Programa de Topología General

Curso 2022/2023

Índice general

Capítulo 1. Espacios métricos 1
Tema 1.1. Definiciones y ejemplos 2
Ejercicios 6
Tema 1.2. Entornos de un punto y abiertos de espacios métricos 8
Ejercicios 12
Tema 1.3. Continuidad y espacios métricos 13
Ejercicios 17
Tema 1.4. Espacios seudométricos 18
Ejercicios 19

Capítulo 2. Espacios topológicos 21
Tema 2.1. Definiciones básicas. Primeros ejemplos 22
Ejercicios 29
Tema 2.2. Describiendo topologías: Bases y Subbases 31
Ejercicios 37
Tema 2.3. Espacios (seudo)métricos como espacios topológicos 39
Ejercicios 41
Tema 2.4. Cerrados 42
Ejercicios 46
Tema 2.5. Subespacios 47
Ejercicios 51
Tema 2.6. Aplicaciones abiertas y cerradas 52
Ejercicios 55

Capítulo 3. Entornos y posición de un punto con respecto a un conjunto 57
Tema 3.1. Entornos y bases de entornos 58
Ejercicios 66
Tema 3.2. Clausura 68
Ejercicios 72
Tema 3.3. Interior, Exterior, frontera, aislado y derivado 73
Ejercicios 77

Capítulo 4. Axiomas de numerabilidad, convergencia de sucesiones y axiomas de separación 81
Tema 4.1. Separabilidad 82
Tema 4.2. Primer axioma de numerabilidad 84
Tema 4.3. Segundo axioma de numerabilidad 85
Tema 4.4. Convergencia de sucesiones 87
Ejercicios 92
Tema 4.5. Axiomas de separación: conceptos básicos 94
Ejercicios 101

Capítulo 5. Construcción de topologías 103
Tema 5.1. Topologías iniciales: imagen inversa y producto finito 104
Ejercicios 111
Tema 5.2. Productos numerables 114
Ejercicios 120
Tema 5.3. Topologías finales: cociente 121
Ejercicios 130
Tema 5.4. Topologías finales: identificación y suma topológica 132
Ejercicios 137

Capítulo 6. Axiomas de recubrimiento 139
Tema 6.1. Compacidad 140
Ejercicios 153
Tema 6.2. Compacidad, sucesiones y espacios métricos 155
Ejercicios 158
Tema 6.3. Espacios localmente compactos 159
Tema 6.4. Compactificación de Alexandroff 162
Ejercicios 165

Capítulo 7. Espacios conexos 167
Tema 7.1. Definición y primeros ejemplos 168
Ejercicios 176
Tema 7.2. Conexión local 178
Ejercicios 182
Tema 7.3. Conexión por caminos 183
Ejercicios 189
Tema 7.4. Conexión local por caminos 190
Ejercicios 193

Apéndice A. Generalidades de teoría de conjuntos 195

Tema A.1. Conceptos básicos 196
Tema A.2. Aplicaciones 200
Tema A.3. Operaciones extendidas de conjuntos 207
Tema A.4. Propiedades de los números reales 213
Tema A.5. Cardinales 214

Capítulo 1

Espacios métricos

Tema 1.1. Definiciones y ejemplos

En la asignatura *Análisis Matemático I* muchos de los conceptos que habéis estudiado dependen de la *distancia* basada en el valor absoluto. Se trata de una aplicación

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad d(x, y) := |y - x| .$$

que verifica las propiedades siguientes:

(D1) $\forall x, y, \quad d(x, y) \geq 0$.
(D2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(D3) $\forall x, y, \quad d(x, y) = d(y, x)$.
(D4) $\forall x, y, z, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (**desigualdad triangular**).

Estos son las cuatro propiedades importantes de lo que *debe* de ser una distancia y nos van a servir para la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1.1. Sea X un conjunto. Una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una *función distancia* (o una *métrica*) sobre X si verifica las condiciones (D1), (D2), (D3) y (D4). En tal situación el par (X, d) se denomina*espacio métrico*.

OBSERVACIÓN 1.1.2. De manera general, si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$, entonces con la restricción d_A de d a $A \times A$, se tiene que (A, d_A) también es un espacio métrico (y d_A se denotará d si no hay riesgo de confusión).

Vamos a ver ejemplos de distancias en $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$. usamos una generalización del teorema de Pitágoras.

DEFINICIÓN 1.1.3. Llamaremos *distancia euclídea en* $\mathbb{R}^n$ a la aplicación $d_n^2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) \mapsto d_n^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}.$$

OBSERVACIÓN 1.1.4. Para probar que d_n^2 cumple (D4) conviene recordar que

$$d_n^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle},$$

donde $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ es un *producto escalar* (una forma bilineal, simétrica, definida positiva) y aplicar el siguiente resultado de álgebra lineal.

TEOREMA 1.1.5 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un producto escalar sobre V. Entonces, si $v, w \in V$ se tiene*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \sqrt{\langle v, v \rangle} \sqrt{\langle w, w \rangle}.$$

DEMOSTRACIÓN. Al ser $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida positiva se tiene que $\langle v+\lambda w, v+\lambda w\rangle \geq 0$. Ahora bien, al ser forma bilineal y simétrica se tiene que $\langle v+\lambda w, v+\lambda w\rangle = \langle v,v\rangle + \lambda^2\langle w,w\rangle + 2\lambda\langle v,w\rangle$. Por lo tanto, $\langle w,w\rangle\lambda^2 + 2\lambda\langle v,w\rangle + \langle v,v\rangle \geq 0$ para todo λ. Si pensamos en esta expresión como un polinomio de grado 2 en λ, obtenemos una parábola con valores no negativos. Por lo tanto, dicho polinomio no va a tener raíces reales, salvo tal vez, el cero. Esto significa que el discriminante de la ecuación cuadrática es no positivo. En otras palabras, $(2\langle v,w\rangle)^2 - 4\langle w,w\rangle\langle v,v\rangle \leq 0$, lo cual implica la desigualdad enunciada. □

EJEMPLO 1.1.6. $(\mathbb{R}^n, d_n^2)$ es un espacio métrico. Lo mismo se aplica a los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Diremos que son espacios métricos euclídeos.

Un conjunto tiene en general muchas métricas diferentes.

EJEMPLOS 1.1.7. Veremos algunos ejemplos de espacios métricos basados en $\mathbb{R}^n$ y sus subconjuntos.

(1) Definimos $d_n^\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de manera que si $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ entonces $d_n^\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$. El par $(\mathbb{R}^n, d_n^\infty)$ es un espacio métrico.

(2) Definimos $d_n^1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de manera que si $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ entonces $d_n^1(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$. El par $(\mathbb{R}^n, d_n^1)$ es un espacio métrico.

Observa que $d_1^2 = d_1^\infty = d_1^1$ y coinciden con la distancia usual en $\mathbb{R}$.

EJEMPLOS 1.1.8. Podemos definir distancias en otros conjuntos.

(1) Sea X un conjunto no vacío. Definimos $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ de manera que si $x, y \in X$ con $x \neq y$, se tiene $\delta(x,y) = 1$, y si $x \in X$, $\delta(x,x) = 0$. El par (X,δ) es un espacio métrico denominado *discreto*.
(2) Sea $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones continuas reales del intervalo $I := [0,1]$. Definimos las siguientes funciones

$$\rho^1(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx; \qquad \rho^\infty(f,g) := \max_{x\in I} |f(x) - g(x)|\,.$$

Los pares $(\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}),\rho^1)$ y $(\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}),\rho^\infty)$ son espacios métricos.

DEFINICIÓN 1.1.9. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $x_0 \in X$:

(a) Dado $\varepsilon > 0$ la *bola (abierta) de centro x_0 y radio ε* es

$$\mathbb{B}_d(x_0;\varepsilon) := \{x \in X \mid d(x,x_0) < \varepsilon\}.$$

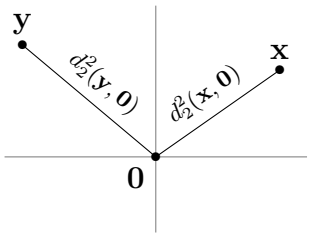


FIGURA 1.1. La distancia radial en $\mathbb{R}^2$.

(b) Dado $\varepsilon \geq 0$ la *bola cerrada* (o *disco*) *de centro* x_0 *y radio* ε es

$$\mathbb{D}_d(x_0;\varepsilon) := \{x \in X \mid d(x,x_0) \leq \varepsilon\}.$$

(c) Dado $\varepsilon \geq 0$ la *esfera de centro* x_0 *y radio* ε es

$$\mathbb{S}_d(x_0;\varepsilon) := \{x \in X \mid d(x,x_0) = \varepsilon\}.$$

Si no hay ambigüedad, se omitirá el subíndice.

OBSERVACIÓN 1.1.10.

(i) $\mathbb{B}_d(x,\varepsilon_1) \subset \mathbb{B}_d(x,\varepsilon_2)$ si $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$. Para las distancias d_n^2, d_n^∞, d_n^1 en $\mathbb{R}^n$ las inclusiones son estrictas si la desigualdad lo es.
(ii) $\mathbb{B}_d(x_0;\varepsilon) \cap \mathbb{S}_d(x_0;\varepsilon) = \emptyset$.
(iii) $\mathbb{B}_d(x_0;\varepsilon) \cup \mathbb{S}_d(x_0;\varepsilon) = \mathbb{D}_d(x_0;\varepsilon)$.

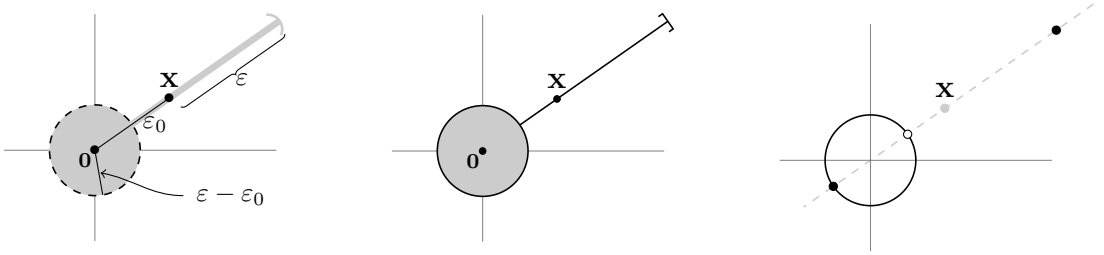
EJEMPLO 1.1.11. La *métrica radial* en $\mathbb{R}^n$, también llamada *métrica RENFE* o *métrica SNCF*, es la función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \begin{cases} d_n^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \text{si } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ son linealmente dependientes} \\ d_n^2(\mathbf{x},\mathbf{0}) + d_n^2(\mathbf{y},\mathbf{0}) & \text{si } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ son linealmente independientes,} \end{cases}$$

donde $\mathbf{0}$ representa el origen de coordenadas de $\mathbb{R}^n$. Si únicamente pudiésemos viajar por las rectas que pasan por el origen, la distancia entre dos puntos correspondería a d. Veamos como son las bolas y las esferas en esta distancia. Consideremos un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ distinto del origen de coordenadas como el centro, y tomemos $\varepsilon_0 = d(\mathbf{x},\mathbf{0}) = d_2^2(\mathbf{x},\mathbf{0}) = \|\mathbf{x}\|$.

A distancia menor que ε_0 me encuentro confinado en la línea que une $\mathbf{x}$ con el origen. Ahora bien, una vez que la distancia que puedo viajar es mayor que la distancia al origen, desde allí puedo viajar por cualquiera de las rayos radiales. En símbolos, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ tenemos que ya que ningún punto linealmente independiente con $\mathbf{x}$ puede estar a distancia menor que ε. Para los que son linealmente dependientes $\lambda\mathbf{x}$ tenemos que

$$d(\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) = d_n^2(\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}\| = |1-\lambda|\|\mathbf{x}\| = |1-\lambda|\varepsilon_0.$$



(A) $\mathbb{B}_d(\mathbf{x};\varepsilon)$ (B) $\mathbb{D}_d(\mathbf{x};\varepsilon)$ (C) $\mathbb{S}_d(\mathbf{x};\varepsilon)$

FIGURA 1.2. Bolas y esferas en la distancia radial en $\mathbb{R}^2$.

