Λύσεις ασκήσεων Εβδομάδας 1

Εμπειρικές εκτιμήτριες, μέση τιμή και διασπορά

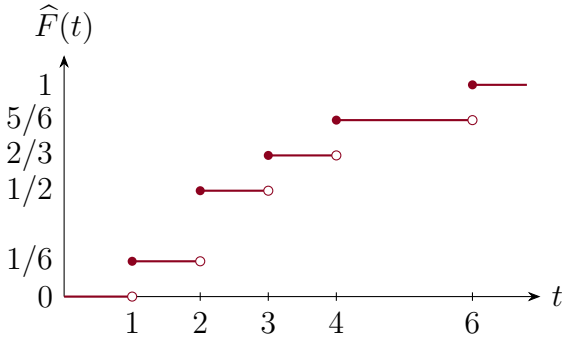
Χρησιμοποιούμε $\overline{X}$, M_k' και M_k για τον δειγματικό μέσο, τις μη κεντρικές και τις κεντρικές δειγματικές ροπές. Ο δείκτης του μεγέθους παραμένει μόνο όπου είναι αναγκαίος. Οι $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}$ και $\mathbb{V}$ δηλώνουν πιθανότητα, μέση τιμή και διασπορά. Τα πεζά δηλώνουν τιμές στα δεδομένα.

Λύση της Άσκησης 1. Έξι χρόνοι αναμονής

(α) Οι διαφορετικές τιμές $1, 2, 3, 4, 6$ έχουν συχνότητες $1, 2, 1, 1, 1$, αντίστοιχα. Άρα τα βάρη είναι $1/6, 2/6, 1/6, 1/6, 1/6$. Το βάρος $1/6$ αποδίδεται σε κάθε *παρατήρηση*, όχι σε κάθε διαφορετική τιμή.

(β) Προσθέτοντας τα βάρη των τιμών που δεν υπερβαίνουν το t,

$$\widehat{F}(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1/6, & 1 \le t < 2, \\ 1/2, & 2 \le t < 3, \\ 2/3, & 3 \le t < 4, \\ 5/6, & 4 \le t < 6, \\ 1, & t \ge 6. \end{cases}$$



Σχήμα 1. Η εμπειρική συνάρτηση κατανομής είναι δεξιά συνεχής. Οι γεμάτοι κύκλοι δηλώνουν την τιμή της στα σημεία άλματος.

Το άλμα στο 2 είναι $1/2 - 1/6 = 1/3$.

(γ) Τα ενδεχόμενα είναι $\{X_1 = 2\}$, $\{X_1 > 3\}$ και $\{2 < X_1 \le 4\}$. Στο καθένα αντιστοιχούν δύο παρατηρήσεις, επομένως και οι τρεις εμπειρικές πιθανότητες είναι $2/6 = 1/3$.

(δ) Έχουμε $\sum_i x_i = 18$ και $\sum_i x_i^2 = 70$. Συνεπώς

$$\overline{x} = 3, \qquad m_2' = \frac{35}{3}, \qquad m_2 = m_2' - \overline{x}^{\,2} = \frac{8}{3}.$$

Επίσης, $r = 6 - 1 = 5$ και $d = (2 + 3)/2 = 5/2$.

(ε) Το στήριγμα είναι $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, όχι $[1, 6]$. Η εμπειρική κατανομή δεν αποδίδει θετική πιθανότητα σε μη παρατηρηθείσες τιμές.

(στ) Εδώ $\widehat{\theta}(x) = x_{(6)} = 6$ και $\overline{\theta}(x) = 2\overline{x} = 6$. Για $z = (1, 1, 1, 1, 1, 6)$, όμως,

$$\widehat{\theta}(z) = z_{(6)} = 6, \qquad \overline{\theta}(z) = 2\overline{z} = \frac{11}{3}.$$

Η σύμπτωση δύο εκτιμήσεων σε ένα δείγμα δεν ταυτίζει τις αντίστοιχες εκτιμήτριες.

