Ασκήσεις (Φυλλάδιο 2).

1. Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ ανεξ. τ.μ. με $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = k_i \sigma^2$, $1 \le i \le \nu$, όπου μ, σ^2 άγνωστες παράμετροι και $k_i > 0$ γνωστοί αριθμοί. Ανάμεσα στις γραμμικές αμερόληπτες εκτιμήτριες του μ, της μορφής $U = \sum_{i=1}^{\nu} a_i X_i$, να βρεθεί εκείνη που έχει ελάχιστη διασπορά.

2. Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από την ομοιόμορφη $\mathcal{U}\left(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right)$. Ν.Δ.Ο. οι σ.σ. $U_1(X) = \overline{X}$ και $U_2(X) = \frac{1}{2}\left(X_{(1)} + X_{(\nu)}\right)$ είναι α.ε. του θ.

3. Αν $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $\mathcal{N}(\mu, 1)$, δείξτε ότι ενώ ο $\overline{X}$ είναι α.ε. του μ, η σ.σ. $\overline{X}^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i}{\nu}\right)^2$ δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια και βρείτε τη μεροληψία της.

4. Δίνεται τ.δ. $X_1, \ldots, X_\nu$ από πληθυσμό με
$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$
(i) Ν.Δ.Ο. $T = X_{(1)} = \min_{1 \le i \le \nu} X_i$ είναι επαρκής και πλήρης σ.σ. για το θ.
(ii) Να βρεθεί η α.ε.ε.δ. του θ.

5. Δίνεται τ.δ. X_1, X_2 μεγέθους 2 από $\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\theta}\right)$.
(i) Ν.Δ.Ο. η X_2 είναι α.ε. του θ, και να βρεθεί η διασπορά.
(ii) Ν.Δ.Ο. η $T = X_1 + X_2$ είναι επαρκής σ.σ.
(iii) Να βρεθεί η εκτιμήτρια $E(X_2 \mid X_1 + X_2)$ και η διασπορά της. Είναι καλύτερη αυτή η εκτιμήτρια από τη X_2; (Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

6. Έστω $X \sim \mathcal{E}xp(\theta)$ και $Y \sim \mathcal{E}xp(5\theta)$, $\theta > 0$. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης σ.σ. για το θ.

(7) Έστω X και Y 2 ανεξ. τ.μ. με $E(X) = E(Y) = \mu$, και $Var(X) = 2\,Var(Y)$. Να βρεθούν σταθερές a και b: η $T = aX + bY$ να είναι α.ε. του μ, και ελάχιστης διασποράς.

(8) Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από κατανομή με

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}, \quad x > 1, \quad \theta > 0.$$

Να βρεθεί α.ε.ε.δ. του θ^2.

(9) Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από κατανομή με $F(x;\theta) = \frac{x}{\theta}$,

$0 < x < \theta$, $\theta > 0$.

(i) Εξετάστε αν ανήκει σε Ε.Ο.Κ.

(ii) Να βρεθεί α.ε.ε.δ. της $g(\theta) = \theta^k$, $k = 1, 2, \ldots$

(10) Έστω $X_1 = X$ ένα τ.δ. μιας παρατήρησης από $\mathcal{P}(\lambda)$ με σ.π.

$$f(x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots, \quad \lambda > 0.$$

Δείξτε ότι δεν υπάρχει α.ε. της παραμ. συνάρτησης $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

(11) Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. $\mathcal{N}(\theta, \theta^2)$, με σ.π.π.

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}}\, e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

κάνοντας χρήση του Π.Κ.Ν. να βρεθεί επαρκής σ.σ. για το θ.

(12) Δείξτε ότι η οικογένεια $\mathcal{F}$ των κατανομών Cauchy με σ.π.π.

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{\pi}\frac{1}{\theta^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta > 0,$$ δεν είναι πλήρης.