Λύσεις

(1) Οι μετασχηματισμοί αυτοί οδηγούν σε αναπαραμετρήσεις.
Μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\theta = h(\eta)$ και h παραγωγίσιμη, τότε

$$I^*(\eta) = I(\theta)\left(h'(\eta)\right)^2.$$ Πράγματι,

$$I^*(\eta) = E\left[\left(\frac{d}{d\eta}\log f(X; h(\eta))\right)^2\right] = E\left[\left(\left(\frac{d}{dh(\eta)}\log f(X; h(\eta))\right)\frac{dh(\eta)}{d\eta}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\log f(X;\theta)\right)^2\right]\cdot\left(h'(\eta)\right)^2 = I(\theta)\left(h'(\eta)\right)^2.$$

(i) έχει δειχθεί μαθ. 16, παραδ. 1, ότι $I(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$.

(ii) $\eta = \sqrt{\lambda} \Rightarrow \lambda = \eta^2 = h(\eta) \Rightarrow h'(\eta) = 2\eta$

Άρα $I^*(\sqrt{\lambda}) = I(\lambda)\left(h'(\eta)\right)^2 = \frac{1}{\lambda}\cdot(2\eta)^2 = \frac{4\eta^2}{\lambda} = \frac{4(\sqrt{\lambda})^2}{\lambda} = 4$

(iii) $\eta = \log\lambda \Rightarrow \lambda = e^\eta = h(\eta) \Rightarrow h'(\eta) = e^\eta$

Άρα $I^*(\log\lambda) = I(\lambda)\left(h'(\eta)\right)^2 = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\eta}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda} = \lambda.$

Σχόλια

Όπως έχει φανεί και από την απόδειξη το μ.π.-F εξαρτάται από την παράγωγο $h'(\eta)$, του μετασχηματισμού $h(\eta)$.
Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μετασχηματισμούς που σταθεροποιούν την πληροφορία, όπως στο (ii). Επίσης βλέπουμε ότι μπορεί να αλλάξει η μονοτονία του μ.π.-F ως προς την παράμετρο, παρ'ότι ο αρχικός μετασχηματισμός ήταν αύξουσα συνάρτηση, όπως στο (iii)

(2) Δείχνουμε ότι $X_i \in$ Ε.Ο.Κ.(θ)

- $S_f = (0, +\infty)$, ανεξάρτητο του θ.
- $f(x_i;\theta) = \underbrace{\dfrac{\theta^a}{\Gamma(a)}}_{\substack{\parallel \\ b(\theta)}} \underbrace{x_i^{a-1}}_{\substack{\parallel \\ h(x_i)}} \underbrace{e^{-\theta x_i}}_{\substack{\parallel \\ e^{n(\theta)T(x_i)}}}$, όπου $T(x_i) = x_i$.

- Απο γνωστή Πρόταση για Ε.Ο.Κ., έχουμε ότι η

$$T(X) = \sum_{i=1}^{\nu} T(X_i) = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$$ είναι επαρκής & πλήρης σ.σ. για το θ.

- Απο θεώρημα L-S αρκεί να βρούμε $h(T)$:

$$E[h(T)] = \theta, \quad \forall \theta > 0$$ (τότε θα είναι η α.ε.ε.δ.)

Για να είναι η $\delta(X) = h[T(X)] = \dfrac{\nu a - 1}{\nu \bar{X}} = \dfrac{\nu a - 1}{\sum_{i=1}^{\nu} X_i} = \dfrac{\nu a - 1}{T(X)}$, η

α.ε.ε.δ. πρέπει λοιπόν $h(t) = \dfrac{\nu a - 1}{t}$.

Όμως $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \overset{X_i \text{ ανεξ. } G(a,\theta)}{\sim} G(\nu a, \theta)$. Άρα

$$E[h(T)] = (\nu a - 1) E\left(\frac{1}{T}\right) = (\nu a-1) \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \frac{\theta^{\nu a}}{\Gamma(\nu a)} t^{\nu a - 1} e^{-\theta t} dt$$

$$= (\nu a - 1) \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\nu a}}{\Gamma(\nu a)} t^{\nu a - 2} e^{-\theta t} dt = \frac{(\nu a-1)\theta}{\nu a - 1} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\nu a - 1}}{\Gamma(\nu a - 1)} t^{\nu a - 2} e^{-\theta t} dt}_{\substack{\parallel \\ 1}}$$ (σ.π.π. $G(\nu a - 1, \theta)$)

$\downarrow$ πρέπει > 0

$= \theta$, $\forall \theta > 0$, το οποίο δείχνει ότι η δ είναι α.ε.ε.δ.

