Ασκήσεις 4

Μέθοδος Δέλτα και μέγιστη πιθανοφάνεια

Εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά, οι $X_1, X_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad M'_{2,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

$$M_{2,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2, \qquad S_n^2 = \frac{n}{n-1}M_{2,n} \quad (n \geq 2).$$

Θέτουμε $S_n = \sqrt{S_n^2}$ και συμβολίζουμε το ελάχιστο και το μέγιστο του δείγματος με $X_{(1)}$ και $X_{(n)}$. Οι αντίστοιχες ποσότητες για παρατηρημένο δείγμα γράφονται με πεζά γράμματα, χωρίς δείκτη n όπου δεν χρειάζεται. Η Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $\mathcal{N}(0,1)$. Όλα τα όρια λαμβάνονται για $n \to \infty$, για κάθε σταθερή τιμή της παραμέτρου.

Μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα του Φύλλου 3. Οι Ασκήσεις 13–14 είναι προαιρετικές. Η Άσκηση 15 είναι συμπληρωματική και περιλαμβάνει τον ορισμό της κατανομής Student.

Α. Μέθοδος Δέλτα και ασυμπτωτικές κατανομές

Άσκηση 1. Εκτίμηση του ρυθμού μιας εκθετικής κατανομής

Έστω $X_1, X_2, \dots$ τυχαίο δείγμα με πυκνότητα

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad \theta > 0,$$

και $T_n = 1/\overline{X}_n$.

(α) Δείξτε ότι η T_n είναι ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια του θ.

(β) Με τη μέθοδο Δέλτα, βρείτε την οριακή κατανομή του $\sqrt{n}(T_n - \theta)$.

(γ) Θεωρούμε τις ποσότητες

$$A_n = \frac{\sqrt{n}(T_n - \theta)}{T_n}, \qquad B_n = \sqrt{n}\log\left(\frac{T_n}{\theta}\right).$$

Εκφράστε την A_n ως γραμμική συνάρτηση της $\overline{X}_n$ και βρείτε τις οριακές κατανομές των A_n, B_n. Δείξτε επιπλέον ότι $B_n - A_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Η ισότητα των δύο οριακών κατανομών, από μόνη της, δεν αρκεί για αυτό το συμπέρασμα.

Για σκέψη. Δείξτε ότι $B_n \geq A_n$ για κάθε δείγμα και βρείτε την οριακή κατανομή της $\sqrt{n}(B_n - A_n)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε

$$\lim_{u\to 1}\frac{u - 1 - \log u}{(u-1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 2. Η διασπορά στην Bernoulli και η περίπτωση $p = 1/2$

Έστω $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, $0 < p < 1$, και

$$\widehat{p}_n = \overline{X}_n, \qquad V_n = \widehat{p}_n(1 - \widehat{p}_n) = M_{2,n}.$$

(α) Για $p \neq 1/2$, βρείτε την οριακή κατανομή του $\sqrt{n}\big(V_n - p(1-p)\big)$.

(β) Για $p = 1/2$, βρείτε πρώτα το όριο του $\sqrt{n}(V_n - 1/4)$ και κατόπιν μια μη εκφυλισμένη οριακή κατανομή του $n(V_n - 1/4)$. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα

$$V_n - \frac{1}{4} = -\left(\widehat{p}_n - \frac{1}{2}\right)^2.$$

(γ) Για $p = 1/2$, βρείτε την οριακή κατανομή του $n(S_n^2 - 1/4)$. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το (β) και εντοπίστε τον όρο της διόρθωσης που παραμένει στην κλίμακα n.

Για σκέψη. Στο $p = 1/2$, συγκρίνετε τα ακριβή μέσα τετραγωνικά σφάλματα των V_n και S_n^2 για $n \geq 2$. Αλλάξει η προτίμηση με το μέγεθος του δείγματος; Στον επόμενο τύπο, σ^2 και μ_4 είναι η διασπορά και η τέταρτη κεντρική ροπή του X_1:

$$\mathbb{V}(S_n^2) = \frac{\mu_4}{n} - \frac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4.$$

Άσκηση 3. Εμπειρική και επαγόμενη εκτιμήτρια μιας πιθανότητας

Έστω $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα

$$q = \mathbb{P}_\lambda(X_1 = 0) = e^{-\lambda}.$$

Θεωρούμε

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i = 0\}}, \qquad R_n = e^{-\overline{X}_n}.$$

(α) Εξηγήστε πώς προκύπτει καθεμία από τις δύο εκτιμήτριες και δείξτε ότι είναι ισχυρά συνεπείς για το q.