Για σκέψη. Στο ίδιο δείγμα η εκτίμηση του άνω άκρου και το διπλάσιο του μέσου μπορεί να συμπίπτουν, χωρίς να είναι ο ίδιος κανόνας. Αν προστεθεί ένας χρόνος 60 λεπτών, ποια μεταβολή θα δούμε στον μέσο, στη διάμεσο και στο μέγιστο; Ποια από τις τρεις ποσότητες απαντά καλύτερα σε κάθε διαφορετικό ερώτημα για την αναμονή;

Λύση της Άσκησης 2. Διάρκεια χρήσης και χρέωση

(α) Οι $h(X_i)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, επειδή η ίδια γνωστή μετρήσιμη συνάρτηση εφαρμόζεται χωριστά σε κάθε παρατήρηση. Με γραμμικότητα,

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[h(X_i)] = \mathbb{E}[h(X_1)].$$

Αν η δεύτερη ροπή είναι πεπερασμένη, η ανεξαρτησία δίνει

$$\mathbb{V}(T_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[h(X_i)] = \frac{\mathbb{V}[h(X_1)]}{n}.$$

(β) Η μέση χρέωση είναι $2+\mu$ και η εμπειρική εκτιμήτριά της $T_n = 2 + \overline{X}$. Άρα

$$\mathbb{E}(T_n) = 2+\mu, \qquad \mathbb{V}(T_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Η σταθερή χρέωση μετατοπίζει τον μέσο, χωρίς να μεταβάλλει τη διασπορά.

(γ) Θέτουμε $h(x) = x^k$. Αν $\mathbb{E}|X_1|^k < \infty$, τότε

$$\mathbb{E}(M_k') = \mu_k'.$$

Αν $\mathbb{E}|X_1|^{2k} < \infty$, τότε

$$\mathbb{V}(M_k') = \frac{\mu_{2k}' - (\mu_k')^2}{n}.$$

Η ύπαρξη της k-οστής ροπής αρκεί για την πρώτη σχέση, όχι γενικά για τη δεύτερη.

(δ) Από $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{V}(Y) + \mathbb{E}^2(Y)$, με $Y = \overline{X}$,

$$\mathbb{E}(\overline{X}^{\,2}) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2.$$

Αντίθετα, $\mathbb{E}(M_2') = \mu_2' = \sigma^2 + \mu^2$. Η M_2' εκτιμά την $\mathbb{E}(X_1^2)$, ενώ η $\overline{X}^{\,2}$ προκύπτει από εμπειρική αντικατάσταση στην $\mathbb{E}^2(X_1) = \mu^2$. Τα χαρακτηριστικά διαφέρουν κατά σ^2 και συμπίπτουν ακριβώς όταν $\sigma^2 = 0$.

Για σκέψη. Για ποια είδη συναρτήσεων h ισχύει πάντα $n^{-1}\sum_i h(X_i) = h(\overline{X})$; Ξεκινήστε από τις $h(x) = a + bx$ και $h(x) = x^2$. Η δεύτερη περίπτωση συνδέει ακριβώς τη διαφορά των δύο υπολογισμών με το M_2.

Λύση της Άσκησης 3. Ποιο όριο χρησιμοποιούμε;

(α) Οι $I_i = \mathbf{1}_{\{X_i > 5\}}$ είναι ανεξάρτητες Bernoulli με παράμετρο $p = 1 - F(5)$. Επομένως

$$n\widehat{p}_n \sim \mathrm{Bin}(n,p), \qquad \mathbb{E}(\widehat{p}_n) = p, \qquad \mathbb{V}(\widehat{p}_n) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Για $p = 0$ ή $p = 1$ ισχύουν οι ίδιες σχέσεις με την αντίστοιχη εκφυλισμένη κατανομή.

