ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εργασία: Διακριτά Δυναμικά Συστήματα, Ιούνιος 2024

Θέμα 1: Δίνεται η εξίσωση: $x_{k+1} = \frac{ax_k}{1+bx_k}$ $(a > 1,\, b > 0)$. Δείξτε ότι τα σημεία $x = 0$ και $x = \frac{a-1}{b}$ είναι τα δύο σημεία ισορροπίας (ασταθές και ευσταθές, αντίστοιχα). Επαληθεύστε το αποτέλεσμα λύνοντας την εξίσωση μέσω του μετασχηματισμού $z_k = \frac{1}{x_k}$.

Θέμα 2: Να λυθεί το σύστημα $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_k + \mathbf{b}_k$, $k \geq 0$, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Θέμα 3: Έστω η εξίσωση διαφορών $x_{k+1} = 2x_k - x_k^2$. (α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και να χαρακτηριστούν οι ιδιότητες ευστάθειας τους.

Θέμα 4: Έστω τα συστήματα:

$$\Sigma_1\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right)$$

και

$$\Sigma_2\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, 0\right)$$

(α) Δείξτε ότι αν $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0) = 0$, τότε $\mathbf{y}_1(k) = \mathbf{y}_2(k)$ για κάθε $k \geq 0$. (β) Δείξτε οτι τα δύο συστήματα δεν είναι ισοδύναμα.

Θέμα 5: Έστω το σύστημα: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k$, $y_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k$, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(α) Αν $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, $u_k = 1$, $k \geq 0$, να βρεθεί η ακολουθία y_k με δύο τρόπους (συνέλιξη, μετασχηματισμός Z). (β) Αν $y_0 = y_1 = 1$ και $u_k = 0$ για κάθε $k \geq 0$ μπορεί να βρεθεί η αρχική κατάσταση μονοσήμαντα; (και αν ναί, ποιά είναι;).

Θέμα 6: Έστω το σύστημα $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$, $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k$, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ που είναι ελέγξιμες/μη-παρατηρήσιμες. (β) Να υπολογισθεί η ακολουθία y_k αν $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $u_0 = 1$, $u_k = 0$ αν $k \neq 0$.

Θέμα 7: Έστω

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \mathbf{b}_3^T \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν συνθήκες ως προς τις παραμέτρους του $\Sigma_i(\mathbf{J}, \mathbf{B})$ ώστε το σύστημα να μην είναι πλήρως ελέγξιμο.

Θέμα 8: Δείξτε ότι $\Sigma_i(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(\mathbf{A} + \mathbf{BF}, \mathbf{BG})$ πλήρως ελέγξιμο (όπου $\det(G) \neq 0$).

Θέμα 9: Έστω στο σύστημα $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{E}\mathbf{q}_k$, $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k$ όπου $\mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^r$ σήμα διαταραχής. Νε βρεθεί συνθήκη ώστε η έξοδος του συστήματος $\mathbf{y}_k$ να είναι ανεξάρτητη του $\mathbf{q}_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$. Αν

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

να βρεθούν όλοι οι πίνακες $\mathbf{E}$ που εξασφαλίζουν αυτή την ιδιότητα.

Θέμα 10: Έστω σύστημα $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k$ όπου:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(α) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\mathbf{A}$. (β) Δείξτε ότι $\Sigma_i(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ είναι πλήρως ελέγξιμο. (γ) Να βρεθεί $\mathbf{f}^T = [f_1\ f_2\ f_3]$ ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f}^\mathbf{T}$ να είναι $\phi(\lambda) = \lambda^3$.

