Εκθετικές Οικογένειες Κατανομών

Ασκήσεις

1) Έστω $X \sim Geo(p)$, με σ.π. $f(x;p) = p(1-p)^{x-1}$, $x=1,2,\ldots$, όπου $0<p<1$ είναι άγνωστη παράμετρος.

α) Δείξτε ότι η X ανήκει σε Ε.Ο.Κ, επιλέγοντας $T(x) = x$.

β) Βρείτε την κανονική μορφή που αντιστοιχεί στο α).

γ) Με τη βοήθεια των παραπάνω βρείτε τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη ροπογεννήτρια της $Geo(p)$.

2) Έστω $X \sim NegBin(n,p)$, με σ.π. $f(x;p) = \binom{x-1}{n-1} p^{n} (1-p)^{x-n}$, $x = n, n+1, \ldots$, με άγνωστη παράμετρο $0<p<1$.

α) Δείξτε ότι η X ανήκει σε Ε.Ο.Κ, επιλέγοντας $T(x) = x$.

β) Βρείτε την κανονική μορφή που αντιστοιχεί στο α).

γ) Με τη βοήθεια των παραπάνω βρείτε τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη ροπογεννήτρια της $NegBin(n,p)$.

δ) Δείξτε ότι αν $X_1,\ldots,X_\nu$ είναι ανεξάρτητες $NegBin(n_i,p)$, $i=1,\ldots,\nu$ τότε το $\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim NegBin\left(\sum_{i=1}^{\nu} n_i, p\right)$ [Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε ροπογεννήτριες]

Συμπεράνετε ότι αν $X_1,\ldots,X_\nu$ είναι ανεξάρτητες $Geo(p)$, τότε $\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim NegBin(\nu,p)$.

3) Έστω $X \sim Gamma(a,\theta)$ με σ.π.π. $f(x;\theta) = \dfrac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x}$, $x>0$, και $\theta>0$ άγνωστη παράμετρος με το a να θεωρείται γνωστό.

α) Δείξτε ότι η X ανήκει σε Ε.Ο.Κ. με $T(x) = x$ και στη συνέχεια γράψτε τη σε κανονική μορφή.

β) Με τη βοήθεια του παραπάνω βρείτε τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη ροπογεννήτρια της $Gamma(a,\theta)$.

γ) Δείξτε ότι αν $X_1,\ldots,X_\nu$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $X_i \sim Gamma(a,\theta)$, τότε το $\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim Gamma(\nu a, \theta)$ [Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε ροπογεννήτριες].

Συμπεράνετε ότι αν $X_1,\ldots,X_\nu$ είναι ανεξάρτητες $Exp(\theta)$, τότε το $\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim Gamma(\nu a, \theta)$.

④ Έστω $X \sim Gamma(\alpha, \theta)$, με σ.π.π. $f(x;\alpha,\theta) = \frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x}$, $x>0$,
και $\alpha>0$, $\theta>0$ είναι άγνωστες παράμετροι.

α) Δείξτε ότι η X ανήκει σε διπαραμετρική Ε.Ο.Κ. με
$T_1(x) = x$, $T_2(x) = \log x$ και στη συνέχεια γράψτε τη σε κανονική μορφή.

β) Δείξτε ότι $Cov(X, \log X) = \frac{1}{\theta}$.

⑤ (Κατανομή Δυναμοσειράς)

Δείξτε ότι η διακριτή τ.μ. X με σ.π. $f(x;\theta) = \frac{\alpha(x)\,\theta^{x}}{g(\theta)}$, $x=0,1,2,\dots$,
$\alpha(x) \geq 0$, $\theta>0$ (άγνωστη παράμετρος) α), ανήκει σε Ε.Ο.Κ και γράψτε την σε κανονική μορφή.

β) Επαληθεύστε ότι ισχύουν οι σχέσεις $E(X) = \frac{\theta g'(\theta)}{g(\theta)}$
και $M_X(u) = \frac{g(\theta e^{u})}{g(\theta)}$.

γ) Διαπιστώστε ότι οι κατανομές
(i) $Be(p)$, (ii) $Bin(\nu, p)$, (iii) $P(\lambda)$, (iv) $NegBin(\nu, p)$,
είναι κατανομές δυναμοσειράς.

⑥ Έστω $X_1, \dots X_\nu$ τ.δ. $Gamma(\alpha, \theta)$, όπου το $\alpha>0$ είναι άγνωστο και το $\theta>0$ είναι γνωστό.

α) Δείξτε ότι η από κοινού σ.π.π. ανήκει σε ν-διάστατη μονοπαραμετρική εκθετική οικογένεια και να τεθεί σε κανονική μορφή.

β) Να υπολογίσετε $E\left(\sum_{i=1}^{\nu} \log X_i\right)$ και $Var\left(\sum_{i=1}^{\nu} \log X_i\right)$.