(β) Η ποσότητα $n^{-1}\sum_i \mathbf{1}_{\{X_i > \mu\}}$ απαιτεί το άγνωστο μ στον κανόνα υπολογισμού της και δεν είναι στατιστική συνάρτηση στο συγκεκριμένο μοντέλο. Για κάθε δεδομένη F, όμως, το μ είναι σταθερός αριθμός. Άρα

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i > \mu\}} \sim \mathrm{Bin}\big(n, 1 - F(\mu)\big).$$

Η ύπαρξη κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής δεν σημαίνει ότι η τιμή της υπολογίζεται χωρίς άγνωστες παραμέτρους.

(γ) Από τη συνέχεια της F και την ανεξαρτησία, $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 0$. Όταν $X_1 < X_2$,

$$X_1 < \overline{X}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2} < X_2,$$

και όταν $X_2 < X_1$ οι ρόλοι αντιστρέφονται. Συνεπώς

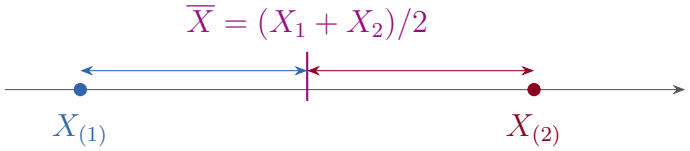
$$\mathbf{1}_{\{X_1 > \overline{X}_2\}} + \mathbf{1}_{\{X_2 > \overline{X}_2\}} = 1 \quad \text{με πιθανότητα } 1.$$

Κάθε δείκτρια έχει πιθανότητα $1/2$ να είναι 1, λόγω ισονομίας και ανεξαρτησίας των X_1, X_2. Η πιθανότητα να είναι και οι δύο 1 είναι 0, όχι $1/4$. Δεν είναι ανεξάρτητες.

(δ) Για $0 < p < 1$,

$$\mathbb{P}(\widehat{p}_n = 0) = (1-p)^n > 0.$$

Η μηδενική εμπειρική συχνότητα δεν αποκλείει θετική πληθυσμιακή πιθανότητα.



Σχήμα 2. Για δύο διαφορετικές παρατηρήσεις, η μία βρίσκεται κάτω από τον μέσο και η άλλη πάνω από αυτόν.

Για σκέψη. Αν προσθέσουμε τον ίδιο γνωστό αριθμό σε όλες τις παρατηρήσεις, αλλάζει το πλήθος εκείνων που υπερβαίνουν τον δειγματικό μέσο; Αλλάζει το πλήθος πάνω από το σταθερό 5; Η διάκριση μας οδηγεί σε χαρακτηριστικά που δεν επηρεάζονται από αλλαγή της αρχής μέτρησης.

Λύση της Άσκησης 4. Προστίθεται ένας ακόμη επιβάτης

(α) Διαχωρίζουμε την τελευταία παρατήρηση από το άθροισμα:

$$\overline{X}_{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + X_{n+1}}{n+1} = \frac{n\overline{X}_n + X_{n+1}}{n+1}.$$

(β) Θέτουμε $d = X_{n+1} - \overline{X}_n$. Από το (α),

$$\overline{X}_{n+1} - \overline{X}_n = \frac{d}{n+1}, \qquad X_{n+1} - \overline{X}_{n+1} = \frac{nd}{n+1}.$$

Για $i \le n$ έχουμε $X_i - \overline{X}_{n+1} = X_i - \overline{X}_n - d/(n+1)$. Επομένως

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n - \frac{d}{n+1} \right)^2 + \frac{n^2 d^2}{(n+1)^2} \\ &= Q_n - \frac{2d}{n+1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)}_{=0} + \frac{nd^2 + n^2 d^2}{(n+1)^2} \\ &= Q_n + \frac{n}{n+1} d^2. \end{aligned}$$

Η ταυτότητα είναι αλγεβρική και δεν απαιτεί πιθανοτικές υποθέσεις.

(γ) Αρχικά $\overline{x}_6 = 3$ και $Q_6 = 6 \cdot 8/3 = 16$. Η νέα τιμή είναι ίση με τον προηγούμενο μέσο. Άρα

$$\overline{x}_7 = 3, \qquad Q_7 = 16, \qquad m_{2,7} = \frac{16}{7}.$$

Το άθροισμα τετραγώνων δεν αλλάζει, αλλά η εμπειρική διασπορά αλλάζει επειδή αλλάζει ο παρονομαστής.