Si $d(\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) < \varepsilon$, necesariamente $\lambda \in (1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, 1+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})$. Por lo tanto

$$\mathbb{B}_d(\mathbf{x};\varepsilon) = \big\{\lambda\mathbf{x} \;\big|\; \lambda \in (1-\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, 1+\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0})\big\}.$$

Ahora es claro que

$$\mathbb{D}_d(\mathbf{x};\varepsilon) = \big\{\lambda\mathbf{x} \;\big|\; \lambda \in [1-\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, 1+\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}]\big\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{S}_d(\mathbf{x};\varepsilon) = \big\{(1-\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0})\mathbf{x}, (1+\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0})\mathbf{x}\big\}.$$

Por otro lado, si $\varepsilon > \varepsilon_0$, el razonamiento para los vectores linealmente dependientes sigue siendo válido. Para los puntos linealmente independientes tenemos que

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d_n^2(\mathbf{x},\mathbf{0}) + d_n^2(\mathbf{y},\mathbf{0}) = \varepsilon_0 + \|\mathbf{y}\|.$$

Si $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) < \varepsilon$ entonces $\|\mathbf{y}\| < \varepsilon - \varepsilon_0$. Por lo que

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_d(\mathbf{x};\varepsilon) &= \big\{\lambda\mathbf{x} \;\big|\; \lambda \in (1-\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, 1+\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0})\big\} \cup \big\{\mathbf{y} \;\big|\; \|\mathbf{y}\| < \varepsilon - \varepsilon_0\big\} \\ &= \big\{\lambda\mathbf{x} \;\big|\; \lambda \in (1-\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, 1+\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0})\big\} \cup \mathbb{B}_{d_n^2}(\mathbf{0};\varepsilon_0-\varepsilon).\end{aligned}$$

Algo similar ocurre con las bolas cerradas

$$\mathbb{D}_d(\mathbf{x};\varepsilon) = \big\{\lambda\mathbf{x} \;\big|\; \lambda \in (1-\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, 1+\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0})\big\} \cup \mathbb{D}_{d_n^2}(\mathbf{0};\varepsilon_0-\varepsilon).$$

En cambio las esferas tienen un detalle importante. Aunque nos gustaría escribir una unión como las anteriores, hay que observar que de la esfera euclide que añadiríamos hay que eliminar el punto que está más cerca de $\mathbf{x}$ (observa la Figura 1.2). Así, la expresión es

$$\mathbb{S}_d(\mathbf{x};\varepsilon) = \big\{(1-\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0})\mathbf{x}, (1+\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0})\mathbf{x}\big\} \bigcup \big(\mathbb{S}_{d_n^2}(\mathbf{0};\varepsilon_0-\varepsilon) \setminus \langle\mathbf{x}\rangle\big),$$

donde $\langle\mathbf{x}\rangle$ es el espacio vectorial (la recta) generado por $\mathbf{x}$.

Observa que estas últimas expresiones son de hecho válidas para cualquier ε.

Ejercicios

Ejercicio 1.1.1 Prueba que la distancia usual

$$d(x, y) := |y - x|$$

sobre $\mathbb{R}$ es en efecto una función distancia, i.e, cumple la Definición 1.1.1.

Ejercicio 1.1.2 Prueba que $\mathbb{R}^n$ con la distancia d_n^2 es un espacio métrico.

Ejercicio 1.1.3 Demuestra que los Ejemplos 1.1.7 son espacios métricos.

Ejercicio 1.1.4 La *métrica radial* en $\mathbb{R}^n$ (también llamada *métrica RENFE* o *métrica SNCF*) es la métrica $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} d_n^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{si } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ son linealmente dependientes} \\ d_n^2(\mathbf{x}, \mathbf{0}) + d_n^2(\mathbf{y}, \mathbf{0}) & \text{si } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ son linealmente independientes.} \end{cases}$$

(a) Demuestra que es una distancia.
(b) Compara la distancia restringida a una recta que pase por el origen con otra distancia conocida.
(c) Compara la distancia restringida a la esfera de centro el origen y radio 1 con otra distancia conocida.

Ejercicio 1.1.5 Demuestra que los Ejemplos 1.1.8 son espacios métricos.

Ejercicio 1.1.6 Sea (X, d) es un espacio métrico. Demuestra que $y \in \mathbb{B}_d(x, \varepsilon)$ si y solo si $x \in \mathbb{B}_d(y; \varepsilon)$ y por tanto $y \notin \mathbb{B}_d(x, \varepsilon) \Leftrightarrow x \notin \mathbb{B}_d(y; \varepsilon)$.

Ejercicio 1.1.7 Demuestra que si d_1 y d_2 son distancias en X de modo que $d_1(x, y) \leq d_2(x, y)\ \forall x, y \in X$, entonces $\mathbb{B}_{d_2}(x; \varepsilon) \subset \mathbb{B}_{d_1}(x; \varepsilon)$.

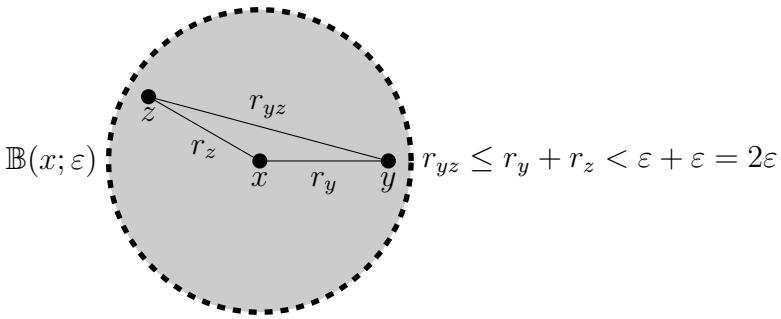


FIGURA 1.3. *Resolución* gráfica del Ejercicio 1.1.7.

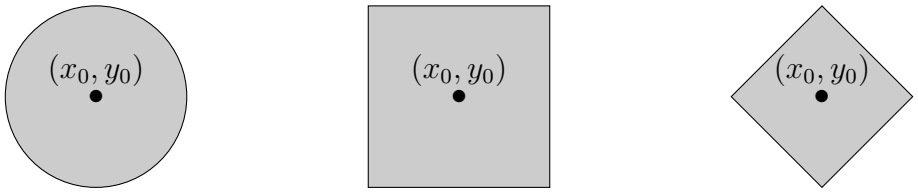


FIGURA 1.4. Discos en $\mathbb{R}^2$ para d_2^2, d_2^∞ y d_2^1.

Ejercicio 1.1.8 Demuestra que la distancia entre los puntos de una bola es menor que el doble del radio, es decir, si $y, z \in \mathbb{B}_d(x; \varepsilon)$ entonces $d(y, z) < 2\varepsilon$.La Figura 1.3 da la idea geométrica de la demostración.

Ejercicio 1.1.9 Describe las bolas para d_n^2, d_n^∞, d_n^1, para $n = 2, 3$ (observa la Figura 1.4).

Ejercicio 1.1.10 Sea (X, d) un espacio métrico cualquiera. Demuestra que

$$d_a(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

es también una función distancia sobre X.

Ejercicio 1.1.11 Describe las bolas y las esferas para la métrica discreta definida en el Ejemplo 1.1.8(1).

Ejercicio 1.1.12 Sea (X, d) un espacio métrico tal que para cualesquiera tres puntos x, y y $z \in X$

$$d(x, y) \leq \text{máx}\{d(x, z), d(z, y)\}. \tag{1.1}$$

(1) Demuestra que todos los puntos de una bola son su centro, i.e., si $y \in \mathbb{B}_d(x, \varepsilon)$ entonces $\mathbb{B}_d(y, \varepsilon) = \mathbb{B}_d(x, \varepsilon)$. Demuestra que lo mismo ocurre con las bolas cerradas.
(2) Demuestra que si dos bolas (abiertas o cerradas) se intersecan una está contenida en la otra.
(3) Prueba que las bolas cerradas, las esferas y sus complementarios son conjuntos abiertos.

Ejercicio 1.1.13 Sea $\{I_n := [a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de intervalos cerrados acotados y encajados ($I_n \subset I_m$ si $n \geq m$) de $\mathbb{R}$ de modo que $\lim_{n\to\infty} \text{diám}(I_n) = 0$. Demuestra que $I := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ es unipuntual.

Tema 1.2. Entornos de un punto y abiertos de espacios métricos

Vamos a introducir los conceptos de entorno de un punto y abierto, en particular, para tener definiciones más cualitativas de continuidad.

DEFINICIÓN 1.2.1. Sean (X, d) un espacio métrico $x \in X$ y $U^x \subset X$. Diremos que U^x es un *entorno de x en (X, d)* si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}_d(x; \varepsilon) \subset U^x$. Si no hay riesgo de confusión omitiremos d o X.

A menudo utilizaremos la notación $U^x \subset X$ para indicar que U^x es un entorno de x en (X, d).

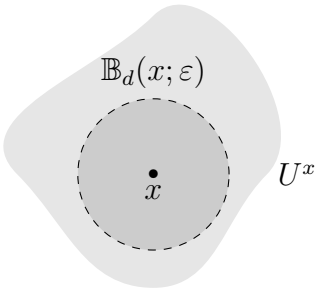


FIGURA 1.5. Entorno de x.

EJEMPLOS 1.2.2. Sea (X, d) un espacio métrico.

(E1) Por definición, el propio conjunto $\mathbb{B}_d(x; \varepsilon)$ es un entorno del centro x.

(E2) El disco $\mathbb{D}_d(x; \varepsilon)$ de radio positivo ($\varepsilon > 0$) es también entorno de su centro x, ya que $x \in \mathbb{B}_d(x; \varepsilon) \subset \mathbb{D}_d(x; \varepsilon)$.

(E3) Consideremos $\mathbb{R}^n$ con la distancia euclídea. El conjunto $B := \mathbb{B}^1(x_1; \varepsilon) \times \mathbb{B}_{d_1^2}(x_2; \varepsilon) \times \cdots \times \mathbb{B}_{d_1^2}(x_n; \varepsilon)$ es entorno en $\mathbb{R}^n$ del punto $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$. El motivo es que la bola $\mathbb{B}_{d_n^2}(\mathbf{x}; \varepsilon) \subset B$. Para ver esto, basta probar que si $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ cumple $d_n^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$, entonces $(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 < \varepsilon^2$, por lo tanto $(x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2$ para todo $i = 1, \ldots, n$ (ya que todos los sumandos son no negativos). Por tanto, si $d_n^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$, entonces $|x_i - y_i| = d_1^2(x_i, y_i) < \varepsilon$, es decir, $y_i \in \mathbb{B}_{d_1^2}(x_i; \varepsilon)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, luego $\mathbf{y} \in B$.

De hecho puedes ver que $B = \mathbb{B}_{d_n^\infty}(\bar{x}; \varepsilon)$. ¿Qué nos dice sobre los entornos en estas distancias?

(E4) En general, si $U^{x_0} \subset X$ es entorno de x_0 y además $x_0 \in A \subset X$ entonces $U^{x_0} \cap A$ es entorno de x_0 en A. El motivo es que como existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}_d(x; \varepsilon) \subset U^{x_0}$, entonces también se tiene que $\mathbb{B}_{d_A}(x; \varepsilon) = \mathbb{B}_d(x; \varepsilon) \cap A \subset U^{x_0} \cap A$.

(E5) El conjunto $[-1,1]$ es entorno de 0 (por el apartado (E2)), pero no es entorno de 1 ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, $1 + \frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{B}_{d_1^2}(1;\varepsilon)$, pero $1 + \frac{\varepsilon}{2} \notin [-1,1]$, por lo tanto $\mathbb{B}_{d_1^2}(1;\varepsilon) \not\subset [-1,1]$. Análogamente, $[-1,1]$ tampoco es entorno de -1 en $\mathbb{R}$. En cambio, si consideramos $[-1,1] \cap \mathbb{Z} = \{-1,0,1\}$, entonces este es entorno de 0 en $\mathbb{Z}$ (por el apartado 4 ya que es entorno de 0 en $\mathbb{R}$) y también es entorno de 1 en $\mathbb{Z}$. El motivo para esto último es que si tomamos $\varepsilon = 1$ se tiene que $\mathbb{B}_{d_1^2}(1;\varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \{1\} \subset [-1,1] \cap \mathbb{Z} = \{-1,0,1\}$. Análogamente $[-1,1] \cap \mathbb{Z}$ es entorno de -1 en $\mathbb{Z}$.

(E6) En general el intervalo $A = [a,b]$ es entorno de $c \in \mathbb{R}$ si y solo si $a < c < b$. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$, entonces basta tomar $\varepsilon = \text{mín}\{c-a, b-c\}$. En tal caso $c \in \mathbb{B}_{d_1^2}(c;\varepsilon) \subset A$. Recíprocamente, si $c > b$ o bien $c < a$, (es decir, si $c \notin A$) entonces es obvio que A no puede ser entorno de c. Por último, basta ver que A no es entorno ni de a ni de b, pero esto es inmediato ya que para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que $a - \frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{B}_{d_1^2}(a;\varepsilon)$ pero en cambio $a - \frac{\varepsilon}{2} \notin A$ (análogamente $b + \frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{B}_{d_1^2}(b;\varepsilon)$ pero en cambio $b + \frac{\varepsilon}{2} \notin A$).

Observación 1.2.3. Sea (X,d) un espacio métrico, entonces Si $U^x \subset X$ es un entorno de x en X y $V \supset U^x$, entonces V es también un entorno de x en X.

Como vimos en el Ejemplo 1.2.2(E4), hay conjuntos que no son entornos métricos de todos sus puntos como es el caso de $[-1,1]$, mientras que otros, como $[-1,1] \cap \mathbb{Z}$ sí son entornos métricos de todos sus puntos en $\mathbb{Z}$. Esta propiedad recibe un nombre especial en topología y es uno de los conceptos más básicos en este curso.

Definición 1.2.4. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $U \subset X$. Diremos que U es un *abierto de* (X,d) (o abierto de X, o simplemente abierto, si no hay lugar a confusión) si es entorno de x en X para todo $x \in U$.

