Προαιρετικό Quiz — Εβδομάδα 2

Διαλέξεις 4–6: ροπές και εκτιμήτριες

Κάθε ερώτηση έχει τέσσερις επιλογές. Μπορεί να είναι σωστή μία ή περισσότερες. Επιλέξτε **όλες και μόνο τις σωστές**.

Οι παρατηρήσεις που χαρακτηρίζονται ως τυχαίο δείγμα είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Θεωρούμε $n \geq 2$. Οι μέσες τιμές, διασπορές και ροπές που χρησιμοποιούνται υποτίθενται πεπερασμένες, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά. Γράφουμε $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ και $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$. Οι $M_k = n^{-1} \sum_i (X_i - \overline{X})^k$ είναι δειγματικές κεντρικές ροπές.

1. Σχετικά με τη μέθοδο των ροπών για παράμετρο $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$, ποιες προτάσεις είναι σωστές;

   - ☐ **α.** Πρέπει πάντοτε να χρησιμοποιούνται οι πρώτες s μη κεντρικές ροπές, ακόμη κι αν κάποια δεν περιέχει άγνωστη παράμετρο.
   - ☐ **β.** Οι κεντρικές ροπές δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιηθούν σε σύστημα ροπών.
   - ☐ **γ.** Οι επιλεγμένες εξισώσεις πρέπει να δίνουν πληροφορία για τις άγνωστες παραμέτρους· η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης χρειάζονται έλεγχο.
   - ☐ **δ.** Μπορούμε να ξεκινήσουμε από τη δεύτερη ή από υψηλότερη ροπή, αν η πρώτη δεν δίνει πληροφορία.

2. Ποιες καταστάσεις μπορούν να εμφανιστούν κατά την επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων ροπών για s άγνωστες παραμέτρους;

   - ☐ **α.** Το σύστημα μπορεί να μην έχει λύση.
   - ☐ **β.** Η λύση είναι πάντοτε μοναδική όταν $n > s$.
   - ☐ **γ.** Το σύστημα μπορεί να έχει περισσότερες από μία λύσεις.
   - ☐ **δ.** Κάθε πραγματική λύση είναι αυτομάτως αποδεκτή, ακόμη κι αν βρίσκεται έξω από τον παραμετρικό χώρο.

3. Ζητάμε εκτιμήτρια με τιμές στο Θ, αλλά το σύστημα ροπών δίνει μοναδική αλγεβρική λύση $t \notin \Theta$. Ποια είναι η ορθή αντιμετώπιση;

   - ☐ **α.** Να μην τη δεχθούμε χωρίς κατάλληλη διόρθωση ή επανεξέταση του συστήματος και του μοντέλου.
   - ☐ **β.** Να αγνοήσουμε τον παραμετρικό χώρο, επειδή οι εξισώσεις ροπών υπερισχύουν του μοντέλου.
   - ☐ **γ.** Να θεωρήσουμε ότι η λύση γίνεται αμερόληπτη λόγω μοναδικότητας.
   - ☐ **δ.** Να κρατήσουμε τη λύση επειδή είναι μοναδική.

4. Στο μοντέλο $N(\mu, \sigma^2)$ με άγνωστα μ, σ^2 και για παρατηρημένο δείγμα με $M_2 > 0$, ποιες προτάσεις είναι σωστές;

   - ☐ **α.** Η ισοδυναμία των δύο συστημάτων στηρίζεται στις ταυτότητες $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2$ και $\overline{X^2} = M_2 + \overline{X}^2$.
   - ☐ **β.** Το σύστημα $\mathbb{E}(X) = \overline{X}$, $\mathbb{E}(X^2) = \overline{X^2}$ δίνει $\widehat{\mu} = \overline{X}$ και $\widehat{\sigma}^2 = M_2$.
   - ☐ **γ.** Η εκτιμήτρια ροπών της σ^2 είναι υποχρεωτικά η S^2.
   - ☐ **δ.** Το σύστημα $\mathbb{E}(X) = \overline{X}$, $\mathbb{V}(X) = M_2$ δίνει την ίδια λύση.

5. Έστω $X_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$, όπου η μ_0 είναι γνωστή. Ποια εκτιμήτρια προκύπτει από την εξίσωση $\mathbb{E}[(X-\mu_0)^2] = \sigma^2$;

   ☐ **α.** $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

   ☐ **β.** $\overline{X}^2$.

   ☐ **γ.** $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$.

   ☐ **δ.** $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

6. Στο μοντέλο $N(\mu_0, \sigma^2)$, με γνωστή $\mu_0 \neq 0$, χρησιμοποιούμε την εξίσωση $\mathbb{E}(X^2) = \mu_0^2 + \sigma^2$. Ποιες προτάσεις είναι σωστές;

   ☐ **α.** Η $\widetilde{\sigma}^2$ είναι ίση για κάθε δείγμα με $n^{-1}\sum_i (X_i - \mu_0)^2$.

   ☐ **β.** Προκύπτει $\widetilde{\sigma}^2 = \overline{X^2} - \mu_0^2$.