Για σκέψη. Το Q_{n+1} δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το Q_n. Ισχύει το ίδιο για τις εμπειρικές διασπορές; Χρησιμοποιήστε τον τύπο που αποδείξατε για να βρείτε πόσο πρέπει να απέχει η νέα παρατήρηση από τον παλιό μέσο, ώστε η εμπειρική διασπορά να αυξηθεί.

Λύση της Άσκησης 5. Ποσοστημόρια σε τέσσερις παρατηρήσεις

(α) Το πρώτο σημείο στο οποίο η $\widehat{F}_4$ φτάνει ή ξεπερνά το 0.3 είναι το 2. Το ίδιο ισχύει για το 0.5. Άρα

$$\widehat{F}_4^-(0.3) = \widehat{F}_4^-(0.5) = 2.$$

(β) Για κάθε $q \in (2,3)$, $\widehat{F}_4(q-) = \widehat{F}_4(q) = 1/2$. Στα άκρα,

$$\widehat{F}_4(2-) = \tfrac{1}{4} \le \tfrac{1}{2} = \widehat{F}_4(2), \qquad \widehat{F}_4(3-) = \tfrac{1}{2} \le \tfrac{1}{2} \le \widehat{F}_4(3) = \tfrac{3}{4}.$$

Για $q < 2$ αποτυγχάνει η δεξιά ανισότητα, ενώ για $q > 3$ αποτυγχάνει η αριστερή. Επομένως το σύνολο των διαμέσων είναι ακριβώς $[2,3]$. Ειδικά το 2.5 είναι διάμεσος, αλλά δεν είναι η μικρότερη διάμεσος που επιλέγει η γενικευμένη αντίστροφη.

(γ) Οι υπολογισμοί είναι

u	$r = 5u$	j	w	Τιμή παρεμβολής
0.5	2.5	2	0.5	$(2+3)/2 = 2.5$
0.3	1.5	1	0.5	$(1+2)/2 = 1.5$

(δ) Στο $q = 1.5$, $\widehat{F}_4(q) = 1/4 < 0.3$. Άρα το 1.5 δεν είναι καν ποσοστημόριο τάξης 0.3 της εμπειρικής κατανομής με τον ορισμό των δύο ανισοτήτων. Η παρεμβολή είναι άλλος κανόνας εκτίμησης του πληθυσμιακού ποσοστημορίου.

Για σκέψη. Μπορούμε να περιγράψουμε το άπλωμα των δεδομένων χρησιμοποιώντας μόνο δύο ποσοστημόρια, χωρίς τετράγωνα αποκλίσεων; Δοκιμάστε το τρίτο τεταρτημόριο μείον το πρώτο, δηλαδή το τεταρτημοριακό εύρος. Υπολογίστε το με τη γενικευμένη αντίστροφη και με τον δοσμένο κανόνα παρεμβολής. Γιατί πρέπει να δηλώνουμε ποια σύμβαση χρησιμοποιούμε;

Λύση της Άσκησης 6. Πόσοι εξυπηρετούνται έγκαιρα;

(α) Θέτουμε $I_i(t) = \mathbf{1}_{\{X_i \le t\}}$. Οι $I_i(t)$ είναι ανεξάρτητες Bernoulli με παράμετρο $F(t)$. Επομένως

$$\mathbb{E}[\widehat{F}_n(t)] = F(t), \qquad \mathbb{V}[\widehat{F}_n(t)] = \frac{F(t)(1-F(t))}{n}.$$

(β) Για $i \neq j$ οι $I_i(s)$ και $I_j(t)$ είναι ανεξάρτητες. Για $i = j$, επειδή $s < t$,

$$\mathbb{E}[I_i(s) I_i(t)] = F(s), \qquad \operatorname{Cov}\big(I_i(s), I_i(t)\big) = F(s) - F(s)F(t).$$