Ejemplos 1.2.5.

(A1) Sea (X,d) un espacio métrico. Las bolas abiertas $\mathbb{B}_d(x;\varepsilon)$ son conjuntos abiertos en X. El motivo es el siguiente: consideremos $y \in \mathbb{B}_d(x;\varepsilon)$, es decir, $r := d(x,y) < \varepsilon$). Sea $\delta := \varepsilon - r > 0$. Veamos que $\mathbb{B}_d(y;\delta) \subset \mathbb{B}_d(x;\varepsilon)$. Sea $z \in \mathbb{B}_d(y;\delta)$; es decir, $d(y,z) < \delta$). Por tanto, por la desigualdad triangular

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < r + \delta = \varepsilon,$$

por lo que $z \in \mathbb{B}_d(x,\varepsilon)$. Con un razonamiento similar, los discos no son necesariamente conjuntos abiertos, pero sus complementarios, es decir, los conjuntos $\{x \in X \mid d(x,x_0) > \varepsilon\}$, sí lo son.

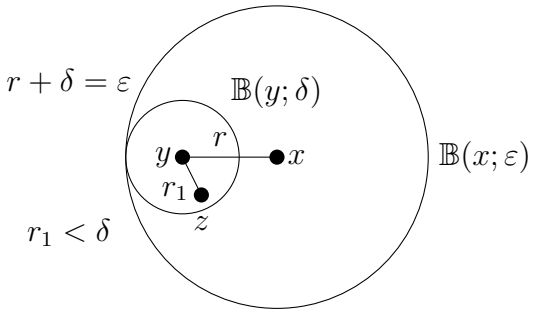


FIGURA 1.6. Ilustración de la demostración de que las bolas abiertas son abiertos.

(A2) Los intervalos abiertos acotados $(a,b) \subset \mathbb{R}$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ ya que $(a,b) = \mathbb{B}_{d_1^2}\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$. Es fácil ver que los intervalos cerrados o semicerrados acotados no lo son. En efecto, $[a,b)$ no es abierto en $\mathbb{R}$ ya que no es entorno de a. El motivo es que no existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset [a,b)$ (ya que $a - \frac{\varepsilon}{2} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ pero $a - \frac{\varepsilon}{2} \notin [a,b)$).

El siguiente teorema describe propiedades de los abiertos que nos servir para determinar la buena *definición* de *topología*.

Vamos a ver algunas propiedades importantes de los abiertos de un espacio métrico.

TEOREMA 1.2.6. *Sea (X,d) un espacio métrico.*

(T1) *Tanto $\emptyset$ como X son abiertos en X.*

(T2) *Si $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de abiertos de X, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es un abierto de X.*

(T3) *Si U, V son dos abiertos de X, entonces $U \cap V$ es un abierto de X.*

(T3b) *Si $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de abiertos de X, entonces $\bigcap_{i=1}^n U_i$ es un abierto de X.*

DEMOSTRACIÓN. Probamos cada apartado.

(T1) En el caso de $\emptyset$ el motivo es que, como la condición de ser abierto (Definición 1.2.4) es sobre los elementos de dicho conjunto, así pues, si el conjunto no tiene

elementos cumple la propiedad *tautológicamente*[1]. Para el caso de X, de hecho se tiene que $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall x \in X$, $\mathbb{B}(x;\varepsilon) \subset X$, luego X es entorno de x en X.

(T2) Si $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ entonces $x \in U_{\lambda_0}$ para cierto $\lambda_0 \in \Lambda$. Como U_{λ_0} es abierto, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}(x;\varepsilon) \subset U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ y por tanto $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es entorno de x en X. Como esto ocurre $\forall x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ entonces es un abierto en X.

(T3) Si $x \in U \cap V$ entonces $x \in U$ y $x \in V$. Como ambos son abiertos, son entornos de x en X y así existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tal que $\mathbb{B}(x;\varepsilon_1) \subset U$ y $\mathbb{B}(x;\varepsilon_2) \subset V$. Tomando $\varepsilon := \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ se tiene que $\mathbb{B}(x;\varepsilon) \subset \mathbb{B}(x;\varepsilon_1) \subset U$ y $\mathbb{B}(x;\varepsilon) \subset \mathbb{B}(x;\varepsilon_2) \subset V$. Por tanto $\mathbb{B}(x;\varepsilon) \subset U \cap V$ (Ejercicio A.1.1(3)) y así $U \cap V$ es entorno de x en X. Como esto ocurre $\forall x \in U \cap V$, se tiene que $U \cap V$ es abierto en X.

(T3b) Esto se prueba por inducción sobre n. Si $n = 0, 1$ no hay nada que probar, si $n = 2$ ya está probado en (T3) y si $n > 2$ entonces supongamos que el resultado es cierto para $n-1$ y veamos que es cierto para n, es decir, tenemos que $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de abiertos de X, tomamos $\bigcap_{i=1}^n U_i = (\bigcap_{i=1}^{n-1} U_i) \cap U_n$. Por un lado $(\bigcap_{i=1}^{n-1} U_i)$ es abierto por la hipótesis de inducción, así pues $(\bigcap_{i=1}^{n-1} U_i) \cap U_n$ también es abierto por ser intersección de 2 abiertos. □

Será útil más adelante caracterizar los entornos en términos de abiertos sin usar bolas.

PROPOSICIÓN 1.2.7. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $x_0 \in X$ y sea $V^{x_0} \subset X$. Entonces V^{x_0} es entorno de x_0 si y solo si $\exists U \subset X$ abierto tal que $x_0 \in U \subset V^{x_0}$.*

DEMOSTRACIÓN.

$\Rightarrow$) Si $V^{x_0} \subset X$ es entorno de x_0 en X, entonces, por definición $\exists \varepsilon > 0$ tal que $x_0 \in \mathbb{B}(x_0;\varepsilon) \subset V^{x_0}$. Por el Ejemplo 1.2.5(A1), $\mathbb{B}(x_0;\varepsilon)$ es abierto y se tiene el resultado.

$\Leftarrow$) Como U es abierto y $x_0 \in U$ entonces U es entorno de x_0. Por la Observación 1.2.3, V^{x_0} es entorno de x_0. □

[1]Para entender esto mejor, podríamos releer Definición 1.2.4 diciendo que para que un conjunto $U \subset X$ no fuera abierto de X debería existir $x \in U$ de modo que U no sea entorno de x en X. En tal caso, $\emptyset$ no tiene ningún elemento del que no sea entorno (porque no tiene elementos) y por tanto debe ser abierto. En general, supongamos que $\mathcal{P}$ es una propiedad sobre un conjunto (en nuestro caso ser abierto) que está escrita en función de elementos de dicho conjunto (en nuestro caso que el conjunto sea entorno de todos sus elementos). Entonces un conjunto U cumple la propiedad $\mathcal{P}$ si no podemos encontrar los elementos de U que incumplan la propiedad pedida, a esta situación se la denomina *tautológica*. Esto no tiene porqué ocurrir solo con el conjunto vacío, por ejemplo, la propiedad *que todos sus elementos pares sean mayores que 10* la cumple el conjunto $\{1, 13\}$ diremos que de manera tautológica.

En general es difícil *describir* de una manera sencilla cómo son los abiertos de un espacio métrico, incluso en el caso de $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea. Desde luego, por las observaciones anteriores sabemos que tanto las bolas abiertas, hipercubos como uniones de estos son abiertos, pero al tomar uniones arbitrarias perdemos la intuición de qué aspecto tienen los abierto de $\mathbb{R}^n$. El único caso en el que se puede dar una descripción razonable es en el caso de $\mathbb{R}$. Se propone como tarea.

TEOREMA 1.2.8. *Un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *es abierto si y solo si es unión contable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos.*

Ejercicios

Ejercicio 1.2.1 Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ definamos el siguiente conjunto

$$A + B = B + A := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Demuestra que si A es abierto, entonces $A + B$ es también abierto.

Ejercicio 1.2.2 Demuestra que todo intervalo abierto de $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto con la distancia usual.

Ejercicio 1.2.3 Sea (X, d) un espacio métrico, sea $S \subseteq X$. Considerar el conjunto

$$\mathring{S} := \{x \in X \mid S \text{ es entorno de } x\}$$

Demostrar que $\mathring{S}$ es abierto.

Tema 1.3. Continuidad y espacios métricos

Ya conocéis el concepto de continuidad en $\mathbb{R}$ con la clásica definición de $\varepsilon - \delta$.

DEFINICIÓN 1.3.1. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función, $A \subset \mathbb{R}$. Diremos que f es *continua en* $x_0 \in A$ si se cumple la propiedad siguiente:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Diremos que f es *continua* si lo es en x_0 para todo $x_0 \in A$.

Gracias a la definición de distancia en A y $\mathbb{R}$, la fórmula de la Definición 1.3.1 se puede reescribir así:

(1.2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $d(x, x_0) < \delta$ entonces $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

La reescritura es inmediata a partir de la Definición 1.3.1 cambiando $|x - x_0|$ por $d(x, x_0)$ y $|f(x) - f(x_0)|$ por $d(f(x), f(x_0))$.

Podemos pues extender esta definición de continuidad a aplicaciones entre espacios métricos.

DEFINICIÓN 1.3.2. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos, sea $f : X \to Y$ una aplicación y sea $x_0 \in X$. Diremos que f es (d_X, d_Y)-*continua* (o simplemente *continua* si no hay ambigüedad) en x_0 si:

(1.3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Diremos que f es *continua* si lo es en x_0 para todo $x_0 \in X$.

EJEMPLO 1.3.3. Las proyecciones $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$, definidas por $\pi_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ son continuas.

OBSERVACIONES 1.3.4. Pronto tendremos herramientas para demostrar las siguientes afirmaciones. Para cualquier $\mathbb{R}^k$ y sus subconjuntos tomamos la métrica euclídea.

(1) Toda aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua.

(2) Las aplicaciones polinómicas, racionales, trigonométricas, o composiciones, sumas, productos o fracciones de las anteriores son continuas sobre su dominio.

(3) Las aplicaciones $x \mapsto +\sqrt[k]{x}$ con k par son continuas en $(0, +\infty)$. Las aplicaciones $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ con k impar son continuas en $\mathbb{R}$.

OBSERVACIÓN 1.3.5. Toda aplicación $f : X \to B \subset \mathbb{R}^m$, con (X, d) un espacio métrico, queda determinada por m funciones $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, tales que si $x \in X$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in B$. La relación que hay entre la continuidad de f y la de $f_1, \ldots, f_m$ de deja para el Ejercicio 1.3.1.

Las bolas de la Definición 1.1.9 nos van a permitir una nueva caracterización de la continuidad.

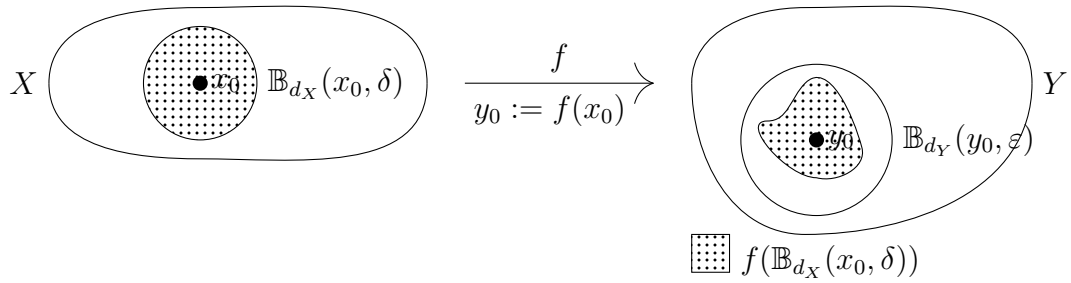


FIGURA 1.7. Representación de la Proposición 1.3.6.

PROPOSICIÓN 1.3.6. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación entre espacios métricos $(X, d_X), (Y, d_X)$. Entonces f es continua en $x_0 \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } x \in \mathbb{B}_{d_X}(x_0; \delta), \text{ entonces } f(x) \in \mathbb{B}_{d_Y}(f(x_0); \varepsilon);$$

o equivalentemente si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(\mathbb{B}_{d_X}(x_0; \delta)) \subset \mathbb{B}_{d_Y}(f(x_0); \varepsilon).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que $x \in X$ y $d_X(x, x_0) < \delta$ (Definición 1.3.2) es equivalente a que $x \in \mathbb{B}_{d_X}(x_0; \delta)$. Análogamente $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ es equivalente a que $f(x) \in \mathbb{B}_{d_Y}(f(x_0); \varepsilon)$. □

EJEMPLO 1.3.7. Sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una aplicación entre espacios métricos tal que $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_X(x_1, x_2)\ \forall x_1, x_2 \in X$. Tales aplicaciones se denominan **aplicaciones contractivas**. Veamos que toda aplicación contractiva es continua. Para ello, basta observar que si $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_X(x_1, x_2)$ entonces $f(\mathbb{B}_{d_X}(x; \varepsilon)) \subset \mathbb{B}_{d_Y}(f(x); \varepsilon)$ ya que si $x' \in \mathbb{B}_{d_X}(x; \varepsilon)$, entonces $d_X(x, x') < \varepsilon$, con lo cual $d_Y(f(x), f(x')) \leq d_X(x, x') < \varepsilon$ y por tanto $f(x') \in \mathbb{B}_{d_Y}(f(x); \varepsilon)\ \forall x \in X$. Por la Proposición 1.3.6, esto prueba que f es continua.

