Λύσεις ασκήσεων Εβδομάδας 2

Διαλέξεις 4–6: ροπές, εκτιμήτριες και οικογένειες θέσης–κλίμακας

Χρησιμοποιούμε $M_k = n^{-1}\sum_i (X_i - \overline{X})^k$, $S^2 = nM_2/(n-1)$, $\lambda = \mu_3/\sigma^3$, $\kappa = \mu_4/\sigma^4$ και $\kappa' = \kappa - 3$, με τις υποθέσεις ύπαρξης που δηλώνονται στις ασκήσεις. Στην $\mathrm{Unif}[0,\theta]$,

$$\widehat{\theta} = X_{(n)}, \qquad \widetilde{\theta} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}, \qquad \overline{\theta} = 2\overline{X}.$$

Α. Μέθοδος των ροπών και αξιολόγηση εκτιμητριών

Λύση της Άσκησης 1. Ποια ροπή δίνει πληροφορία;

(α) Από τη συμμετρία $\mathbb{E}_\theta(X_1) = 0$. Η πρώτη εξίσωση είναι $0 = \overline{X}$. Δεν περιέχει το θ: αν ισχύει, δεν το προσδιορίζει, ενώ αν δεν ισχύει, δεν έχει λύση ως προς θ. Δεν την επιβάλλουμε ως πρόσθετο περιορισμό όταν επιλέγουμε άλλη ροπή.

Υπολογίζουμε

$$\mathbb{E}_\theta(X_1^2) = \frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} x^2\,dx = \frac{\theta^2}{3}.$$

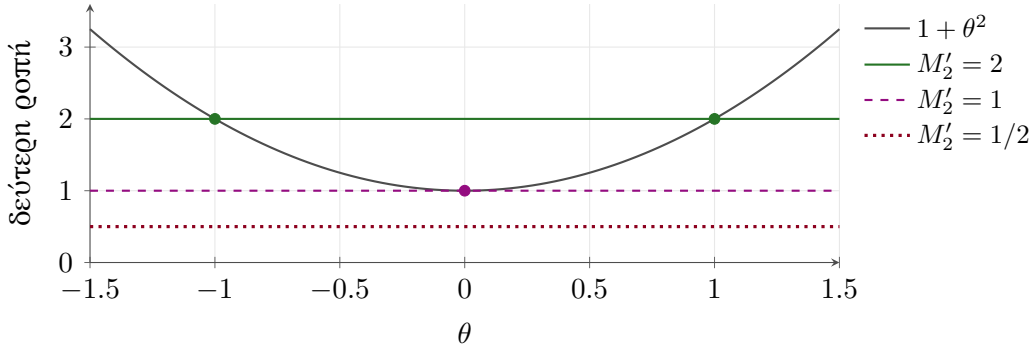
Η εξίσωση $\theta^2/3 = M_2'$ δίνει

$$\overline{\theta} = \sqrt{3M_2'}.$$

Η θετική ρίζα επιλέγεται επειδή $\theta > 0$. Για $M_2' > 0$ η λύση είναι μοναδική στον παραμετρικό χώρο. Η περίπτωση $M_2' = 0$ απαιτεί όλες τις παρατηρήσεις να είναι μηδέν και έχει πιθανότητα 0 στο μοντέλο. Για πλήρη ορισμό με τιμές στο $(0,\infty)$ μπορούμε να θέσουμε $\overline{\theta} = 1$ σε αυτό το μηδενικής πιθανότητας ενδεχόμενο.

(β) Εδώ $\mathbb{E}_\theta(X_1^2) = 1 + \theta^2$, άρα η εξίσωση είναι $\theta^2 = M_2' - 1$. Αν $M_2' > 1$, έχει δύο λύσεις $\pm\sqrt{M_2' - 1}$. Αν $M_2' = 1$, έχει μία λύση, τη 0. Αν $M_2' < 1$, δεν έχει πραγματική λύση. Η δεύτερη ροπή δεν διακρίνει το θ από το $-\theta$.

(γ) Η πρώτη ροπή είναι $\mathbb{E}_\theta(X_1) = \theta$, οπότε δίνει $\overline{\theta} = \overline{X}$. Η μέθοδος με την πρώτη ροπή δεν απαιτεί να ικανοποιούνται και άλλες, μη επιλεγμένες, εξισώσεις. Για παράδειγμα, στο δείγμα $(0, 2)$ η πρώτη δίνει $\overline{\theta} = 1$ και τυχαίνει να ικανοποιείται και η δεύτερη, ενώ στο $(0, 1)$ η πρώτη δίνει $1/2$ και η δεύτερη δεν έχει λύση. Η ύπαρξη παραμέτρου δεν εξασφαλίζει την ακριβή ταύτιση όλων των δειγματικών ροπών με τις θεωρητικές.



Σχήμα 1. Τομές της θεωρητικής δεύτερης ροπής με τρεις δυνατές δειγματικές τιμές: δύο, μία ή καμία λύση.

Για σκέψη. Οι δύο ρίζες δεν είναι απλώς αλγεβρική δυσκολία: η επιλεγμένη ροπή δίνει την ίδια πληροφορία για δύο διαφορετικές παραμέτρους. Ποια πρόσθετη ροπή ή ποιος περιορισμός στο πρόσημο της παραμέτρου θα τις ξεχώριζε;

Λύση της Άσκησης 2. Κανονικό μοντέλο με μία ή δύο άγνωστες παραμέτρους

(α) Η πρώτη εξίσωση είναι $\mu = \overline{X}$, άρα $\widehat{\mu} = \overline{X}$.

(β) Οι δύο εξισώσεις δίνουν

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2, \qquad U = M_2' - \mu_0^2.$$

Αναπτύσσοντας το τετράγωνο,

$$T = M_2' - 2\mu_0\overline{X} + \mu_0^2, \qquad U - T = 2\mu_0(\overline{X} - \mu_0).$$

Δεν είναι ο ίδιος κανόνας γενικά. Συμπίπτουν όταν $\mu_0 = 0$, καθώς και σε συγκεκριμένα δείγματα με $\overline{X} = \mu_0$.

Από τις πληθυσμιακές ταυτότητες,

$$\mathbb{E}(T) = \sigma^2, \qquad \mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mu_0^2 = \sigma^2.$$

Άρα οι δύο στατιστικές συναρτήσεις έχουν την ίδια σωστή μέση τιμή. Ωστόσο, η U δεν λαμβάνει πάντοτε επιτρεπτές εκτιμήσεις διασποράς. Για $\mu_0 = 2$ και $x = (0, 1)$,

$$U(x) = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2}, \qquad T(x) = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Όταν $\mu_0 \neq 0$, κάθε παρατήρηση μπορεί να βρεθεί κοντά στο 0 με θετική πιθανότητα, οπότε και η $U < 0$ έχει θετική πιθανότητα. Η αμεροληψία ως ισότητα μέσων τιμών δεν αναιρεί αυτό το πρόβλημα του εύρους τιμών.

(γ) Από $M_2' = M_2 + \overline{X}^2$, το πρώτο σύστημα δίνει

$$\widehat{\mu} = \overline{X}, \qquad \widehat{\sigma^2} = M_2.$$

Αυτό είναι ακριβώς το δεύτερο σύστημα. Η ισοδυναμία χρησιμοποιεί και την εξίσωση της πρώτης ροπής, όχι μόνο την ταυτότητα των δεύτερων ροπών. Αν $M_2 = 0$, η λύση έχει $\sigma^2 = 0$ και δεν ανήκει στο $\Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Το ενδεχόμενο αυτό έχει πιθανότητα 0 για κανονικό δείγμα με $n \geq 2$. Μπορούμε να ορίσουμε τη στατιστική συνάρτηση ίση με οποιαδήποτε σταθερή θετική τιμή σε αυτό το ενδεχόμενο, χωρίς αλλαγή της κατανομής ή των ροπών της. Η συμπλήρωση αυτή δεν είναι λύση του συστήματος για το εξαιρετικό δείγμα.

(δ) Θέτουμε $Y_i = X_i - \mu_0$. Τότε $\mathbb{E}(Y_i) = 0$, $\mathbb{E}(Y_i^2) = \sigma^2$, $\mathbb{E}(Y_i^3) = 0$ και $\mathbb{E}(Y_i^4) = 3\sigma^4$. Έτσι

$$\mathbb{V}(Y_i^2) = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4, \qquad \mathrm{Cov}(Y_i^2, Y_i) = \mathbb{E}(Y_i^3) = 0.$$

Επομένως

$$\mathbb{V}(T) = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

Επειδή $U = n^{-1}\sum_i (Y_i^2 + 2\mu_0 Y_i)$, η ανεξαρτησία και η μηδενική συνδιακύμανση δίνουν

$$\mathbb{V}(U) = \frac{2\sigma^4 + 4\mu_0^2\sigma^2}{n} \geq \mathbb{V}(T),$$

με ισότητα ακριβώς όταν $\mu_0 = 0$.