   ☐ **γ.** Η $\widetilde{\sigma}^2$ μπορεί να είναι αρνητική και τότε βρίσκεται έξω από τον παραμετρικό χώρο.

   ☐ **δ.** Η $\widetilde{\sigma}^2$ είναι μη αρνητική για κάθε δυνατό δείγμα.

7. Για $X \sim \mathrm{Bin}(N, p)$ με άγνωστα N και p, ποιες σχέσεις προκύπτουν από $Np = \overline{X}$ και $Np(1-p) = M_2$, όταν $0 < M_2 < \overline{X}$;

   ☐ **α.** $\overline{N} = \dfrac{\overline{X}^2}{\overline{X} - M_2}$.

   ☐ **β.** $\overline{p} = M_2 / \overline{X}$.

   ☐ **γ.** Η θεωρητική σχέση είναι $\mathbb{V}(X) > \mathbb{E}(X)$.

   ☐ **δ.** $\overline{p} = 1 - \dfrac{M_2}{\overline{X}}$.

8. Για $0 < M_2 < \overline{X}$, το σύστημα διωνυμικών ροπών δίνει μη ακέραια λύση $\overline{N}$. Ποιες ενέργειες είναι συμβατές με την κατασκευή διορθωμένων εκτιμήσεων;

   ☐ **α.** Να χρησιμοποιηθεί πάντοτε $\lfloor \overline{N} \rfloor$, ακόμη κι αν είναι μικρότερο από το μέγιστο του δείγματος.

   ☐ **β.** Να επιλεγεί κοντινός θετικός ακέραιος $\widehat{N}$ που δεν είναι μικρότερος από το $X_{(n)}$.

   ☐ **γ.** Να επιβληθεί $\widehat{N} \geq X_{(n)}$.

   ☐ **δ.** Να επανυπολογιστεί $\widehat{p} = \overline{X}/\widehat{N}$ ώστε να διατηρείται η πρώτη εξίσωση ροπών.

9. Σε ένα συγκεκριμένο δείγμα υποθετικού διωνυμικού μοντέλου ισχύει $M_2 \geq \overline{X} > 0$. Ποια πρόταση είναι σωστή;

   ☐ **α.** Το συγκεκριμένο σύστημα δεν έχει εσωτερική λύση· το εύρημα μπορεί να οφείλεται σε δειγματική μεταβλητότητα ή σε ακατάλληλο μοντέλο.

   ☐ **β.** Το σύστημα έχει μοναδική εσωτερική λύση με $N > 0$ και $0 < p < 1$.

   ☐ **γ.** Πρέπει να θέσουμε $p = 1$.

   ☐ **δ.** Αποδεικνύεται μόνο από αυτή την παρατήρηση ότι το διωνυμικό μοντέλο είναι λανθασμένο.

10. Έστω Z με πυκνότητα f και $X = \alpha + \beta Z$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$. Ποιες προτάσεις ισχύουν γενικά;

    ☐ **α.** Η α είναι πάντοτε η μέση τιμή της X.

    ☐ **β.** Αν η Z έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε $\mathbb{E}(X) = \alpha + \beta\mathbb{E}(Z)$.

    ☐ **γ.** Η πυκνότητα της X είναι $f(x; \alpha, \beta) = \beta^{-1} f((x - \alpha)/\beta)$.

    ☐ **δ.** Η $(X - \alpha)/\beta$ έχει υποχρεωτικά διασπορά 1.

11. Έστω $\mathbb{E}|X|^3 < \infty$, $\mu = \mathbb{E}(X)$ και $\mu_k = \mathbb{E}[(X - \mu)^k]$. Ποιες προτάσεις είναι σωστές;

    ☐ **α.** Η πρώτη κεντρική ροπή είναι $\mu_1 = 0$.

    ☐ **β.** Η μ_3 είναι πάντοτε μη αρνητική.

    ☐ **γ.** Η δεύτερη κεντρική ροπή είναι ίση με την τυπική απόκλιση σ.

    ☐ **δ.** Η δεύτερη κεντρική ροπή είναι $\mu_2 = \mathbb{V}(X) = \sigma^2$.

12. Για $Y = X - \mu$ και $Z = (X - \mu)/\sigma$, όπου $0 < \sigma^2 < \infty$, ποιες προτάσεις είναι σωστές;

    ☐ **α.** $\mathbb{V}(Y) = 1$.

    ☐ **β.** Η τυποποίηση μετατρέπει κάθε κατανομή σε κανονική.

    ☐ **γ.** $\mathbb{E}(Y) = 0$ και $\mathbb{V}(Y) = \sigma^2$.

    ☐ **δ.** $\mathbb{E}(Z) = 0$ και $\mathbb{V}(Z) = 1$.

13. Έστω Z με πυκνότητα e^{-z} για $z > 0$, $X = Z - 1$ και $Y = 1 - Z$. Δίνεται $\mathbb{E}(Z^j) = j!$, για $j = 1, 2, 3, 4$. Ποιες προτάσεις είναι σωστές;

    ☐ **α.** Η μέση τιμή της Y είναι 1.

