Λύσεις Ασκήσεων (Φυλλάδιο 2)

Ασκ. 1 : βλ. Σημειώσεις Μαθ. 15.

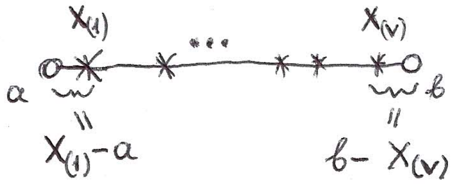
Ασκ. 2 : • Αν $X \sim \mathcal{U}(a, b) \Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$

Άρα $E[\mathcal{U}_1(X)] = E(\overline{X}) = E(X) \overset{X \sim \mathcal{U}(\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2})}{=} \frac{\theta - \frac{1}{2} + \theta + \frac{1}{2}}{2} = \theta \quad , \forall \theta.$

και έτσι η $\mathcal{U}_1(X)$ είναι α.ε. του θ.

• Θ.Δ.Ο. η $\mathcal{U}_2(X) = \frac{X_{(1)} + X_{(\nu)}}{2}$ είναι επίσης α.ε. του θ.

<u>α' τρόπος</u> :



Για μία επιλογή ν σημείων ομοιόμορφα σε διάστημα (a, b) είναι φανερό ότι $X_{(1)} - a \overset{d}{=} b - X_{(\nu)}$, αφού το $b - X_{(\nu)}$ αν μετράμε αντίθετα (από τα αριστερά προς τα δεξιά) αντιστοιχεί πάλι στην ελάχιστη απόσταση από άκρο του διαστήματος.

Άρα
$$X_{(1)} - (\theta - \tfrac{1}{2}) \overset{d}{=} \theta + \tfrac{1}{2} - X_{(\nu)} \Longrightarrow$$
$$E[X_{(1)}] - (\theta - \tfrac{1}{2}) = \theta + \tfrac{1}{2} - E[X_{(\nu)}] \Longrightarrow$$
$$E[X_{(1)}] + E[X_{(\nu)}] = 2\theta \Longrightarrow$$
$$E[\mathcal{U}_2(X)] = \frac{1}{2}\Big(E[X_{(1)}] + E[X_{(\nu)}]\Big) = \frac{2\theta}{2} = \theta \quad , \forall \theta.$$

Άρα η $\mathcal{U}_2(X)$ είναι α.ε. του θ.

<u>β' τρόπος</u> : Κατ' αρχήν $X_i \sim \mathcal{U}(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}) \overset{d}{=} \theta + \mathcal{U}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Άρα υποθέτουμε ότι $X_i = \theta + \mathcal{U}_i$, όπου $\mathcal{U}_i \sim \mathcal{U}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $1 \le i \le \nu$ και ανεξ.

Προφανώς $X_{(1)} = \theta + \mathcal{U}_{(1)}$ και $X_{(\nu)} = \theta + \mathcal{U}_{(\nu)}$, και άρα

$$E(\mathcal{U}_2(X)) = \theta, \forall \theta \iff \frac{1}{2}\Big(\theta + E[\mathcal{U}_{(1)}] + \theta + E[\mathcal{U}_{(\nu)}]\Big) = \theta, \forall \theta$$
$$\iff E[\mathcal{U}_{(1)}] = -E[\mathcal{U}_{(\nu)}] = E[-\mathcal{U}_{(\nu)}] \quad (*).$$

Όμως $-\mathcal{U}_{(\nu)} = -\max\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_\nu\} = \min\{-\mathcal{U}_1, \dots, -\mathcal{U}_\nu\} = (-\mathcal{U})_{(1)}$.

Όταν $\mathcal{U} \sim \mathcal{U}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, τότε η κατανομή της είναι συμμετρική, δηλ. $\mathcal{U} \overset{d}{=} -\mathcal{U}$

$\Longrightarrow -\mathcal{U}_{(\nu)} = (-\mathcal{U})_{(1)} \overset{d}{=} \mathcal{U}_{(1)} \Rightarrow E[-\mathcal{U}_{(\nu)}] = E[\mathcal{U}_{(1)}]$, δηλ.

ισχύει η $(*)$ που θέλαμε να δείξουμε.