A partir del concepto de entorno (Definición 1.2.1) podemos reescribir una vez más la definición de aplicación continua del siguiente modo.

PROPOSICIÓN 1.3.8. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación entre los espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y), entonces f es continua en $x_0 \in X$ si*

$$\forall V^{f(x_0)} \subset Y \text{ (entorno de } f(x_0) \text{ en } Y),$$
$$\exists U^{x_0} \subset X \text{ (entorno de } x_0 \text{ en } X), \text{ tal que } f(U^{x_0}) \subset V^{f(x_0)}.$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $V^{f(x_0)} \subset Y$ entorno de $f(x_0)$ en Y, entonces, por definición $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}_{d_Y}(f(x_0); \varepsilon) \subset V^{f(x_0)}$. Por ser $f : X \to Y$ continua en x_0 sabemos que $\exists \delta > 0$ de modo que $f(\mathbb{B}_{d_X}(x_0; \delta)) \subset \mathbb{B}_{d_Y}(f(x_0); \varepsilon) \subset V^{f(x_0)}$. En el Ejemplo 1.2.2(E1) hemos visto que $U^{x_0} := \mathbb{B}_{d_X}(x_0; \delta)$ es entorno de x_0 en X, que además cumple $f(U^{x_0}) \subset V^{f(x_0)}$.

$\Leftarrow$) Para demostrar que $f : X \to Y$ es continua en x_0 debemos partir de $\varepsilon > 0$ y probar que existe $\delta > 0$ de modo que $f(\mathbb{B}_{d_X}(x_0; \delta) \cap X) \subset \mathbb{B}_{d_Y}(f(x_0); \varepsilon) \cap Y$. Ahora bien, por el Ejemplo 1.2.2(E1) sabemos que $V^{f(x_0)} := \mathbb{B}_{d_Y}(f(x_0); \varepsilon)$ es un entorno de $f(x_0)$ en Y. Así pues, por hipótesis, existe un entorno U^{x_0} de x_0 en A de modo que $f(U^{x_0}) \subset V^{f(x_0)}$. Por definición, el hecho de que U^{x_0} sea entorno de x_0 en X implica que existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{B}_{d_X}(x_0; \delta) \subset U^{x_0}$. Por lo tanto, $f(\mathbb{B}_{d_X}(x_0; \delta)) \subset f(U^{x_0}) \subset V^{f(x_0)}$. □

De hecho, podríamos ir más lejos, y reescribir la definición de aplicación continua únicamente usando la noción de conjunto de abierto.

Proposición 1.3.9. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre espacios métricos. Entonces f es* continua *si y solo si $\forall V$ abierto de Y, $f^{-1}(V)$ es abierto de X.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que f es continua en X, entonces (Proposición 1.3.8) sabemos que $\forall x_0 \in X$ y $\forall V^{f(x_0)} \subset Y$ entorno de $f(x_0)$ en Y existe $U^{x_0} \subset X$ entorno de x_0 en X de modo que $f(U^{x_0}) \subset V^{f(x_0)}$. Supongamos que $V \subset Y$ es abierto de Y, veamos que $f^{-1}(V)$ es abierto de X. En primer lugar puede ocurrir que $f^{-1}(V) = \emptyset$, en tal caso, por (T1) $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Si $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, tomemos $x_0 \in f^{-1}(V)$. Como $f(x_0) \in V$ y V es abierto en Y, entonces V es entorno de $f(x_0)$, así pues existe un entorno U^{x_0} de X tal que $f(U^{x_0}) \subset V$, es decir, $U^{x_0} \subset f^{-1}(V)$, y por la Observación 1.2.3 se tiene que $f^{-1}(V)$ es también entorno de $x_0 \in f^{-1}(V)$. Como esto ocurre $\forall x_0 \in f^{-1}(V)$, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto de X.

($\Leftarrow$) Utilizaremos el concepto de continuidad de la Proposición 1.3.8. Es decir, probaremos que $\forall x_0 \in X$ y $\forall V^{f(x_0)}$ entorno de $f(x_0)$ en Y, entonces existe U^{x_0} entorno de x_0 en X tal que $f(U^{x_0}) \subset V^{f(x_0)}$. Para ello partimos de $x_0 \in X$ y de $V^{f(x_0)}$ entorno de $f(x_0) \in Y$. Por Definición 1.2.1 existe $\varepsilon > 0$ de modo que $U := \mathbb{B}_{d_Y}(f(x_0); \varepsilon) \subset V^{f(x_0)}$. Por el Ejemplo 1.2.5(A1), $\mathbb{B}_{d_Y}(f(x_0); \varepsilon)$ es abierto.

Es decir, resumiendo, hemos encontrado un abierto U de Y tal que $f(x_0) \in U \subset V$. Por tanto, la hipótesis nos asegura que $W := f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Como $f(x_0) \in U$, se tiene que $x_0 \in f^{-1}(U) = W$, que al ser abierto, es entorno de x_0 y $f(W) \subset V$. □

Una consecuencia inmediata de este teorema es que la demostración del siguiente resultado se simplifica enormemente.

PROPOSICIÓN 1.3.10. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) y (Z, d_Z) espacios métricos y sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones continuas. Entonces entonces $g \circ f$ es una aplicación continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $U \subset Z$ abierto, entonces $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ (Ejercicio A.2.8(2)). Como g es continua y U abierto, entonces $g^{-1}(U)$ es abierto de Y y por ser f continua se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto de X, lo cual prueba el resultado. □

Como podemos ver la noción de abierto es especialmente conveniente para determinar la continuidad de una aplicación. Además muestra un detalle fundamental, la noción de continuidad no depende de la distancia, sí de la colección de conjuntos abiertos del espacio métrico.

Ejercicios

Ejercicio 1.3.1 Sean (X, d) espacio métrico y sea $B \subset \mathbb{R}^m$ con la métrica euclídea. Sea $f : X \to B$ una aplicación determinada por $f_i : X \to \mathbb{R}$ como en la Observación 1.3.5. Demuestra que f es continua si y solo si lo son $f_1, \ldots, f_m$.

Ejercicio 1.3.2 Sean $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ espacios métricos. Demuestra que si $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$ y $g : Y \to Z$ es continua en $f(x_0) \in Y$, entonces $g \circ f : X \to Y$ es continua en x_0. Comprueba las afirmaciones de las Observaciones 1.3.4.

Ejercicio 1.3.3 Vamos a probar un resultado sobre la continuidad de aplicaciones definidas a trozos. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos con $X = X_1 \cup X_2$. Sean $f_i : X_i \to Y$, $i = 1, 2$, aplicaciones continuas tales que $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in X_1 \cap X_2$. Supongamos que X_1 y X_2 cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &\forall x_1 \in X_1 \setminus X_2 \text{ se tiene que } d_X(x_1, X_2) := \text{ínf}\{d_X(x_1, x) \mid x \in X_2\} > 0 \\ &\forall x_2 \in X_2 \setminus X_1 \text{ se tiene que } d_X(x_2, X_1) := \text{ínf}\{d_X(x_2, x) \mid x \in X_1\} > 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

(es decir, todo punto de X_1 que no esté en X_2 se encuentra a una distancia positiva de X_2, y viceversa). Demuestra que si $f_1 : X_1 \to Y$ y $f_2 : X_2 \to Y$ son continuas entonces la aplicación $f : X \to Y$ dada por

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in X_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in X_2, \end{cases}$$

está bien definida y es continua.

Tema 1.4. Espacios seudométricos

En algunas ocasiones puede interesar debilitar una de las propiedades para definir lo que se llama seudodistancia.

DEFINICIÓN 1.4.1. Una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una *función seudodistancia* (o una *seudométrica*) *sobre* X si verifica las condiciones (D1), (D2b), (D3) y (D4), donde

(D2b) $\forall x$ se tiene $d(x, x) = 0$.

El par (X, d) se llama *espacio seudométrico*.

OBSERVACIÓN 1.4.2. Obsérvese que todo espacio métrico es también seudométrico y que un subconjunto de un espacio seudométrico es también seudométrico con la restricción de la aplicación.

EJEMPLOS 1.4.3. Veamos dos ejemplos de espacios seudométricos que no son métricos.

(SD1) Sea X un conjunto con más de un elemento. Sea $D : X \times X \to \mathbb{R}$ la aplicación dada por $D(x, y) := 0$, $\forall x, y \in X$. El espacio (X, D) es pseudométrico pero no métrico. Habitualmente se le denomina *espacio indiscreto*.

(SD2) Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{\ d\ } \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longmapsto |x_1 - x_2| . \end{aligned}$$

El espacio $(\mathbb{R}^2, d)$ es pseudométrico, pero no métrico

Es fácil comprobar que los conceptos desarrollados en las secciones anteriores para espacios métricos (continuidad, bolas, esferas, entornos, abiertos, ...) se transfieren tal cual a los espacios seudométricos.

DEFINICIÓN 1.4.4. Sea (X, d) espacio seudométrico y $\emptyset \neq A \subset X$. Consideremos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$L(A) := d(A, A) = \{d(x, y) \mid x, y \in A\} = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists x, y \in A \text{ tal que } d(x, y) = r\}.$$

Diremos que A es un subconjunto *acotado* de X si existe $\sup(L(A))$. En tal caso llamaremos a $\text{diám}(A) := \sup(L(A))$ el *diámetro* de A en X. Si tal supremo no existe denotaremos $\text{diám}(A) := +\infty$ y $\text{diám}(\emptyset) := -\infty$.

OBSERVACIÓN 1.4.5. Por definición, es obvio que si $A \subset B$ son subconjuntos acotados no vacíos de X, entonces $\text{diám}(A) \leq \text{diám}(B)$.

Ejercicios

Ejercicio 1.4.1 Utiliza la propiedad triangular para demostrar que si d es una seudométrica, entonces también verifica la siguiente propiedad

$$d(x,y) \geq |d(x,z) - d(z,y)| \quad \forall x,y,z \in X.$$

Ejercicio 1.4.2 Sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una aplicación entre espacios (seudo)métricos tal que existe $k \in \mathbb{R}_{>0}$ cumpliendo que $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq k \cdot d_X(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$. Tales aplicaciones se denominan **aplicaciones lipschitzianas**. Demuestra que toda aplicación lipschitziana es continua.

Ejercicio 1.4.3 Sea (X, d) un espacio seudométrico y sea $x_0 \in X$. Demuestra que la aplicación $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$, definida por $d_{x_0}(x) := d(x, x_0)$, es una aplicación continua.

Ejercicio 1.4.4 Consideremos (X, d) espacio seudométrico. Si $A \subset X$ podemos definir $d_A : X \to \mathbb{R}$ del siguiente modo $d_A(x) := d(A, x)$ donde $d(A, x) :=$ ínf$\{d(x, y) \mid y \in A\}$. Demuestra que d_A es una función continua.

Ejercicio 1.4.5 Sea (X, d) un espacio seudométrico. Demuestra que X es espacio métrico si y solo si $\forall A \subset X$ acotado, diám$(A) = 0 \Leftrightarrow A$ es unipuntual.

Ejercicio 1.4.6 Sea (X, d) un espacio (seudo)métrico e Y un conjunto con más de un punto. Demuestra que las siguientes aplicaciones son continuas:

(a) $f : (Y, \delta) \to (X, d)$, donde δ es la distancia discreta del Ejemplo 1.1.8(1);
(b) $f : (X, d) \to (Y, D)$, donde D es la seudodistancia indiscreta definida en el Ejemplo 1.4.3(SD1).

Ejercicio 1.4.7 Sea (X, d) un (seudo)espacio métrico. Prueba que si una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to X$ es continua con alguna de las distancias d_n^1, d_n^2 o d_n^∞, lo es con las demás.

¿Qué es más simple, trabajar con las distancias o hacer uso de la definición de continuidad con abiertos?

Capítulo 2

Espacios topológicos

Tema 2.1. Definiciones básicas. Primeros ejemplos

Como queda anunciado al final del capítulo anterior ampliaremos la definición de abierto de un conjunto utilizando las tres propiedades (T1), (T2) y (T3) (o equivalentemente (T1), (T2) y (T3b)) que satisfacen los abiertos de un espacio métrico (Teorema 1.2.6). Sea X un conjunto y sea $\mathcal{T}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$, es decir, una colección de subconjuntos de X.

DEFINICIÓN 2.1.1. Diremos que $(X, \mathcal{T})$ es un *espacio topológico* (E.T.) (o que $\mathcal{T}$ es una *topología sobre* X) si se cumplen las propiedades siguientes:

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(T2) Si $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de elementos de $\mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$.

(T3) Si $U, V \in \mathcal{T}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(T3b) Si $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de elementos de $\mathcal{T}$, entonces $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

A los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama *abiertos de* $(X, \mathcal{T})$ (o $\mathcal{T}$*-abiertos*).