    ☐ **β.** Η λοξότητα της Y είναι επίσης 2.

    ☐ **γ.** Η λοξότητα της X είναι 2.

    ☐ **δ.** Η κύρτωση της X είναι 9.

14. Για $0 < \sigma^2 < \infty$ και πεπερασμένη τέταρτη ροπή, η κύρτωση είναι $\kappa = \mathbb{E}[((X - \mu)/\sigma)^4]$ και η πλεονάζουσα κύρτωση $\kappa' = \kappa - 3$. Ποιες προτάσεις είναι σωστές;

    ☐ **α.** Η κανονική κατανομή έχει $\kappa = 3$.

    ☐ **β.** Η συνθήκη $\kappa' > 0$ αντιστοιχεί σε λεπτόκυρτη κατανομή ως προς την κανονική αναφορά.

    ☐ **γ.** Η ισότητα $\kappa = 3$ δεν αρκεί για να συμπεράνουμε ότι η κατανομή είναι κανονική.

    ☐ **δ.** Η πλεονάζουσα κύρτωση είναι $\kappa' = \kappa + 3$.

15. Για $M_2 > 0$ ορίζουμε $\widehat{\lambda} = M_3/M_2^{3/2}$ και $\widehat{\kappa} = M_4/M_2^2$. Ποιες προτάσεις είναι σωστές;

    ☐ **α.** Η δειγματική πλεονάζουσα κύρτωση είναι $\widehat{\kappa} - 3$.

    ☐ **β.** Είναι σταθερά χαρακτηριστικά του πληθυσμού και δεν αλλάζουν από δείγμα σε δείγμα.

    ☐ **γ.** Η αντικατάσταση του M_2 από το $S^2 = nM_2/(n-1)$ δεν αλλάζει ποτέ τις τιμές τους.

    ☐ **δ.** Είναι δειγματικά χαρακτηριστικά και μπορούν να μεταβάλλονται από δείγμα σε δείγμα.

16. Αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ και $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2 < \infty$, ποιες σχέσεις είναι σωστές;

    ☐ **α.** $\mathbb{V}(\overline{X}) = \sigma^2$.

    ☐ **β.** $\mathbb{E}(\overline{X}) = \mu$.

    ☐ **γ.** Τα αποτελέσματα για τη μέση τιμή και τη διασπορά του δειγματικού μέσου απαιτούν κανονική κατανομή.

    ☐ **δ.** $\mathbb{V}(\overline{X}) = \sigma^2/n$.

17. Για τυχαίο δείγμα με $0 < \sigma^2 < \infty$, $M_2 = n^{-1}\sum_i (X_i - \overline{X})^2$ και $S^2 = nM_2/(n-1)$, ποιες προτάσεις είναι σωστές;

    ☐ **α.** $\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$.

    ☐ **β.** $S^2 = \frac{n}{n-1} M_2$.

    ☐ **γ.** Η M_2 είναι αμερόληπτη για τη σ^2.

    ☐ **δ.** $\mathbb{E}(M_2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.

18. Αν $\mu_4 = \mathbb{E}[(X-\mu)^4] < \infty$, ποιες προτάσεις είναι σωστές για τη S^2;

    ☐ **α.** Για τον τύπο αρκεί μόνο η ύπαρξη της δεύτερης ροπής.

    ☐ **β.** $\mathbb{V}(S^2) = \dfrac{\mu_4}{n} - \dfrac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4$.

    ☐ **γ.** Στην κανονική περίπτωση ισχύει $\mathbb{V}(S^2) = \dfrac{2\sigma^4}{n-1}$.

    ☐ **δ.** Ο τύπος ισχύει μόνο για κανονική κατανομή.

19. Για τυχαίο δείγμα από $\mathrm{Unif}(0, \theta)$, θέτουμε $\widehat{\theta} = X_{(n)}$, $\widetilde{\theta} = (n+1)X_{(n)}/n$ και $\overline{\theta} = 2\overline{X}$. Ποιες προτάσεις είναι σωστές;

    ☐ **α.** Η $\widetilde{\theta}$ είναι αμερόληπτη.

    ☐ **β.** Η $\overline{\theta}$ είναι αμερόληπτη.

    ☐ **γ.** Η $\widehat{\theta}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ.

    ☐ **δ.** Η $\widehat{\theta}$ υποεκτιμά κατά μέσο όρο το θ.

20. Στο ομοιόμορφο μοντέλο της προηγούμενης ερώτησης, ποιες προτάσεις είναι σωστές;

    ☐ **α.** Επειδή η $\overline{\theta}$ είναι αμερόληπτη, έχει αναγκαστικά μικρότερο MSE από κάθε μεροληπτική εκτιμήτρια.

    ☐ **β.** $\mathrm{MSE}(\widehat{\theta}) = \dfrac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$.

    ☐ **γ.** $\mathrm{MSE}(\overline{\theta}) = \dfrac{\theta^2}{3n}$.

    ☐ **δ.** Για $n > 2$, η $\widehat{\theta}$ έχει μικρότερο MSE από την $\overline{\theta}$.