(β) Βρείτε τις οριακές κατανομές των $\sqrt{n}(T_n - q)$ και $\sqrt{n}(R_n - q)$.

(γ) Συγκρίνετε τις διασπορές των δύο οριακών κατανομών για κάθε $\lambda > 0$.

(δ) Υπολογίστε ακριβώς την $\mathbb{E}_\lambda(R_n)$ και βρείτε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} n\big[\mathbb{E}_\lambda(R_n) - q\big].$$

Συγκρίνετε την τάξη της μεροληψίας με την κλίμακα του τυχαίου σφάλματος στο (β).

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι, για $Y \sim \text{Poisson}(a)$, ισχύει $\mathbb{E}(e^{tY}) = \exp\{a(e^t - 1)\}$.

Για σκέψη. Υποθέστε τώρα ότι γνωρίζουμε μόνο ότι οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, με μη αρνητικές ακέραιες τιμές και μέση τιμή 1. Κατασκευάστε μια κατανομή για την οποία οι T_n και R_n συγκλίνουν σχεδόν βέβαια σε διαφορετικά όρια. Ποια εξακολουθεί να εκτιμά συνεπώς την πιθανότητα του μηδενός;

Άσκηση 4. Δειγματική διασπορά χωρίς κανονικότητα

Έστω τυχαίο δείγμα με $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, $0 < \mathbb{V}(X_1) = \sigma^2 < \infty$ και

$$\mu_4 = \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^4] < \infty, \qquad \mu_4 > \sigma^4.$$

(α) Δείξτε ότι $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

(β) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$M_{2,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\overline{X}_n - \mu)^2,$$

βρείτε τις οριακές κατανομές των $\sqrt{n}(M_{2,n} - \sigma^2)$ και $\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2)$.

(γ) Εφαρμόστε τη μέθοδο Δέλτα για να βρείτε την οριακή κατανομή του $\sqrt{n}(S_n - \sigma)$.

(δ) Εφαρμόστε τα προηγούμενα σε δείγμα από $\mathrm{Unif}[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$. Βρείτε την οριακή κατανομή του $\sqrt{n}(\sqrt{3}\, S_n - \theta)$.

Αρκούν το μονοδιάστατο Κ.Ο.Θ. και το λήμμα Slutsky.

Για σκέψη. Ποιες κατανομές με $\sigma^2 > 0$ ικανοποιούν $\mu_4 = \sigma^4$; Για αυτές τις κατανομές βρείτε μη εκφυλισμένο όριο για το $n(M_{2,n} - \sigma^2)$ και συγκρίνετε με την Άσκηση 2.

Άσκηση 5. Ακριβής και ασυμπτωτική πιθανότητα σφάλματος

Έστω $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ και $n \geq 2$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα του Φύλλου 3:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}, \qquad \sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 2\sigma^4).$$

(α) Για $0 < r < 1$, εκφράστε την ακριβή πιθανότητα $\mathbb{P}_{\mu,\sigma^2}(|S_n^2 - \sigma^2| > r\sigma^2)$ μέσω της συνάρτησης κατανομής της χ^2_{n-1}.

(β) Δώστε την αντίστοιχη κανονική προσέγγιση για μεγάλο n.

(γ) Για $n = 100$, $\sigma^2 = 4$ και απόλυτο σφάλμα μεγαλύτερο από 1, υπολογίστε την ακριβή και την προσεγγιστική πιθανότητα. Δίνονται

$$F_{\chi^2_{99}}(74.25) \simeq 0.0298512, \quad F_{\chi^2_{99}}(123.75) \simeq 0.9532350,$$

$$\Phi\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right) \simeq 0.9614501.$$

(δ) Με βάση την κανονική προσέγγιση, βρείτε το ελάχιστο ακέραιο n ώστε η πιθανότητα

$$\mathbb{P}_{\mu,\sigma^2}(|S_n^2 - \sigma^2| > 0.2\sigma^2)$$

να είναι κατά προσέγγιση το πολύ 0.05. Δίνεται $\Phi(1.96) \simeq 0.975$.

