Από τη συνέπεια στην ασυμπτωτική κατανομή

Αμεροληψία, ρυθμός σύγκλισης και οριακές κατανομές

Σάμης Τρέβεζας
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Μαθηματική Στατιστική · 2026–2027

Από πού συνεχίζουμε

Έχουμε μελετήσει τη μεροληψία, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα και τη συνέπεια.

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad M_{2,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2,$$

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1} M_{2,n}, \qquad n \geq 2.$$

Η ασθενής συνέπεια σημαίνει $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} g(\theta)$, για κάθε θ.
Τώρα εξετάζουμε **πόσο γρήγορα** μικραίνει το σφάλμα και ποια είναι η **κατανομή του σε κατάλληλη κλίμακα**.

Τρία επόμενα ερωτήματα

1. Υπάρχει πάντοτε αμερόληπτη εκτιμήτρια ενός χαρακτηριστικού $g(\theta)$;
2. Αν υπάρχουν πολλές, ποια έχει τη μικρότερη διασπορά μέσα σε μια δεδομένη κλάση;
3. Αν $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} g(\theta)$, υπάρχει $r_n \to \infty$ ώστε το

$$r_n(T_n - g(\theta))$$

να έχει μη εκφυλισμένη οριακή κατανομή;

Υπάρχει πάντα αμερόληπτη εκτιμήτρια;

Έστω μία παρατήρηση $X_1 \sim \text{Bernoulli}(p)$, $0 < p < 1$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε το p^2. Κάθε πραγματική στατιστική συνάρτηση $T_1(X_1)$ καθορίζεται από

$$T_1(0) = a, \qquad T_1(1) = b.$$

Επομένως

$$\mathbb{E}_p[T_1(X_1)] = a(1-p) + bp = a + (b-a)p.$$

Το δεξί μέλος είναι αφινική συνάρτηση του p, όχι το p^2 για όλα τα $p \in (0,1)$.

Για $n = 1$ δεν υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια του p^2.

Το μέγεθος δείγματος μετρά

Για τυχαίο δείγμα Bernoulli(p) και $n \geq 2$, η ανεξαρτησία δίνει

$$\mathbb{E}_p(X_1 X_2) = \mathbb{E}_p(X_1)\mathbb{E}_p(X_2) = p^2.$$

Θέτουμε $K_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Μια συμμετρική εκδοχή είναι

$$U_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} X_i X_j = \frac{K_n(K_n - 1)}{n(n-1)}.$$

Το άθροισμα περιλαμβάνει $n(n-1)$ *διατεταγμένα* ζεύγη, άρα $\mathbb{E}_p(U_n) = p^2$.

Για σκέψη. Η ύπαρξη αμερόληπτης εκτιμήτριας εξαρτάται και από το διαθέσιμο n. Τι αλλάζει για το p^3;

Ελάχιστη διασπορά σε κλάση

Για σταθερό n, έστω $\mathcal{U}_n$ μια μη κενή κλάση αμερόληπτων εκτιμητριών του $g(\theta)$, με πεπερασμένη διασπορά για κάθε $\theta \in \Theta$. Η $U_n^* \in \mathcal{U}_n$ είναι ομοιόμορφα ελάχιστης διασποράς στην κλάση αν

$$\mathbb{V}_\theta(U_n^*) \leq \mathbb{V}_\theta(U_n), \qquad \forall \theta \in \Theta, \quad \forall U_n \in \mathcal{U}_n.$$

Ο ίδιος κανόνας πρέπει να είναι καλύτερος *για κάθε* θ. Ο ορισμός δεν εγγυάται ότι υπάρχει τέτοια εκτιμήτρια στην κλάση.