OBSERVACIÓN 2.1.2. Obsérvese que la propiedad (T3) es equivalente a (T3b) por inducción (razonamiento análogo a (T3b) del Teorema 1.2.6), por lo que en general basta verificar (T3). Es más, para verificar (T2) y (T3) solo necesitamos usar subconjuntos distintos de $\emptyset$ y X.

Veremos algunos ejemplos de espacios topológicos:

EJEMPLOS 2.1.3.

(ET1) Si (X, d) es un espacio seudométrico, entonces

$$\mathcal{T}(d) := \{U \subset X \mid U \text{ abierto en } (X, d)\}$$

(donde *abierto* aquí se refiere al concepto de abierto de la Definición 1.2.4). Esto quedó probado en (T1), (T2) y (T3) del Teorema 1.2.6.

(ET2) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ donde $\mathcal{T}_u := \mathcal{T}(d_2^n)$ y $(A, \mathcal{T}_u^A)$ donde d_2^n se sustituye por su restricción a $A \times A$. Estas topologías se denominan **topologías usuales**. Siempre que hablemos de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ sin especificar su topología supondremos que se trata de la usual. Además, $\mathcal{T}(d_2^n) = \mathcal{T}(d_1^n) = \mathcal{T}(d_\infty^n)$. Para ello usamos las dos propiedades siguientes:

(a) Si $(X, \mathcal{T}(d))$ es la topología que proviene de una seudométrica d y $U \subset X$:

$$U \text{ es abierto } \iff \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } \mathbb{B}(x; \varepsilon) \subset U$$

(b) $d_\infty^n \leq d_2^n \leq d_1^n \leq n d_\infty^n$.

(ET3) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ donde $\mathcal{S} := \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall a \in U, \exists b > a \text{ tal que } [a, b) \subset U\}$. Este espacio topológico se llama **recta de Sorgenfrey**.

(ET4) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\rightarrow})$ donde $\mathcal{T}_{\rightarrow} := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

(ET5) $(X, \mathcal{P}(X))$ se denomina **espacio topológico discreto asociado a** X.

(ET6) $(X, \{\emptyset, X\})$ se denomina **espacio topológico indiscreto asociado a** X.

(ET7) Sea $X := \{0, 1\}$. Llamamos **espacio topológico de Sierpinski** a $(X, \mathcal{T})$ con $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{0\}, X\}$.

(ET8) Sea X un conjunto y sea $x \in X$. Definimos $\mathcal{T}_x := \{U \subset X \mid x \in U\} \cup \{\emptyset\}$. Entonces $(X, \mathcal{T}_x)$ es el **espacio topológico de punto incluido**.

(ET9) Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre conjuntos. Supongamos que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un E.T. Entonces $f^{-1}\mathcal{T}_Y := \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}_Y\}$ es la **topología imagen inversa** de f sobre X.

(ET10) Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre conjuntos. Supongamos que $(X, \mathcal{T}_X)$ es un E.T. Entonces $f\mathcal{T}_X := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$ es la **topología imagen directa** de f sobre Y.

El siguiente resultado se deja para la Tarea 1.

TEOREMA 2.1.4. *Un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *es abierto de Sorgenfrey si y solo si es unión contable de intervalos abiertos por la derecha dos a dos disjuntos. En particular, todo abierto usual es abierto de Sorgenfrey.*

TAREA 1. *Demuestra los Teoremas* 1.2.8 *y* 2.1.4 *siguiendo el siguiente guión.*

($\mathcal{US}1$) *Entre cualesquiera dos números reales distintos* a *y* b *existe un número racional.*

($\mathcal{US}2$) *Sea* $\mathcal{F} := \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de intervalos dos a dos disjuntos de* $\mathbb{R}$, $\#U_\lambda > 1$, $\forall \lambda \in \Lambda$, *entonces* $\mathcal{F}$ *es contable.*

($\mathcal{US}3$) *Un subconjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *de números reales es un intervalo si y solo si para todo par de elementos* $a, b \in A$ *tal que* $a < b$ *se tiene que* $[a, b] \subset A$.

($\mathcal{US}4$) *Sea* $\mathcal{F} := \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de intervalos de* $\mathbb{R}$ *de modo que* $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, *entonces* $\bigcup \mathcal{F}$ *es un intervalo. Además, si todos los intervalos* U_λ *son abiertos, entonces* $\bigcup \mathcal{F}$ *es también un intervalo abierto.*

($\mathcal{US}5$) *Demuestra el Teorema* 1.2.8.

($\mathcal{US}6$) *Demuestra el Teorema* 2.1.4.

El concepto de aplicación continua admite una extensión a espacios topológicos cualesquiera utilizando el análogo a la Proposición 1.3.9.

DEFINICIÓN 2.1.5. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ E.T. y sea $f : X \to Y$ una aplicación. Diremos que f *es continua* (o $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$*-continua*) si $\forall U \in \mathcal{T}_Y$ se tiene que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

OBSERVACIÓN 2.1.6. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la identidad $\mathbf{1}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ es una aplicación continua.

EJEMPLO 2.1.7. Conviene destacar que si consideramos dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ distintas sobre el mismo conjunto X, entonces puede ocurrir que la identidad *no sea continua*. Por ejemplo, sobre $\mathbb{R}$ podemos considerar las topologías usual $\mathcal{T}_u$ y de Sorgenfrey $\mathcal{S}$. Veamos que la identidad $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{S})$ no es $(\mathcal{T}_u, \mathcal{S})$-continua. Para ello haremos lo siguiente: en primer lugar $U := [0, 1) \in \mathcal{S}$ (Teorema 2.1.4), pero $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}^{-1}(U) = [0, 1) \notin \mathcal{T}_u$ (Ejemplo 1.2.5(A2)).

EJEMPLO 2.1.8. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey $\mathcal{S}$, y tomemos conjunto $[a, b) \subset \mathbb{R}$. La aplicación indicatriz $\chi_{[a,b)} : (\mathbb{R}, \mathcal{S}) \to \mathbb{R}$

$$\chi_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [a, b), \\ 0, & \text{si } x \notin [a, b). \end{cases}$$

es continua, con la topología usual en el rango.

Consideremos un abierto cualquiera $V \in \mathcal{T}_u$ de $\mathbb{R}$ con la topología usual. Puede ocurrir una de estas cuatro cosas

$0, 1 \in V$. En tal caso, $\chi^{-1}_{[a,b)}(V) = \mathbb{R} \in \mathcal{S}$;
$0, 1 \notin V$. Entonces $\chi^{-1}_{[a,b)}(V) = \emptyset \in \mathcal{S}$;
$0 \in V$ y $1 \notin V$. Luego $\chi^{-1}_{[a,b)}(V) = \chi^{-1}_{[a,b)}(0) = (-\infty, a) \cup [b, \infty) \in \mathcal{S}$; y
$0 \notin V$ y $1 \in V$. En este caso $\chi^{-1}_{[a,b)}(V) = \chi^{-1}_{[a,b)}(a) = [a, b) \in \mathcal{S}$.

La demostración de la siguiente proposición es la misma que la de la Proposición 1.3.10.

PROPOSICIÓN 2.1.9. *Si $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ y $(Z, \mathcal{T}_Z)$ son* E.T. *y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones continuas, entonces $g \circ f$ es una aplicación continua.*

Las aplicaciones continuas sirven para comparar espacios topológicos. La noción de *isomorfismo topológico* recibe un nombre especial.

DEFINICIÓN 2.1.10. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ E.T. Diremos que una aplicación continua $f : X \to Y$ es un *homeomorfismo* si es biyectiva y $f^{-1} : Y \to X$ también es continua. Diremos que X e Y son *homeomorfos* si existe un homeomorfismo entre ellos (y lo escribiremos $X \approx Y$).

El objetivo fundamental de la topología es estudiar y clasificar los espacios topológicos. El principal problema es poder decidir cuándo dos espacios topológicos son homeomorfos o no. Las siguientes son propiedades básicas de homeomorfismos.

PROPIEDADES 2.1.11 (homeomorfismos). Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, $(Z, \mathcal{T}_Z)$ E.T. y $h_1 : X \to Y$, $h_2 : Y \to Z$ homeomorfismos. Entonces:

(H1) $\mathbf{1}_X : X \to X$ es un homeomorfismo de $(X, \mathcal{T}_X)$ en sí mismo (es importante resaltar que estamos considerando las mismas topologías en el dominio y en la imagen).
(H2) $h_1^{-1} : Y \to X$ es también homeomorfismo.
(H3) $h := h_2 \circ h_1 : X \to Z$ es también homeomorfismo.
(H4) Si $f : X \to Y$ es una aplicación biyectiva y sea $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ la aplicación biyectiva dada por $\mathcal{P}(f)(U) := f(U)$, $U \subset X$. Entonces son equivalentes:
  (a) f es homeomorfismo.
  (b) $\forall V \subset Y$, V es abierto si y solo si $f^{-1}(V)$ es abierto.
  (c) $\forall U \subset X$, U es abierto si y solo si $f(U)$ es abierto.
  (d) La aplicación $\mathcal{P}(f)$ induce por restricción una aplicación $\mathcal{T}(f) := \mathcal{P}(f)_{|\mathcal{T}_X} : \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_Y$ que está bien definida y es biyectiva.

DEMOSTRACIÓN.

(H1) Por la Propiedad A.2.11(iv) sabemos que $\mathbf{1}_X$ es biyectiva. También sabemos que $\mathbf{1}_X$ es continua (Ejercicio 2.1.4). Por último por el Ejercicio A.2.6(3) $\mathbf{1}_X^{-1} = \mathbf{1}_X$ es continua.
(H2) Si h_2 es biyectiva, entonces h_2^{-1} también es biyectiva (Ejercicio A.2.6(1)). Además h_2^{-1} es continua por ser h_2 homeomorfismo. Por último $(h_2^{-1})^{-1} = h_2$ (Ejercicio A.2.6(2)) es también continua por ser h_2 homeomorfismo.
(H3) Como h_1 y h_2 son biyectivas y continuas, entonces $h = h_2 \circ h_1$ también es biyectiva (Propiedad A.2.11(iii)) y continua (Proposición 2.1.9). Por último $h^{-1} = h_1^{-1} \circ h_2^{-1}$ (Ejercicio A.2.6(4)) es continua por ser de nuevo composición de aplicaciones continuas.
(H4) Veamos cada una de las implicaciones.
(a)⇒(b) Si f es homeomorfismo, f es continua, por lo que si $V \subset Y$ es abierto, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto; esto prueba ⇒. Veamos ahora ⇐. Supongamos que $U := f^{-1}(V)$ es abierto. Por A.4 tenemos que $V = f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ y como f^{-1} es continua, entonces, V es abierto.
(b)⇒(c) Veamos primero ⇒. Sea $U \subset X$ abierto. Denotemos $V := f(U)$; entonces, $U = f^{-1}(V)$ (Ejercicio A.2.7(5)), por lo que $V = f(U)$ es abierto.

Para $\Leftarrow$, sea $U \subset X$ tal que $V := f(U)$ es abierto. Entonces, de nuevo $U = f^{-1}(V)$ y U es abierto.

(c)$\Rightarrow$(d) Es inmediato que $\mathcal{T}(f)$ está bien definida. Observemos que la aplicación $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ definida por $\mathcal{P}(f)(A) = f(A)$ es una biyección (Ejercicio A.2.8(c)) y que $\mathcal{T}(f)$ es la restricción de $\mathcal{P}(f)$ a los abiertos de X (es decir, $\mathcal{P}(f)|_{\mathcal{T}_X} = \mathcal{T}(f)$), por lo tanto, como $\mathcal{P}(f)$ es inyectiva, entonces $\mathcal{T}(f)$ también lo es (Ejercicio A.2.10). Para terminar probemos que $\mathcal{T}(f)$ es sobreyectiva. Para ello consideremos $V \in \mathcal{T}_Y$ y sea $U := f^{-1}(V)$; como $V = f(U)$ al ser f biyectiva (Ejercicio A.2.7(1)), entonces, U es abierto y $V = \mathcal{T}(f)(U)$.

(d)$\Rightarrow$(a) La aplicación f es continua ya que si $V \subset Y$ es abierto, entonces, $U := \mathcal{T}(f)^{-1}(V) = f^{-1}(V)$ también es abierto. Para ver la continuidad de f^{-1} basta tener en cuenta que si $U \subset X$ es abierto, entonces, $V := \mathcal{T}(f)(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ es abierto. □

Observación 2.1.12. De las Propiedades 2.1.11(H1)-(H3) se deduce que en la familia de todos los espacios topológicos se puede definir la relación de equivalencia *ser homeomorfo a*. Las clases de equivalencia se llaman **clases de homeomorfismo**.

Supongamos que $\mathcal{P}$ es una propiedad predicable sobre espacios topológicos[1].

Definición 2.1.13. Diremos que $\mathcal{P}$ es una *propiedad topológica* si se cumple lo siguiente:

$$\text{Si } (X, \mathcal{T}_X) \text{ verifica } \mathcal{P} \text{ y } (X, \mathcal{T}_X) \approx (Y, \mathcal{T}_Y) \Rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y) \text{ verifica } \mathcal{P}.$$

Es decir, si siempre que la posea un espacio topológico la poseen todos los espacios topológicos homeomorfos a él.

