Ασκ. 16

Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $\mathcal{U}[0, 1+\theta]$, $\theta \geq 0$

(i) Βρείτε με τη μέθοδο των ροπών κατάλληλη εκτιμήτρια (δηλ. κοιτάμε περιορισμούς), όπως επίσης να βρείτε εκτιμήτρια που να είναι συνάρτηση του $X_{(\nu)}$.

(ii) Υπολογίστε τη μεροληψία τους και το ΜΤΣ (MSE).

Λύση

(i)a) $X \sim \mathcal{U}[0, 1+\theta]$, άρα για τη μέθοδο ροπών, λύνουμε

$$E(X) = \overline{X} \iff \frac{1+\theta}{2} = \overline{X} \iff \theta = 2\overline{X} - 1.$$

Προσοχή! Θέλουμε $\theta \geq 0 \iff 2\overline{X} - 1 \geq 0$,

έτσι μόνο θα έχουμε εκτιμήτρια, δηλ. με τιμές στο $[0, +\infty)$ που είναι και το εύρος τιμών του θ. Άρα η τελική απάντηση πρέπει να λάβει υπ'όψη της αυτόν τον περιορισμό.

Τελικά επιλέγουμε $\boxed{\overline{\theta} = \max\{2\overline{X} - 1, 0\}}$ (γράφεται και $(2\overline{X}-1)^+$)

Παρατήρηση

$$E(2\overline{X} - 1) = 2E(\overline{X}) - 1 = 2E(X) - 1 = 2\left(\frac{1+\theta}{2}\right) - 1 = \theta, \forall \theta \geq 0.$$

Θα είχε λοιπόν κάποιος την τάση να πεί ότι φαίνεται καλή εκτιμήτρια, αφού είναι αμερόληπτη. Όμως λόγω του περιορισμού δεν είναι εκτιμήτρια, π.χ. για $\nu = 1$ παρατηρούμε ότι όλες οι πραγματοποιήσεις x, με $0 < x < \frac{1}{2}$, θα οδηγούσαν σε αρνητικές τιμές του $\overline{\theta}$, που δεν είναι επιτρεπτό.

(β) Αν $\lambda = 1+\theta$, τότε $\theta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 1$.

Είδαμε ότι η $\frac{\nu+1}{\nu} X_{(\nu)}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του λ, που αντιστοιχεί σε $\mathcal{U}[0,\lambda]$, όταν $\lambda > 0$.

Άρα η $\frac{\nu+1}{\nu} X_{(\nu)} - 1$ θα ήταν α.ε. του $\theta = \lambda - 1$, αν $\theta > -1$. Λόγω του περιορισμού, πρέπει και εδώ να εξασφαλίσουμε ότι $\frac{\nu+1}{\nu} X_{(\nu)} - 1 \geq 0$.

Τελικά επιλέγουμε $\tilde{\theta} = \boxed{\max\left\{ \frac{\nu+1}{\nu} X_{(\nu)} - 1 , 0 \right\}}$

(π.χ. για $\nu = 1$, παρατηρείστε ότι θα είχαμε το ίδιο πρόβλημα με $0 < x < \frac{1}{2}$, όπως πριν για την αρχική λύση που προέκυπτε από τη μέθοδο των ροπών)

(ii) Παρατηρείστε ότι η $\bar{\theta} = \max\{2\bar{X} - 1, 0\}$ και

η $\tilde{\theta} = \max\left\{ \frac{\nu+1}{\nu} X_{(\nu)} - 1 , 0 \right\}$ είναι εκτιμήτριες

τύπου $\max\{Y, 0\}$, όπου η Y είναι συνεχής τ.μ.

Εδώ το 0 , (ένα μόνο σημείο) παίρνει θετική πιθανότητα αφού $P(Y<0) > 0$, και έτσι οι $\bar{\theta}$ και $\tilde{\theta}$ είναι μικτές τ.μ. (έχουν διακριτό και συνεχές μέρος).

Θα υπολογίσουμε πρώτα τη μεροληψία τους $b(\bar{\theta})$ και $b(\tilde{\theta})$

(αναμένουμε θετική μεροληψία, αφού $E_\theta(Y) = \theta$, $\forall \theta \geq 0$

και η $Z = \max\{0, Y\} \geq Y \Rightarrow \underline{E_\theta(Z) \geq E_\theta(Y)}, \forall \theta \geq 0$)

[τα επιχειρήματα αυτά μας βοηθάνε να ελέγχουμε τα τελικά αποτελέσματα].