Για σκέψη. Όταν η μ_0 είναι γνωστή, η T μετρά αποκλίσεις από το πραγματικό κέντρο. Αν την αντικαταστήσουμε με τον $\overline{X}$, παίρνουμε το M_2. Εξηγήστε τη διόρθωση μεροληψίας μέσα από την ταυτότητα

$$\frac{1}{n}\sum_i (X_i-\mu_0)^2 = M_2 + (\overline{X}-\mu_0)^2.$$

Πόση είναι κατά μέσο όρο η ποσότητα που αφαιρέθηκε;

Λύση της Άσκησης 3. Διωνυμική με άγνωστα N και p

(α) Το σύστημα είναι

$$Np = \overline{X}, \qquad Np(1-p) = M_2.$$

Όταν $0 < M_2 < \overline{X}$, διαιρούμε τη δεύτερη εξίσωση με την πρώτη:

$$\widetilde{p} = 1 - \frac{M_2}{\overline{X}}, \qquad \widetilde{N} = \frac{\overline{X}^2}{\overline{X} - M_2}.$$

Οι ανισότητες δίνουν $0 < \widetilde{p} < 1$ και $\widetilde{N} > 0$. Αν $\overline{X} = 0$, όλα τα δεδομένα είναι μηδέν και η πρώτη εξίσωση δεν έχει λύση στο δηλωμένο Θ. Αν $M_2 = 0 < \overline{X}$, προκύπτει $p = 1$, επίσης εκτός του Θ. Αν $M_2 \geq \overline{X} > 0$, δεν υπάρχει λύση με πεπερασμένο $N > 0$ και $0 < p < 1$.

(β) Η $\widetilde{N}$ μπορεί να μην είναι ακέραια. Επιπλέον, ακόμη και μια ακέραια τιμή πρέπει να μην υπολείπεται του παρατηρημένου μέγιστου, αλλιώς κάποια παρατήρηση είναι αδύνατη υπό την προτεινόμενη κατανομή.

Ο δοσμένος κανόνας εξασφαλίζει ακέραιο $\widehat{N} \geq X_{(n)}$. Επειδή το δείγμα είναι μη σταθερό, $0 < \overline{X} < X_{(n)}$, άρα $0 < \widehat{p} < 1$. Διατηρείται η πρώτη εξίσωση:

$$\widehat{N}\widehat{p} = \overline{X}.$$

Η δεύτερη γενικά δεν διατηρείται. Πρόκειται για συγκεκριμένη διόρθωση της αρχικής λύσης, όχι για ακριβή επίλυση και των δύο εξισώσεων στον ακέραιο παραμετρικό χώρο.

(γ) Για το A,

$$\overline{x} = \frac{5}{2}, \quad m_2 = \frac{11}{12}, \quad \widetilde{p} = \frac{19}{30}, \quad \widetilde{N} = \frac{75}{19}.$$

Άρα $\widehat{N} = 4$ και $\widehat{p} = 5/8$. Η προτεινόμενη διασπορά είναι $4(5/8)(3/8) = 15/16$, διαφορετική από $11/12$.

Για το B, $\overline{x} = 1$ και $m_2 = 5$. Δεν υπάρχει αποδεκτή λύση: οι τυπικές αλγεβρικές εκφράσεις δίνουν $\widetilde{p} = -4$ και $\widetilde{N} = -1/4$. Η στρογγυλοποίηση δεν διορθώνει αυτό το πρόβλημα.

Για το C, $\overline{x} = m_2 = 0$. Η εξίσωση $Np = 0$ είναι αδύνατη στο Θ. Αν διευρύναμε το μοντέλο επιτρέποντας $p = 0$, κάθε $N \geq 1$ μαζί με $p = 0$ θα έλυνε το σύστημα, χωρίς προσδιορισμό του N.

Για το D,

$$\overline{x} = \frac{33}{10}, \quad m_2 = \frac{81}{100}, \quad \widetilde{p} = \frac{83}{110}, \quad \widetilde{N} = \frac{363}{83} \simeq 4.3735.$$

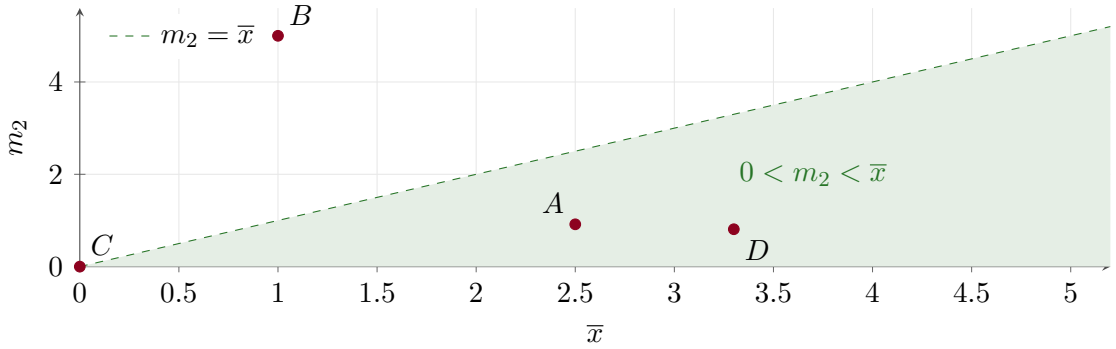
Η απλή στρογγυλοποίηση δίνει 4, ενώ έχει παρατηρηθεί η τιμή 6. Με τον κανόνα του (β),

$$\widehat{N} = 6, \qquad \widehat{p} = \frac{11}{20}.$$

(δ) Υπό $N = 6$, η πιθανότητα του συγκεκριμένου διατεταγμένου δείγματος B είναι

$$\mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_5 = 0, X_6 = 6) = (1-p)^{30}p^6 > 0.$$

Άρα η αποτυχία μιας εμπειρικής σχέσης σε ένα πεπερασμένο δείγμα δεν αποδεικνύει από μόνη της ότι το μοντέλο είναι λανθασμένο. Απαιτείται διάκριση της δειγματικής μεταβλητότητας από την καταλληλότητα της υπόθεσης κατανομής.



Σχήμα 2. Η σκιασμένη περιοχή επιτρέπει λύση με πραγματικό $N > 0$ και $0 < p < 1$. Δεν ελέγχει ούτε την ακεραιότητα του N ούτε το παρατηρημένο μέγιστο.

Για σκέψη. Πώς θα διακρίναμε μια ασυνήθιστη δειγματική απόκλιση από ένα συστηματικό πρόβλημα του μοντέλου; Μια πρώτη διερεύνηση είναι να παράγουμε πολλά δείγματα *του ίδιου μεγέθους* από μια συγκεκριμένη διωνυμική και να καταγράψουμε πόσο συχνά αποτυγχάνει η ανισότητα $M_2 < \overline{X}$. Δεν αρκεί μόνο το αν αποτυγχάνει σε ένα δείγμα.

Λύση της Άσκησης 4. Εκτιμήτριες του άγνωστου άκρου

(α) Η $\overline{\theta}$ προκύπτει από την εξίσωση ροπής $\theta/2 = \overline{X}$. Επειδή $\mathbb{V}_\theta(X_1) = \theta^2/12$,

$$\mathbb{E}_\theta(\overline{\theta}) = \theta, \qquad \mathbb{V}_\theta(\overline{\theta}) = 4\frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

Η $\overline{\theta}$ είναι αμερόληπτη, άρα το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της είναι η διασπορά της.

(β) Για $0 \le u \le \theta$, η ανεξαρτησία δίνει

$$\mathbb{P}_\theta(\widehat{\theta} \le u) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(X_i \le u) = \left(\frac{u}{\theta}\right)^n.$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι 0 για $u < 0$ και 1 για $u > \theta$. Μια πυκνότητα είναι

$$f_{\widehat{\theta}}(u) = \frac{nu^{n-1}}{\theta^n}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(u).$$

Για $r > 0$,

$$\mathbb{E}_\theta(\widehat{\theta}^r) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta u^{n+r-1}\,du = \frac{n}{n+r}\theta^r.$$

Άρα $\mathbb{E}_\theta(\widehat{\theta}) = n\theta/(n+1)$ και $\mathbb{E}_\theta(\widehat{\theta^2}) = n\theta^2/(n+2)$.