Observación 2.1.14. Toda propiedad que se exprese exclusivamente en función de abiertos es topológica.

Precisamente el objeto de la topología es el estudio y la clasificación de espacios topológicos en función de sus propiedades topológicas.

Ejemplo 2.1.15. La propiedad *que contenga números reales positivos* es propiedad predicable de un espacio topológico, en cambio no es propiedad topológica

[1]Una propiedad es predicable sobre espacios topológicos si tiene sentido preguntarse si un espacio topológico concreto la cumple, por ejemplo, *tener cardinal finito*, *que todo abierto sea a la vez cerrado* o *que todo elemento sea abierto* son propiedades predicables sobre espacios topológicos, en cambio *que por dos puntos distintos pase una única recta* no es predicable sobre espacios topológicos (a menos que dicho espacio tenga una estructura geométrica adicional).

como demuestra el hecho de que $(0, +\infty)$ la cumple, $(-\infty, 0)$ no la cumple y en cambio $(0, +\infty)$ es homeomorfo a $(-\infty, 0)$ (Ejercicio 2.1.10).

Observación 2.1.16. En general es un problema muy difícil decidir si dos espacios topológicos son homeomorfos o no. Las propiedades topológicas permiten estudiar las propiedades que cumplen en común espacios homeomorfos entre sí y también distinguirlos (es decir, demostrar que dos espacios topológicos *no son homeomorfos*).

Como los homeomorfismos son en particular aplicaciones biyectivas, dos espacios topológicos homeomorfos deben tener el mismo cardinal. Por la Propiedad 2.1.11(d), también debe coincidir el cardinal de las familias de abiertos. Por ejemplo, el espacio topológico discreto de dos elementos (con cuatro abiertos) no es homeomorfo al Espacio de Sierpinski (con tres abiertos) del Ejemplo 2.1.3(ET7).

Terminamos esta sección dando ejemplos de espacios topológicos con la topología usual y estudiando posibles homeomorfismos.

Ejemplo 2.1.17. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathbb{B}^n$ (resp. $\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}$) al conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid d_n^2(0, x) < 1 (\text{resp. } \leq 1, = 1)\}.$$

Generalizando lo hecho en el Ejercicio 2.1.10, podemos ver que $\mathbb{B}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$; basta comprobar que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}^n$,

$$f(x) := \frac{1}{1 + \|x\|}\, x$$

es un homeomorfismo. Veremos que es más difícil demostrar que $\mathbb{B}^n, \mathbb{D}^n, \mathbb{S}^n$ no son homeomorfos. De la misma manera es difícil demostrar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos si $n \neq m$.

La aplicación estereográfica muestra que $\mathbb{S}^n$ menos un punto es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. La definición geométrica es la siguiente. Consideremos el polo norte $P_N := (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ e identifiquemos $\mathbb{R}^n$ con el subespacio H de ecuación $x_{n+1} = 0$ de $\mathbb{R}^n$. Dado $P \in \mathbb{S}^n \setminus \{P_N\}$, su imagen es la intersección de la recta determinada por P y P_N con H. En ecuaciones, tenemos $g : \mathbb{S}^n \setminus \{P_N\} \to \mathbb{R}^n$,

$$g(x) := \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n),\ g^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{(2y_1, \ldots, 2y_n, y_1^2 + \cdots + y_n^2 - 1)}{y_1^2 + \cdots + y_n^2 + 1}.$$

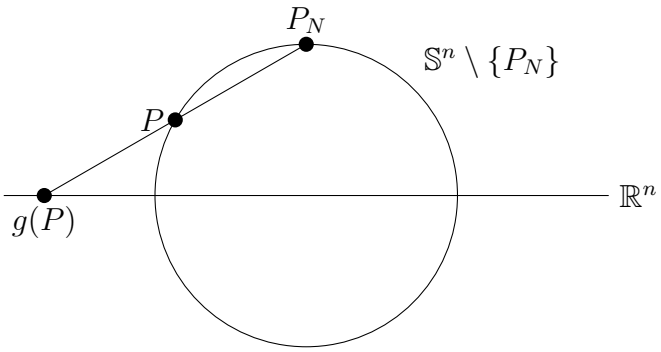


FIGURA 2.1. Representación gráfica de la aplicación estereográfica.

Ejercicios

Ejercicio 2.1.1 Demuestra que los *Ejemplos* 2.1.3(ET3)-(ET10) son verdaderamente topologías, es decir, que cumplen las propiedades (T1)-(T3) de la Definición 2.1.1.

Ejercicio 2.1.2 Considera un conjunto X cualquiera. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son topologías sobre X?

(1) $\mathcal{T} = \{A \subset X \mid A^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$
(2) $\mathcal{T} = \{A \subset X \mid A \text{ es finito}\} \cup \{X\}$

Ejercicio 2.1.3 Demuestra que un E.T. $(X, \mathcal{T})$ es el espacio discreto asociado a X si y solo si los puntos de X son abiertos, es decir, si $\{x\} \in \mathcal{T}$, $\forall x \in X$.

Ejercicio 2.1.4 Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ E.T, demuestra que la identidad $\mathbf{1}_X : X \to X$ es $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_X)$-continua.

Ejercicio 2.1.5 Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Consideremos:

(1) $(X, \mathcal{T}_X)$ es un E.T. cualquiera e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es el E.T. indiscreto de Y.
(2) $(X, \mathcal{T}_X)$ es el E.T. discreto de X e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ en un E.T. cualquiera.

Si se cumplen alguna de las dos condiciones entonces f es automáticamente continua.

Ejercicio 2.1.6 Sea $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un E.T. y $f : X \to Y$ una aplicación. Consideremos en X la topología imagen inversa $f^{-1}\mathcal{T}_Y$. En tal caso f es una aplicación entre espacios topológicos. Demuestra que f es $(f^{-1}\mathcal{T}_Y, \mathcal{T}_Y)$-continua. En particular, $f^{-1}\mathcal{T}_Y$ es la topología $\mathcal{T}_X$ más pequeña que hace que f sea $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-continua.

Ejercicio 2.1.7 Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un E.T. y $f : X \to Y$ una aplicación. Consideremos en Y la topología imagen directa $f\mathcal{T}_X$. En tal caso f es una aplicación entre espacios topológicos. Demuestra que f es $(\mathcal{T}_X, f\mathcal{T}_X)$-continua. En particular, $f\mathcal{T}_X$ es la topología $\mathcal{T}_Y$ más grande que hace que f sea $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-continua.

Ejercicio 2.1.8 Sea $(X, \mathcal{T})$ un E.T. y consideremos $\{0, 1\}$ con la topología discreta. Sea $A \subset X$; demuestra que la aplicación característica de A $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, tal que $\chi_A(x) = 1 \iff x \in A$ es continua si y solo si tanto A como $X \setminus A$ son abiertos.

Ejercicio 2.1.9 Demuestra que $f : X \to Y$ es homeomorfismo si y solo si $f^{-1} : Y \to X$ es homeomorfismo.

Ejercicio 2.1.10 Demuestra que cualquier par de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ son homeomorfos.

Ejercicio 2.1.11 Demuestra que el cuadrado y el círculo son homeomorfos. En otras palabras, sean $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ y $B := [-1, 1] \times \{-1, 1\} \cup \{-1, 1\} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$, demuestra que existe una aplicación continua, biyectiva y con inversa continua entre A y B con la topología usual.

Ejercicio 2.1.12 Sea X E.T. discreto (resp. indiscreto) y sea Y un espacio topológico. Demuestra que $Y \approx X$ si y sólo si Y tiene la topología discreta (resp. indiscreta) y X e Y tienen el mismo cardinal.

Ejercicio 2.1.13 En este ejercicio consideraremos las topologías definidas en los Ejemplos 2.1.3(ET4) y (ET8).

(1) Demuestra que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_x) \approx (\mathbb{R}, \mathcal{T}_y)$ para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$ (de hecho este resultado es cierto en general para la topología de punto incluido de cualquier conjunto, es decir, $(X, \mathcal{T}_x) \approx (X, \mathcal{T}_y)\ \forall\ x, y \in X$).
(2) Demuestra que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\rightarrow}) \not\approx (\mathbb{R}, \mathcal{T}_x)$ (**Indicación**: Comprueba que el cardinal de los conjuntos abiertos ha de ser invariante por homeomorfismo).

Ejercicio 2.1.14 Demuestra que las aplicaciones f y g del Ejemplo 2.1.17 son homeomorfismos.

Tema 2.2. Describiendo topologías: Bases y Subbases

El objetivo es construir familias de abiertos que codifiquen de alguna manera toda la información de la topología de un espacio topológico.

DEFINICIÓN 2.2.1. Sea $(X, \mathcal{T})$ E.T. y $\mathcal{B}$ una familia de abiertos de X. Diremos que $\mathcal{B}$ es una **base de abiertos** de X (o simplemente **base** de X) si $\forall U \subset X$ abierto existe una subfamilia $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{B}$, tal que $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ (por convenio, la unión de una familia vacía es el vacío).

EJEMPLOS 2.2.2. Ya hemos visto algunos ejemplos de bases de abiertos en espacios topológicos, aunque no nos hayamos referido a ellas con ese nombre. Recordemos algunos de ellos:

(1) Si (X, d) es un espacio métrico, el conjunto de las bolas abiertas

$$\mathcal{B}_d = \{\, \mathbb{B}(x;\varepsilon) \mid x \in X \text{ y } \varepsilon > 0 \,\}$$

es una base del espacio topológico $(X, \mathcal{T}(d))$ definido en el Ejemplo 2.1.3(ET1).

(2) En la topología de Sorgenfrey de la recta real $\mathcal{S}$, el conjunto

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{\, [a, a+\varepsilon) \mid a \in \mathbb{R} \text{ y } \varepsilon > 0 \,\}$$

es una base de abiertos.

Además de las anteriores, que se habían usado implícitamente, podemos definir estas otras bases en espacios topológicos conocidos:

(3) Para un espacio topológico discreto X, el conjunto $\{\, \{x\} \mid x \in X \,\}$ es una base de abiertos.

(4) Para un espacio topológico indiscreto X, $\{X\}$ es una base de abiertos.

(5) Consideremos la recta real, el conjunto de intervalos abiertos

$$\mathcal{B} = \left\{\, (x - \tfrac{1}{n}, x + \tfrac{1}{n}) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N} \,\right\}$$

es una base de abiertos. Observa que es mucho más pequeña que la dada por el primer ejemplo.

Podemos dar una condición necesaria y suficiente para que una familia de abiertos sea de hecho una base de abiertos.

PROPOSICIÓN 2.2.3. *Si $\mathcal{B}$ es una familia de abiertos de X, entonces $\mathcal{B}$ es una base de X si y solo si $\forall U \subset X$ abierto y $\forall x \in U$ existe un abierto básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.*

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Sea $x \in U \in \mathcal{T}_X$. Dado que $\mathcal{B}$ es base, entonces existe una familia no vacía $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{B}$, tal que $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$. Por lo tanto existirá $B \in \{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $x \in B \subset U$.

($\Leftarrow$) Partimos ahora de $U \in \mathcal{T}_X$, y sabemos que para todo $x \in U$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Por tanto $U = \bigcup_{x\in U} B_x$. □

Utilizando esta propiedad de las bases de abiertos, observaremos entre otras cosas, que las propiedades de aplicaciones que pueden definirse en función de abiertos también pueden definirse en función de bases de abiertos.

PROPOSICIÓN 2.2.4. *Dada una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos, con $\mathcal{B}_Y$ base de abiertos de Y. Entonces f es continua si y sólo si para cada $B \in \mathcal{B}_Y$, $f^{-1}(B)$ es abierto.*

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Si f es continua y $B \in \mathcal{B}_Y$ (en particular B es abierto), entonces $f^{-1}(B) \subset X$ es abierto por definición.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\forall B \in \mathcal{B}_Y$, $f^{-1}(B)$ es abierto en X. Queremos probar que f es continua, es decir, que $\forall U \subset Y$ abierto en Y, $f^{-1}(U) \subset X$ es abierto en X. Por ser $\mathcal{B}_Y$ base de Y, sabemos que $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ para cierta subfamilia $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{B}_Y$. Por tanto, $f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$ (Propiedad A.3.3(h)). Por hipótesis, $f^{-1}(B_\lambda) \subset X$ es un abierto de X, por tanto $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$ es también abierto en X (por ser unión de abiertos). □

PROPIEDADES 2.2.5 (Base de abiertos). Toda base de abiertos $\mathcal{B}$ de X satisface las siguientes propiedades:

(B1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $\forall x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

DEMOSTRACIÓN.

(B1) Dado que $X \in \mathcal{T}$, entonces X será unión de algunos elementos de $\mathcal{B}$, es decir, $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ donde $B_\lambda \in \mathcal{B}$. Como $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset X$, entonces se tiene que $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.

(B2) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$. Como B_1 y B_2 son abiertos, entonces $B_1 \cap B_2$ es abierto (T3) y así existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ (Proposición 2.2.3). □

De nuevo, lo interesante de estas propiedades es que una familia de conjuntos que satisfaga (B1) y (B2) determina de manera única una topología que tenga a dicha familia como base de abiertos. Es decir, se tiene lo siguiente.