Από τη διγραμμικότητα της συνδιακύμανσης προκύπτει

$$\operatorname{Cov}\big(\widehat{F}_n(s),\widehat{F}_n(t)\big)=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\operatorname{Cov}\big(I_i(s),I_j(t)\big)=\frac{F(s)(1-F(t))}{n}.$$

(γ) Η διαφορά είναι ο μέσος των $\mathbf{1}_{\{s<X_i\le t\}}$ και εκτιμά το $p=F(t)-F(s)$. Άρα η διασπορά είναι $p(1-p)/n$. Με τον δεύτερο τρόπο, θέτοντας $a=F(s)$ και $b=F(t)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[\widehat{F}_n(t)-\widehat{F}_n(s)]&=\frac{b(1-b)+a(1-a)-2a(1-b)}{n}\\&=\frac{(b-a)(1-b+a)}{n}=\frac{p(1-p)}{n}.\end{aligned}$$

(δ) Για $0\le u\le 1$ ισχύει $u(1-u)\le 1/4$. Αρκεί, λοιπόν, $1/(4n)\le 1/400$, δηλαδή $n\ge 100$. Το φράγμα επιτυγχάνεται όταν $F(t)=1/2$, άρα το 100 είναι και το μικρότερο ακέραιο που παρέχει την καθολική εξασφάλιση.

Για σκέψη. Για ποια τιμή του $F(t)$ η εκτίμηση $\widehat{F}_n(t)$ έχει τη μεγαλύτερη διασπορά; Συνδέστε την απάντηση με την εκτίμηση του ποσοστού κάτω από μια διάμεσο σε συνεχή κατανομή. Γιατί μια πιθανότητα πολύ κοντά στο 0 ή στο 1 έχει μικρότερη απόλυτη δειγματική μεταβλητότητα;

Λύση της Άσκησης 7. Το μέγιστο και η διάμεσος του πληθυσμού

(α) Με ανεξαρτησία,

$$\mathbb{P}(X_{(n)}\le m)=\mathbb{P}(X_1\le m,\dots,X_n\le m)=F^n(m)=2^{-n}.$$

Άρα $\mathbb{P}(X_{(n)}>m)=1-2^{-n}$, και για $n=2$ παίρνουμε $3/4$.

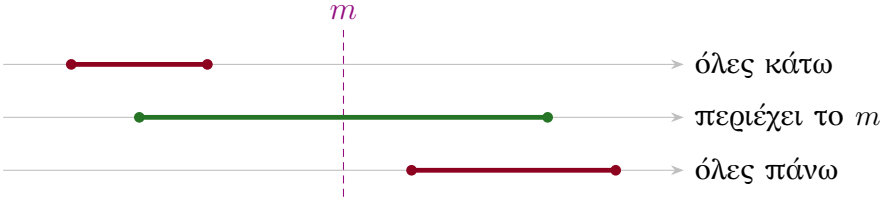
(β) Το διάστημα δεν περιέχει το m ακριβώς όταν όλες οι παρατηρήσεις είναι μικρότερες από το m ή όλες μεγαλύτερες από αυτό. Οι δύο περιπτώσεις είναι ξένες και έχουν πιθανότητα 2^{-n} η καθεμία, διότι $\mathbb{P}(X_i=m)=0$. Άρα

$$\mathbb{P}(X_{(1)}\le m\le X_{(n)})=1-2^{1-n}.$$

(γ) Οι πιθανότητες των δύο αντίστοιχων περιπτώσεων είναι u^n και $(1-u)^n$. Συνεπώς

$$\mathbb{P}(X_{(1)}\le q_u\le X_{(n)})=1-u^n-(1-u)^n.$$

(δ) Στην $\mathrm{Unif}[0,10]$, με τη συνήθη πυκνότητα στο $[0,10]$, έχουμε $m=5$ και $\sup S_f=10$. Το μέγιστο είναι μικρότερο του 10 με πιθανότητα 1 και υπερβαίνει το 5 με πιθανότητα $1-2^{-n}>0$.