Γραμμικές αμερόληπτες εκτιμήτριες

Έστω τυχαίο δείγμα με $\mathbb{E}_\theta(X_i) = \mu(\theta)$ και $0 < \mathbb{V}_\theta(X_i) = \sigma^2(\theta) < \infty$. Για γνωστούς, μη τυχαίους συντελεστές $a_{i,n}$, θέτουμε

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} X_i.$$

Τότε

$$\mathbb{E}_\theta(T_n) = \mu(\theta) \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}, \qquad \mathbb{V}_\theta(T_n) = \sigma^2(\theta) \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}^2.$$

Αν η $\mu(\theta)$ δεν είναι ταυτοτικά μηδενική,

$$T_n \text{ αμερόληπτη της } \mu(\theta) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} = 1.$$

Ο μέσος στη γραμμική κλάση

Υπό τον περιορισμό $\sum_i a_{i,n} = 1$,

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(a_{i,n} - \frac{1}{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}^2 - \frac{1}{n}.$$

Άρα

$$\mathbb{V}_\theta(T_n) \geq \frac{\sigma^2(\theta)}{n} = \mathbb{V}_\theta(\overline{X}_n).$$

Ισότητα ισχύει ακριβώς όταν $a_{i,n} = 1/n$ για όλα τα i.

Ο $\overline{X}_n$ είναι η μοναδική εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς **μέσα στη συγκεκριμένη γραμμική αμερόληπτη κλάση**.

Η κλάση σύγκρισης έχει σημασία

Δεν αποδείξαμε βελτιστότητα του $\overline{X}_n$ ανάμεσα σε *όλες* τις αμερόληπτες εκτιμήτριες κάθε μοντέλου.

> Η βελτιστότητα δηλώνεται μαζί με το **μοντέλο**, την **κλάση** και το **κριτήριο**.

Για ευρύτερες κλάσεις θα μελετήσουμε αργότερα επάρκεια, τη μέθοδο Rao–Blackwell και την πληρότητα.

Για σκέψη. Στο κανονικό μοντέλο η S_n^2 είναι αμερόληπτη, αλλά η $M_{2,n}$ έχει μικρότερο MSE. Γιατί αυτό δεν αντιφάσκει με βελτιστότητα μέσα σε αμερόληπτη κλάση;

Τρεις εκτιμήτριες του άκρου

Στο τυχαίο δείγμα από $\mathrm{Unif}[0, \theta]$, $\theta > 0$, γράφουμε

$$\overline{\theta}_n = 2\overline{X}_n, \qquad \hat{\theta}_n = X_{(n)}, \qquad \tilde{\theta}_n = \frac{n+1}{n} X_{(n)}.$$

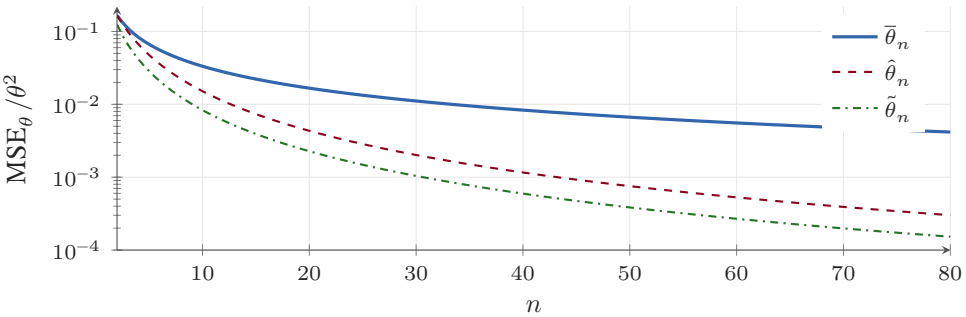
Οι ακριβείς τιμές των μέσων τετραγωνικών σφαλμάτων είναι

$$\mathrm{MSE}_\theta(\overline{\theta}_n) = \frac{\theta^2}{3n},$$

$$\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)},$$

$$\mathrm{MSE}_\theta(\tilde{\theta}_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

Ίδια συνέπεια, διαφορετικό σφάλμα



Και οι τρεις έχουν MSE που τείνει στο 0. Οι τάξεις n^{-1} και n^{-2}, όμως, υποδεικνύουν διαφορετικές κλίμακες σφάλματος.

Σύγκλιση κατά κατανομή

Γράφουμε $Y_n \xrightarrow{d} Y$ όταν

$$F_{Y_n}(y) \longrightarrow F_Y(y)$$

σε κάθε σημείο συνέχειας της F_Y.

Πρόκειται για σύγκλιση των κατανομών, όχι κατ' ανάγκη των πραγματοποιήσεων στο ίδιο πιθανοτικό πείραμα.