Για σκέψη. Στο (γ), συγκρίνετε χωριστά τις δύο ουρές με την αντίστοιχη κανονική προσέγγιση. Πόσο απέχει η προσέγγιση σε καθεμία από αυτές; Εξηγεί η σύγκριση γιατί η συνολική πιθανότητα προσεγγίζεται πολύ καλύτερα;

Β. Μέγιστη πιθανοφάνεια

Άσκηση 6. Bernoulli με περιορισμένη παράμετρο

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από Bernoulli(p), $p \in [0,1]$, και $K_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(α) Γράψτε την πιθανοφάνεια του παρατηρημένου δείγματος $x = (x_1, \dots, x_n)$ και βρείτε την ε.μ.π. του p. Εξετάστε χωριστά τις περιπτώσεις $K_n = 0$, $K_n = n$ και $0 < K_n < n$.

(β) Αν καταγράφεται μόνο το άθροισμα $K_n = k$, γράψτε την πιθανοφάνεια από την κατανομή του K_n. Δίνει την ίδια ε.μ.π.;

(γ) Βρείτε την ε.μ.π. όταν ο παραμετρικός χώρος περιορίζεται στο $[1/4, 3/4]$.

(δ) Συγκρίνετε την ε.μ.π. με την εμπειρική εκτιμήτρια και με την εκτιμήτρια ροπών, τόσο στο αρχικό όσο και στο περιορισμένο μοντέλο.

Για σκέψη. Στο περιορισμένο μοντέλο, έστω $\widehat{p}_n^{\,c}$ η ε.μ.π. του (γ). Όταν η αληθινή παράμετρος είναι $p = 1/4$, βρείτε την οριακή κατανομή του $\sqrt{n}(\widehat{p}_n^{\,c} - 1/4)$. Έχει το όριο θετική πιθανότητα στο 0; Συγκρίνετε με την περίπτωση $1/4 < p < 3/4$.

Άσκηση 7. Εκθετική κατανομή: ρυθμός και μέση τιμή

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την πυκνότητα

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad \theta > 0,$$

με παρατηρημένες τιμές $x_i > 0$.

(α) Βρείτε την ε.μ.π. του ρυθμού θ και αιτιολογήστε ότι το μέγιστο είναι ολικό και μοναδικό.

(β) Γράψτε το ίδιο μοντέλο με παράμετρο τη μέση τιμή $m > 0$ και βρείτε την ε.μ.π. του m απευθείας από τη νέα λογαριθμοπιθανοφάνεια. Συγκρίνετε με τη μέθοδο ροπών.

(γ) Για $n \geq 2$, υπολογίστε τη μεροληψία της ε.μ.π. του θ και βρείτε μια πολλαπλασιαστική διόρθωση που την καθιστά αμερόληπτη. Η διορθωμένη εκτιμήτρια παραμένει ε.μ.π.;

(δ) Με βάση την Άσκηση 1, εξετάστε αν η διόρθωση του (γ) αλλάζει την οριακή κατανομή του κανονικοποιημένου σφάλματος στην κλίμακα $\sqrt{n}$.

Για το (γ), μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι $\sum_i X_i$ έχει πυκνότητα

$$h(s;\theta) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-\theta s} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(s).$$

Για σκέψη. Για $n \geq 3$, θεωρήστε την κλάση $c/\sum_i X_i$, όπου $c > 0$ μπορεί να εξαρτάται από το n, αλλά όχι από τα δεδομένα ή το θ. Ποια επιλογή του c ελαχιστοποιεί το ΜΤΣ για κάθε $\theta > 0$; Συμπίπτει με την ε.μ.π. ή με την αμερόληπτη διόρθωση;

Άσκηση 8. Κανονικό μοντέλο και διαδοχική μεγιστοποίηση

Έστω $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $n \geq 2$, και παρατηρημένο δείγμα με $\sum_i (x_i - \overline{x})^2 > 0$.

(α) Βρείτε την ε.μ.π. του $\mu \in \mathbb{R}$ όταν η διασπορά είναι γνωστή και ίση με $\sigma_0^2 > 0$.

(β) Βρείτε την ε.μ.π. της $\sigma^2 > 0$ όταν η μέση τιμή είναι γνωστή και ίση με μ_0.

(γ) Όταν και οι δύο παράμετροι είναι άγνωστες, βρείτε τις ε.μ.π. με διαδοχική μεγιστοποίηση της λογαριθμοπιθανοφάνειας, αξιοποιώντας τα (α) και (β). Εξετάστε και τις δύο σειρές μεγιστοποίησης.