- $$\text{Κ.φ.} - \text{C.R.} = \frac{1}{I(\theta)} = \frac{1}{\nu I_1(\theta)}.$$

$$I_1(\theta) = E_1\left[\left(\frac{d}{d\theta} \log f(X_i;\theta)\right)^2\right] = Var\left[\frac{d}{d\theta}\log f(X_i;\theta)\right] = E\left[-\frac{d^2}{d\theta^2}\log f(X_i;\theta)\right]$$

Έχουμε $\log f(X_i;\theta) = a \log\theta - \log\Gamma(a) + (a-1)\log X_i - \theta X_i \Rightarrow$

$$\frac{d}{d\theta}\log f(X_i;\theta) = \frac{a}{\theta} - X_i \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\log f(X_i;\theta) = -\frac{a}{\theta^2} \Rightarrow$$

$I_1(\theta) = \dfrac{a}{\theta^2}$. Άρα $\text{Κ.φ.} - \text{C.R.} = \dfrac{1}{\nu I_1(\theta)} = \dfrac{\theta^2}{\nu a}$.

Θα υπολογίσουμε τώρα τη διασπορά $Var(\delta)$.

$$Var(\delta) = Var\left(\frac{\nu a-1}{T}\right) = (\nu a-1)^2\, Var\left(\frac{1}{T}\right) = (\nu a-1)^2\left(E\left[\frac{1}{T^2}\right] - \left(E\left[\frac{1}{T}\right]\right)^2\right)$$

$$= (\nu a-1)^2\left(E\left[\frac{1}{T^2}\right] - \left(\frac{\theta}{\nu a-1}\right)^2\right) = (\nu a-1)^2 E\left[\frac{1}{T^2}\right] - \theta^2 \quad (1)$$

Έχουμε $E\left[\frac{1}{T^2}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\frac{\theta^{\nu a}}{\Gamma(\nu a)} t^{\nu a-1} e^{-\theta t}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{\theta^{\nu a}}{\Gamma(\nu a)} t^{\nu a-3} e^{-\theta t}\,dt$

$$= \frac{\theta^2}{(\nu a-1)(\nu a-2)} \underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\theta^{\nu a-2}}{\Gamma(\nu a-2)} t^{\nu a-3} e^{-\theta t}\,dt}_{=1 \ (\sigma.\pi.\pi.\ G(\nu a-2,\theta)\ \mu\varepsilon\ \nu a-2>0)} = \frac{\theta^2}{(\nu a-1)(\nu a-2)},\ \forall\theta>0$$

Λόγω και της (1),

$$Var(\delta) = \frac{(\nu a-1)^{\cancel{2}}\theta^2}{(\nu a-\cancel{1})(\nu a-2)} - \theta^2 = \left(\frac{\nu a-1}{\nu a-2}-1\right)\theta^2 = \frac{\theta^2}{\nu a-2} > \frac{\theta^2}{\nu a} = K.\varphi.-C.R$$

Συμπεραίνουμε ότι η δ δεν είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια. Μάλιστα, η απόδοσή της είναι $a(\delta) = \frac{K.\varphi.-C.R.}{Var(\delta)} = \frac{\nu a-2}{\nu a} = 1-\frac{2}{\nu a}$

(3) Έχουμε δείξει ότι η $T=\sum_{i=1}^{\nu} X_i$ είναι επαρκής και πλήρης σ.σ. για το p. (π.χ. μέσω Ε.Ο.Κ.). Απο Θεώρημα L-S αρκεί να βρούμε $h(T)$:

$E[h(T)] = p \quad , \forall p\in(0,1)$. Όμως,

$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = \nu\, E(X_1) = \nu N p \qquad \left(E\left(Bin(N,p)\right) = Np\right)$

$$\Rightarrow E\Big(\underbrace{\frac{T}{\nu N}}_{=h(T)}\Big) = p \quad , \forall p\in(0,1).$$

Άρα η $\delta = \frac{T}{\nu N} = \frac{\overline{X}}{N}$ είναι α.ε.ε.δ. του p,

με $Var(\delta) = Var(\overline{X}/N) = Var(X_1)/\nu N^2 = Np(1-p)/\nu N^2 = p(1-p)/\nu N$.