(γ) Από $\mathrm{MSE}_A = \mathbb{V}_\theta(A) + b_A^2(\theta)$ προκύπτει

Εκτιμήτρια	Μεροληψία	Διασπορά	Μέσο τετραγωνικό σφάλμα
$\overline{\theta}$	0	$\dfrac{\theta^2}{3n}$	$\dfrac{\theta^2}{3n}$
$\widehat{\theta}$	$-\dfrac{\theta}{n+1}$	$\dfrac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$	$\dfrac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$
$\widetilde{\theta}$	0	$\dfrac{\theta^2}{n(n+2)}$	$\dfrac{\theta^2}{n(n+2)}$

Ειδικότερα, η $\widetilde{\theta}$ είναι η διόρθωση της $\widehat{\theta}$ που αποκαθιστά την αμεροληψία.

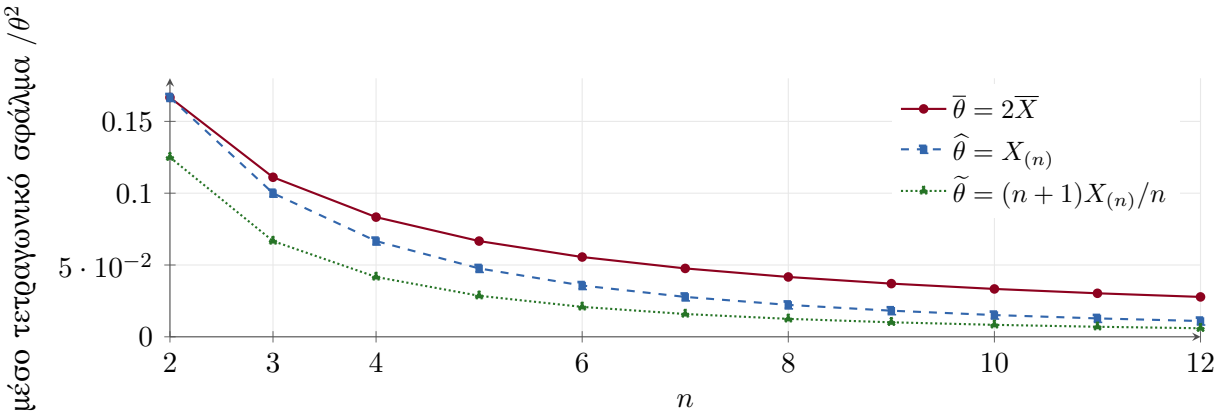
(δ) Η διαφορά μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης είναι

$$\mathrm{MSE}_{\overline{\theta}}(\theta) - \mathrm{MSE}_{\widehat{\theta}}(\theta) = \frac{(n-1)(n-2)\theta^2}{3n(n+1)(n+2)}.$$

Άρα η $\widehat{\theta}$ είναι αυστηρά καλύτερη για $n \geq 3$, ενώ για $n = 1, 2$ υπάρχει ισότητα. Επιπλέον,

$$\frac{\mathrm{MSE}_{\widetilde{\theta}}(\theta)}{\mathrm{MSE}_{\widehat{\theta}}(\theta)} = \frac{n+1}{2n}, \qquad \frac{\mathrm{MSE}_{\widetilde{\theta}}(\theta)}{\mathrm{MSE}_{\overline{\theta}}(\theta)} = \frac{3}{n+2}.$$

Για $n \geq 2$ και οι δύο λόγοι είναι μικρότεροι του 1, άρα η $\widetilde{\theta}$ είναι αυστηρά καλύτερη από τις άλλες δύο. Για $n = 1$, οι τρεις έχουν το ίδιο μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Η σύγκριση της μεροληψίας μόνης της δεν αρκεί για σύγκριση του συνολικού σφάλματος.



Σχήμα 3. Ακριβής σύγκριση για $n = 2, \ldots, 12$. Η αμεροληψία από μόνη της δεν καθορίζει την κατάταξη. Οι γραμμές ενώνουν τις ακέραιες τιμές του n.

Για σκέψη. Η $\widetilde{\theta}$ είναι η καλύτερη από τις τρεις με βάση το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Είναι όμως η καλύτερη ανάμεσα σε *όλες* τις πολλαπλάσιες του μεγίστου; Εξετάστε τις $c\widehat{\theta}$, $c > 0$, χρησιμοποιώντας τις $\mathbb{E}_\theta(\widehat{\theta})$ και $\mathbb{E}_\theta(\widehat{\theta}^2)$ που ήδη βρήκατε. Επιτρέπεται ο καλύτερος κανόνας να είναι μεροληπτικός.

Β. Κεντρικές ροπές, λοξότητα και κύρτωση

Λύση της Άσκησης 5. Από τις μη κεντρικές στις κεντρικές ροπές

(α) Αναπτύσσουμε τις δυνάμεις του $X_1 - \mu$ και χρησιμοποιούμε $\mathbb{E}(X_1) = \mu$:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_2' - \mu^2, \\ \mu_3 &= \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3, \\ \mu_4 &= \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, στην τρίτη κεντρική ροπή η ανάπτυξη δίνει $\mu_3' - 3\mu\mu_2' + 3\mu^2\mu - \mu^3$, δηλαδή τον παραπάνω τύπο.

(β) Οι ίδιες αλγεβρικές πράξεις, με μέσο όρο ως προς τις παρατηρήσεις, δίνουν

$$\begin{aligned} M_2 &= M_2' - \overline{X}^{\,2}, \\ M_3 &= M_3' - 3\overline{X}M_2' + 2\overline{X}^{\,3}, \\ M_4 &= M_4' - 4\overline{X}M_3' + 6\overline{X}^{\,2}M_2' - 3\overline{X}^{\,4}. \end{aligned}$$

Επίσης, $M_1 = n^{-1}\sum_i X_i - \overline{X} = 0$. Οι δειγματικές ταυτότητες δεν απαιτούν υποθέσεις ύπαρξης πληθυσμιακών ροπών.

(γ) Ο μέσος είναι 3 και οι αποκλίσεις $(-2, -1, -1, 0, 1, 3)$. Άρα

$$m_2 = \frac{4+1+1+0+1+9}{6} = \frac{8}{3}, \quad m_3 = \frac{-8-1-1+0+1+27}{6} = 3,$$

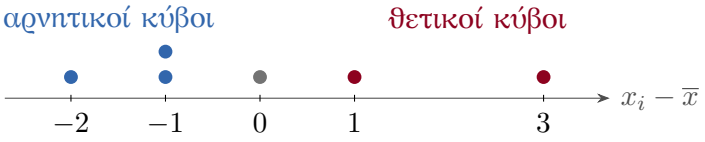
$$m_4 = \frac{16+1+1+0+1+81}{6} = \frac{50}{3}.$$

Επομένως

$$\widehat{\lambda}(x) = \frac{3}{(8/3)^{3/2}} = \frac{9\sqrt{6}}{32}, \qquad \widehat{\kappa}(x) = \frac{50/3}{(8/3)^2} = \frac{75}{32}, \qquad \widehat{\kappa}'(x) = -\frac{21}{32}.$$

Έχουμε θετική δειγματική λοξότητα και αρνητική δειγματική πλεονάζουσα κύρτωση. Δεν υπάρχει αντίφαση: οι δύο συντελεστές μετρούν διαφορετικά χαρακτηριστικά.

(δ) Υπολογίστηκαν χαρακτηριστικά της εμπειρικής κατανομής, όχι οι ακριβείς τιμές της άγνωστης κατανομής. Οι μ_k, λ, κ είναι σταθερές για δεδομένο πληθυσμό, όταν ορίζονται. Οι $M_k, \widehat{\lambda}, \widehat{\kappa}$ είναι συναρτήσεις του τυχαίου δείγματος και μπορεί να αλλάξουν από δείγμα σε δείγμα, ακόμη και με ίδιο n.



Σχήμα 4. Οι τρίτες δυνάμεις διατηρούν το πρόσημο. Οι τέταρτες δυνάμεις δίνουν θετική συνεισφορά και στις δύο πλευρές του μέσου.

Για σκέψη. Αν αντικαταστήσουμε μόνο την τιμή 6 από έναν ολοένα μεγαλύτερο αριθμό b, ποιες από τις $m_2, m_3, m_4, \widehat{\lambda}, \widehat{\kappa}$ θα αυξάνονται απεριόριστα; Το πλήθος των παρατηρήσεων παραμένει έξι. Προσέξτε ότι στους δύο λόγους μεταβάλλεται και ο παρονομαστής.

Λύση της Άσκησης 6. Κεντροποίηση, τυποποίηση και αλλαγή μονάδας

(α) Έχουμε $\mathbb{E}(Y) = \alpha + \beta\mu$ και

$$Y - \mathbb{E}(Y) = \beta(X - \mu).$$

Συνεπώς

$$\mathbb{V}(Y) = \beta^2\sigma^2, \qquad \mu_3(Y) = \beta^3\mu_3(X), \qquad \mu_4(Y) = \beta^4\mu_4(X).$$

Η τυπική απόκλιση της Y είναι $|\beta|\sigma$, όχι $\beta\sigma$ όταν $\beta < 0$.