(δ) Συγκρίνετε την ε.μ.π. της διασποράς στο (γ) με την S_n^2 και υπολογίστε τη μεροληψία της. Γιατί η αμερόληπτη διόρθωσή της δεν είναι ε.μ.π.;

Για σκέψη. Στο μοντέλο με δύο άγνωστες παραμέτρους, υπολογίστε τη διαφορά

$$\ell_x(\bar{x}, m_2) - \ell_x(\bar{x}, s^2), \qquad m_2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2.$$

Εξαρτάται από το δείγμα; Βρείτε το όριο του λόγου $L_x(\bar{x}, s^2)/L_x(\bar{x}, m_2)$ καθώς $n \to \infty$.

Άσκηση 9. Κανονική κατανομή με μη αρνητική μέση τιμή

Έστω $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, με

$$(\mu, \sigma^2) \in [0, \infty) \times (0, \infty), \qquad n \geq 2.$$

Θεωρήστε παρατηρημένο δείγμα με $\sum_i (x_i - \overline{x})^2 > 0$.

(α) Για κάθε σταθερό σ^2, βρείτε την τιμή του $\mu \geq 0$ που μεγιστοποιεί τη λογαριθμοπιθανοφάνεια.

(β) Συνεχίστε τη μεγιστοποίηση ως προς σ^2 και βρείτε το ζεύγος των ε.μ.π. Γράψτε το αποτέλεσμα χωριστά για $\overline{x} \geq 0$ και $\overline{x} < 0$.

(γ) Εφαρμόστε το αποτέλεσμα στο δείγμα $(-2, 0, 1)$ και συγκρίνετε με τις εκτιμήσεις στο μοντέλο χωρίς τον περιορισμό $\mu \geq 0$.

Για σκέψη. Όταν $\mu = 0$, βρείτε την ακριβή κατανομή της

$$\frac{n(\widehat{\sigma^2}_n - M_{2,n})}{\sigma^2}.$$

Εξετάστε αν ο περιορισμός $\mu \geq 0$ μεταβάλλει την οριακή κατανομή του $\sqrt{n}(\widehat{\sigma^2}_n - \sigma^2)$.

Άσκηση 10. Ομοιόμορφες κατανομές με άγνωστο άκρο

Για καθένα από τα επόμενα μοντέλα, γράψτε την πιθανοφάνεια, προσδιορίστε τις τιμές του θ για τις οποίες είναι θετική και βρείτε την ε.μ.π. του θ:

(α) $X_i \sim \text{Unif}[0, \theta]$, $\theta > 0$.

(β) $X_i \sim \text{Unif}[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$.

(γ) $X_i \sim \text{Unif}[-\theta, \theta^2]$, $\theta > 0$.

(δ) Στα μοντέλα (α) και (β), συγκρίνετε τις ε.μ.π. με τις εκτιμήτριες ροπών που προκύπτουν, αντίστοιχα, από την πρώτη και τη δεύτερη μη κεντρική ροπή.

Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρήστε $\max_i |x_i| > 0$ και στο (α) επιπλέον $x_i \geq 0$. Χρησιμοποιήστε πυκνότητες θετικές και στα δύο άκρα του αντίστοιχου κλειστού διαστήματος.

Για σκέψη. Στο μοντέλο $\text{Unif}[0, \theta]$ προσθέτουμε m νέες παρατηρήσεις, όλες το πολύ ίσες με το παλιό μέγιστο $x_{(n)}$. Η ε.μ.π. μένει ίδια. Για δύο τιμές $\theta_2 > \theta_1 \geq x_{(n)}$, πώς αλλάζει ο λόγος των πιθανοφανειών στις τιμές θ_2 και θ_1; Τι δείχνει αυτό για δύο δείγματα που δίνουν την ίδια σημειακή εκτίμηση;

Άσκηση 11. Ομοιόμορφη κατανομή θέσης και μη μοναδική ε.μ.π.

Έστω $X_i \sim \text{Unif}[\theta, \theta + 1]$, $\theta \in \mathbb{R}$, με πυκνότητα $f(x; \theta) = \mathbf{1}_{[\theta, \theta+1]}(x)$. Θεωρήστε παρατηρημένο δείγμα με $x_{(n)} - x_{(1)} < 1$.

(α) Βρείτε όλες τις τιμές του θ που μεγιστοποιούν την πιθανοφάνεια. Δώστε τρεις διαφορετικές επιλογές ε.μ.π. ως συναρτήσεις του δείγματος.

(β) Η εκτιμήτρια ροπών είναι $\overline{X}_n - 1/2$. Είναι πάντοτε ε.μ.π.; Εξετάστε το $n = 2$ και το δείγμα $(0, 0, 0.9)$ για $n = 3$.

