματα συντεταγμένων στον R^2

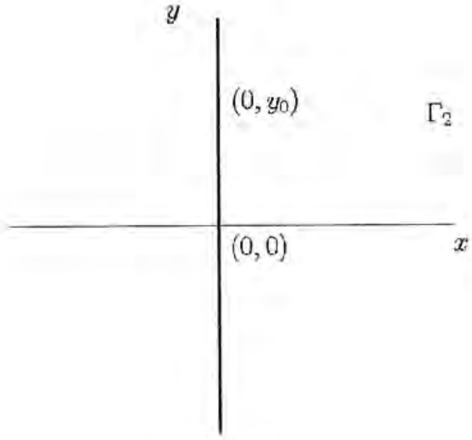
I. Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y)

Καρτεσιανές καμπύλες (ευθείες) $x = x_0, y = y_0$.



$\Gamma_1: x = x_0,\ \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2: x = x_0,\ y \in \boldsymbol{R}\}$

$\{\vec{r}_1(y) = (x_0, y), y \in \boldsymbol{R}\}$

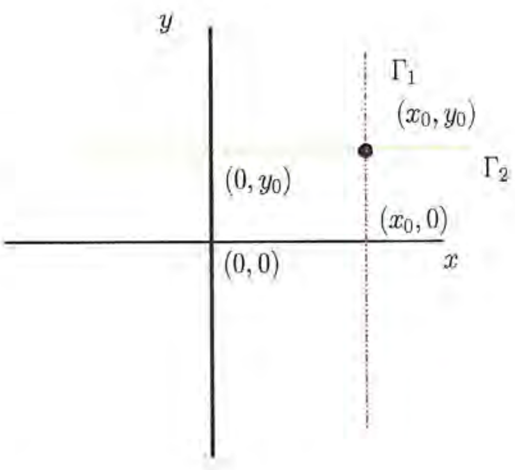


$\Gamma_2: y = y_0,\ \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2: y = y_0,\ x \in \boldsymbol{R}\}$

$\{\vec{r}_2(x) = (x, y_0), x \in \boldsymbol{R}\}$

Το (x_0, y_0) είναι το σημείο τομής των καμπυλών

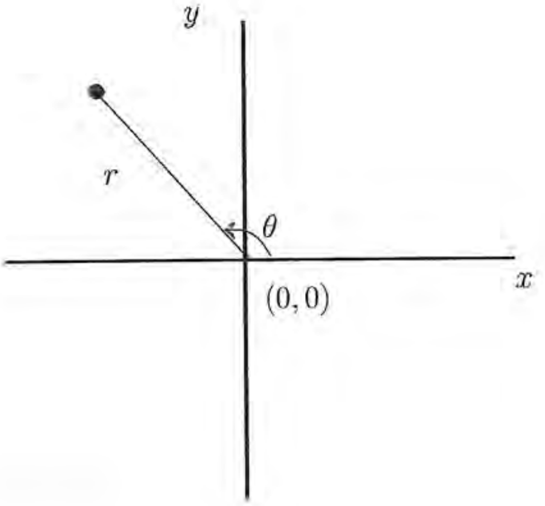
$\boldsymbol{\Gamma_1 : x = x_0\ ,\ \Gamma_2 : y = y_0}$



II. Πολικές συντεταγμένες (r, θ)

Ο $\vec{T}: [0,\infty) \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ (επί), με $\vec{T}(r,\theta) = (r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta)$ καλείται πολικός μετασχηματισμός και τα r, θ πολικές συντεταγμένες.

Ο περιορισμός του $\vec{T}: (0,\infty) \times [0,2\pi) \to \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ είναι 1-1 και επί.

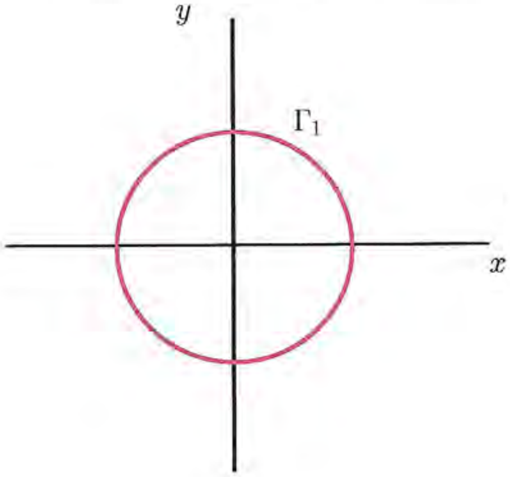


Σχέση Καρτεσιανών Πολικών συντεταγμένων.

$$\begin{cases} x = r\,\sigma\upsilon\nu\theta \\ y = r\,\eta\mu\theta \end{cases} \quad (r,\theta) \in [0,\infty) \times \boldsymbol{R}$$

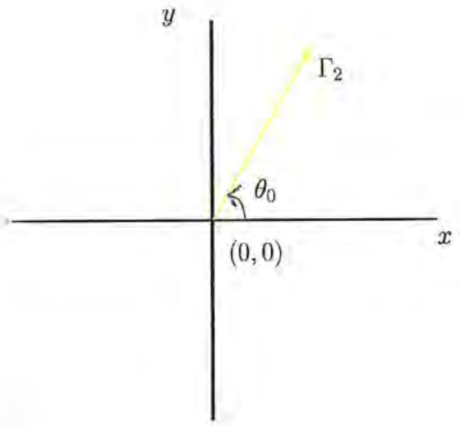
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} \;\; \alpha\nu\ x \neq 0. A\nu\ x = 0: \theta = \frac{\pi}{2}\ \gamma\iota\alpha\ y > 0, \theta = \frac{3\pi}{2}\ \gamma\iota\alpha\ y < 0 \end{cases} \quad (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Πολικές καμπύλες $r = r_0(> 0), \theta = \theta_0$ (στο καρτεσιανό σύστημα)



$\Gamma_1 : r = r_0$, κύκλος $\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : x^2 + y^2 = r_0^2\}$

$\{\vec{r}_1(\theta) = (r_0 \sigma\upsilon\nu\theta, r_0 \eta\mu\theta), \theta \in [0,2\pi]\}$



$\Gamma_2 : \theta = \theta_0$, ημιευθεία $\{\vec{r}_2(r) = (r\sigma\upsilon\nu\theta_0, r\eta\mu\theta_0), r \geq 0\}$

Το $(x_0, y_0) = (r_0 \sigma\upsilon\nu\theta_0, r_0 \eta\mu\theta_0)$ είναι το σημείο τομής των καμπυλών

$$\boldsymbol{\Gamma_1 : r = r_0 \quad , \quad \Gamma_2 : \theta = \theta_0}$$