Σχήμα 3. Οι δύο τρόποι με τους οποίους το διάστημα των ακραίων παρατηρήσεων δεν περιέχει τη διάμεσο.

Για σκέψη. Η πιθανότητα κάλυψης προέκυψε χωρίς να γνωρίζουμε τη μορφή της πυκνότητας. Τι θα άλλαζε αν υπήρχε θετική πιθανότητα ακριβώς στο m; Ξεχωρίστε τότε τα $F(m-)$ και $F(m)$, πριν υπολογίσετε τα δύο ενδεχόμενα αποτυχίας.

Λύση της Άσκησης 8. Δύο ομάδες με διαφορετικό πλήθος

(α) Το συνολικό άθροισμα είναι $2 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 28$, οπότε ο ενιαίος μέσος είναι $28/8 = 3.5$ λεπτά. Ο απλός μέσος των ομαδικών μέσων είναι 3 λεπτά και δεν δίνει το ίδιο βάρος στις οκτώ παρατηρήσεις.

(β) Οι ομαδικοί μέσοι είναι ανεξάρτητοι, με διασπορές $\sigma^2/2$ και $\sigma^2/6$. Επομένως

$$\mathbb{E}(T_\lambda) = \mu, \qquad \mathbb{V}(T_\lambda) = \sigma^2 \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{(1-\lambda)^2}{6} \right).$$

(γ) Επειδή

$$\frac{\lambda^2}{2} + \frac{(1-\lambda)^2}{6} = \frac{2}{3}\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8},$$

η μοναδική ελάχιστη τιμή επιτυγχάνεται για $\lambda = 1/4$ και είναι $\sigma^2/8$. Κάθε X_i έχει βάρος $(1/4)/2 = 1/8$ και κάθε Y_i βάρος $(3/4)/6 = 1/8$. Αν δίναμε ίσο βάρος στις ομάδες, $\lambda = 1/2$, η διασπορά θα ήταν $\sigma^2/6$.

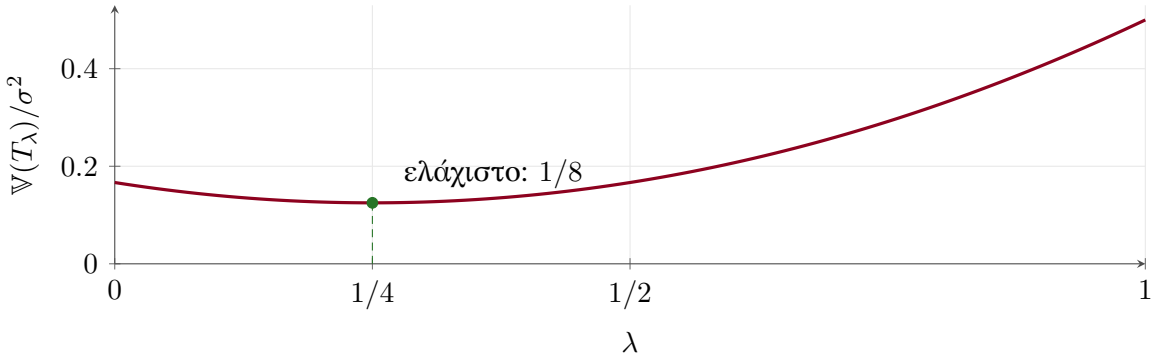
(δ) Από την ανεξαρτησία,

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i X_i \right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} w_i^2.$$

Επιπλέον,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(w_i - \frac{1}{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 - \frac{1}{n} \geq 0.$$

Αυτό δίνει την ανισότητα και, επειδή $\sigma^2 > 0$, ισότητα υπάρχει ακριβώς όταν $w_i = 1/n$ για κάθε i. Η σύγκριση αφορά αυτή την κλάση γραμμικών συνδυασμών, όχι όλες τις δυνατές εκτιμήτριες.



Σχήμα 4. Η μικρότερη διασπορά προκύπτει όταν καθεμία από τις οκτώ παρατηρήσεις παίρνει βάρος $1/8$.