Ξεκινάμε με τη $\tilde{\theta}$.

Έχουμε δείξει ότι $f_{X_{(\nu)}}(x;\lambda) = \boxed{\dfrac{\nu\, x^{\nu-1}}{\lambda^{\nu}}}$, $0 \le x \le \lambda$,

άρα $f_{X_{\nu}}(x;\theta) = \boxed{\dfrac{\nu \cdot x^{\nu-1}}{(1+\theta)^{\nu}}}$, $0 \le x \le 1+\theta$.

Έχουμε $\dfrac{\nu+1}{\nu}x - 1 \ge 0 \iff \boxed{x \ge \dfrac{\nu}{\nu+1}}$. Άρα

αναλύεται παρακάτω

$$E(\tilde{\theta}) \overset{(*)}{=} \int_{\frac{\nu}{\nu+1}}^{\lambda} \underbrace{\left(\frac{\nu+1}{\nu}x - 1\right)}_{g(X_{(\nu)})} \underbrace{\frac{\nu \cdot x^{\nu-1}}{\lambda^{\nu}}}_{f_{X_{(\nu)}}(x)} dx =$$

(περιορισμος)

$$\frac{\nu}{\lambda^{\nu}}\left[\int_{\frac{\nu}{\nu+1}}^{\lambda} \frac{\nu+1}{\nu} x^{\nu}\, dx - \int_{\frac{\nu}{\nu+1}}^{\lambda} x^{\nu-1}\, dx\right] =$$

$$= \frac{\nu}{\lambda^{\nu}}\left[\frac{\cancel{\nu+1}}{\nu}\cdot\left[\frac{x^{\nu+1}}{\cancel{\nu+1}}\right]_{\frac{\nu}{\nu+1}}^{\lambda} - \left[\frac{x^{\nu}}{\nu}\right]_{\frac{\nu}{\nu+1}}^{\lambda}\right] =$$

$$\frac{\nu}{\lambda^{\nu}}\left[\frac{1}{\nu}\left(\lambda^{\nu+1} - \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu+1}\right) - \frac{1}{\nu}\left(\lambda^{\nu} - \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu}\right)\right]$$

$$= \dots = \lambda - 1 + \frac{1}{\nu+1}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu}\frac{1}{\lambda^{\nu}} \overset{1+\theta=\lambda}{=} \theta + \frac{1}{\nu+1}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu}\frac{1}{(1+\theta)^{\nu}}$$

$$\Rightarrow \boxed{b(\tilde{\theta}) = E(\tilde{\theta}) - \theta = \frac{1}{\nu+1}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu}\frac{1}{(1+\theta)^{\nu}} > 0 ,}$$

Και μάλιστα είναι φθίνουσα συνάρτηση του θ, κάτι το οποίο πάλι θα περιμέναμε, αφού όταν $\theta\uparrow$, τότε $P(\tilde{\theta}=0)\downarrow$, με αποτέλεσμα $E(\tilde{\theta})$ να προσεγγίζει το θ.

* $$\boxed{E(X^+) = \int_0^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \quad \text{, αν } X \text{ έχει σ.π.π.}}$$

Ερώτηση: Πως μπορούμε να υπολογίσουμε $E(\max\{X, c\})$? για $c \in \mathbb{R}$ και όχι κατ' ανάγκη 0 ?

Προαιρετική εργασία 1: (i) (όποιος θέλει μου φέρνει την εργασία)

- Υπολογίστε το $MSE(\tilde{\theta})$ (ακριβής έκφραση)

• Για τη $\bar{\theta}$ είναι πιο δύσκολος ο υπολογισμός της μεροληψίας

Σας δίνω τη σ.π.π. της κατανομής του Bates, που είναι η κατανομή του $\bar{X}$, απο ανεξ + ισον. $\mathcal{U}(0,1)$ (ομοιόμορφη στο (0,1)).

$$f_{\bar{X}}(x) = \frac{v}{2(v-1)!} \sum_{k=0}^{v} (-1)^k \binom{v}{k} (vx-k)^{v-1} \operatorname{sgn}(vx-k), \quad (*)$$

όπου $\operatorname{sgn}(vx-k) = \begin{cases} -1 & \text{, αν } vx < k \\ 0 & \text{, αν } vx = k \\ 1 & \text{, αν } vx > k. \end{cases}$

Προαιρετική εργασία 1 (ii)

Ζητείται έκφραση για το $b(\bar{\theta})$, ως συνάρτηση του θ.