(β) Άρα

$$\lambda_Y = \frac{\beta^3}{|\beta|^3}\lambda_X, \qquad \kappa_Y = \kappa_X, \qquad \kappa'_Y = \kappa'_X.$$

Η θετική αλλαγή κλίμακας και η μετατόπιση δεν μεταβάλλουν τους συντελεστές. Η ανάκλαση ($\beta < 0$) αλλάζει μόνο το πρόσημο της λοξότητας. Οι ίδιες ακριβώς ταυτότητες ισχύουν για τις εμπειρικές εκδοχές σε δεδομένα $y_i = \alpha + \beta x_i$.

(γ) Οι τρεις περιπτώσεις είναι

Μεταβλητή	Μέση τιμή	Διασπορά
$X - \mu$	0	σ^2
X/σ	μ/σ	1
$(X - \mu)/\sigma$	0	1

Η κεντροποίηση αφαιρεί τη μέση τιμή. Η τυποποίηση με βάση τις ροπές περιλαμβάνει και κεντροποίηση και διαίρεση με την τυπική απόκλιση.

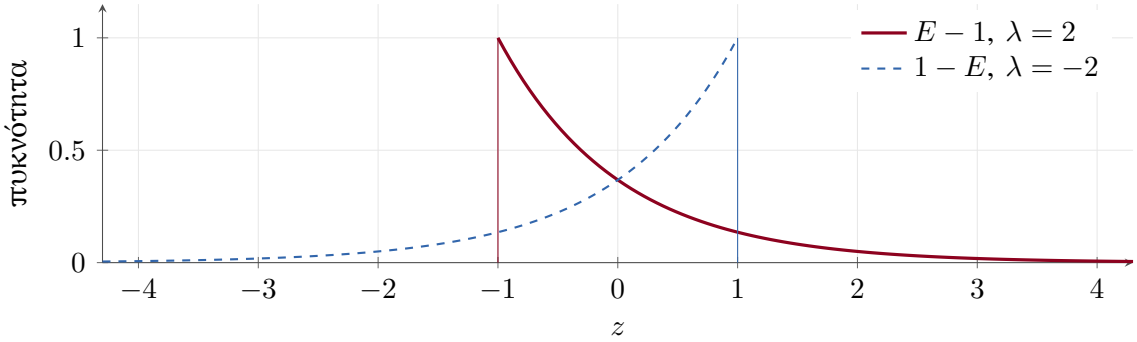
(δ) Από $\sum_i (x_i - \overline{x}) = 0$,

$$\overline{z} = 0, \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \frac{m_2}{m_2} = 1.$$

Αν $w_i = (x_i - \overline{x})/s$, τότε $\overline{w} = 0$, αλλά

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \frac{m_2}{s^2} = \frac{n-1}{n}.$$

Στη δεύτερη περίπτωση η διασπορά με παρονομαστή $n - 1$, όχι με παρονομαστή n, ισούται με 1.



Σχήμα 5. Ανάκλαση δύο κατανομών με μέση τιμή 0 και διασπορά 1, όπου E είναι εκθετική με μέση τιμή 1. Η λοξότητα αλλάζει πρόσημο, η κύρτωση όχι.

Για σκέψη. Οι τυποποιημένες δειγματικές τιμές έχουν μέσο 0 και εμπειρική διασπορά 1. Έγιναν γι' αυτό κανονικές; Μπορούν οι αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές να παραμένουν ανεξάρτητες, αφού το άθροισμά τους είναι υποχρεωτικά 0; Η τυποποίηση δεν συνεπάγεται κανονική κατανομή ούτε αίρει τους περιορισμούς που εισάγει ο κοινός δειγματικός μέσος.

Λύση της Άσκησης 7. Λοξότητα και κύρτωση σε τέσσερις κατανομές

(α) Για την ομοιόμορφη, η συμμετρία δίνει $\mathbb{E}(U) = \mu_3(U) = 0$, ενώ

$$\mu_2(U) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} u^2\,du = \frac{a^2}{3}, \qquad \mu_4(U) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} u^4\,du = \frac{a^4}{5}.$$

Άρα $\lambda_U = 0$, $\kappa_U = 9/5$ και $\kappa'_U = -6/5$.

Για την τυπική κανονική, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 0$ και $\mu_4 = 3$. Άρα $\lambda_Z = 0$, $\kappa_Z = 3$ και $\kappa'_Z = 0$.

Για την εκθετική, οι τέσσερις μη κεντρικές ροπές είναι $1, 2, 6, 24$. Με τις ταυτότητες της Άσκησης 5,

$$\mu_2(E) = 2 - 1 = 1, \quad \mu_3(E) = 6 - 3\cdot 2 + 2 = 2, \quad \mu_4(E) = 24 - 4\cdot 6 + 6\cdot 2 - 3 = 9.$$

Άρα $\lambda_E = 2$, $\kappa_E = 9$ και $\kappa'_E = 6$.

Η L έχει συμμετρική πυκνότητα και όλες τις απόλυτες ροπές που χρειαζόμαστε. Επομένως $\mathbb{E}(L) = \mu_3(L) = 0$ και

$$\mu_2(L) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx = 2, \qquad \mu_4(L) = \int_0^{\infty} x^4 e^{-x}\,dx = 24.$$

Άρα $\lambda_L = 0$, $\kappa_L = 24/2^2 = 6$ και $\kappa'_L = 3$.

Κατανομή	λ	κ	κ'
Unif$[-a, a]$	0	$9/5$	$-6/5$
$N(0,1)$	0	3	0
Εκθετική με μέση τιμή 1	2	9	6
$f_L(x) = \frac{1}{2}e^{-\lvert x\rvert}$	0	6	3

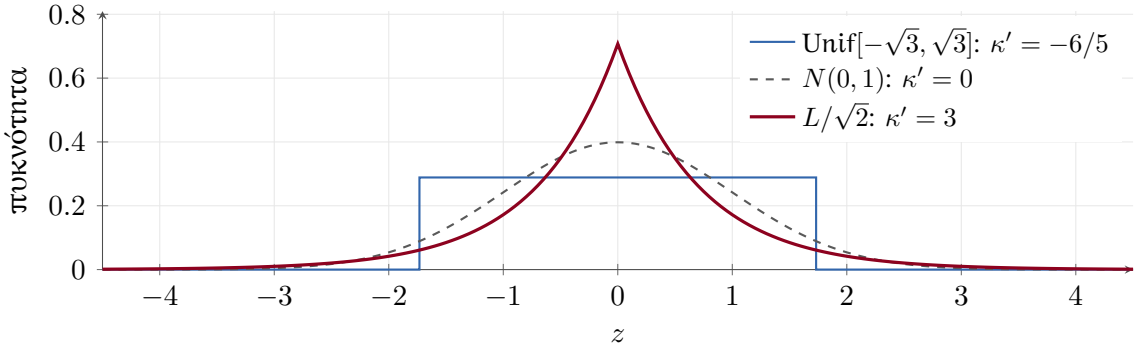
(β) Η ομοιόμορφη είναι πλατύκυρτη, η κανονική μεσόκυρτη και οι E, L λεπτόκυρτες. Η L, γνωστή ως διπλή εκθετική ή Laplace, είναι συμμετρική με θετική πλεονάζουσα κύρτωση. Έτσι η θετική πλεονάζουσα κύρτωση δεν προϋποθέτει λοξότητα.

(γ) Από την Άσκηση 6, $\lambda_{-E} = -2$, $\kappa_{-E} = 9$ και $\kappa'_{-E} = 6$. Η ανάκλαση μεταφέρει τη μακριά ουρά από τα δεξιά στα αριστερά χωρίς να μεταβάλλει την κύρτωση.

(δ) Θέτοντας $a = \Delta/2$,

$$\mathbb{V}(Q) = \frac{\Delta^2}{12}, \qquad \kappa'_Q = -\frac{6}{5}.$$

Η ομοιόμορφη κατανομή είναι πρόσθετη υπόθεση για τις πιθανότητες μέσα στο διάστημα. Δεν προκύπτει μόνο από το φράγμα του σφάλματος. Επίσης αφορά το σφάλμα στρογγυλοποίησης, όχι αυτομάτως το συνολικό σφάλμα μέτρησης του οργάνου.



Σχήμα 6. Τρεις συμμετρικές κατανομές με ίδια μέση τιμή 0 και ίδια διασπορά 1. Η κύρτωση περιγράφει διαφορές που δεν αποτυπώνονται στις δύο πρώτες ροπές.

Για σκέψη. Στο Σχήμα οι τρεις κατανομές έχουν ίδιες δύο πρώτες ροπές. Αν πάρουμε δείγματα ίδιου μεγέθους, περιμένουμε ίδια ακρίβεια για την εκτίμηση της μέσης τιμής και για την εκτίμηση της διασποράς; Η Άσκηση 11 θα δώσει έναν ακριβή τρόπο να απαντήσουμε.

