σ-άλγεβρες – μέτρα – τυχαίο στοιχείο

(Διάλεξη 2).

Έστω Ω σύνολο, $\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (συλλογή υποσυνόλων του Ω)

- $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα, αν (i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$ (μη κενή), (ii) κλειστή στα συμπληρώματα (iii) κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις.
- $\forall \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$, όπου $\mathcal{A}_i$ σ-άλγεβρα που περιέχει το $\mathcal{C}$, δηλ. η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει το $\mathcal{C}$, και λέμε η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το $\mathcal{C}$.
- Αν (D, d) είναι μετρικός χώρος, και $\mathcal{C} = \{A \subset D : A$ ανοικτό στον $D\}$, τότε λέμε σύνολο Borel του D, κάθε στοιχείο του $\sigma(\mathcal{C}) \equiv \mathcal{B}(D)$.
- Μία συνάρτηση $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ (όπου $\mathcal{A}_i$, $i=1,2$ είναι σ-άλγεβρες) λέγεται $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2$-μετρήσιμη αν $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$ ή $\forall A_2 \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1$.
Όταν $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (D, \mathcal{B}(D))$ (μ.χ.), τότε η f λέγεται Borel-μετρήσιμη.
- Μία συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ λέγεται μέτρο αν
(i) $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$, $\forall (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$, με ξένα ανά δύο στοιχεία.
- Ένα μέτρο μ, λέγεται μέτρο πιθανότητας, αν $\mu(\Omega) = 1$ (– το συμβολίζουμε με P)
- Ο χώρος $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται χώρος μέτρου και ο $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας.
- Αν $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χ.π. και (D, d) μ.χ. με $\mathcal{B}(D)$ τα Borel υποσύνολά του, τότε η συνάρτηση $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (D, \mathcal{B}(D))$, στην περίπτωση που είναι Borel-μετρήσιμη, λέγεται τυχαίο στοιχείο με τιμές στο D. Περιλαμβάνει:
  (i) Τυχαία μεταβλητή, αν $(D, \mathcal{B}(D)) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
  (ii) Τυχαίο διάνυσμα, αν $(D, \mathcal{B}(D)) = (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$
  (iii) Τυχαίο πίνακα, αν $(D, \mathcal{B}(D)) = (\mathbb{R}^{m\times n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m\times n}))$
  (iv) στοχαστική διαδικασία, αν $(D, \mathcal{B}(D)) = (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$
  (v) Τυχαία συνάρτηση, αν $(D, \mathcal{B}(D)) = (\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathcal{F})) \rightarrow$ χώρος συναρτήσεων με κατάλληλη μετρική

Παρατήρηση

Η απαίτηση ότι $X^{-1}(\mathcal{B}(D)) \in \mathcal{A}$, για τη Borel-μετρησιμότητα της X μπορεί σε ορισμένες περιπτώσεις να αποδειχθεί αρκετά περιοριστική, ιδίως όταν ο μ.χ. D δεν είναι διαχωρίσιμος. Τότε μπορούμε να φραστούμε σε $\mathcal{A}_D \subsetneq \mathcal{B}(D)$, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η μετρησιμότητα ή να χρησιμοποιηθούν έννοιες όπως η εξωτερική πιθανότητα ή η εξωτερική μέση τιμή.

Διάλεξη 2

Υπενθύμιση από Διάλεξη 1:

- $\mathcal{F}$ είναι (ισχυρά) P-GC (P-Glivenko-Cantelli): $\|\mathbb{P}_\nu - P\|_{\mathcal{F}} = \sup_{f\in\mathcal{F}} |\mathbb{P}_\nu f - Pf| \xrightarrow{a.s.} 0$
- αριθμός bracketing $N^r_{[\,]}(\varepsilon,\mathcal{F},P)$: ο ελάχιστος αριθμός από ε-brackets που καλύπτει την $\mathcal{F}$
- αφηρημένο Θεώρημα G-C: Αν $\mathcal{F}$ ικανοποιεί $N^1_{[\,]}(\varepsilon,\mathcal{F},P)<\infty$, $\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \mathcal{F}$ είναι P-GC.