[υπόδειξη: χρησιμ. πρώτα το λ]
+ ελέγξτε ότι για $v=1$, ότι συμπίπτει με $b(\tilde{\theta})$.

Προερ. εργασία 1 (iii)

Υπολογίστε $MSE(\bar{\theta})$ για $v=2$ (ανεξάρτητα της έκφρασης *), και στη συνέχεια.

χρησιμοπ. την (*) για εύρεση τύπου του $MSE(\bar{\theta})$ για αυθαίρετο v.

Προερ. εργασία 1 (iv)

Σχεδιάστε τα γραφήματα των $b(\bar{\theta})$, $MSE(\bar{\theta})$ και $b(\tilde{\theta})$, $MSE(\tilde{\theta})$, με τη βοήθεια λογισμικού της αρεσκείας σας, για $v=1, 2, 5, 10$.

Ασκ. 17

Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. απο $N(\mu, \sigma^2)$.
Βρείτε εκτιμήτρια του σ^2 της μορφής $c \sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \overline{X})^2$,
με το μικρότερο ΜΤΣ. (Υπόδ: χρησιμ. την Ασκ. 10).

Λύση

Έχει δειχθεί στην Ασκ. 10 ότι $Var(S^2) = \sigma^4 \left(\frac{\gamma_2}{\nu} + \frac{2}{\nu-1} \right)$.

Όμως $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. $N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \gamma_2 = 0$.

Άρα $Var(S^2) = \dfrac{2\sigma^4}{\nu-1}$, $\nu \geq 2$.

Αν $\mathcal{U} = c \sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \overline{X})^2$, τότε $\mathcal{U} = (\nu-1)\, c\, \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\overline{X})^2}{\nu-1}}_{} = c(\nu-1)S^2$.

Άρα $\boxed{Var(\mathcal{U}) = c^2(\nu-1)^2\, Var(S^2) = 2c^2(\nu-1)\,\sigma^4}$.

Επιπλέον $MSE(\mathcal{U}) = Var(\mathcal{U}) + b^2(\mathcal{U}) = 2c^2(\nu-1)\sigma^4 +$

$$+ \left(E(\mathcal{U}) - \sigma^2\right)^2 = 2c^2(\nu-1)\sigma^4 + [c(\nu-1)\underbrace{E(S^2)}_{=\sigma^2} - \sigma^2]^2$$

$$= 2c^2(\nu-1)\sigma^4 + \left(c(\nu-1) - 1\right)^2 \sigma^4$$

$$= \left[2c^2(\nu-1) + c^2(\nu-1)^2 - 2c(\nu-1) + 1\right]\sigma^4$$

$$= \left\{\left[(\nu-1)^2 + 2(\nu-1)\right]c^2 - 2(\nu-1)c + 1\right\}\sigma^4$$

$$= \{\underbrace{(\nu-1)(\nu+1)c^2 - 2(\nu-1)c + 1}_{= f(c)}\}\sigma^4.$$

Για να ελαχιστοποιήσουμε το $MSE(\mathcal{U})$ αρκεί να ελαχιστ. το $f(c)$.

Έχουμε λοιπόν ως δευτεροβάθμια ότι $c^* = \dfrac{2(\nu-1)}{2(\nu-1)(\nu+1)}$

$\Longrightarrow c^* = \dfrac{1}{\nu+1}$, και άρα

$$\boxed{\mathcal{U}^* = \frac{1}{\nu+1} \sum_{i=1}^{\nu} (X_i - \overline{X})^2}$$

(Παρατήρηση
Προσέξτε ότι για να διορθώσουμε τη μεροληψία, οδηγηθ. σε $c' = \frac{1}{\nu-1}$ ενώ εδώ για το MSE, $c'' = \frac{1}{\nu+1}$!)