Λύση της Άσκησης 8. Συμμετρία και ύπαρξη ροπών

(α) Έχουμε

$$\mathbb{E}(X^+) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\log(1+A^2) = +\infty.$$

Λόγω συμμετρίας, το ίδιο ισχύει για την $\mathbb{E}(X^-)$. Η προσδοκία ορίζεται ως η διαφορά των προσδοκιών του θετικού και του αρνητικού μέρους, όταν αυτή η διαφορά έχει νόημα. Εδώ θα απαιτούσε αφαίρεση $+\infty - (+\infty)$, που δεν ορίζεται. Άρα η $\mathbb{E}(X)$ δεν έχει ούτε πεπερασμένη ούτε εκτεταμένη πραγματική τιμή.

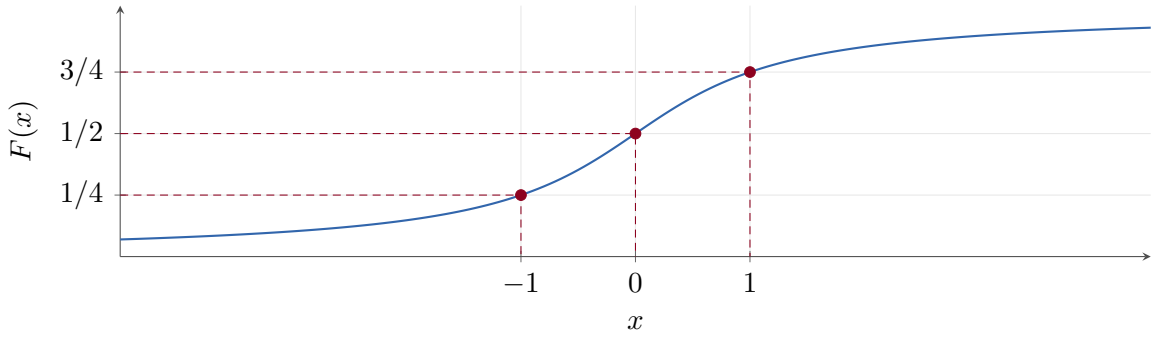
(β) Η $xf(x)$ είναι περιττή και το ολοκλήρωμα σε κάθε συμμετρικό πεπερασμένο διάστημα είναι 0. Το όριο των συμμετρικών ολοκληρωμάτων λέγεται κύρια τιμή Cauchy. Δεν είναι η προσδοκία: η τελευταία δεν επιτρέπει να ακυρώνουμε δύο άπειρα μέρη μέσω συγκεκριμένου τρόπου αποκοπής των ουρών.

(γ) Για $x \geq 1$, $x^2/(1+x^2) \geq 1/2$. Επομένως

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = +\infty.$$

Για $x \geq 1$ ισχύει επίσης $x^4 \geq x^2$, άρα $\mathbb{E}(X^4) = +\infty$. Δεν υπάρχει μέση τιμή μ για να χρησιμοποιηθεί στους ορισμούς των κεντρικών ροπών, ούτε πεπερασμένη θετική διασπορά για την τυποποίηση. Συνεπώς οι λ, κ, κ' του φύλλου δεν ορίζονται. Η συμμετρία και οι βαριές ουρές παραμένουν ιδιότητες της κατανομής, αλλά εδώ δεν περιγράφονται από αυτούς τους συντελεστές ροπών.

(δ) Κάθε πεπερασμένο σύνολο πραγματικών παρατηρήσεων έχει πεπερασμένες δειγματικές ροπές. Αν $M_2 > 0$, οι αντίστοιχοι λόγοι υπολογίζονται. Αυτό είναι ιδιότητα της εμπειρικής κατανομής και δεν δημιουργεί πληθυσμιακό χαρακτηριστικό εκεί όπου δεν υπάρχει. Στην περίπτωση αυτή δεν ερμηνεύουμε τον υπολογισμένο λόγο ως εκτίμηση μιας ορισμένης πληθυσμιακής κύρτωσης της Cauchy.



Σχήμα 7. Η συνάρτηση κατανομής της Cauchy τέμνει τα επίπεδα $1/4$, $1/2$, $3/4$ σε πεπερασμένα σημεία. Τα ποσοστημόρια δεν απαιτούν ύπαρξη ροπών.

Για σκέψη. Η απουσία ροπών δεν σημαίνει ότι δεν μπορούμε να περιγράψουμε θέση, μεταβλητότητα, ασυμμετρία και ουρές. Θέστε $q_u = F^{-}(u)$ για $0 < u < 1$.

(α) Ποιο ποσοστημόριο δίνει μια διάμεσο; Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως κέντρο αντί της μέσης τιμής;

(β) Τι μετρά το $q_{3/4} - q_{1/4}$; Πώς μεταβάλλεται αν αλλάξουμε μονάδα μέτρησης;

(γ) Συγκρίνετε τα $q_{3/4} - q_{1/2}$ και $q_{1/2} - q_{1/4}$. Πώς θα κατασκευάζατε από αυτά έναν αδιάστατο συντελεστή ασυμμετρίας;

(δ) Για να συγκρίνετε πιο εξωτερικές με κεντρικές αποστάσεις, διερευνήστε τον λόγο

$$R_Q = \frac{q_{9/10} - q_{1/10}}{q_{3/4} - q_{1/4}}, \qquad q_{3/4} > q_{1/4}.$$

Χρειάζεται κάποια ροπή για τον ορισμό του;

Υπόδειξη. Για την τυπική Cauchy, $F(x) = \frac{1}{2} + \pi^{-1}\arctan x$. Ο λόγος R_Q συγκρίνει αποστάσεις ποσοστημορίων και είναι διαφορετικό χαρακτηριστικό από την κ.

Λύση της Άσκησης 9. Τι δεν συνεπάγονται οι συντελεστές

(α) Με άμεσο υπολογισμό,

$$\mathbb{E}(A) = -2\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + 3\frac{1}{10} = 0, \qquad \mathbb{E}(A^3) = -8\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + 27\frac{1}{10} = 0.$$

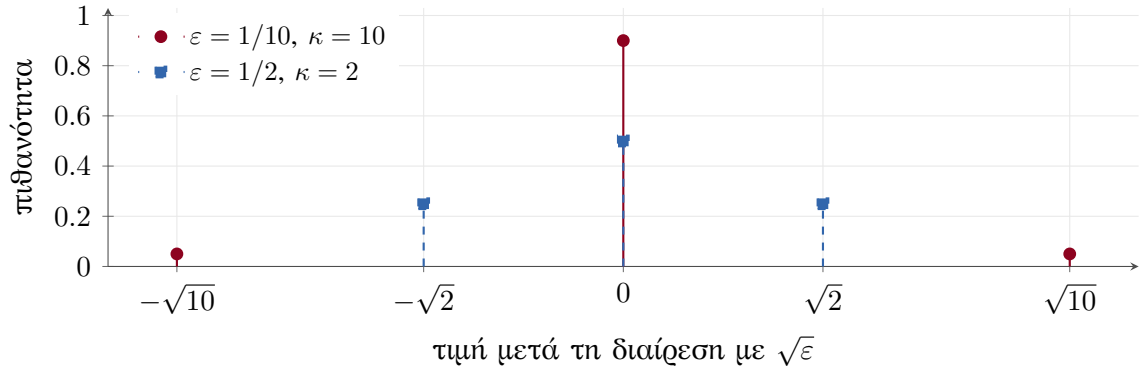
Επίσης $\mathbb{V}(A) = \mathbb{E}(A^2) = 4(2/5)+1/2+9/10 = 3 > 0$. Άρα $\mu_3(A) = 0$ και $\lambda_A = 0$. Η κατανομή δεν είναι συμμετρική ως προς τη μέση τιμή της: για παράδειγμα $\mathbb{P}(A = -2) = 2/5$, ενώ $\mathbb{P}(A = 2) = 0$. Δεν μπορεί να είναι συμμετρική ως προς άλλο κέντρο, αφού μια συμμετρική κατανομή με πεπερασμένη μέση τιμή έχει μέση τιμή το κέντρο συμμετρίας της.

(β) Η συμμετρία δίνει $\mathbb{E}(B) = \mu_3(B) = 0$, ενώ $\mu_2(B) = \varepsilon$ και $\mu_4(B) = \varepsilon$. Συνεπώς

$$\lambda_B = 0, \qquad \kappa_B = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \kappa'_B = \frac{1}{\varepsilon} - 3.$$

Η πλεονάζουσα κύρτωση είναι θετική για $0 < \varepsilon < 1/3$, μηδενική για $\varepsilon = 1/3$ και αρνητική για $\varepsilon > 1/3$. Παρότι $|B| \le 1$, η κύρτωση μπορεί να είναι όσο μεγάλη θέλουμε. Η σύγκριση αφορά αποκλίσεις σε μονάδες της *ίδιας* τυπικής απόκλισης, εδώ $\sqrt{\varepsilon}$, όχι μόνο το απόλυτο μέγεθος του στηρίγματος.