Θέμα 11: Έστω το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^1 \\ \mathbf{x}_{k+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k^1 \\ \mathbf{x}_k^2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k^1$$

Δείξτε ότι το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν $\Sigma_o(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{12})$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

Θέμα 12: Έστω το σύστημα:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u_k, \ \ y_k = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_k$$

(α) Δείξτε ότι το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο. (β) Να σχεδιαστεί παρατηρητής με διάνυσμα κατάστασης $\hat{\mathbf{x}}_k$ ώστε $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k = 0$ για κάθε $k \geq N$, όπου N ο μικρότερος δυνατός ακέραιος. Έστω $u_k = v_k + \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}_k$ όπου v_k σήμα εισόδου και $\mathbf{K} = [\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]$. Να ορίσετε το σύστημα κλειστού βρόγχου $\Sigma(\mathbf{A_c}, \mathbf{B_c}, \mathbf{C_c})$ με διάνυσμα κατάστασης $[\mathbf{x}_k^T\ \hat{\mathbf{x}}_k^T]^T$, είσοδο v_k και έξοδο y_k. Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A_c}$ του συστήματος;

Θέμα 13: Να διακριτοποιήσετε το σύστημα $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$ όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

αν η περίοδος δειγματοληψίας είναι T.

Θέμα 14: Εξετάστε αν το σύστημα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι πλήρως ελέγξιμο/πλήρως παρατηρήσιμο. Αν δεν είναι μετασχηματίστε το στην κανονική μορφή ελεγξιμότητας/παρατηρησιμότητας Kalman.

Θέμα 15: Το σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ διακριτοποιείται με περίοδο δειγματολειψίας T.Έστω $\mathbf{x}_{k+1} = \Phi\mathbf{x}_k + \Gamma\mathbf{u}_k$ το ισοδύναμο σύστημα διακριτού χρόνου. Έστω ότι για κάθε ζεύγος ιδιοτιμών (λ_i, λ_j) του πίνακα $\mathbf{A}$ για τα οποία $\mathrm{Re}(\lambda_i - \lambda_j) = 0$ ισχύει ότι:

$$\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2\pi m}{T}, \ \ m \in \mathbb{N}$$

Δείξτε ότι το διακριτό σύστημα (Φ, Γ) είναι πλήρως ελεγξιμο. Παράδειγμα: Έστω το σύστημα

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

Δείξτε ότι το ισοδύναμο διακριτό σύστημα είναι

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{pmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{pmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{pmatrix} u_k$$

Δείξτε ότι $\Sigma_i(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ πλήρως ελέγξιμο αλλά $\Sigma_i(\Phi, \Gamma)$ δεν είναι ελέγξιμο αν $T = m\pi$, $m \in \mathbb{N}$.

Θέμα 16: Δείξτε ότι αν το σύστημα $\Sigma_i(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν ο πίνακας $\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^j \mathbf{B}\mathbf{B}^T (\mathbf{A}^j)^T$ είναι μη-ιδιάζων.

Θέμα 17: Έστω δύο πραγματοποιήσεις $\Sigma(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1)$ και $\Sigma(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_2)$ τού (ίδιου) συστήματος Σ που είναι πλήρως ελέγξιμες και πλήρως παρατηρήσιμες. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδιός μη-ιδιάζων πίνακας S τέτοιος ώστε $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_2) = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{S}, \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1\mathbf{S}, \mathbf{D}_1)$.

Θέμα 18: Έστω το σύστημα $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ πλήρως παρατηρήσιμο. Δείξτε ότι ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι πίνακας Schur (δηλ. $\rho(\mathbf{A}) < 1$) αν και μόνο αν υπάρχει μοναδικός θετικά-ορισμένος πίνακας $\mathbf{P}$ που ικανοποιεί την εξίσωση: $\mathbf{P} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ και ότι στην περίπτωση αυτή $\mathbf{P} = \sum_{j=0}^{\infty}(\mathbf{A}^T)^j\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{A}^j$.

Θέμα 19: Δείξτε ότι ο πίνακας $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι Schur (δηλ. (δηλ. $\rho(\mathbf{A}) < 1$) αν και μόνο αν υπάρχει θετικά ορισμένος πίνακας $\mathbf{P}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $\mathbf{P} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$ είναι θετικά ορισμένος. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης. Για να απλουστεύσετε την απόδειξη μπορείτε να υποθέσετε ότι ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι απλής δομής].