Ασκ. 2

- $NegBin(1, p) \equiv Geo(p)$

$X \sim NegBin(1,p) \longrightarrow$ # δοκιμών μέχρι $1^{η}$ επιτυχία (άρα $Geo(p)$)

- Αν $X \sim NegBin(n, p)$ $[\underset{\text{φυσικός}}{n \geq 1}, 0 < p < 1]$, τότε

μπορούμε να γράψουμε $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, όπου

$X_i \sim Geo(p)$, $1 \leq i \leq n$, ανεξ. τ.μ.: ($Geo(p)$ στο $\mathbb{N}^*$).

(δηλ. γράφεται ως άθροισμα n ανεξάρτητων $Geo(p)$).

Εφαρμογές

π.χ. 1) σε παιχνίδια με ζάρια, αν

X = # δοκιμών μέχρι να εμφανιστεί για $n^{οστή}$ φορά εξάρι,

τότε $X \sim NegBin(n, \frac{1}{6})$ σε αμερόληπτο ζάρι.

2) σε πραγματικές εφαρμογές, έχει χρησιμοποιηθεί για να μοντελοποιήσει το πλήθος των τροπικών κυκλώνων στη Βόρεια Αμερική σε ετήσια βάση.

Δείτε Wikipedia Negative Binomial Distribution για περισσότερες εφαρμογές... (και αναφορές)

Ασκ. 3

• $X \sim NegBin(n, p)$ στο $\mathbb{N}$ $(n = 1, 2, \ldots, \ 0 < p < 1)$

αν $f(x; p) = P(X = x; p) = \binom{n+x-1}{n-1} p^n (1-p)^x$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, $0 < p < 1$

$X \longrightarrow$ # αποτυχιών μέχρι τη $n^{\underline{\text{οστή}}}$ επιτυχία.

$$E(X) = n\frac{1-p}{p}, \quad Var(X) = n\frac{1-p}{p^2}.$$

Τα παραπάνω προκύπταν εύκολα αν γράψουμε

$X = X_1 + \ldots + X_n$, όπου $X_i \sim Geo(p)$ στο $\mathbb{N}$, $1 \le i \le n$
+ ανεξάρτ. τ.μ.

Ασκ. 4

(i) X = # λευκών σφαιριδίων που επιλέγονται σε n εξαγωγές (χωρίς επανάθεση).

Προφανώς λοιπόν πρώτα $0 \le X \le r$ $\hookrightarrow$ # λευκών σφαιριδίων στην κάλπη.

Επειδή $n - X$ θα είναι επομένως τα μαύρα σφαιρίδια, θα πρέπει επιπλέον $0 \le n - X \le N - r$ $\hookrightarrow$ # μαύρων σφαιριδίων στην κάλπη.

Άρα
$$\left.\begin{array}{l} 0 \le X \le r \\ n + r - N \le X \le n \end{array}\right| \iff \boxed{\max(0, n+r-N) \le X \le \min(n, r)}$$

Άρα το $\underset{(\text{στήριγμα})}{S_X} = [\max(0, n+r-N), \min(n, r)]$

(ii) Έχουμε $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$, όπου

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } i\text{-λευκή σφαίρα επιλέγεται μετά από } \underline{n} \text{ εξαγωγές.} \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου η αρίθμηση είναι τυχαία (αυθαίρετη).

Προφανώς οι X_i, $1 \le i \le r$ είναι <u>ισόνομες</u>, αφού

$P(X_i = 1) = P(\text{"μία συγκεκριμένη λευκή σφαίρα να επιλεγεί μετά από } n\text{- εξαγωγές"})$
$= p$ (ανεξάρτητο του i).

Όμως $$p = \frac{\#\ \text{εξαγωγών}}{\#\ \text{σφαιρών}} = \frac{n}{N}.$$

[Το ελέγχαμε και ως εξής: $$P = \frac{\#\ \text{ευνοικών}}{\#\ \text{δυνατών}} = \frac{1\cdot\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{\cancel{\binom{N-1}{n-1}}}{\frac{N}{n}\cdot\cancel{\binom{N-1}{n-1}}} = \frac{n}{N}$$].