Όμως $f(x_i;p) = \binom{N}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{N-x_i} \Rightarrow \log f(x_i;p) = \log\binom{N}{x_i} + x_i\log p + (N-x_i)\log(1-p)$

$\Rightarrow \frac{d}{dp}\log f(x_i;p) = \frac{x_i}{p} - \frac{N-x_i}{1-p} = \frac{x_i - pN}{p(1-p)} \Rightarrow$

$I_1(p) = Var\left(\frac{d}{dp}\log f(X_i;p)\right) = \frac{Var(X_i)}{p^2(1-p)^2} = \frac{N}{p(1-p)} \Rightarrow K.\varphi.-C.R = \frac{1}{\nu I_1(p)} = \frac{p(1-p)}{\nu N} = Var(\delta)$

Άρα δ αποτελεσματική.

(4) (α) $E(\overline{X}) = E(X_1) = p$, άρα ο $\overline{X}$ είναι α.ε. του p.

$\overline{X} \xrightarrow{P} E(X_1)=p$, απο Α.Ν.Μ.Α. $\Rightarrow$ $\overline{X}$ συνεπής εκτιμήτρια του p.

$\left(Var(\overline{X}) = \frac{Var(X_1)}{\nu} = \frac{p(1-p)}{\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0 \right.$ $\Rightarrow$ απο γνωστό Θεώρημα, ότι $\overline{X}$ συνεπής). Εφ'όσον $\overline{X}$ και α.ε. του p.

(β) $E(T_\nu) = \frac{\nu E(X_1)+c}{\nu+2} = \frac{\nu p + c}{\nu+2} = \frac{\nu}{\nu+2}p + \frac{c}{\nu+2} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} p$,

άρα η σ.σ. T_ν είναι ασυμπτωτικά α.ε του p. Απο γνωστό Θεώρημα για να είναι και συνεπής αρκεί $Var(T_\nu) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

Όμως $Var(T_\nu) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i + c}{\nu+2}\right) = \frac{Var\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right)}{(\nu+2)^2} = \frac{\nu p(1-p)}{(\nu+2)^2} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

(γ) <u>Σχόλιο</u> : η ύπαρξη φυσικού αριθμού με αυτήν την ιδιότητα, εξασφαλίζεται απο τη συνέπεια του T_ν, αφού $\forall \varepsilon>0$, έχουμε

$$P\left[\left|T_\nu - \tfrac{1}{2}\right| \leq \varepsilon\right] \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1 \text{ , και άρα } \exists \nu_0 : \forall \nu \geq \nu_0 ,$$

$$P\left[\left|T_\nu - \tfrac{1}{2}\right| \leq \varepsilon\right] \geq 1-a \quad (a>0).$$

<u>Λύση</u>

$$E(T_\nu) = \frac{\nu p + c}{\nu+2} = \frac{\nu\cdot\frac{1}{2}+1}{\nu+2} = \frac{\nu+2}{2(\nu+2)} = \frac{1}{2} \quad (1) \quad \left(p=\tfrac{1}{2}, c=1\right)$$

$$Var(T_\nu) = \frac{\nu p(1-p)}{(\nu+2)^2} = \frac{\nu}{4(\nu+2)^2} . \quad (2)$$

Επίσης παρατηρούμε ότι $T_\nu = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i + 1}{\nu+2} = \frac{1}{\nu+2}\sum_{i=1}^{\nu} X_i + \frac{1}{\nu+2}$, (3)

και $S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim Bin(\nu, p)$ (άθροισμα ν-ανεξ. $Be(p)$) , άρα προσεγγίζεται ασυμπτωτικά (για μεγάλο ν) απο $N(\nu p, \nu p(1-p)) = N\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{4}\right)$, και άρα το ίδιο συμβαίνει για τη σ.σ. T_ν (απο (3), είναι $a_\nu S_\nu + b_\nu$).