PROPOSICIÓN 2.2.6. *Sea X un conjunto cualquiera y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X que satisface* (B1) *y* (B2)*, entonces existe una única topología en la cual $\mathcal{B}$ es una base de abiertos.*

La demostración se deja para la Tarea 2.

OBSERVACIÓN 2.2.7. Es importante observar que una familia de abiertos de una topología puede cumplir (B1) y (B2) pero no ser base para esa topología, si no para una menos fina (con menos abiertos).

Por ejemplo, consideremos la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$. La familia de abiertos $\{\, (a, a+\varepsilon) \mid a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \,\}$ está formada por abiertos de $\mathcal{S}$, y cumple las condiciones (B1) y (B2). No obstante, no es base para la topología $\mathcal{S}$ si no para la topología usual.

La siguiente caracterización es muy útil para probar que ciertas familias de abiertos son base de abiertos.

PROPOSICIÓN 2.2.8. *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{B}$ una base de abiertos y $\mathcal{B}'$ una familia de abiertos de X, entonces $\mathcal{B}'$ es una base de X si y solo si $\forall B \in \mathcal{B}$ y $\forall x \in B$ existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.*

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de abiertos. Queremos probar que $\forall B \in \mathcal{B}$ y $\forall x \in U$ existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. Para ello consideremos $B \in \mathcal{B}$ (en particular B es abierto) y $x \in B$, entonces por ser $\mathcal{B}'$ base, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$ (Proposición 2.2.3).

($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{B}$ es base de abiertos, $\mathcal{B}'$ una familia de abiertos y que $\forall B \in \mathcal{B}$ y $\forall x \in B$ existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. Veamos que $\mathcal{B}'$ es una base de X, es decir, que $\forall U \in \mathcal{T}$ y $\forall x \in U$ entonces existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset U$ (Proposición 2.2.3). Para ello consideremos $U \subset X$ abierto de X y $x \in U$; entonces por la Proposición 2.2.3 existe $B \in \mathcal{B}$ de modo que $x \in B \subset U$. Por tanto, por hipótesis, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B \subset U$. □

OBSERVACIÓN 2.2.9. Supongamos que $\mathcal{B}$ es base de abiertos de X, y que $\mathcal{B}'$ es una familia de abiertos tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, entonces obviamente $\forall B \in \mathcal{B}$ y $\forall x \in \mathcal{B}$ existe $B' \in \mathcal{B}'$ (por ejemplo $B' = B$) tal que $x \in B' \subset B$, por tanto $\mathcal{B}'$ es también una base de abiertos de X (Proposición 2.2.8).

Los ejemplos siguientes de topologías producidas a partir de bases de abiertos se estudiarán posteriormente en la Tarea 2.

EJEMPLO 2.2.10. El **plano de Moore** es un ejemplo de topología generada por una base de abiertos. Se define el plano de Moore como el semiplano real superior $\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ con la topología $\mathcal{M}$ que tiene por base de abiertos la familia $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} := \{\mathbb{B}((a, b); r), \dot{\mathbb{B}}((a, b); b) \mid (a, b) \in \mathbb{H}, 0 < r \leq b\}$, donde

$$\mathbb{B}((a, b); r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\} \text{ y}$$
$$\dot{\mathbb{B}}((a, b); b) := \mathbb{B}((a, b); b) \cup \{(a, 0)\}.$$

EJEMPLO 2.2.11. Consideremos otra familia de subconjuntos de $\mathbb{H}$.

$$\mathcal{B}_{\mathcal{D}} := \{\mathbb{B}((a, b); r) \mid (a, b) \in \mathbb{H}, 0 < r \leq b\} \cup \{\check{\mathbb{B}}((a, 0); r) \mid a \in \mathbb{R}, 0 < r\},$$

donde

$$\check{\mathbb{B}}((a, 0); r) := \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid y > 0, (x - a)^2 + y^2 < r^2\} \cup \{(a, 0)\}.$$

Se demostrará en la Tarea 2 que $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}$ es base de una topología $\mathcal{D}$ que llamaremos **plano del semidisco**.

TAREA 2. *En esta tarea vamos a estudiar topologías determinadas a partir de familias de subconjuntos que van a formar una base.*

- [$\mathcal{B}$1] *Demuestra la Proposición* 2.2.6.
- [$\mathcal{B}$2] *Comprueba que la familia del Ejemplo* 2.2.10 *induce realmente una topología.*
- [$\mathcal{B}$3] *Sea* $X := \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid y > 0\}$. *Considera la familia* $\mathcal{M}_X := \{U \cap X \mid U \in \mathcal{M}\}$. *No hace falta demostrar que es una topología* $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ *en* X *(es la misma demostración que en* [$\mathcal{B}$2]*). ¿Se ha estudiado anteriormente?*
- [$\mathcal{B}$4] *Demuestra que* X *es abierto en* $\mathcal{M}$.
- [$\mathcal{B}$5] *Sea* $Y := \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid y = 0\}$. *Considera la familia* $\mathcal{M}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{M}\}$. *¿Como es el* E.T. $(Y, \mathcal{M}_Y)$*?*
- [$\mathcal{B}$6] *Comprueba que la familia del Ejemplo* 2.2.11 *induce realmente una topología.*
- [$\mathcal{B}$7] *Considera la familia* $\mathcal{D}_X := \{U \cap X \mid U \in \mathcal{D}\}$ *que es una topología* $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ *en* X *(no hace falta demostrarlo). ¿Se ha estudiado anteriormente?*
- [$\mathcal{B}$8] *Considera la familia* $\mathcal{D}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{D}\}$. *¿Como es el* E.T. $(Y, \mathcal{D}_Y)$*?*
- [$\mathcal{B}$9] *Demuestra que* X *es abierto en* $\mathcal{D}$.
- [$\mathcal{B}$10] *Estudia si* $\mathbf{1}_{\mathbb{H}} : (\mathbb{H}, \mathcal{M}) \to (\mathbb{H}, \mathcal{D})$ *es continua; ¿y* $\mathbf{1}_{\mathbb{H}}^{-1}$*?*
- [$\mathcal{B}$11] *Sean* X, Y *dos espacios topológicos. Vamos a indicar cómo se construye una topología* natural *en el producto cartesiano* $X \times Y$*?*
  - (a) *Comprueba con un ejemplo que en general*

$$\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \text{ abierto de } X, V \text{ abierto de } Y\}.$$

no es una topología en $X \times Y$.

(b) *Comprueba que $\mathcal{B}$ es base de una topología sobre $X \times Y$ que llamaremos* ***topología producto****.*

(c) *Sean $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$ bases de abiertos para X, Y, respectivamente. Denotemos*

$$\mathcal{B}' := \{B_X \times B_Y \mid B_X \in \mathcal{B}_X, B_Y \in \mathcal{B}_Y\}.$$

Demuestra que $\mathcal{B}'$ es base de la topología producto de $X \times Y$.

Podemos simplificar todavía más el conjunto de abiertos que de alguna forma genera una topología. En este tema presentaremos las subbases como la unidad de información más reducida capaz de determinar de manera única una topología.

DEFINICIÓN 2.2.12. Sea X E.T. y $\mathcal{S}$ una familia de abiertos. Diremos que Σ es **subbase de** X si la familia

$$\mathcal{B}(\Sigma) := \left\{\bigcap\{S_i \mid i \in I\} \mid I \text{ conjunto finito y } S_i \in \Sigma\right\}$$

es una base de abiertos para X (se admite por convenio que la intersección de la familia vacía es X).

OBSERVACIONES 2.2.13.

(i) Por la propiedad (T3b) de topologías, si $\{S_i\}_{i\in I}$ es una familia finita de abiertos, entonces $\bigcap_{i\in I} S_i$ es también abierto, por lo tanto si Σ es una familia de abiertos, $\mathcal{B}(\Sigma)$ es también una familia de abiertos.

(ii) Para $I = \emptyset$ se tiene que $X \in \mathcal{B}(\Sigma)$.

(iii) Para $\#I = 1$ se tiene que $\Sigma \subset \mathcal{B}(\Sigma)$ (es decir, los abiertos de una subbase son elementos de la base que generan).

EJEMPLO 2.2.14. La familia $\Sigma = \{\,(x-1, x+1) \mid x \in \mathbb{R}\,\}$ es una subbase para la topología usual de la recta real.

Las subbases todavía son capaces de determinar la continuidad de una aplicación:

PROPOSICIÓN 2.2.15. *Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una aplicación y Σ una subbase de Y. Entonces, f es continua si y solo si $f^{-1}(S)$ es abierto $\forall S \in \Sigma$.*

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Basta tener en cuenta que los elementos de $\mathcal{S}$ son abiertos.

($\Leftarrow$) Supongamos que Σ es una subbase de Y y que $f^{-1}(S)$ es abierto $\forall S \in \Sigma$. Por la Proposición 2.2.4 basta probar que $f^{-1}(B)$, $\forall B \in \mathcal{B}(\Sigma)$. Dado que $B \in \mathcal{B}(\Sigma)$, entonces $B = \bigcap_{i\in I} S_i$ donde I es finito y $S_i \in \Sigma$. En tal caso $f^{-1}(B) = f^{-1}(\bigcap_{i\in I} S_i) =$

$\bigcap_{i\in I} f^{-1}(S_i)$ (Propiedad A.3.3(i)) que es un abierto por la Propiedad (T3b) de topologías, al ser intersección finita de abiertos. □

Como anunciamos al principio del tema, una familia cualquiera de subconjuntos de X determina la topología que los tiene por subbase.

PROPOSICIÓN 2.2.16. *Sea X un conjunto y $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces existe una única topología en la cual $\mathcal{S}$ es subbase y es la menor topología que contiene a $\mathcal{S}$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta comprobar que $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ cumple las propiedades (B1) y (B2), por la Proposición 2.2.6. □

Ejercicios

Ejercicio 2.2.1 Demuestra que tanto $\mathcal{B} := \{(a,b) \subset \mathbb{R} \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ como $\tilde{\mathcal{B}} := \{(p,q) \subset \mathbb{R} \mid p < q, p, q \in \mathbb{Q}\}$ son bases de abiertos para $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

Ejercicio 2.2.2 Extenderemos el resultado del Ejercicio 2.2.1 a $\mathbb{R}^n$ del siguiente modo: demuestra que tanto

$$\mathcal{B}^n := \{(a_1,b_1) \times ... \times (a_n,b_n) \subset \mathbb{R}^n \mid a_i < b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$$

como

$$\tilde{\mathcal{B}}^n := \{(p_1,q_1) \times ... \times (p_n,q_n) \subset \mathbb{R}^n \mid p_i < q_i, p_i, q_i \in \mathbb{Q}, i = 1, ..., n\}$$

son bases de abiertos para $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$.

Ejercicio 2.2.3 Demuestra que la topología usual de $\mathbb{R}^{n+m}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Ejercicio 2.2.4 Si $(X, \mathcal{T}(d))$ es un espacio seudométrico, entonces el conjunto de las bolas abiertas

$$\mathcal{B} := \{\mathbb{B}_d(x;\varepsilon) \mid x \in X \wedge \varepsilon \in \mathbb{R}_+\},$$

es una base de abiertos de X.

Ejercicio 2.2.5 Sea X E.T. discreto. Demuestra que $\mathcal{B}_{d,X} := \{\{x\} \mid x \in X\}$ es base de X.

Ejercicio 2.2.6 Sea $\mathcal{B}$ base de abiertos de una topología $\mathcal{T}$ y consideremos $\mathcal{T}'$ otra topología de modo que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$, entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Por eso diremos que la topología que "genera" $\mathcal{B}$ (es decir, de la cual $\mathcal{B}$ es base) es la "menor" topología que tiene a $\mathcal{B}$ por abiertos.

Ejercicio 2.2.7 Demuestra que

$$\Sigma := \{(p, +\infty) \mid p \in \mathbb{Q}\} \cup \{(-\infty, q) \mid q \in \mathbb{Q}\}$$

es subbase de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

Ejercicio 2.2.8 Sea $(X, \mathcal{T})$ un E.T.. Demuestra que $\Sigma := \{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}$ es subbase de $\mathcal{T}$ si y sólo si $\forall U \in \mathcal{T}$ y $\forall x \in U$ existen $S_{\lambda_1}, ..., S_{\lambda_r} \in \Sigma$ tal que $x \in S_{\lambda_1} \cap ... \cap S_{\lambda_r} \subset U$.

Ejercicio 2.2.9 Usaremos una topología especial para demostrar que existen infinitos números primos. Para a y $b \in \mathbb{Z}$ con $b > 0$ definimos

$$N_{a,b} = \{a + n\,b \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

(1) Demuestra que $\mathcal{B} := \{N_{a,b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ es una base para una topología.

(2) En la topología construida con la base anterior, prueba que todos los abiertos (no vacíos) son infinitos.

(3) Demuestra que el conjunto $\mathbb{Z} \setminus N_{a,b}$ es abierto (más adelante veremos que eso se expresa diciendo que $N_{a,b}$ es cerrado).

(4) ¿Qué enteros pertenecen a abiertos de la forma $N_{0,p}$, para algún primo p?