Άρα $X_i \sim Be\left(\frac{n}{N}\right)$, $\forall\ 1 \le i \le r$.

- Τελικά $$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{r} X_i\right) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i) \overset{X_i \sim Be(\frac{n}{N})}{=} \boxed{\frac{r\cdot n}{N}}$$

<u>Υπολογισμός διασποράς</u>

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{r} X_i\right) = \sum_{i=1}^{r} Var(X_i) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{r} Cov(X_i, X_j). \quad (*)$$

Όμως $$X_i \sim Be\left(\frac{n}{N}\right) \Rightarrow Var(X_i) = \frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right) = \frac{n(N-n)}{N^2} \quad (1).$$

Επιπλέον, $$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = E(X_i X_j) - \frac{n^2}{N^2} \quad (2).$$

$$E(X_i X_j) = P(X_i = 1, X_j = 1), \text{ αφού } X_i X_j = \begin{cases} 1, & \text{όταν } X_i = X_j = 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (3).$$

$$P(X_i=1, X_j=1) = P(\text{"να επιλεγούν } \underline{\underline{\text{και}}} \text{ η } i \text{ } \underline{\text{και}} \text{ η } j \text{ σε } n\text{-εξαγωγές"})$$

$$= \frac{\#\ \text{ευνοικών}}{\#\ \text{δυνατών}} = \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}\,\frac{(n-1)}{N-1}. \quad (4).$$

[στις ευνοικές, οι i και j είναι πάντα στη n-άδα με 1 μόνο τρόπο και οι υπόλοιπες διαλέγονται με $\binom{N-2}{n-2}$ δυνατούς τρόπους].

Συνδιάζοντας, (1),(2),(3) και (4), η $(*)$ γίνεται

$$Var(X) = \frac{r\,n(N-n)}{N^2} + r(r-1)\left[\frac{n}{N}\,\frac{n-1}{N-1} - \frac{n^2}{N^2}\right] =$$

$$\frac{rn}{N}\left[\frac{N-n}{N} + (r-1)\left(\frac{n-1}{N-1} - \frac{n}{N}\right)\right] = \frac{rn}{N}\,\frac{(N-n)(N-1) - (r-1)(N-n)}{N(N-1)} =$$

$$\frac{r\,n(N-n)}{N^2(N-1)}\,\frac{(N-r)}{N} = \boxed{\frac{r}{N}\left(1-\frac{r}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}$$

[συγκρίνετε με τη διασπορά, αν υπήρχε επανάθεση!]

Ασκ. 5

- Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$X = \mu + \sigma Z \quad , \text{ όπου } Z \sim N(0,1).$$

(αυτό προκύπτει γράφοντας $X = \mu + \sigma \cdot \frac{X-\mu}{\sigma}$, όπου $\frac{X-\mu}{\sigma} \equiv Z \sim N(0,1)$).

Γενικότερα αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $Z \sim N(0,1)$, τότε

$$X \overset{d}{=} \mu + \sigma Z.$$

- $F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$,

όπου Φ η σ.κ. της τυπικής κανονικής.

- $f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{\sigma} \Phi'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, όπου

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{η σ.π.π. της } N(0,1))$$

Ασκ. 6

- $Gamma(1, \theta) \equiv Exp(\theta)$
- Αν $X \sim Gamma(n, \theta)$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad , \text{ όπου } X_i \sim Exp(\theta), \ 1 \leq i \leq n$$

+ ανεξάρτητες τ.μ.,

δηλ. γράφεται ως άθροισμα n ανεξάρτητων $Exp(\theta)$ $(\theta > 0)$.

Ασκ. 7 (Υπενθύμιση υπολογισμού μέσων τιμών βασικών διακριτών + συνεχών τ.μ.).