Ασκ. 25

Αποδείξτε το Θ.Σ.Α. για $\xrightarrow{a.s.}$ + $\xrightarrow{P}$ (θεωρητική).

Λύση

$\xrightarrow{a.s.}$ Έστω $A = \{\lim X_\nu = X\}$ και $B = \{X \in C\}$.

Αν $\omega \in A \cap B \Longrightarrow \lim X_\nu(\omega) = X(\omega)$ και $X(\omega) \in C \xRightarrow[\text{αρχή μεταφοράς}]{g \text{ συνεχής στο } C}$

$$\lim_{\nu\to\infty} g(X_\nu(\omega)) = g(X(\omega)) \Rightarrow \omega \in \Gamma = \{\lim g(X_\nu) = g(X)\}.$$

Άρα $\boxed{A \cap B \subseteq \Gamma}$ (*). Όμως από υπόθεση

$$\left.\begin{matrix} X_\nu \xrightarrow{a.s.} X \\ P(X \in C) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} P(A) = 1 \\ P(B) = 1 \end{matrix}\right\} \xRightarrow{(*)} \underbrace{1 = P(A\cap B) \leq P(\Gamma) \leq 1}_{\Downarrow \; P(\Gamma) = 1}$$

$$\Longrightarrow g(X_\nu) \xrightarrow{a.s.} g(X).$$

$\xrightarrow{P}$ Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$. Θέτουμε

$$\Sigma_\delta = \{x \in \mathbb{R} : \forall y \in [x-\delta, x+\delta], \text{ έχουμε } |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon\}.$$

$$A = \{|X_\nu - X| \leq \delta\}, \quad B = \{X \in \Sigma_\delta\}, \quad \Gamma = \{|g(X_\nu) - g(X)| \leq \varepsilon\}.$$

Από τον τρόπο ορισμού του Σ_δ, έχουμε $A \cap B \subseteq \Gamma \Longrightarrow$

$$\Gamma^c \subseteq A^c \cup B^c \Rightarrow P(\Gamma^c) \leq P(A^c) + P(B^c) \text{ ή}$$

$$P(|g(X_\nu) - g(X)| > \varepsilon) \leq \underbrace{P(|X_\nu - X| > \delta)}_{\downarrow (\nu\to\infty) \; 0} + P(X \notin \Sigma_\delta) \Longrightarrow$$

$$\limsup_\nu P(|g(X_\nu) - g(X)| > \varepsilon) \leq 0 + P(X \notin \Sigma_\delta) \xRightarrow{\delta > 0 \text{ τυχόν}}$$

$$\limsup_\nu P(|g(X_\nu) - g(X)| > \varepsilon) \leq \lim_{\delta \downarrow 0} P(X \notin \Sigma_\delta) = P(\emptyset) = 0$$

Άρα $P[|g(X_\nu) - g(X)| > \varepsilon] \xrightarrow[(\forall \varepsilon > 0)]{} 0 \Longrightarrow g(X_\nu) \xrightarrow{P} g(X).$