Για σταθερό $c \in \mathbb{R}$,

$$Y_n \xrightarrow{d} c \quad \Longleftrightarrow \quad Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c.$$

Σχέσεις μεταξύ τρόπων σύγκλισης



Οι αντίστροφες συνεπαγωγές δεν ισχύουν γενικά. Επίσης, η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση και η L^2-σύγκλιση δεν συνεπάγονται γενικά η μία την άλλη.

Για σκέψη. Μπορούν σπάνια αλλά μεγάλα σφάλματα να αφήνουν τη συνέπεια ανέπαφη και να αυξάνουν το MSE;

Η κλίμακα του σφάλματος

Αν $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} g(\theta)$, η κατανομή του $T_n - g(\theta)$ συγκεντρώνεται στο 0.

Αναζητούμε μη τυχαίους $r_n > 0$, $r_n \to \infty$, ώστε

$$r_n(T_n - g(\theta)) \xrightarrow{d} Z_\theta,$$

με μη εκφυλισμένη κατανομή K_θ του Z_θ. Τότε η K_θ είναι η οριακή κατανομή του *κανονικοποιημένου σφάλματος* με κανονικοποίηση r_n.

Η ύπαρξη τέτοιου ορίου είναι πρόσθετη ιδιότητα· δεν προκύπτει μόνο από τη συνέπεια.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες με

$$\mathbb{E}(X_1) = \mu, \qquad 0 < \mathbb{V}(X_1) = \sigma^2 < \infty.$$

Τότε

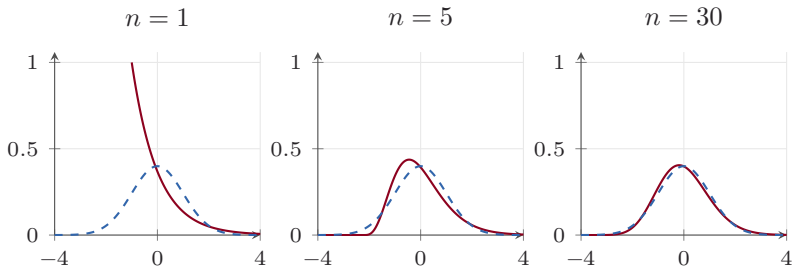
$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Για μεγάλο n, η κατανομή του $\overline{X}_n$ προσεγγίζεται από την $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

Για σκέψη. Η υπόθεση πεπερασμένης διασποράς είναι ουσιαστική. Το θεώρημα αυτό δεν εφαρμόζεται στον μέσο δείγματος Cauchy.

Η κανονική προσέγγιση

Για $X_i \sim \text{Exp}(1)$, με ρυθμό 1, θέτουμε $Y_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - 1)$. Τα διαγράμματα δείχνουν *ακριβείς πυκνότητες*, όχι ιστογράμματα.



Συνεχής γραμμή: ακριβής πυκνότητα. Διακεκομμένη: $\mathcal{N}(0, 1)$.

Ασυμπτωτική κανονικότητα

Αν, για κάθε θ,

$$\sqrt{n}(T_n - g(\theta)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \tau^2(\theta)), \qquad 0 < \tau^2(\theta) < \infty,$$

λέμε ότι η T_n είναι ασυμπτωτικά κανονική. Η $\tau^2(\theta)$ ονομάζεται ασυμπτωτική διασπορά για αυτή την κανονικοποίηση.

Για τον $\overline{X}_n$, το Κ.Ο.Θ. δίνει $\tau^2 = \sigma^2$ και κανονικοποίηση $\sqrt{n}$.

Η σύγκλιση κατά κατανομή **δεν συνεπάγεται από μόνη της** $n\mathbb{V}_\theta(T_n) \to \tau^2(\theta)$ ή σύγκλιση των αντίστοιχων MSE.

Συνεχείς μετασχηματισμοί

Αν $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ και η h είναι συνεχής στο c, τότε

$$h(Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(c).$$

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για σχεδόν βέβαιη σύγκλιση.

Παράδειγμα. Αν $S_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2 > 0$, τότε $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma$ και

$$\frac{S_n}{\sigma} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1, \qquad \frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

Στον τελευταίο λόγο ορίζουμε μια τιμή, π.χ. 0, στο ενδεχόμενο $S_n = 0$, του οποίου η πιθανότητα τείνει στο 0.