(γ) Για $\varepsilon = 1/3$, $\lambda_B = 0$ και $\kappa_B = 3$. Η κατανομή παραμένει διακριτή, με πιθανότητα $2/3$ στο 0, και δεν είναι μη εκφυλισμένη κανονική. Άρα οι δύο αυτοί συντελεστές δεν προσδιορίζουν την κατανομή.



Σχήμα 8. Οι δύο μεταβλητές $B/\sqrt{\varepsilon}$ έχουν διασπορά 1. Η μικρή πιθανότητα στις εξωτερικές τιμές μπορεί να συνυπάρχει με μεγάλη κύρτωση.

Για σκέψη. Για $\varepsilon = 1/3$, πολλαπλασιάστε την B με $\sqrt{3}$. Ποιες είναι τώρα οι τέσσερις πρώτες ροπές; Συγκρίνετέ τες με της $N(0,1)$. Η συμφωνία ενός πεπερασμένου πλήθους ροπών αρκεί για να ταυτίσει δύο κατανομές;

Γ. Δειγματική διασπορά και μέσο τετραγωνικό σφάλμα

Λύση της Άσκησης 10. Το λήμμα των διαφορών ανά ζεύγη

(α) Οι όροι $i = j$ είναι μηδενικοί. Θέτοντας $a_i = x_i - \overline{x}$, έχουμε $\sum_i a_i = 0$ και

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j}(x_i - x_j)^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}(a_i - a_j)^2 \\ &= n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + n\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) \\ &= 2n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.\end{aligned}$$

Κάθε μη διατεταγμένο ζεύγος εμφανίζεται δύο φορές στο πρώτο άθροισμα. Άρα

$$\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

(β) Με γραμμικότητα και, για τη διασπορά, ανεξαρτησία,

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu, \qquad \mathbb{V}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

(γ) Από το λήμμα,

$$M_2 = \frac{1}{2n^2}\sum_{i\neq j}(X_i - X_j)^2.$$

Για $i \neq j$, $\mathbb{E}(X_i - X_j) = 0$ και

$$\mathbb{E}[(X_i - X_j)^2] = \mathbb{V}(X_i - X_j) = 2\sigma^2.$$

Υπάρχουν $n(n-1)$ διατεταγμένα ζεύγη, επομένως

$$\mathbb{E}(M_2) = \frac{n(n-1)\,2\sigma^2}{2n^2} = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Άρα

$$\mathbb{E}(S^2) = \frac{n}{n-1}\mathbb{E}(M_2) = \sigma^2.$$

(δ) Δεν απαιτήθηκε κανονικότητα ούτε τέταρτη ροπή. Η πεπερασμένη δεύτερη ροπή αρκεί για τις παραπάνω σχέσεις. Η τέταρτη ροπή θα χρησιμοποιηθεί όταν υπολογίσουμε τη *διασπορά* του S^2.

Για σκέψη. Οι διαφορές $X_i - X_j$ δεν αλλάζουν αν ένα όργανο προσθέτει σε κάθε μέτρηση την ίδια σταθερά. Τι πληροφορία κρατάμε και τι χάνουμε αν διαθέτουμε μόνο αυτές τις διαφορές; Μπορούμε να ανακτήσουμε τη δειγματική διασπορά; Τον δειγματικό μέσο;

Λύση της Άσκησης 11. Η διασπορά των M_2 και S^2

(α) Έχουμε $X_i - X_j = Y_i - Y_j$ και $X_i - \overline{X} = Y_i - \overline{Y}$. Άρα οι D_{ij}, M_2, S^2 δεν αλλάζουν με την κοινή μετατόπιση. Οι Y_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $\mathbb{E}(Y_i) = 0$, $\mathbb{E}(Y_i^2) = \sigma^2$ και $\mathbb{E}(Y_i^4) = \mu_4$.

(β) Κατ' αρχάς $\mathbb{E}(D_{12}) = 2\sigma^2$. Στην ανάπτυξη

$$(Y_1 - Y_2)^4 = Y_1^4 - 4Y_1^3Y_2 + 6Y_1^2Y_2^2 - 4Y_1Y_2^3 + Y_2^4,$$

οι όροι με μία πρώτη δύναμη ανεξάρτητης κεντροποιημένης μεταβλητής έχουν μέση τιμή 0. Έτσι

$$\mathbb{E}(D_{12}^2) = 2\mu_4 + 6\sigma^4, \qquad \mathbb{V}(D_{12}) = 2\mu_4 + 6\sigma^4 - 4\sigma^4 = 2(\mu_4 + \sigma^4).$$

Για τη συνδιακύμανση αναπτύσσουμε

$$(Y_1^2 - 2Y_1Y_2 + Y_2^2)(Y_1^2 - 2Y_1Y_3 + Y_3^2).$$

Με λήψη μέσης τιμής μένουν μόνο οι όροι Y_1^4, $Y_1^2Y_3^2$, $Y_1^2Y_2^2$ και $Y_2^2Y_3^2$. Επομένως

$$\mathbb{E}(D_{12}D_{13}) = \mu_4 + 3\sigma^4,$$

και αφαιρώντας $\mathbb{E}(D_{12})\mathbb{E}(D_{13}) = 4\sigma^4$ παίρνουμε

$$\operatorname{Cov}(D_{12}, D_{13}) = \mu_4 - \sigma^4.$$

Οι υπολογισμοί αυτοί δεν προϋποθέτουν μηδενική τρίτη κεντρική ροπή: οι αντίστοιχοι όροι μηδενίζονται λόγω της πρώτης ροπής του άλλου ανεξάρτητου παράγοντα.

(γ) Γράφουμε

$$\mathbb{V}(H) = \sum_{i \neq j} \sum_{k \neq l} \operatorname{Cov}(D_{ij}, D_{kl}).$$

Για κάθε σταθερό διατεταγμένο ζεύγος (i, j) υπάρχουν:

(α) Δύο ζεύγη (k, l) με τους ίδιους δύο δείκτες, δηλαδή (i, j) και (j, i). Και στις δύο περιπτώσεις $D_{kl} = D_{ij}$, άρα η συνεισφορά είναι $\mathbb{V}(D_{12})$.

(β) $4(n-2)$ ζεύγη με ακριβώς έναν κοινό δείκτη: επιλέγουμε ποιος από τους i, j είναι κοινός, τη θέση του στο νέο διατεταγμένο ζεύγος και έναν από τους $n-2$ υπόλοιπους δείκτες. Κάθε συνδιακύμανση ισούται με $\operatorname{Cov}(D_{12}, D_{13})$.

(γ) $(n-2)(n-3)$ ζεύγη χωρίς κοινό δείκτη, για $n \geq 3$. Οι δύο διαφορές είναι τότε συναρτήσεις ξένων ομάδων ανεξάρτητων παρατηρήσεων και έχουν συνδιακύμανση 0.

Για $n \geq 3$, συνεπώς,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(H) &= 2n(n-1)\mathbb{V}(D_{12}) + 4n(n-1)(n-2)\operatorname{Cov}(D_{12}, D_{13}) \\ &= 4n(n-1)\big((n-1)\mu_4 - (n-3)\sigma^4\big). \end{aligned}$$

(δ) Από το λήμμα,

$$M_2 = \frac{H}{2n^2}, \qquad S^2 = \frac{H}{2n(n-1)}.$$

Διαιρώντας τη διασπορά του H με τα τετράγωνα των αντίστοιχων παρονομαστών,

$$\boxed{\mathbb{V}(S^2) = \frac{\mu_4}{n} - \frac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4}$$

και

$$\boxed{\mathbb{V}(M_2) = \frac{(n-1)^2}{n^3}\mu_4 - \frac{(n-1)(n-3)}{n^3}\sigma^4.}$$

Για $n = 2$ έχουμε $H = 2D_{12}$, $S^2 = D_{12}/2$ και $M_2 = D_{12}/4$. Άρα

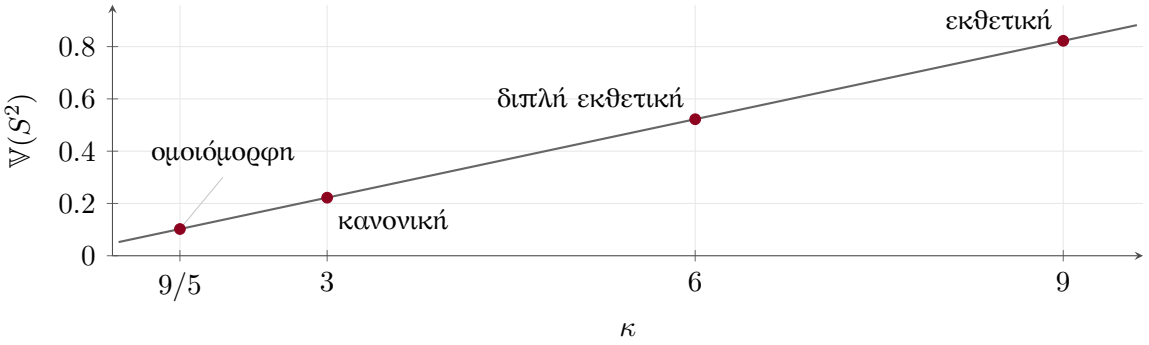
$$\mathbb{V}(S^2) = \frac{\mu_4 + \sigma^4}{2}, \qquad \mathbb{V}(M_2) = \frac{\mu_4 + \sigma^4}{8},$$

όπως δίνουν και οι γενικοί τύποι. Δεν χρειάζονται δείκτες 3 ή 4 για αυτή την περίπτωση.