(γ) Δείξτε ότι κάθε εκτιμήτρια που επιλέγει μια τιμή από το διάστημα των μεγιστοποιητών είναι ισχυρά συνεπής για το θ.

Για σκέψη. Για $0 \leq c \leq 1$ θεωρήστε τις ε.μ.π.

$$A_{n,c} = cX_{(1)} + (1 - c)(X_{(n)} - 1).$$

Ποια είναι αμερόληπτη; Ποια ελαχιστοποιεί το ΜΤΣ μέσα σε αυτή την κλάση για κάθε θ; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε

$$\mathbb{E}X_{(1)} = \theta + \frac{1}{n+1}, \qquad \mathbb{E}X_{(n)} = \theta + \frac{n}{n+1},$$

$$\mathbb{V}(X_{(1)}) = \mathbb{V}(X_{(n)}) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}, \qquad \text{Cov}(X_{(1)}, X_{(n)}) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Άσκηση 12. Ομοιόμορφη κατανομή με δύο άγνωστα άκρα

Έστω $X_i \sim \text{Unif}[a, b]$, με

$$f(x; a, b) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x), \qquad a < b,$$

και $n \geq 2$. Θεωρήστε παρατηρημένο δείγμα με $x_{(1)} < x_{(n)}$.

(α) Βρείτε την ε.μ.π. του b όταν το a είναι γνωστό και την ε.μ.π. του a όταν το b είναι γνωστό. Σε κάθε περίπτωση θεωρήστε ότι το δείγμα είναι συμβατό με το γνωστό άκρο.

(β) Βρείτε τις ε.μ.π. των a, b όταν και τα δύο είναι άγνωστα. Χρησιμοποιήστε διαδοχική μεγιστοποίηση, διατηρώντας τους περιορισμούς που επιβάλλει το δείγμα.

(γ) Βρείτε τις εκτιμήτριες ροπών των a, b. Το εκτιμώμενο διάστημα περιέχει υποχρεωτικά όλες τις παρατηρήσεις; Εξετάστε το δείγμα $(0, 0, 0, 0, 1)$.

(δ) Δίνονται

$$\mathbb{E}(X_{(1)}) = a + \frac{b-a}{n+1}, \qquad \mathbb{E}(X_{(n)}) = b - \frac{b-a}{n+1}.$$

Βρείτε τη μεροληψία κάθε ε.μ.π. και κατασκευάστε αμερόληπτες εκτιμήτριες των a, b ως γραμμικούς συνδυασμούς των $X_{(1)}, X_{(n)}$.

(ε) Συγκρίνετε την πιθανοφάνεια στο διορθωμένο ζεύγος του (δ) με τη μέγιστη πιθανοφάνεια.

Για σκέψη. Βρείτε το όριο του λόγου πιθανοφανειών του (ε). Συγκρίνετε με την Άσκηση 8. Μπορεί η απόσταση δύο συνεπών εκτιμητριών να τείνει στο 0, αλλά ο λόγος των πιθανοφανειών τους να μην τείνει στο 1;

Γ. Προαιρετικές ασκήσεις

Άσκηση 13. Διαδοχική μεγιστοποίηση σε μη καρτεσιανό σύνολο

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y) = -\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$$

στο σύνολο $D = \{(x,y) : 0 \le x \le y \le 1\}$.

(α) Για κάθε σταθερό $y \in [0,1]$, βρείτε τον μεγιστοποιητή $x^*(y)$ στο $[0,y]$. Μεγιστοποιήστε έπειτα την $f(x^*(y),y)$ και βρείτε το ολικό μέγιστο της f στο D.

(β) Επαναλάβετε με αντίστροφη σειρά, μεγιστοποιώντας πρώτα ως προς $y \in [x,1]$ για κάθε σταθερό $x \in [0,1]$. Συμβολίστε την πρώτη λύση με $y^*(x)$.

(γ) Μια διαδικασία αντικαθιστά εναλλάξ το x με $x^*(y)$ και το y με $y^*(x)$. Βρείτε όλα τα ζεύγη του D στα οποία και οι δύο αντικαταστάσεις αφήνουν το ζεύγος αμετάβλητο. Ποια από αυτά μεγιστοποιούν την f στο D;

Για σκέψη. Για $t \in [1/4, 3/4]$ με $t \neq 1/2$, βρείτε μια κοινή μεταβολή $(t,t) \mapsto (t+h, t+h)$ που αυξάνει την f και παραμένει στο D. Πώς συμβιβάζεται αυτό με το ότι καμία από τις δύο μεμονωμένες μεγιστοποιήσεις δεν μετακινεί το (t,t);

Άσκηση 14. Μοναδικό στάσιμο σημείο: τοπικό και ολικό μέγιστο

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y) = -x^2 - (1-x)^3 y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(α) Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι το μοναδικό στάσιμο σημείο της f.