Θεώρημα Slutsky

Αν $Y_n \xrightarrow{d} Y$ και $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$, όπου c είναι σταθερά, τότε

$$Y_n + Z_n \xrightarrow{d} Y + c, \qquad Y_n Z_n \xrightarrow{d} cY.$$

Αν επιπλέον $c \neq 0$, τότε

$$\frac{Y_n}{Z_n} \xrightarrow{d} \frac{Y}{c}.$$

Δεν απαιτείται ανεξαρτησία των Y_n, Z_n. Είναι όμως ουσιαστικό ότι το δεύτερο όριο είναι **σταθερά**.

Όταν $Z_n = 0$, ο λόγος μπορεί να οριστεί ίσος με 0. Για $c \neq 0$, $\mathbb{P}(Z_n = 0) \to 0$.

Συνέπεια της δειγματικής διασποράς

Για τυχαίο δείγμα με $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, γράφουμε

$$M_{2,n} = M'_{2,n} - \overline{X}_n^2, \qquad M'_{2,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών,

$$M'_{2,n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}(X_1^2), \qquad \overline{X}_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu.$$

Άρα

$$M_{2,n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2, \qquad S_n^2 = \frac{n}{n-1} M_{2,n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2, \qquad S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma.$$

Δεν απαιτούνται κανονικότητα ή τέταρτη ροπή. Η L^2-συνέπεια της S_n^2 είναι διαφορετικό ζήτημα.

Εκτίμηση του παρονομαστή

Υποθέτουμε τυχαίο δείγμα με $0 < \sigma^2 < \infty$. Έχουμε

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \qquad \frac{S_n}{\sigma} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

Επομένως, από Slutsky,

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{S_n} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma}{S_n/\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Η εκτίμηση της σ δεν αλλάζει εδώ την οριακή κατανομή. Δεν απαιτείται κανονικός πληθυσμός.

Ορίζουμε τον λόγο ίσο με 0 όταν $S_n = 0$. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου τείνει στο 0.

Παράδειγμα Bernoulli

Για τυχαίο δείγμα Bernoulli(p), $0 < p < 1$, θέτουμε $\hat{p}_n = \overline{X}_n$.

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{p}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \qquad \hat{p}_n(1-\hat{p}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} p(1-p) > 0.$$

Άρα

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{p}_n - p)}{\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Ορίζουμε τον λόγο ίσο με 0 όταν $\hat{p}_n \in \{0,1\}$. Πράγματι,

$$\mathbb{P}_p(\hat{p}_n \in \{0,1\}) = p^n + (1-p)^n \longrightarrow 0.$$

Στα $p = 0, 1$ η διασπορά μηδενίζεται: το παραπάνω μη εκφυλισμένο κανονικό όριο δεν ισχύει.

Το μέγιστο του ομοιόμορφου δείγματος

Για $X_i \sim \text{Unif}[0, \theta]$, θέτουμε $\hat{\theta}_n = X_{(n)}$. Για σταθερό $x \geq 0$ και $n > x$,

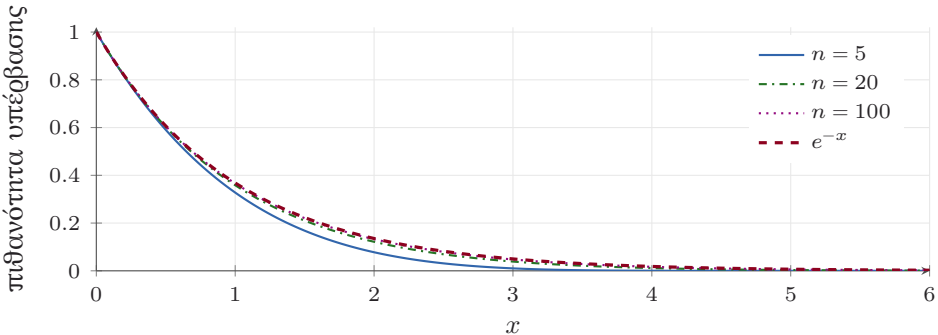
$$\mathbb{P}_\theta\left(\frac{n(\theta - \hat{\theta}_n)}{\theta} > x\right) = \mathbb{P}_\theta\Big(X_{(n)} < \theta\left(1 - \frac{x}{n}\right)\Big)$$
$$= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-x}.$$

