Ασκ. 21

Αναδιατυπώστε τη σύγκλιση κατά πιθ. στη μορφή (α) και (β) χρησιμοποιώντας τον ορισμό σύγκλισης ακολουθ. πραγμ. αριθμών.

Λύση

(α) $X_\nu \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;,\; P(|X_\nu - X| > \varepsilon) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$.

$\Longleftrightarrow \boxed{\forall \varepsilon>0 \;,\; \forall \delta>0 \;,\; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \geq \nu_0 \;,\; P(|X_\nu - X| > \varepsilon) < \delta}$

(β) $X_\nu \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \;,\; P(|X_\nu - X| \leq \varepsilon) \longrightarrow 1$,

$\Leftrightarrow \boxed{\forall \varepsilon>0, \forall \delta>0 \;,\; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \geq \nu_0 \;,\; P(|X_\nu - X| \leq \varepsilon) > 1-\delta}$

Ασκ. 22 Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $\mathcal{E}xp(\theta)$ → παραμ. ρυθμού, $\theta > 0$

Η ε.ρ. του θ, είναι $\overline{\theta}_\nu = \dfrac{1}{\overline{X}_\nu}$.

(i) Βρείτε την κατανομή του $\overline{X}_\nu$ (γνωστή κατανομή)

(ii) Υπολογίστε το $b(\overline{\theta}_\nu)$.

(iii) Ν.δ.ο. η $\overline{\theta}_\nu$ είναι α.α.ε.

(iv) Τί αλλάζει αν πάρουμε $\mathcal{E}xp(\theta)$ → μέση τιμή. Δηλ. να βρείτε την $\overline{\theta}_\nu$ και να απαντήσετε στα (ii) και (iii).

Λύση

(i) $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. $\Rightarrow X_1, X_2, \dots, X_\nu$ ανεξ. $\mathcal{E}xp(\theta) \equiv G(1,\theta)$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim G(\nu,\theta) \Rightarrow \overline{X}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim \boxed{G(\nu, \nu\theta)}$$

(ii) $b(\overline{\theta}_\nu) = E(\overline{\theta}_\nu) - \theta = E\left(\dfrac{1}{\overline{X}_\nu}\right) - \theta \quad (1)$.

Θέτουμε $X = \overline{X}_\nu \sim G(\nu, \nu\theta) = G(a, \lambda)$, με $a = \nu$, $\lambda = \nu\theta$. (*)

Υπολογίζουμε τη $E\left(\dfrac{1}{X}\right)^K = E(X^{-K})$, για $k = 1, 2, \dots$

$$E(X^{-k}) = \int_0^{+\infty} x^{-k} \frac{\lambda^{a}}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}\, dx \underset{=}{\overset{\text{για}}{\underset{a-k>0 \iff k<a}{=}}}$$

$$\frac{\lambda^{a}}{\lambda^{a-k}} \cdot \frac{\Gamma(a-k)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\lambda^{a-k}}{\Gamma(a-k)} x^{a-k-1} e^{-\lambda x}}_{\sigma.\pi.\pi.\ G(a-k,\lambda)} dx = \lambda^{k} \frac{\cancel{\Gamma(a-k)}}{(a-1)\cdots(a-k)\cancel{\Gamma(a-k)}}$$

$$= \frac{\lambda^{k}}{(a-1)\cdots(a-k)} \quad (2), \quad k=1,2,\dots, \quad \underline{\underline{k<a}}.$$

Απο (2) $\Rightarrow$ $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\lambda}{a-1} \overset{(*)}{=} \frac{\nu\theta}{\nu-1}$ (πρέπει $\nu \geq 2$).

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad b(\overline{\theta}_\nu) = \frac{\nu}{\nu-1}\theta - \theta = \boxed{\frac{\theta}{\nu-1}}, \quad \forall \theta > 0$$

[Μπορείτε με τη βοήθεια της (2) να υπολογίσετε και $MSE(\overline{\theta}_\nu)$].