<u>γ' τρόπος</u> : $f_{X_{(1)}}(t) = \nu\left(1 - F_X(t)\right)^{\nu-1} f_X(t)$

$$f_{X_{(\nu)}}(t) = \nu\, F_X^{\nu-1}(t)\, f_X(t).$$

Έχουμε $f_X(t) = 1$, $\theta - \frac{1}{2} < t < \theta + \frac{1}{2}$ και $F_X(t) = t - \left(\theta - \frac{1}{2}\right)$, $\theta - \frac{1}{2} < t < \theta + \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow E[X_{(1)}] = \int_{\theta-1/2}^{\theta+1/2} t\nu\left(1 - t + \theta - \frac{1}{2}\right)^{\nu-1} dt = -\nu \int_{\theta-1/2}^{\theta+1/2} t\left[\frac{\left(\theta + \frac{1}{2} - t\right)^{\nu}}{\nu}\right]' dt$$

$$= -t\left[\left(\theta + \frac{1}{2} - t\right)^{\nu}\right]_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} + \int_{\theta-1/2}^{\theta+1/2}\left(\theta + \frac{1}{2} - t\right)^{\nu} dt = \theta - 1/2 + 1/(\nu+1)$$

Όμοια $E[X_{(\nu)}] = \int_{\theta-1/2}^{\theta+1/2} t\cdot\nu\left[t - \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\right]^{\nu-1} dt = \theta - 1/2 + \nu/(\nu+1)$.

Τελικά $E[U_2(X)] = \frac{1}{2}\left[2\left(\theta - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\nu+1} + \frac{\nu}{\nu+1}\right] = \theta \Rightarrow U_2(X)$ α.ε. του θ.

<u>Ασκ. 3</u> : $E[\bar{X}^2] = Var(\bar{X}) + E^2(\bar{X}) = \frac{1}{\nu} + \mu^2 \Longrightarrow$

$$b_{(\bar{X}^2)}(\mu) = E[\bar{X}^2] - \mu^2 = \frac{1}{\nu}, \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

Άρα $\bar{X}^2$ δεν είναι α.ε. του μ^2. Παρατηρούμε όμως ότι $\lim_{\nu \to +\infty} b_{(\bar{X}^2)}(\mu) = 0$, δηλ. είναι ασυμπτωτικά α.ε.

<u>Ασκ. 4</u> : (i) Για $x_i \in \mathbb{R}$, έχουμε $f(x_i;\theta) = e^{-(x_i-\theta)} \mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(x_i)$, $1 \le i \le \nu$.

Άρα για $x = (x_1,\dots,x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$, $f(x;\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = e^{-\sum_{i=1}^{\nu} x_i + \nu\theta} \prod_{i=1}^{\nu} \mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(x_i)$

$$\Rightarrow f(x;\theta) = \underbrace{e^{\nu\theta}\mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(x_{(1)})}_{= g(x_{(1)};\theta)} \underbrace{e^{-\sum_{i=1}^{\nu} x_i}}_{= h(x)}$$

Άρα η $T(X) = X_{(1)}$ είναι <u>επαρκής</u> σ.σ. για το θ από το Π.Κ.Ν.

Για να είναι πλήρης πρέπει $E[h(T)] = 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R} \Rightarrow h \overset{\sigma.\pi}{=} 0$ στο $\mathbb{R}$.

<u>κατανομή της Τ</u> : Έχει δειχθεί ότι $f_T(t) = \nu\left(1 - F_{X_1}(t)\right)^{\nu-1} f_{X_1}(t)$

Όμως $f_{X_1}(t;\theta) = e^{-(t-\theta)}$, $t > \theta \Rightarrow F_{X_1}(t;\theta) = \int_{\theta}^{t} e^{-(u-\theta)} du = 1 - e^{-(t-\theta)}$

$$\Rightarrow f_T(t;\theta) = \nu\left(1 - F_{X_1}(t;\theta)\right)^{\nu-1} f_{X_1}(t;\theta) = \nu e^{-(\nu-1)(t-\theta)} e^{-(t-\theta)}$$

$$= \nu e^{-\nu(t-\theta)}, \quad t > \theta$$

$$E[h(T)] = \int_\theta^{+\infty} h(t)\, f_T(t;\theta)\, dt = \int_\theta^{+\infty} h(t)\, v\, e^{-v(t-\theta)} dt = v e^{v\theta} \int_\theta^{+\infty} h(t) e^{-vt} dt$$

Άρα $E[h(T)] = 0,\ \forall \theta \in \mathbb{R} \overset{ve^{v\theta}>0}{\Longrightarrow} \int_\theta^{+\infty} h(t)\, e^{-vt} dt = 0,\ \forall \theta \in \mathbb{R} \overset{d/d\theta}{\Longrightarrow}$

$$-h(\theta) e^{-v\theta} \overset{\sigma.\pi.}{=} 0 \overset{e^{-v\theta}>0}{\Longrightarrow} h(\theta) \overset{\sigma.\pi.}{=} 0 \Longrightarrow h \overset{\sigma.\pi.}{=} 0 \text{ στο } \mathbb{R}.$$

Άρα η T είναι και πλήρης σ.σ. για το θ.