(β) Υπολογίστε τον Εσσιανό στο $(0,0)$ και δείξτε ότι το σημείο αυτό είναι γνήσιο τοπικό μέγιστο. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι ένας αρνητικά ορισμένος Εσσιανός σε στάσιμο σημείο μιας C^2 συνάρτησης εξασφαλίζει γνήσιο τοπικό μέγιστο.

(γ) Εξετάζοντας την $f(2,y)$, δείξτε ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη. Τι δεν εξασφαλίζει ο έλεγχος του (β), ακόμη και μαζί με το (α);

(δ) Έστω $\varphi : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη σε ανοικτό διάστημα I, με μοναδικό στάσιμο σημείο x_0 που είναι τοπικό μέγιστο. Αποδείξτε ότι είναι μοναδικό ολικό μέγιστο, χωρίς να υποθέσετε συνέχεια της φ'.

Για το (δ), χρησιμοποιήστε το θεώρημα Rolle και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Για σκέψη. Θέστε $\psi(t) = f(t,t)$, δηλαδή περιορίστε την f στην ευθεία $x = y$. Χωρίς να λύσετε κυβική εξίσωση, δείξτε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός c με $1 < c < 2$ τέτοιος ώστε $\psi'(c) = 0$. Γιατί το αντίστοιχο σημείο (c,c) του επιπέδου δεν είναι στάσιμο σημείο της f;

Δ. Συμπληρωματική άσκηση: κατανομή Student

Άσκηση 15. Student: ο παρονομαστής αλλάζει την ακριβή κατανομή

Έστω $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$ και $n \geq 2$. Δίνονται

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad Q_n = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1},$$

και η ανεξαρτησία των Z_n, Q_n. Υπενθυμίζεται ότι, αν $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ και $Q \sim \chi^2_\nu$, με $\nu > 0$, είναι ανεξάρτητες, τότε $Z/\sqrt{Q/\nu}$ έχει κατανομή Student t_ν.

(α) Βρείτε τις ακριβείς κατανομές των

$$T_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{S_n}, \qquad R_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sqrt{M_{2,n}}}.$$

Ποιος μη τυχαίος συντελεστής μετατρέπει την R_n σε μεταβλητή με κατανομή t_{n-1};

(β) Θέτουμε

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, \qquad U_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sqrt{V_n}}.$$

Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $nV_n = (n-1)S_n^2 + n(\overline{X}_n - \mu)^2$ για να εκφράσετε την U_n ως συνάρτηση της T_n. Προσδιορίστε το στήριγμα της κατανομής της U_n και εξετάστε αν έχει κατανομή Student, παρότι $nV_n/\sigma^2 \sim \chi^2_n$.

(γ) Δείξτε ότι οι T_n, R_n, U_n συγκλίνουν κατά κατανομή στην $\mathcal{N}(0,1)$. Διακρίνετε αυτό το κοινό οριακό αποτέλεσμα από τις ακριβείς κατανομές στα (α)–(β).

Οι λόγοι ορίζονται με πιθανότητα 1.

Για σκέψη. Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της U_n χωρίς να υπολογίσετε την πυκνότητά της. Συγκρίνετε με τη διασπορά της T_n για $n > 3$. Για την πρώτη ποσότητα χρησιμοποιήστε τη συμμετρία των ανεξάρτητων $(X_i - \mu)/\sigma$ ως προς αλλαγή προσήμου μίας συντεταγμένης. Για τη δεύτερη μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι $\mathbb{E}(Q^{-1}) = 1/(\nu-2)$ όταν $Q \sim \chi^2_\nu$ και $\nu > 2$.

Σχετική μελέτη. Σ. Τρέβεζας, *Διαλέξεις Μαθηματικής Στατιστικής 2020–2021*, σ. 58–68, 73–88, 97–99 και 107. G. Casella και R. L. Berger, *Στατιστική Συμπερασματολογία*, ελληνική μετάφραση της 2ης έκδοσης, §§5.3.2, 5.5.3–5.5.4 και 7.2.2.