Επομένως

$$\frac{n(\theta - \hat{\theta}_n)}{\theta} \xrightarrow{d} E, \qquad E \sim \text{Exp}(1) \text{ με ρυθμό } 1.$$

Για $x < 0$ οι μεταβλητές στο αριστερό μέλος έχουν μηδενική συνάρτηση κατανομής. Το όριο είναι εκθετικό, όχι κανονικό.

Εκθετικό όριο: οι δεξιές ουρές



Η ακριβής ουρά είναι $(1 - x/n)^n$ για $0 \leq x \leq n$ και 0 για $x > n$.

Η διόρθωση του μεγίστου

Θέτουμε $Y_n = n(\theta - X_{(n)})/\theta \xrightarrow{d} E$, με $E \sim \text{Exp}(1)$. Για $\tilde{\theta}_n = (n+1)X_{(n)}/n$,

$$\begin{aligned} \frac{n(\tilde{\theta}_n - \theta)}{\theta} &= \frac{n+1}{\theta} X_{(n)} - n \\ &= 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) Y_n. \end{aligned}$$

Επομένως, από Slutsky,

$$\frac{n(\tilde{\theta}_n - \theta)}{\theta} \xrightarrow{d} 1 - E.$$

Για σκέψη. Η διόρθωση της μεροληψίας μετακινεί την οριακή κατανομή, χωρίς να αλλάξει την κανονικοποίηση n.

Τρεις διαφορετικές οριακές συμπεριφορές

Στο ίδιο μοντέλο $\mathrm{Unif}[0,\theta]$, με $E \sim \mathrm{Exp}(1)$:

$$\sqrt{n}(\overline{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta^2/3),$$

$$\frac{n(\hat{\theta}_n - \theta)}{\theta} \xrightarrow{d} -E,$$

$$\frac{n(\tilde{\theta}_n - \theta)}{\theta} \xrightarrow{d} 1 - E.$$

Η πρώτη σχέση προκύπτει από το Κ.Ο.Θ. για $2X_i$. Οι δύο επόμενες από την ακριβή κατανομή του μεγίστου. Οι ακριβείς τύποι MSE επιβεβαιώνουν εδώ τις διαφορετικές τάξεις.

Προσεγγιστικό μέγεθος του σφάλματος

Έστω $\tau(\theta) > 0$ και

$$\frac{\sqrt{n}(T_n - g(\theta))}{\tau(\theta)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Για $0 < a < 1$, θέτουμε $z_{1-a/2} = \Phi^{-1}(1 - a/2)$. Τότε

$$\mathbb{P}_\theta\left(|T_n - g(\theta)| \leq z_{1-a/2}\frac{\tau(\theta)}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow 1 - a.$$

Αν $\hat{\tau}_n \geq 0$ και $\hat{\tau}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau(\theta)$, το ίδιο όριο προκύπτει με $\hat{\tau}_n$ στο δεξί άκρο, μέσω Slutsky.

Για σκέψη. Αυτό προετοιμάζει τα προσεγγιστικά διαστήματα. Το όριο δεν δίνει από μόνο του ακρίβεια προσέγγισης για συγκεκριμένο n.

Ορισμός της κατανομής Student

Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$ και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad Y_\nu \sim \chi^2_\nu.$$

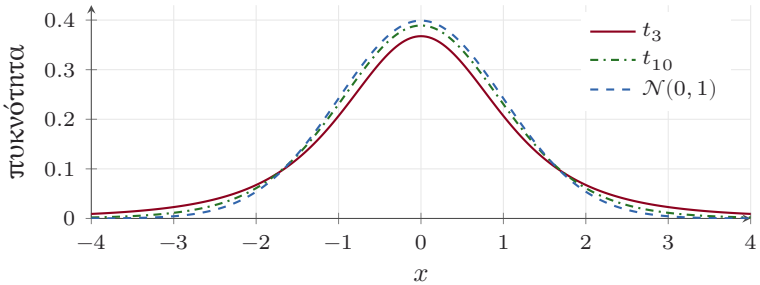
Η κατανομή της

$$T_\nu = \frac{Z}{\sqrt{Y_\nu/\nu}}$$

λέγεται **Student με ν βαθμούς ελευθερίας**. Γράφουμε $T_\nu \sim t_\nu$.