(iii) φανερά $\lim_{\nu\to\infty} b(\overline{\theta}_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\theta}{\nu-1} = 0$ $(\forall\theta>0)$, άρα

η $\overline{\theta}_\nu$ είναι α.α.ε. του θ.

(iv). Θα ήταν πολύ πιο εύκολο αν επιλέγαμε $\mathcal{E}xp(\theta)$ μέση τιμή.

Τότε $\overline{\theta}_\nu = \overline{X}_\nu$. Άρα $E(\overline{\theta}_\nu) = E(\overline{X}_\nu) = \theta$, $\forall\theta>0$

Έτσι η $\overline{\theta}_\nu$ είναι α.ε. $\Rightarrow$ η $\overline{\theta}_\nu$ είναι και α.α.ε.

Ασκ. 23

Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. $N(0,\sigma^2)$, με $\sigma^2 > 0$.

Τότε ν.δ.ο. η $T_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$ είναι

(i) α.ε. του σ^2

(ii) συνεπής εκτιμήτρια του σ^2, χρησιμοποιώντας

(α) το κριτήριο MSE, (β) τη σύγκλιση κατά πιθ.

(iii) απαντήστε στο (i)+(ii), για την $\frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$.

Λύση

(i) $$E(T_\nu) = E\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2\right) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} E(X_i^2) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\Big(\underbrace{Var(X_i)}_{=\sigma^2} + \underbrace{E^2(X_i)}_{=0}\Big)$$

$$= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\sigma^2 = \frac{\nu\sigma^2}{\nu} = \sigma^2, \ \forall \sigma^2 > 0.$$

$\Rightarrow T_\nu$ α.ε. του σ^2.

(ii) α) $$MSE(T_\nu) = Var(T_\nu) + \underbrace{b^2(T_\nu)}_{=0 \ (\alpha.\varepsilon)} = Var(T_\nu).$$

Όμως $$Var(T_\nu) = Var\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2\right) = \frac{1}{\nu^2} Var\sum_{i=1}^{\nu}(X_i^2)$$

$$\overset{X_i^2 \text{ ανεξ.}}{=} \frac{1}{\nu^2}\nu \cdot Var(X_1^2) = \frac{Var(X_1^2)}{\nu} \quad (1)$$

Όμως $X_1 \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X_1}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow$

$$\frac{X_1^2}{\sigma^2} \sim N^2(0,1) \equiv \chi_1^2 \Rightarrow X_1^2 \sim \sigma^2\chi_1^2 \Rightarrow$$

$$Var(X_1^2) = \sigma^4 Var(\chi_1^2) = 2\sigma^4 \quad (2).$$

Από (1) + (2) $\Rightarrow Var(T_\nu) = \frac{2}{\nu}\sigma^4$.

Άρα $MSE(T_\nu) = Var(T_\nu) \to 0$, $\nu \to \infty \Rightarrow T_\nu$ συνεπής.

Παρατήρηση

Παρατηρώντας ότι η T_ν είναι α.ε. του σ^2, τότε για τη συνέπεια, αρκεί $Var(T_\nu) \to 0$.

(iii) Αν $R_\nu = \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 = \boxed{\frac{\nu}{\nu-1} T_\nu}$

Άρα $E(R_\nu) = \frac{\nu}{\nu-1} E(T_\nu) = \frac{\nu}{\nu-1}\sigma^2, \ \forall \sigma^2>0 \Rightarrow$

$$b(R_\nu) = \frac{1}{\nu-1}\sigma^2, \ \forall \sigma^2>0 \quad (\text{θετική μεροληψία}).$$

Επίσης παρατηρούμε ότι $b(R_\nu) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0 \Rightarrow R_\nu$ α.α.ε. του σ^2.

Για να είναι συνεπής, αρκεί λοιπόν $Var(R_\nu) \longrightarrow 0$.