Συμπεραίνουμε ότι $T_\nu \overset{\text{προσεγγ.}}{\sim} N(E(T_\nu), Var(T_\nu)) \overset{(1),(2)}{=} N\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{4(\nu+2)^2}\right)$.

Χρησιμοποιώντας αυτή τη προσεγγιστική κατανομή, ως πραγματική κατανομή, έχουμε

$$P\left[\left|T_\nu-\tfrac{1}{2}\right|<\varepsilon\right]=P\left[\left|\frac{T_\nu-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\nu}{4(\nu+2)^2}}}\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\nu}{4(\nu+2)^2}}}\right]$$

$$\overset{Z\sim N(0,1)}{=}P\left[|Z|<\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\right]\overset{(*)}{=}\Phi\left(\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\right)-\Phi\left(-\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\right)$$

$$\overset{\Phi(-x)=1-\Phi(x)}{=}2\Phi\left(\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\right)-1 .$$ Άρα

$$P\left[\left|T_\nu-\tfrac{1}{2}\right|<\varepsilon\right]\geq 1-a \iff 2\Phi\left(\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\right)-1\geq 1-a$$

$$\iff \Phi\left(\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\right)\geq 1-\frac{a}{2}\overset{1-\frac{a}{2}=\Phi(z_{a/2})}{\iff}\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\geq z_{a/2}\quad(**)$$

$$\iff \frac{(\nu+2)^2}{\nu}\geq\frac{z_{a/2}^2}{4\varepsilon^2}\iff \nu^2+\left(4-\frac{z_{a/2}^2}{4\varepsilon^2}\right)\nu+4\geq 0$$

Για επαρκώς μικρό ε, πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε το ελάχιστο ν_0^*:

$$\nu_0^*\geq\frac{\frac{z_{a/2}^2}{4\varepsilon^2}-4+\sqrt{\left(4-\frac{z_{a/2}^2}{4\varepsilon^2}\right)^2-16}}{2}=\frac{z_{a/2}^2}{8\varepsilon^2}-2+\sqrt{\left(2-\frac{z_{a/2}^2}{8\varepsilon^2}\right)^2-4}$$

$\underset{\text{εναλλακτικά}}{*}$: Επίσης $=1-P\left(|Z|>\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\right)$.

Άρα $P\left(\left|T_\nu-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\right)\geq 1-a \iff 1-P\left(|Z|>\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\right)\geq 1-a \iff$

$$P\left(|Z|>\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\right)\leq a\overset{\text{συμμετρία}}{\iff}2P\left(Z>\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\right)\leq a\iff$$

$$P\left(Z>\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\right)\leq\underset{P(Z>z_{a/2})}{\underset{\parallel}{\frac{a}{2}}}\iff\frac{2\varepsilon(\nu+2)}{\sqrt{\nu}}\geq z_{a/2}$$, δηλ. η (**).

(δ) διότι πρέπει η T_ν να είναι και εκτιμήτρια, δηλ $T_\nu\in(0,1)$, αφού είναι εκτιμήτρια του p.

(5) Δείχνεται εύκολα ότι $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ είναι α.ι.τ.μ., και

$$P(T_1 > t) = P(\underbrace{N(t) = 0}_{\#\text{ εκπεμπ. σωματιδίων σε χρόνο } t}) = e^{-\frac{1}{\theta} \cdot t} \qquad \left(\lambda = \frac{1}{\theta} t\right).$$

Άρα $T_1 \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\theta}\right)$, και άρα έχουμε τ.δ. απο $\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\theta}\right)$.

α) έχει δειχθεί ότι αν $X_1, \ldots, X_\nu \sim \mathcal{E}xp(\theta)$, τότε $\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$. Απο το αναλλοίωτο της ε.μ.π. έχουμε εδώ ότι

$$\hat{\theta} = \overline{T}.$$

β) $P(T_1 > t_0) = e^{-\frac{1}{\theta} t_0} = g(\theta)$ εκφράζει τη ζητούμενη πιθανότητα

Απο το αναλλοίωτο της ε.μ.π. $\widehat{P(T_1 > t_0)} = \widehat{g(\theta)} = g(\hat{\theta}) = e^{-\frac{1}{\hat{\theta}} \cdot t_0}$

$$= e^{-\frac{t_0}{\overline{T}}}.$$

(6) (α) Θέτουμε $E(X_1) = \overline{X} \Rightarrow \frac{a}{\theta} = \overline{X} \Rightarrow \overline{\theta} = \frac{a}{\overline{X}}$ είναι ε.ρ. του θ.