(ε) Για $\sigma^2 > 0$, $\mu_4 = \kappa\sigma^4$, επομένως

$$\mathbb{V}(S^2) = \frac{\sigma^4}{n}\left(\kappa - \frac{n-3}{n-1}\right).$$

Για δεδομένη διασπορά του πληθυσμού και δεδομένο μέγεθος δείγματος, μεγαλύτερη κύρτωση σημαίνει μεγαλύτερη διασπορά της S^2. Έτσι η τέταρτη ροπή έχει άμεση σημασία για την ακρίβεια εκτίμησης της δεύτερης κεντρικής ροπής.



Σχήμα 9. Για $n = 10$ και πληθυσμιακή διασπορά $\sigma^2 = 1$, η διασπορά της S^2 αυξάνεται με την κύρτωση. Όλες οι τιμές είναι θεωρητικές.

Για σκέψη. Η δεύτερη ροπή αρκεί για την αμεροληψία της S^2, αλλά η τέταρτη εμφανίζεται στη διασπορά της. Γιατί είναι διαφορετικές απαιτήσεις; Γενικότερα, αν εκτιμούμε μια r-οστή μη κεντρική ροπή με μέσο όρο, ποια ροπή χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε τη διασπορά της εκτιμήτριας; Συνδέστε το ερώτημα με την Άσκηση 2 της 1ης εβδομάδας.

Λύση της Άσκησης 12. Αμεροληψία ή μικρότερο συνολικό σφάλμα;

(α) Έχουμε $Q = (n-1)S^2$ και $\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$. Από την Άσκηση 11,

$$\mathbb{V}(S^2) = \frac{3\sigma^4}{n} - \frac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4 = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

Συνεπώς

$$\mathbb{E}(Q) = (n-1)\sigma^2, \qquad \mathbb{V}(Q) = 2(n-1)\sigma^4.$$

(β) Άρα

$$b_{A_d} = \left(\frac{n-1}{d} - 1\right)\sigma^2, \qquad \mathbb{V}(A_d) = \frac{2(n-1)}{d^2}\sigma^4,$$

και

$$\mathrm{MSE}(A_d) = \frac{2(n-1) + (n-1-d)^2}{d^2}\sigma^4.$$

(γ) Παίρνουμε

d	Εκτιμήτρια	Μεροληψία	Μέσο τετραγωνικό σφάλμα
$n-1$	S^2	0	$\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$
n	M_2	$-\dfrac{\sigma^2}{n}$	$\dfrac{(2n-1)\sigma^4}{n^2}$
$n+1$	$Q/(n+1)$	$-\dfrac{2\sigma^2}{n+1}$	$\dfrac{2\sigma^4}{n+1}$

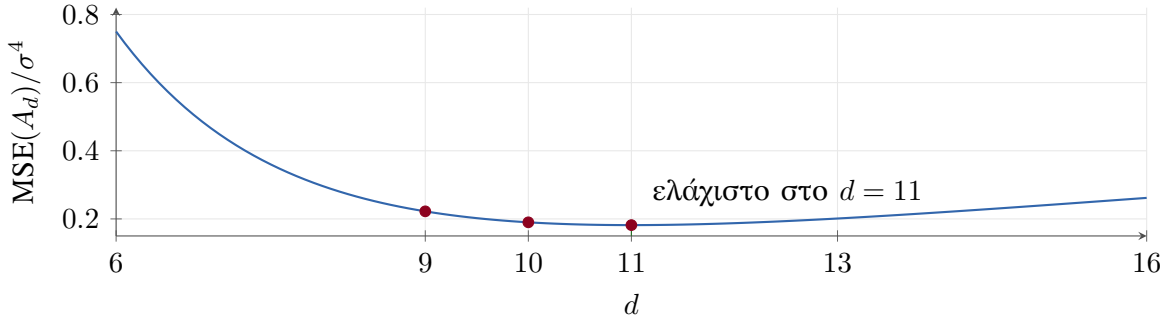
Για $n \geq 2$ η τελευταία έχει το μικρότερο και η S^2 το μεγαλύτερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα από τις τρεις. Πράγματι,

$$\frac{2n-1}{n^2} - \frac{2}{n+1} = \frac{n-1}{n^2(n+1)} > 0, \qquad \frac{2}{n-1} - \frac{2n-1}{n^2} = \frac{3n-1}{n^2(n-1)} > 0.$$

(δ) Συμπληρώνοντας τετράγωνο ως προς $1/d$,

$$\frac{\mathrm{MSE}(A_d)}{\sigma^4} = (n-1)(n+1)\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{2}{n+1}.$$

Το ελάχιστο επιτυγχάνεται μοναδικά για $d = n+1$. Η απόδειξη αφορά μόνο την κλάση $\{Q/d : d > 0\}$ στο κανονικό μοντέλο. Δεν είναι σύγκριση με κάθε δυνατή εκτιμήτρια και δεν ισχύει αυτούσια για κάθε κατανομή.



Σχήμα 10. Στο κανονικό μοντέλο με $n = 10$, ο παρονομαστής 11 ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μέσα στην κλάση Q/d.

Για σκέψη. Αν δεν υποθέσουμε κανονικότητα, παραμένει ο παρονομαστής $n+1$ ο καλύτερος μέσα στην ίδια κλάση; Ξανακάντε τη συμπλήρωση τετραγώνου χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο της Άσκησης 11. Ποιο άγνωστο χαρακτηριστικό της κατανομής θα εμφανιστεί στην επιλογή του παρονομαστή;

Δ. Οικογένειες θέσης–κλίμακας

Λύση της Άσκησης 13. Το μέλος αναφοράς δεν είναι πάντοτε τυποποιημένο

(α) Επειδή $\beta > 0$,

$$F(x;\alpha,\beta) = \mathbb{P}(\alpha + \beta Z \le x) = F\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

Με αλλαγή μεταβλητής προκύπτει μια πυκνότητα

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta} f\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

Ο παράγοντας $1/\beta$ εξασφαλίζει ότι το ολοκλήρωμα παραμένει 1. Με τη σύμβαση $S_f = \{z : f(z) > 0\}$,

$$S_{f(\cdot;\alpha,\beta)} = \alpha + \beta S_f = \{\alpha + \beta z : z \in S_f\}.$$

Η οικογένεια μπορεί να έχει παραμετροεξαρτώμενο στήριγμα.

(β) Για $\beta = 1$, οι πυκνότητες $f(x-\alpha)$ αποτελούν οικογένεια θέσης. Για $\alpha = 0$, οι πυκνότητες $\beta^{-1} f(x/\beta)$ αποτελούν οικογένεια κλίμακας.

(γ) Από τις ιδιότητες της μέσης τιμής και της διασποράς,

$$\mu = \alpha + \beta m_0, \qquad \sigma^2 = \beta^2 v_0.$$

Για να ισχύουν ταυτόχρονα $\mu = \alpha$ και $\sigma = \beta$ απαιτείται $m_0 = 0$ και $v_0 = 1$. Δεν προκύπτει αυτή η απαίτηση από τον ορισμό της οικογένειας.