(ii) Απο το Θεώρημα L-S αρκεί να βρούμε $h(T) : E[h(T)] = \theta,\ \forall \theta > 0$.

<u>α' τρόπος</u>: Θέλουμε $v e^{v\theta} \int_\theta^{+\infty} h(t)\, e^{-vt} dt = \theta,\ \forall \theta > 0$.

Όμως, $\int_\theta^{+\infty} h(t) e^{-vt} dt = \frac{\theta}{v} e^{-v\theta} \overset{d/d\theta}{\Longrightarrow} -h(\theta) e^{-v\theta} \overset{\sigma.\pi.}{=} \frac{e^{-v\theta}}{v} - \theta e^{-v\theta}$

$$\Longrightarrow h(\theta) e^{-v\theta} \overset{\sigma.\pi.}{=} \left(\theta - \frac{1}{v}\right) e^{-v\theta} \Longrightarrow h(\theta) \overset{\sigma.\pi.}{=} \theta - \frac{1}{v} \Longrightarrow h(t) \overset{\sigma.\pi.}{=} t - \frac{1}{v}$$

$\Longrightarrow$ η $h(T) = T - \frac{1}{v}$ ή η $\delta(X) = h[T(X)] = X_{(1)} - \frac{1}{v}$ είναι α.ε.ε.δ του θ.

<u>β' τρόπος</u>: Έχουμε $f_T(t;\theta) = v e^{-v(t-\theta)}$, $t > \theta$. (έχει δειχθεί στο (i)).

Άρα $T \overset{d}{=} \theta + \mathcal{E}xp(v)$ (μια εκθετική (v) μετατοπισμένη κατά θ)

$$\Longrightarrow E(T) = \theta + E(\mathcal{E}xp(v)) = \theta + \frac{1}{v} \Longrightarrow E\left(T - \frac{1}{v}\right) = \theta,\ \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Άρα η $T - \frac{1}{v}$ είναι α.ε.ε.δ. του θ απο θεώρημα L-S.

<u>Ασκ. 5</u>: (i) Αν $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \Longrightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda}$ και $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Άρα $X_2 \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\theta}\right) \Longrightarrow E(X_2) = \theta,\ \forall \theta > 0 \Longrightarrow X_2$ α.ε. του θ.

$Var(X_2) = \theta^2,\ \forall \theta > 0$.

(ii) Μπορείτε να το δείξετε με το Π.Κ.Ν. Διαφορετικά·
γνωρίζουμε ότι $X_1 + X_2$ επαρκής σ.σ. για το $\lambda = \frac{1}{\theta}$ (παράμετρος ρυθμού εδώ)
Άρα επαρκής και για το $\frac{1}{\lambda}$ ("1-1" στο $(0,+\infty)$), δηλ. το θ.

(iii) Θέτουμε $\mathcal{U} = E(X_2 | X_1 + X_2) = E(X_2 | T) = h(T)$.

$E(\mathcal{U}) = E[E(X_2 | X_1 + X_2)] = E(X_2) = \theta,\ \forall \theta > 0$; άρα α.ε. του θ.

$$f_{X_2|T}(x_2|t) \propto f_{X_2}(x_2)\, f_{T|X_2}(t|x_2) = f_{X_2}(x_2)\, f_{X_1}(t - x_2) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} x_2} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(t - x_2)} \text{ ανεξ. του } x_2$$

$$\Longrightarrow [X_2 | T = t] \sim \mathcal{U}_{(0,t)} \Longrightarrow E[X_2 | T] = \frac{T}{2}, \text{ και } Var\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{2\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{2} < \underset{Var(X_2)}{\underset{\parallel}{\theta^2}},\ \forall \theta > 0$$

$\Longrightarrow \frac{T}{2} = \bar{X}$ καλύτερη εκτιμήτρια απο το X_2.

Ασκ. 6-7-8 : βλ. Σημειώσεις Μαθ. 15.

Ασκ. 9 : (i) στήριγμα εξαρτάται απο παράμετρο $\Rightarrow$ δεν ανήκει σε Ε.Ο.Κ.

(ii) Έχει δειχθεί ότι $T = X_{(\nu)} = \max_{1 \le i \le \nu} X_i$ είναι επαρκής και πλήρης σ.σ. για το θ. (βλ. Σημειώσεις, Μαθ. 10+11 αντίστοιχα), αφού $X_i \sim \mathcal{U}(0,\theta)$.