(β) $E(X_1) = \overline{X} \Rightarrow \frac{a}{\theta} = \overline{X} \Rightarrow \overline{a} = \theta \overline{X}$ είναι ε.ρ. του a.

(γ) $$\left.\begin{array}{l} E(X_1) = \overline{X} \\ Var(X_1) = M_2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a}{\theta} = \overline{X} \\ \frac{a}{\theta^2} = M_2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \theta = \frac{a}{\overline{X}} \\ a = \theta^2 M_2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \theta = \frac{\theta^2 M_2}{\overline{X}} \\ a = \theta^2 M_2 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{\theta} = \frac{\overline{X}}{M_2} \\ \overline{a} = \frac{(\overline{X})^2 \cdot M_2}{M_2^2} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \overline{\theta} = \frac{\overline{X}}{M_2} \\ \overline{a} = \frac{(\overline{X})^2}{M_2} \end{array}$$

όπου $M_2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$, είναι οι ε.ρ. των θ και a.

(7) (α) $E(X) = \frac{0+2a}{2} = a$, όταν $X \sim Unif[0, 2a]$.

$$E(X^2) = \int_0^{2a} x^2 \frac{1}{2a}\,dx = \frac{1}{2a} \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2a} = \frac{4a^2}{3}.$$ Άρα

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{4a^2}{3} - a^2 = \frac{a^2}{3}.$$

(β) Εφόσον $E(X) = a$, έχουμε ότι $\bar{a} = \overline{X_v}$ είναι η ε.ρ. του a.

Θα δείξουμε ότι $\frac{X_{(v)}}{2}$ είναι η ε.μ.π. του a.

Για $x_1, x_2, \ldots, x_v > 0$, έχουμε συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$L(a) = \prod_{i=1}^{v} f(x_i; a) = \prod_{i=1}^{v} (2a)^{-1} \mathbb{1}_{[0,2a]}(x_i) = (2a)^{-v} \underbrace{\prod_{i=1}^{v} \mathbb{1}_{[0,2a]}(x_i)}_{\text{μας ενδιαφέρει ως συνάρτ. του } a}$$

έχουμε $x_i \le 2a$, $\forall\, 1 \le i \le v \iff x_{(v)} \le 2a \iff a \geq \frac{x_{(v)}}{2}$,

και $x_i > 0$, $\forall\, 1 \le i \le v$ ικανοποιείται από υπόθεση. Άρα

$$L(a) = (2a)^{-v} \mathbb{1}_{\left[\frac{x_{(v)}}{2}, +\infty\right)}(a)$$, Μπορεί να εκφραστεί και ως

$$L(a) = \begin{cases} 0 & , \ a < \frac{x_{(v)}}{2} \\ (2a)^{-v} & , \ a \geq \frac{x_{(v)}}{2}. \end{cases}$$

Εφόσον $L(a)$ είναι $\searrow$ στο $\left[\frac{x_{(v)}}{2}, +\infty\right)$, έχουμε τελικά ότι

$\hat{a} = \frac{X_{(v)}}{2}$, είναι η ε.μ.π. του a.

(γ) $E|X_1| = E(X_1) = a < +\infty$, και από τον Α.Ν.Μ.Α. έχουμε

$\overline{X_v} \xrightarrow{P} E(X_1) = a$, άρα συνεπής εκτιμήτρια του a.

Έστω $V = Var(X_1) \overset{(\alpha)}{=} \frac{a^2}{3} = g(a)$, όπου $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, με $g(x) = \frac{x^2}{3}$.

Προτείνουμε plug-in εκτιμήτρια της διασποράς: $\hat{V}_v = g(\bar{a})$ (όχι ε.μ.π.).

Από το Θεώρημα της Συνεχούς Απεικόνισης,

$$\overline{X_v} \xrightarrow{P} a \overset{g \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} \hat{V}_v = g(\overline{X_v}) \xrightarrow{P} g(a) = \frac{a^2}{3} = V ,$$ (καθώς $v \to \infty$)

άρα η $\frac{(\bar{a})^2}{3} = \frac{(\overline{X_v})^2}{3}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της διασποράς.