Πράγματι $Var(R_\nu) = Var\left(\frac{\nu}{\nu-1}T_\nu\right) \overset{(ii)\,a)}{=} \frac{\nu^2}{(\nu-1)^2}\cdot\frac{2}{\nu}\sigma^4 = \frac{2\nu}{(\nu-1)^2}\sigma^4$

$\Rightarrow Var(R_\nu) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0 \Rightarrow R_\nu$ συνεπής εκτιμήτρια του σ^2.

(ii) β) $X_1,\dots,X_\nu$ ανεξ. τ.μ $\Rightarrow X_1^2,\dots,X_\nu^2$ ανεξ. τ.μ.

$X_1,\dots,X_\nu$ ισόνομες τ.μ $\Rightarrow X_1^2,\dots,X_\nu^2$ ισόνομες τ.μ.

$X_1 \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow E(X_1^2) < +\infty$

$\Rightarrow$ Εφαρμόζεται ο Α.Ν.Μ.Α για την ακολουθία $(X_\nu^2)_{\nu\geq 1}$,

και άρα $T_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 = \overline{X_\nu^2} \xrightarrow{P} E(X_1^2) =$

(δειγμ. μέσος των X_i^2)

$$= E\Big(\sigma^2 \underbrace{\left(\frac{X_1}{\sigma_1}\right)^2}_{\sim \chi_1^2}\Big) = \sigma^2 \underbrace{E(\chi_1^2)}_{=1} = \sigma^2, \ \forall \sigma^2>0.$$

Ασκ. 24

Ν.δ.ο. $X_\nu \xrightarrow{P} c \ (\in \mathbb{R}) \iff X_\nu \xrightarrow{d} c$.

Αποδ: $\Rightarrow$). Πρέπει ν.δ.ο. $X_\nu \xrightarrow{d} c$. Θέτουμε F_ν τη σ.κ. της X_ν.

Επειδή η σ.κ. της εκφυλισμένης τ.μ. $X = c$, είναι

$$F_c(x) = \begin{cases} 0 & , x < c \\ 1 & , x \geq c \end{cases}$$

, αρκεί ν.δ.ο.

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(x) = F_c(x) = \begin{cases} 0 & , x < c \\ 1 & , x > c \end{cases}$$

, που είναι τα σημεία συνεχείας της $F_c(x)$. Πράγματι, αν $x < c$, τότε

$$F_\nu(x) = P(X_\nu \leq x) = P(X_\nu - c \leq x - c)$$

$$\leq P(X_\nu - c \leq \underbrace{x-c}_{<0}) + P(X_\nu - c \geq \underbrace{c-x}_{>0})$$

$$= P(|X_\nu - c| \geq \underbrace{c-x}_{>0}) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0, \text{ αφού } X_\nu \xrightarrow{P} c.$$

Παρόμοια έχουμε ότι $F_\nu(x) \to 1$, για $x > c$ (δείξτε το).

$\Leftarrow$) Πρέπει ν.δ.ο. $X_\nu \xrightarrow{P} c$, δηλ. $\forall \varepsilon > 0$.

$$P(|X_\nu - c| > \varepsilon) \to 0.$$

Όμως $P(|X_\nu - c| > \varepsilon) = P(X_\nu - c > \varepsilon) + P(X_\nu - c < -\varepsilon)$

$$= P(X_\nu > c + \varepsilon) + P(X_\nu < c - \varepsilon)$$

$$\leq P(X_\nu > c+\varepsilon) + P(X_\nu \leq c - \varepsilon) = \underbrace{1 - F_\nu(c+\varepsilon) + F_\nu(c-\varepsilon)}_{\text{υπόθεση } X_\nu \xrightarrow{d} c}$$

$$1 - 1 + 0 = 0$$

Άρα πράγματι, $X_\nu \xrightarrow{P} c$.