Απο το θεώρημα L-S αρκεί να βρούμε $h(T)$: $E[h(T)] = \theta^K, \forall \theta > 0$.

$E[h(T)] = \int_0^\theta f_T(t;\theta)\, h(t)\, dt$, όπου $f_T(\cdot;\theta)$, η σ.π.π. του $X_{(\nu)}$.

Όμως $f_T(t;\theta) = \nu \cdot F_{\mathcal{U}}^{\nu-1}(t;\theta)\, f_{\mathcal{U}}(t;\theta)$, όπου $\mathcal{U} \sim \mathcal{U}(0,\theta)$.

$f_{\mathcal{U}}(t;\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0<t<\theta$ και $F_{\mathcal{U}}(t;\theta) = \frac{t}{\theta}$, $0<t<\theta$ $\Rightarrow$

$f_T(t;\theta) = \nu \cdot \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\nu-1} \frac{1}{\theta} = \nu \frac{t^{\nu-1}}{\theta^\nu}$, $0<t<\theta$ $\Rightarrow$

$E[h(T)] = \frac{\nu}{\theta^\nu} \int_0^\theta h(t)\, t^{\nu-1}\, dt$ και άρα

$E[h(T)] = \theta^K, \forall \theta>0 \Rightarrow \int_0^\theta h(t)\, t^{\nu-1} dt = \frac{\theta^{\nu+K}}{\nu} \xRightarrow{d/d\theta}$

$h(\theta)\, \theta^{\nu-1} \overset{\sigma.\pi.}{=} \frac{\nu+K}{\nu} \theta^{\nu+K-1} \Rightarrow h(\theta) \overset{\sigma.\pi.}{=} \frac{\nu+K}{\nu} \theta^K \Rightarrow$

$h(t) \overset{\sigma.\pi.}{=} \frac{\nu+K}{\nu} t^K$, στο $(0,+\infty) \Rightarrow h(T) = \frac{\nu+K}{\nu} T^K$ είναι α.ε.ε.δ. του θ^K.

Ασκ 10 : Αν $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ είναι α.ε. του $\frac{1}{\lambda}$, τότε

$$E[\mathcal{U}(X)] = \frac{1}{\lambda}, \forall \lambda>0 \iff \sum_{x=0}^{+\infty} \mathcal{U}(x) e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \frac{1}{\lambda} \iff \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{U}(x)}{x!} \lambda^{x+1} = e^\lambda$$

$$\iff \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{U}(x)}{x!} \lambda^{x+1} = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{x!} \lambda^x \iff \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{U}(x-1)}{(x-1)!} \lambda^x = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{x!} \lambda^x,$$

το οποίο είναι αδύνατον ($\forall \lambda>0$), αφού ο 1ος όρος της 2ης δυναμοσειράς (για $x=0$) είναι **1**.

Ασκ. 11 : Για $x = (x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$, έχουμε

$$f(x;\theta) = f(x_1,\dots,x_\nu;\theta) = \prod_{i=1}^\nu f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^\nu (2\pi\theta^2)^{-1/2} e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\theta^2}} =$$

$$(2\pi\theta^2)^{-\nu/2} e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^\nu (x_i-\theta)^2} = (2\pi\theta^2)^{-\nu/2} e^{-1/2\theta^2 \sum_{i=1}^\nu (x_i^2 - 2\theta x_i + \theta^2)}$$

$$= (2\pi\theta^2)^{-\nu/2} e^{-\frac{1}{2\theta^2}\left(\sum_{i=1}^\nu x_i^2 - 2\theta \sum_{i=1}^\nu x_i + \nu\theta^2\right)} = (2\pi\theta^2)^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^\nu x_i^2 + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^\nu x_i - \frac{\nu}{2}}$$

$$= g\left(\left(\sum_{i=1}^\nu x_i, \sum_{i=1}^\nu x_i^2\right); \theta\right).$$ Άρα απο το Π.Κ.Ν.

η $T(X) = \left(\sum_{i=1}^\nu X_i, \sum_{i=1}^\nu X_i^2\right)$ είναι επαρκής σ.σ. για το θ.

Ασκ. 12 : Έστω $a>0$. Επιλέγουμε $g(x) = \left(1_{(-a,a)}(x)\right) x$. Τότε $E[g(X)] = 0, \forall \theta>0$ και άρα η οικογένεια των κατανομών Cauchy δεν είναι πλήρης.