(δ) $F_{X_{(\nu)}}(t) = P\left(X_{(\nu)} \le t\right) = \prod_{i=1}^{\nu} P(X_i \le t) = F_{\mathcal{U}}^{\nu}(t)$, όπου $\mathcal{U} \sim Unif[0,2a]$.

Για $0 < t < 2a$, έχουμε

$$f_{X_{(\nu)}}(t) = \nu F_{\mathcal{U}}^{\nu-1}(t)\, F_{\mathcal{U}}'(t) = \nu \left(\frac{t}{2a}\right)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{2a} = \nu (2a)^{-\nu} t^{\nu-1}.$$

Άρα $f_{X_{(\nu)}}(t) = \nu (2a)^{-\nu} t^{\nu-1} \mathbb{1}_{[0,2a]}(t)$.

$$E[X_{(\nu)}] = \int_0^{2a} t f_{X_{(\nu)}}(t)\,dt = \int_0^{2a} \nu (2a)^{-\nu} t^{\nu}\,dt = \nu (2a)^{-\nu} \left.\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1}\right|_0^{2a} = \frac{2\nu a}{\nu+1}.$$

$Var[X_{(\nu)}] = \dots = \dfrac{4\nu a^2}{(\nu+2)(\nu+1)^2}$. Απο τη σχέση $E[X_{(\nu)}] = \dfrac{2\nu a}{\nu+1}$

συνάγουμε α.ε. της $E(X) = a$, που είναι $\tilde{a} = \dfrac{\nu+1}{2\nu} X_{(\nu)} = \dfrac{\nu+1}{\nu}\hat{a}$.

(ε) Μπορούμε να συγκρίνουμε τις 2 α.ε. $\bar{a} = \bar{X}_\nu$ και $\tilde{a} = \dfrac{\nu+1}{2\nu} X_{(\nu)}$

απο τη διασπορά τους.

$$Var(\bar{a}) = Var(\bar{X}_\nu) = \frac{a^2}{3\nu} = O\left(\frac{1}{\nu}\right)$$ (πηγαίνει στο 0, όπως η $\frac{1}{\nu}$)

$$Var(\tilde{a}) = Var\left(\frac{\nu+1}{2\nu} X_{(\nu)}\right) = \frac{(\nu+1)^2}{(2\nu)^2} \frac{4\nu a^2}{(\nu+2)(\nu+1)^2} = \frac{a^2}{\nu(\nu+2)} = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$$

Είναι φανερό ότι η $\tilde{a}$ είναι καλύτερη, αφού η διασπορά της είναι μικρότερη απο της $\bar{a}$, και φθίνει στο 0 πολύ πιο γρήγορα.

8 (α) Υπολογίζουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας που αντιστοιχεί στο $(x_1, \dots, x_\nu)$:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{\nu} \left(\frac{p}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_i^2/2} + \frac{1-p}{2\sqrt{2\pi}} e^{-x_i^2/8} \right).$$

Η $L(p)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ν στη μεταβλητή $p \in (0,1)$.
Δεν υπάρχει γενική λύση της $L'(p) = 0$, για εύρεση μεγίστου.
Ούτε και η $\log L(p)$ βοηθά στην εύρεση μεγίστου. Επομένως η ε.μ.π. δεν βρίσκεται σε κλειστή μορφή.

(β) $E(X_1^2) \underset{\dots}{=} 4 - 3p \Rightarrow \hat{p}_\nu = \dfrac{4 - \overline{X_\nu^2}}{3}$

Με περιορισμό $p \in [0,1] \Rightarrow \hat{p}_\nu = \min\left\{ \left(\dfrac{4 - \overline{X_\nu^2}}{3}\right)^+, 1 \right\}$ (η ε.ρ.)

(γ) $\overline{X_\nu^2} \xrightarrow{P} 4 - 3p$ (Α.Ν.Μ.Α), $\hat{p}_\nu = g(\overline{X_\nu^2})$, όπου g συνεχής + θεώρημα συνεχούς απεικ.

$$\sqrt{\nu}\,(\hat{p}_\nu - p) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{9}(32 - 21p - 9p^2)\right)$$ (Κ.Ο.Θ. + δέλτα μέθοδος)