Η ανεξαρτησία είναι μέρος του ορισμού. Ο παρονομαστής είναι θετικός με πιθανότητα 1.

Student και κανονική: σύγκριση



Όλες είναι συμμετρικές. Η Student έχει βαρύτερες ουρές. Από $\mathbb{E}(Y_\nu/\nu) = 1$ και $\mathbb{V}(Y_\nu/\nu) = 2/\nu$, έχουμε $Y_\nu/\nu \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ και, με Slutsky, $T_\nu \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$.

Ακριβής νόμος στο κανονικό μοντέλο

Για τυχαίο δείγμα από $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$, $n \geq 2$,

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

$$Y_n = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}, \qquad Z_n \text{ και } Y_n \text{ ανεξάρτητες.}$$

Άρα, από τον ορισμό,

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{S_n} = \frac{Z_n}{\sqrt{Y_n/(n-1)}} \sim t_{n-1}.$$

Το αποτέλεσμα και η ανεξαρτησία: Casella–Berger, Θεώρημα 5.3.1. Εκτός κανονικού μοντέλου δεν δικαιολογείται γενικά ο ακριβής νόμος t_{n-1}.

Τι ακολουθεί στη θεωρία

1. **Μέθοδος δέλτα**: ασυμπτωτικές κατανομές μετασχηματισμών εκτιμητριών.
2. **Μέγιστη πιθανοφάνεια**: νέα μέθοδος κατασκευής εκτιμητριών, με χωριστή μελέτη ύπαρξης και ιδιοτήτων.
3. **Επάρκεια και πληρότητα**: εργαλεία για βελτίωση και βελτιστότητα σε ευρύτερες αμερόληπτες κλάσεις.
4. **Student**: ακριβή διαστήματα και έλεγχοι στο κανονικό μοντέλο.

Σύντομες ασκήσεις

1. Για Bernoulli(p), ποιο είναι το ελάχιστο n που επιτρέπει αμερόληπτη εκτίμηση του p^3;
2. Γιατί η ισχυρή συνέπεια της S_n^2 χρειάζεται μόνο $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, ενώ ο τύπος της $\mathbb{V}(S_n^2)$ περιλαμβάνει την μ_4;
3. Αν $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \tau^2)$, τι αλλάζει αν προσθέσουμε $c/\sqrt{n}$ στην T_n;
4. Στην Unif$[0, \theta]$, τι συμβαίνει στο $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$; Γιατί αυτή η κλίμακα δεν αποκαλύπτει μη εκφυλισμένο όριο;

Κεντρικά σημεία

- Αμερόληπτη εκτιμήτρια δεν υπάρχει πάντοτε, ούτε η αμεροληψία εξασφαλίζει ελάχιστο MSE.
- Η βελτιστότητα έχει νόημα μέσα σε καθορισμένη κλάση.
- Η συνέπεια δεν καθορίζει τον ρυθμό ή την οριακή κατανομή.
- Το Κ.Ο.Θ. και το Slutsky δίνουν κανονικά όρια υπό συγκεκριμένες υποθέσεις.
- Το ομοιόμορφο μέγιστο έχει εκθετικό όριο σε κλίμακα n.
- Η σύγκλιση κατανομών δεν συνεπάγεται σύγκλιση ροπών.

Αναφορές

- G. Casella και R. L. Berger, *Στατιστική Συμπερασματολογία*, ελληνική μετάφραση της 2ης έκδοσης: §§5.3, 5.5 και Κεφάλαιο 7.
- Σ. Τρέβεζας, *Διαλέξεις Μαθηματικής Στατιστικής 2020–2021*: σ. 33–60 για χ^2, συνέπεια, αμερόληπτη εκτίμηση σε κλάση και οριακά θεωρήματα· σ. 107–110 για Student.

Από το αν το σφάλμα μικραίνει, στο πώς μικραίνει.