Για σκέψη. Το ίσο βάρος στις παρατηρήσεις ήταν κατάλληλο επειδή είχαν την ίδια διασπορά. Αν οι δύο ομάδες έχουν κοινή μέση τιμή αλλά γνωστές διαφορετικές διασπορές, ποια βάρη θα προτιμούσαμε; Ξαναγράψτε τη διασπορά του T_λ πριν ελαχιστοποιήσετε.

Λύση της Άσκησης 9. Μια σπάνια μεγάλη αναμονή

(α) Τα στηρίγματα είναι $\{1\}$ και $\{1, 20\}$. Στην πρώτη υπηρεσία η μέση τιμή και το άνω άκρο ισούνται με 1. Στη δεύτερη,

$$\mathbb{E}(X_1) = 0.99 \cdot 1 + 0.01 \cdot 20 = 1.19,$$

ενώ το άνω άκρο είναι 20.

(β) Η πιθανότητα δέκα μονάδων είναι 1 στην πρώτη υπηρεσία και $0.99^{10} \simeq 0.9044$ στη δεύτερη. Σε αυτό το αποτέλεσμα, η εμπειρική κατανομή αποδίδει πιθανότητα 1 στο 1 και στις δύο περιπτώσεις.

(γ) Δεν μπορούμε. Η δεύτερη υπηρεσία έχει θετική πιθανότητα χρόνου 20 λεπτών, παρότι το συγκεκριμένο δείγμα εμφανίζεται με πιθανότητα περίπου 90%. Η απουσία μιας τιμής από το δείγμα δεν αποδεικνύει την αδυναμία εμφάνισής της.

(δ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $(1 - \varepsilon)^{10}$. Αρκεί

$$0 < \varepsilon < 1 - 0.95^{1/10}.$$

Για παράδειγμα, $\varepsilon = 0.001$ δίνει $0.999^{10} \simeq 0.9900 > 0.95$, ανεξάρτητα από το b. Έτσι το άνω άκρο μπορεί να είναι πολύ μεγάλο χωρίς να εμφανίζεται στο συγκεκριμένο δείγμα.

Για σκέψη. Στο τελευταίο μοντέλο, με μικρό σταθερό ε, η μέση τιμή αυξάνεται όσο αυξάνεται το b, ενώ η διάμεσος παραμένει 1. Ποιο από τα δύο χαρακτηριστικά περιγράφει τον χρόνο ενός συνηθισμένου πελάτη και ποιο είναι χρήσιμο για τον συνολικό χρόνο απασχόλησης της υπηρεσίας; Δεν είναι απαραίτητο να απαντούν στο ίδιο ερώτημα.

Λύση της Άσκησης 10. Πεντάλεπτα χωρίς πελάτες

(α) Οι δύο εκτιμήτριες είναι

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i = 0\}}, \qquad B_n = e^{-\overline{X}}.$$

Η πρώτη χρησιμοποιεί άμεσα το ενδεχόμενο $\{X_i = 0\}$. Η δεύτερη χρησιμοποιεί επιπλέον τη σχέση $p_0 = e^{-\lambda}$ που επιβάλλει το μοντέλο Poisson. Ως εκτιμήσεις πιθανότητας επιτρέπουμε τιμές στο $[0, 1]$.

(β) Στα δεδομένα υπάρχουν δύο μηδενικά και ο μέσος είναι 1. Άρα

$$A_6(x) = \frac{1}{3}, \qquad B_6(x) = e^{-1} \simeq 0.3679,$$

οπότε οι εκτιμήσεις διαφέρουν.