↳ ειδικότερα για $\mathcal{F}=\{1_{(-\infty,x]}(\cdot) : x\in\mathbb{R}\}$, $l_i = 1_{(-\infty,x_{i-1}]}$, $u_i = 1_{(-\infty,x_i)}$, $[l_i,u_i]_{i\in I}$ (όπως απόδ). παίρνουμε την απόδειξη του κλασσικού Θ. G-C

- $\log N^r_{[\,]}(\varepsilon,\mathcal{F},P) \longrightarrow$ εντροπία με υποστήριγμα (entropy with bracketing)

② $\boxed{\text{Παρατηρήσεις στις κλάσεις P-GC}}$

●) Η ιδιότητα P-GC εξαρτάται από το "μέγεθος" της κλάσης και το P.

(i) αν $|\mathcal{F}|<\infty$, τότε προφανώς η $\mathcal{F}$ είναι P-GC, διότι
$$\sup_{f\in\mathcal{F}}|\mathbb{P}_\nu f - Pf| = \max_{1\le i\le m}|\mathbb{P}_\nu f_i - Pf_i| \xrightarrow{a.s.} 0 \quad \left(\text{αφού } \mathbb{P}_\nu f_i \xrightarrow{a.s.} Pf_i, \forall 1\le i\le m\right)$$

(ii) $\mathcal{L}^1(P)$ είναι P-GC μόνο σε τετριμμένες περιπτώσεις, π.χ.

αν $P=\delta_c$ (dirac), τότε $\sup_{f\in\mathcal{F}=\mathcal{L}^1(P)}|\mathbb{P}_\nu f - Pf| \overset{a.s.}{=} \sup_f |f(c)-f(c)| = 0 \Rightarrow$

$\mathcal{L}^1(\delta_c)$ = όλες οι μετρήσιμες συναρτήσεις είναι δ_c-GC.

(iii) Θέτουμε $P=\frac{1}{2}\delta_0+\frac{1}{2}\delta_1$ $(X\sim Be(\frac{1}{2}))$, και $\mathcal{F}=\{f_k(x) : f_k(x) = kx\}_{k\in\mathbb{N}^*}$.

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}|\mathbb{P}_\nu f - Pf| = \sup_k |\mathbb{P}_\nu f_k - Pf_k| = \sup_k \left|k\bar{X}_\nu - \frac{k}{2}\right| = \sup_k \left|k(\bar{X}_\nu - \tfrac{1}{2})\right|$$

Έστω $\omega\in\Omega$. Τότε $\bar{X}_\nu(\omega)\neq\frac{1}{2}$ για άπειρα $\nu \Rightarrow \sup_k \left|k(\bar{X}_\nu(\omega)-\frac{1}{2})\right| = \infty$, για άπειρα ν.

$$\Longrightarrow \limsup_\nu \|\mathbb{P}_\nu - P\|_{\mathcal{F}}(\omega) = +\infty \Rightarrow \|\mathbb{P}_\nu - P\|_{\mathcal{F}}(\omega) \not\to 0, \text{ για κανένα } \omega\in\Omega.$$

(iv) Θέτουμε $\mathcal{F}=\{1_S(\cdot) : |S|<\infty, S\subseteq[0,1]\}$ και P: $P(\{x\})=0$, $\forall x\in[0,1]$ (μη ατομικό μ.π.).
Δείξτε ότι η κλάση $\mathcal{F}$ δεν είναι P-GC.