(δ) Η αναγωγή στο μέλος αναφοράς είναι

$$\frac{X-\alpha}{\beta} = Z \sim K.$$

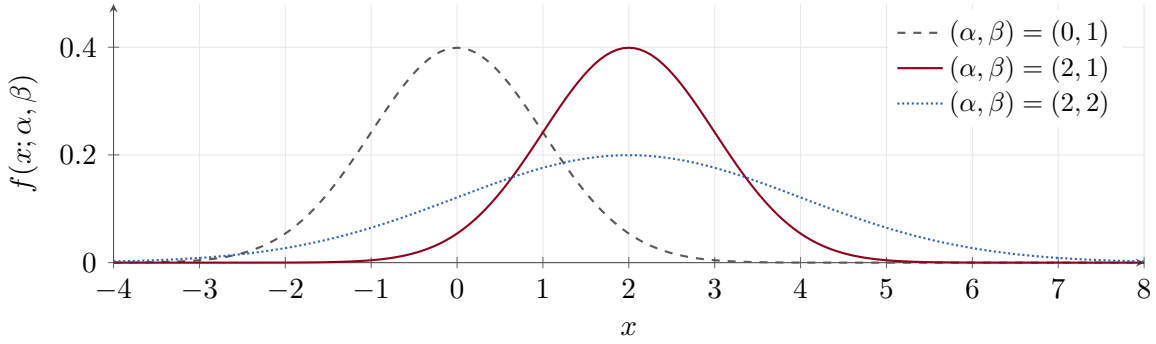
Όταν υπάρχουν οι απαιτούμενες ροπές, η τυποποίηση με μέση τιμή και τυπική απόκλιση είναι

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{Z-m_0}{\sqrt{v_0}}.$$

Για $Z \sim N(0,1)$ οι δύο μεταβλητές συμπίπτουν. Για εκθετική Z με μέση τιμή 1, έχουμε $m_0 = v_0 = 1$, άρα η αναγωγή δίνει Z, ενώ η τυποποίηση δίνει $Z - 1$. Εδώ $\mu = \alpha + \beta$ και $\sigma = \beta$.

Για μέλος αναφοράς Cauchy, ο μετασχηματισμός $X = \alpha + \beta Z$ και η αντίστροφη αναγωγή ορίζονται κανονικά, αλλά η τυποποίηση μέσω μέσης τιμής και διασποράς δεν ορίζεται. Επομένως η οικογένεια θέσης–κλίμακας δεν απαιτεί ύπαρξη ροπών.

(ε) Από την Άσκηση 6, η θετική μεταβολή κλίμακας και η μετατόπιση αφήνουν αναλλοίωτους τους λ, κ, κ'. Συνεπώς, όταν ορίζονται, έχουν τις ίδιες τιμές για όλα τα μέλη της συγκεκριμένης οικογένειας. Η αλλαγή μόνο θέσης και κλίμακας δεν αλλάζει αυτά τα χαρακτηριστικά σχήματος.



Σχήμα 11. Οικογένεια θέσης–κλίμακας με μέλος αναφοράς $N(0,1)$. Η μετατόπιση αλλάζει τη θέση, ενώ η αύξηση της κλίμακας απλώνει την πυκνότητα διατηρώντας εμβαδόν 1.

Για σκέψη. Η θέση και η κλίμακα ορίζονται ακόμη κι όταν δεν υπάρχουν ροπές. Δείξτε ότι, για $\beta > 0$,

$$q_u(X) = \alpha + \beta q_u(Z).$$

Επιστρέψτε στην Cauchy της Άσκησης 8: τι εκφράζουν η διάμεσος και το μισό τεταρτημοριακό εύρος στην οικογένεια $X = \alpha + \beta Z$; Μπορούμε να κατασκευάσουμε εκτιμήσεις των α, β από δειγματικά ποσοστημόρια χωρίς να χρησιμοποιήσουμε δειγματικές ροπές;

Λύση της Άσκησης 14. Μετατοπισμένη εκθετική: παράμετροι και παρατηρήσεις

(α) Από την Άσκηση 13,

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-(x-\alpha)/\beta} \mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x).$$

Επειδή $\mathbb{E}(Z_1) = \mathbb{V}(Z_1) = 1$,

$$\mathbb{E}(X_1) = \alpha + \beta, \qquad \mathbb{V}(X_1) = \beta^2.$$

Η α είναι παράμετρος θέσης και κατώτερο άκρο του επιλεγμένου στηρίγματος, όχι η μέση τιμή.

(β) Το σύστημα είναι $\alpha + \beta = \overline{X}$, $\beta^2 = M_2$. Για $M_2 > 0$ η μοναδική λύση με $\beta > 0$ είναι

$$\widetilde{\beta} = \sqrt{M_2}, \qquad \widetilde{\alpha} = \overline{X} - \sqrt{M_2}.$$

(γ) Στα δεδομένα, $\overline{x} = 3$ και $m_2 = 8/3$, οπότε

$$\widetilde{\beta} = \sqrt{8/3}, \qquad \widetilde{\alpha} = 3 - \sqrt{8/3} \simeq 1.3670.$$

Η λύση ανήκει στο Θ. Όμως η παρατήρηση $x_{(1)} = 1$ βρίσκεται κάτω από το $\widetilde{\alpha}$, άρα η προτεινόμενη πυκνότητα είναι μηδέν σε αυτή την παρατήρηση. Η συμμόρφωση με τον παραμετρικό χώρο δεν ταυτίζεται με τη συμβατότητα του εκτιμημένου στηρίγματος με τα δεδομένα.

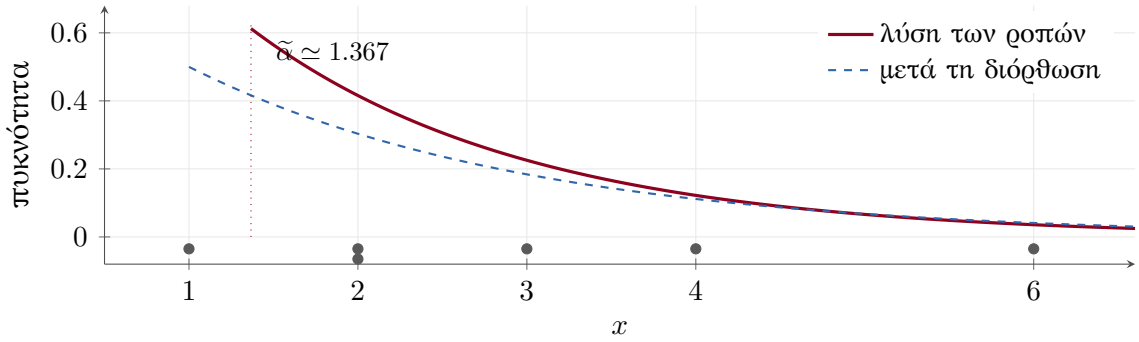
(δ) Για μη σταθερό δείγμα μπορούμε, για παράδειγμα, να ορίσουμε

$$\widehat{\alpha} = \min\{\widetilde{\alpha}, X_{(1)}\}, \qquad \widehat{\beta} = \overline{X} - \widehat{\alpha}.$$

Τότε $\widehat{\alpha} \le X_{(1)}$ και $\widehat{\beta} \ge \sqrt{M_2} > 0$. Όλες οι παρατηρήσεις ανήκουν στο $[\widehat{\alpha}, \infty)$ και διατηρείται η εξίσωση

$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = \overline{X}.$$

Στο συγκεκριμένο δείγμα προκύπτουν $\widehat{\alpha} = 1$ και $\widehat{\beta} = 2$. Η προτεινόμενη διασπορά είναι 4, όχι $8/3$. Η διόρθωση είναι ένας δυνατός κανόνας και δεν αποτελεί ακριβή λύση και των δύο εξισώσεων ροπών όταν μεταβάλλει την αρχική λύση. Το πρόβλημα δεν αποδεικνύει ότι κάθε μετατοπισμένη εκθετική είναι ασύμβατη με τα δεδομένα· αφορά τη συγκεκριμένη εκτίμηση.



Σχήμα 12. Η παρατήρηση 1 βρίσκεται έξω από το στήριγμα της αρχικής λύσης. Η διόρθωση κρατά τη μέση τιμή 3, αλλά αλλάζει την προτεινόμενη διασπορά.

Για σκέψη. Μια άλλη αφετηρία θα ήταν να εκτιμήσουμε το κατώτερο άκρο από το $X_{(1)}$ και κατόπιν την κλίμακα από το $\overline{X} - X_{(1)}$. Είναι αμερόληπτοι αυτοί οι κανόνες; *Υπόδειξη:* για $t \geq 0$, υπολογίστε την $\mathbb{P}(\min_i Z_i > t)$ με ανεξαρτησία, όπως κάνατε για το μέγιστο στην ομοιόμορφη. Έτσι συνδέονται οι οικογένειες θέσης–κλίμακας με τα διατεταγμένα στατιστικά.

Αναφορές. Σ. Τρέβεζας, σημειώσεις *Μαθηματικής Στατιστικής*, σ. 15–30. G. Casella και R. L. Berger, *Στατιστική Συμπερασματολογία*, ελληνική μετάφραση της 2ης έκδοσης, §2.3, Παράδειγμα 2.2.4, §§3.5 και 7.2.1. Για τη γενικευμένη αντίστροφη και τα ποσοστημόρια: Σ. Τρέβεζας, *Μη Παραμετρική Στατιστική*, Κάλλιπος (2025), §3.12.