(γ) Οι δείκτριες είναι ανεξάρτητες Bernoulli με παράμετρο $e^{-\lambda}$. Συνεπώς

$$\mathbb{E}_\lambda(A_n) = e^{-\lambda}, \qquad \mathbb{V}_\lambda(A_n) = \frac{e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda})}{n}.$$

(δ) Από $B_n = e^{-K/n}$ και τη βοηθητική ταυτότητα, για $t = 1/n$ και $t = 2/n$ αντίστοιχα,

$$\mathbb{E}_\lambda(B_n) = \exp\bigl(n\lambda(e^{-1/n} - 1)\bigr), \qquad \mathbb{E}_\lambda(B_n^2) = \exp\bigl(n\lambda(e^{-2/n} - 1)\bigr).$$

Επομένως

$$\mathbb{V}_\lambda(B_n) = \exp\big(n\lambda(e^{-2/n} - 1)\big) - \exp\big(2n\lambda(e^{-1/n} - 1)\big).$$

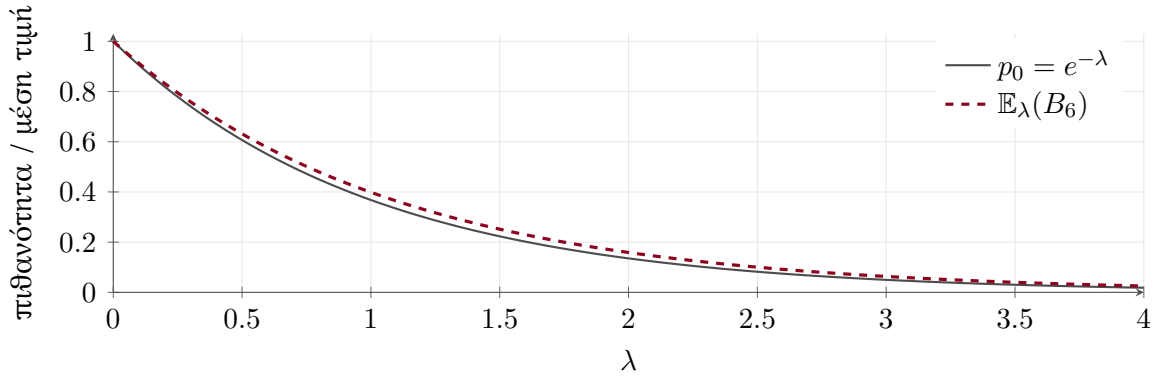
Η ανισότητα $e^{-1/n} > 1 - 1/n$ δίνει $n\lambda(e^{-1/n} - 1) > -\lambda$, άρα

$$\mathbb{E}_\lambda(B_n) > e^{-\lambda}.$$

Η αμεροληψία του $\overline{X}$ για το λ δεν μεταφέρεται αυτόματα στην εκθετική συνάρτηση.

Η βοηθητική ταυτότητα. Από τη συνάρτηση πιθανότητας της Poisson,

$$\mathbb{E}(e^{-tK}) = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ae^{-t})^k}{k!} = e^{-a}e^{ae^{-t}} = \exp\big(a(e^{-t} - 1)\big).$$



Σχήμα 5. Για έξι παρατηρήσεις, η μέση τιμή της B_6 είναι μεγαλύτερη από το χαρακτηριστικό που εκτιμά. Οι καμπύλες είναι θεωρητικές, όχι αποτελέσματα ενός δείγματος.

Για σκέψη. Χωρίς την υπόθεση Poisson, εξακολουθεί η σχετική συχνότητα των μηδενικών να εκτιμά την πιθανότητα μηδενικού πλήθους; Τι γίνεται με τον κανόνα $e^{-\overline{X}}$; Εξετάστε, για παράδειγμα, ένα μοντέλο στο οποίο το πλήθος είναι πάντοτε 1. Η παραμετρική αντικατάσταση χρησιμοποιεί πληροφορία που προέρχεται από το μοντέλο, όχι μόνο από τα δεδομένα.

Αναφορές. G. Casella και R. L. Berger, *Στατιστική Συμπερασματολογία*, ελληνική μετάφραση της 2ης έκδοσης, Λήμμα 5.2.5 και Ασκήσεις 5.3, 5.15, 5.21. Σ. Τρέβεζας, *Μη Παραμετρική Στατιστική*, Κάλλιπος (2025), §§3.1–3.2 και 3.12.