(v) $\sup_{f\in\mathcal{F}}|\mathbb{P}_\nu f - Pf|$ μπορεί να μην είναι τ.μ.! (δηλ. μετρήσιμη)

Αν η κλάση $\mathcal{F}$ είναι διαχωρίσιμη, τότε μπορούμε να πάρουμε το sup πάνω στο $\mathcal{F}_0$, όπου $\mathcal{F}_0$, αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

Μετρικοί χώροι - Παραδείγματα

- Είδαμε ότι $\boxed{\mathbb{F}_v \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{a.s} F}$ (ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια)

(i) Χρειαζόμαστε κατάλληλο μ.χ. να φιλοξενήσει τις F που είναι σ.κ.

(ii) Μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε διάφορα θεωρητικά χαρακτηριστικά, όπως μέση τιμή, ποσοστημόρια, διάφορα συναρτησοειδή ..., π.χ.

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dF(x) =: \gamma_f(F) \xrightarrow{\text{εκτίμηση}} \gamma_f(\mathbb{F}_v)$$ (μέση τιμή της $f(X)$)

$$\inf\{x\in\mathbb{R} : F(x)\geq a\} =: Q_a(F) \xrightarrow{\text{εκτίμηση}} Q_a(\mathbb{F}_v)$$ (συνάρτηση ποσοστημόριο)

έλεγχο καλής προσαρμογής : $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{υποτιθ. θεωρ. καταν.}}}{\|F - F_0\|_\infty}$ ή $\int_{-\infty}^{+\infty} (F(x) - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{υποτιθ. θεωρ. κατανομή}}}{F_0(x)})^2\, dF_0(x)$ (Είναι της μορφής $\gamma(F)$)

Η αντικατάσταση της F με την $\mathbb{F}_v$ οδηγεί σε εκτιμήτριες τύπου <u>plug in</u>.

Αν $\gamma(\mathbb{F}_v) \xrightarrow[v\to\infty]{a.s./P} \gamma(F)$, τότε είναι ισχυρά/ασθενώς συνεπείς εκτιμήτριες

π.χ. αν γ είναι συνεχές συναρτησοειδές $\overset{?}{\Longrightarrow}$ την σύγκλιση.

(D,d) μετρικός χώρος		(D,d) ψευδομετρικός χώρος	$(D,\|\cdot\|)$ νορμικός χώρος
(i) $d(x,y) = d(y,x)$	(συμμετρική)	✓	$\|\lambda x\| = \|\lambda\|\,\|x\|$
(ii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$	(τριγων. ανισότ.)	✓	$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$
(iii) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$		×	$\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

<u>Υπενθύμιση στοιχείων μ.χ.</u>

- A ανοικτό $\Leftrightarrow A = \bigcup_{x\in A} B(x,\varepsilon_x) \Leftrightarrow A = A^\circ$
- A κλειστό $\Leftrightarrow A^c$ ανοικτό $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow$ αν $(x_n)\subset A$ και $x_n \xrightarrow{d} x \Rightarrow x\in A$

όπου $A^\circ = \{x\in A : B(x,\varepsilon_x)\subset A$, για κάποιο $\varepsilon_x > 0\}$ και

$\overline{A} = \{x\in D : \exists (x_n)_{n\geq 1} \subseteq A$, με $x_n \xrightarrow{d} x\}$

- (D,d) διαχωρίσιμος μ.χ. $\Leftrightarrow \exists$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του.
- A πυκνό στο $D \Leftrightarrow \overline{A} = D$.
- $d_1 \sim d_2$ (ισοδύναμες) $\Leftrightarrow$ έχουν τα ίδια ανοικτά σύνολα
- (D,d) πλήρης μ.χ $\Leftrightarrow$ κάθε βασική ακολουθία του συγκλίνει.
- Η πληρότητα δεν είναι τοπολογική έννοια $\Rightarrow$ αν (D,d) δεν είναι πλήρης μ.χ, τότε μπορεί να $\exists\, d' \sim d : (D,d')$ να είναι πλήρης μ.χ. (λέμε ότι δέχεται ισοδύναμη πλήρη μετρ[ική])