(5) Finalmente, si solo hubiese un número finito de primos, el conjunto $\bigcup_p N_{0,p}$ sería cerrado, es decir, $\mathbb{Z} \setminus \bigcup_p N_{0,p}$ sería abierto (¿por qué?). Encuentra una contradicción con (2).

Tema 2.3. Espacios (seudo)métricos como espacios topológicos

El Ejemplo 2.1.3(ET1) proporciona una familia muy importante de espacios topológicos: dado un espacio (seudo)métrico (X, d) consideraremos el E.T $(X, \mathcal{T}(d))$.

OBSERVACIÓN 2.3.1. La topología inducida por la métrica δ (Ejemplo 1.1.8(1)) es la topología discreta sobre X. Análogamente, la topología indiscreta está inducida por la seudométrica D (Ejemplo 1.4.3(SD1)). Vemos que ciertas topologías ya definidas provienen de una métrica o seudométrica, lo que justifica la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.3.2. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *metrizable* (resp. *seudometrizable*) si existe una métrica (resp. seudométrica) d sobre X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$.

OBSERVACIÓN 2.3.3. La propiedades *ser (seudo)metrizable* son topológicas. En efecto, sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico (seudo)metrizable y sea $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espacio homeomorfo a X. Elegimos d_X (seudo)métrica tal que $\mathcal{T}(d_X) = \mathcal{T}_X$ y $f : Y \to X$ homeomorfismo. Definimos $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$, $d_Y(y_1, y_2) := d_X(f(y_1), f(y_2))$, $y_1, y_2 \in Y$. Dado que f es biyección, se comprueba fácilmente que d_Y es una (seudo)métrica. Además, $f(\mathbb{B}_{d_Y}(y; \varepsilon)) = \mathbb{B}_{d_X}(f(y); \varepsilon)$. Con esta igualdad y dado que f es homeomorfismo, se verifica fácilmente que $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(d_Y)$, por lo que Y es (seudo)metrizable.

Nos interesaremos a continuación por el problema de existencia y unicidad de métricas o seudométricas que inducen una topología dada, es decir, decidir si un espacio es o no (seudo)metrizable, y en caso positivo, caracterizar las posibles (seudo)métricas que lo inducen.

OBSERVACIÓN 2.3.4. Los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ son espacios métricos, ver Observación 1.4.2; por el Ejercicio 2.1.10, todos ellos son homeomorfos entre sí. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Si $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, observa que

$$\operatorname{diám} I = \begin{cases} b - a & \text{si } a, b \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Por tanto, *ser acotado* no es una propiedad topológica y tampoco lo es la magnitud del diámetro.

DEFINICIÓN 2.3.5. Diremos que dos seudométricas d_1 y d_2 sobre un mismo conjunto X son *topológicamente equivalentes* si inducen la misma topología sobre dicho conjunto, es decir, si $\mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_2)$.

Se tiene la siguiente caracterización de seudométricas topológicamente equivalentes:

PROPOSICIÓN 2.3.6. *Las seudométricas d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes si y solo si:*

(MTE1) $\forall x \in X$ *y* $\forall \varepsilon_1 > 0$, *existe* $\varepsilon_2 > 0$ *tal que* $\mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon_2) \subset \mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon_1)$;
(MTE2) $\forall x \in X$ *y* $\forall \varepsilon_2 > 0$, *existe* $\varepsilon_1 > 0$ *tal que* $\mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon_1) \subset \mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon_2)$.

OBSERVACIÓN 2.3.7. Si d_1 y d_2 son (seudo)métricas topológicamente equivalentes sobre X y V^x es un entorno de x en (X, d_1), entonces existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon_1) \subset V^x$. Como $\mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon_1) \in \mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_2)$ tenemos que tal que $\mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon_1)$ es entorno de x en (X, d_2). Por tanto, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $\mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon_2) \subset \mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon_1) \subset V^x$, por lo que V^x es un entorno de x en (X, d_2).

La demostración de las Proposición 2.3.6 y otras propiedades se dejan para la tarea siguiente.

TAREA 3.

(MTeq1) *Demuestra la Proposición* 2.3.6.

Se dice que dos seudométricas d_1, d_2 sobre un mismo conjunto X son equivalentes *si cumplen las siguientes condiciones:*

(ME1) $\forall \varepsilon_1 > 0$, *existe* $\varepsilon_2 > 0$ *tal que* $\forall x \in X$ *se tiene que* $\mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon_2) \subset \mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon_1)$;
(ME2) $\forall \varepsilon_2 > 0$, *existe* $\varepsilon_1 > 0$ *tal que* $\forall x \in X$ *se tiene que* $\mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon_1) \subset \mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon_2)$.

(MTeq2) *Interpreta las diferencias entre* (MTE1) *y* (ME1).

(MTeq3) *Si dos seudométricas d_1 y d_2 verifican $d_2 \leq c_1 d_1$ y $d_1 \leq c_2 d_2$ para ciertas constantes $c_1, c_2 > 0$, entonces son equivalentes.*

(MTeq4) *Las métricas d_n^1, d_n^2, d_n^∞ sobre $\mathbb{R}^n$ son equivalentes (usa el Ejemplo* 2.1.3(ET2)(b)*).*

(MTeq5) *Demuestra que la equivalencia de seudométricas implica equivalencia topológica.*

Los conceptos de métricas equivalentes y topológicamente equivalentes no coinciden. Puede ocurrir que dado $x \in X$ y dado $\varepsilon_1 > 0$ existe $\varepsilon_2(x, \varepsilon_1) > 0$ (es decir, que depende de x y de ε_1) tal que $\mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon_2(x,\varepsilon_1)) \subset \mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon_1)$ (Condición (MTE1)*), pero que no seamos capaces de encontrar un $\varepsilon_2(\varepsilon_1) > 0$ que cumpla la propiedad $\mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon_2(\varepsilon_1)) \subset \mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon_1)$ para cualquier $x \in X$ (Condición* (ME1)*).*

(MTeq6) *Resuelve el Ejercicio* 2.3.2.

Ejercicios

Ejercicio 2.3.1 Demuestra que el espacio topológico de Sierpinski $(X, \mathcal{T})$ del Ejemplo 2.1.3(ET7) no es (seudo)metrizable. Extiende la demostración al caso espacio topológico $(X, \mathcal{T}_x)$ del punto incluido (Ejemplo 2.1.3(ET8)), $\#X > 1$ y demuestra que este espacio no es discreto ni indiscreto.

Ejercicio 2.3.2 Sea $X = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$; definamos d_1 y d_2 métricas del siguiente modo:

$$d_1\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{m}\right) = |n - m| \text{ y } d_2\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{m}\right) = \left|\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m}\right|.$$

Demuestra que:

(1) $\mathcal{T}(d_1)$ y $\mathcal{T}(d_2)$ son ambas la topología discreta, es decir, $\mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_2) = \mathcal{T}_d$, y por tanto d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.
(2) Se cumple (ME2), pero no (ME1).

Ejercicio 2.3.3 En la Observación 2.3.4 insistíamos en que la propiedad de ser acotado no es una propiedad topológica. Dado un espacio (seudo)métrico (X, d) demuestra que la (seudo)métrica d_a (del Ejercicio 1.1.10) es topológicamente equivalente a d y que $\text{diám}_{d_a} X \leq 1$.

Ejercicio 2.3.4 Calcula el diámetro de la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ centrada en $(0, 0)$ y de radio 1 en las siguientes métricas: una d_a en la cual la distancia entre dos puntos sea la longitud del menor arco de circunferencia que los une, también otra en la cual la distancia entre dos puntos es la longitud de la cuerda que los une (es decir, la métrica usual d_2^2) y por último las distancias d_2^1 y d_2^∞.

Ejercicio 2.3.5 Sea $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ un abierto de $\mathbb{R}^m$. Demuestra que

$$U_1 \times U_2 := \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) \mid (x_1, ..., x_n) \in U_1, (x_{n+1}, ..., x_{n+m}) \in U_2\}$$

es un abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Ejercicio 2.3.6 Utiliza la Tarea 3(MTeq4) para probar otra vez el Ejercicio 1.3.1.

Ejercicio 2.3.7 Demuestra que las distancias ρ_0 y ρ_1 del Ejemplo 1.1.8(2), definidas en el espacio $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, no son topológicamente equivalentes.

Tema 2.4. Cerrados

DEFINICIÓN 2.4.1. Sea $(X, \mathcal{T})$ E.T. y sea $C \subset X$; diremos que C es un *cerrado de* $(X, \mathcal{T})$ (o un $\mathcal{T}$*-cerrado*) si $X \setminus C$ es un $\mathcal{T}$-abierto.

OBSERVACIÓN 2.4.2. Es importante destacar que *ser cerrado* no es *lo contrario* de *ser abierto*, sino que *el complementario sea abierto*. De hecho existen ejemplos, como veremos a continuación, de conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados o que no son ni abiertos ni cerrados.

EJEMPLO 2.4.3. Consideremos $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ y los siguientes conjuntos en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$:

(a) $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son cerrados (y abiertos).
(b) $[a, b]$ es cerrado (y no es abierto).
(c) (a, b) no es cerrado (y es abierto).
(d) $(a, +\infty)$ y $(-\infty, b)$ no son cerrados (y sí abiertos).
(e) $[a, b)$ y $(a, b]$ no son cerrados (ni abiertos).
(f) $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$ son cerrados (y no abiertos).

DEMOSTRACIÓN.

(a) Por definición de abiertos (Definición 2.1.1(T1)) sabemos que tanto $\mathbb{R}$ como $\emptyset$ son abiertos, es decir, tanto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ como $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ son cerrados.

(b) Veamos en primer lugar que $[a, b]$ no es abierto. Esto es claro por la Definición 1.2.4 ya que $a \in [a, b]$, pero no existe $\varepsilon > 0$ cumpliendo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset [a, b]$ (basta observar que $a - \frac{\varepsilon}{2} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, pero $a - \frac{\varepsilon}{2} \notin [a, b]$). En cambio es cerrado ya que $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ es abierto por ser unión de intervalos abiertos (Teorema 1.2.8).

(c) En el Ejemplo 1.2.5 probamos que (a, b) es abierto. Para ver que no es cerrado, observemos que $\mathbb{R} \setminus (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ no es entorno de $a \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$ (Definición 1.2.4), es decir, no existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ (basta tomar $\delta := \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b-a}{2}\} > 0$ y comprobar que $a + \delta \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, pero $a + \delta \notin (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$). Por lo tanto $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ no es abierto, y así (a, b) no es cerrado.

(d) Los conjuntos $(a, +\infty)$ y $(-\infty, b)$ son abiertos ya que

$$(a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, a + n) \quad \text{y} \quad (-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (b - n, b)$$

donde $(a, a + n)$ y $(b - n, b)$ son abiertos por el apartado anterior. Para probar que no son cerrados basta observar que $(a, +\infty)^c = (-\infty, a]$ no es abierto ya que

no es entorno de a y $(-\infty, b)^c = [b, +\infty)$ no es entorno de b (análogo al apartado anterior).

(e) Aplicando de nuevo el mismo razonamiento, el intervalo $[a, b)$ no es entorno de $a \in [a, b)$, por lo tanto $[a, b)$ no es abierto. Análogamente $\mathbb{R} \setminus [a, b)$ tampoco es abierto ya que no es entorno de $b \in \mathbb{R} \setminus [a, b)$, así pues $[a, b)$ no es cerrado. El caso de $(a, b]$ se prueba de manera análoga.

(f) Los conjuntos $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$ son cerrados ya que $[a, +\infty)^c = (-\infty, a)$ y $(-\infty, b]^c = (b, +\infty)$ son abiertos por el apartado (d). En cambio, no son abiertos ya que $[a, +\infty)^c = (-\infty, a)$ y $(-\infty, b]^c = (b, +\infty)$ no son cerrados (de nuevo por el apartado (d)). □

Observación 2.4.4. En el Ejercicio 2.4.4 se pide ver que las bolas cerradas y las esferas son cerradas. Dado que la aplicación distancia no tiene por qué alcanzar todos los valores reales positivos, la bola abierta y la bola cerrada pueden coincidir y, por lo tanto, una bola abierta puede ser un conjunto cerrado y una bola cerrada puede ser un conjunto abierto. Por ejemplo, si δ es la métrica discreta y $x \in X$, se tiene que $\mathbb{B}_\delta(x; \frac{1}{2}) = \mathbb{D}_\delta(x; \frac{1}{2})$ y así, tanto $\mathbb{B}_\delta(x; \frac{1}{2})$ como $\mathbb{D}_\delta(x; \frac{1}{2})$ son abiertos y cerrados.

Reformularemos una vez más la definición de aplicación continua desde el punto de vista de los conjuntos cerrados.

Proposición 2.4.5. *Sean $f : X \to Y$ una aplicación y $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$* e.t. *Entonces, f es **continua** si solo si $\forall C \subset Y$ $\mathcal{T}_Y$-cerrado se tiene que $f^{-1}(C)$ es $\mathcal{T}_X$-cerrado.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Partimos de f continua y de C un $\mathcal{T}_Y$-cerrado: nuestro objetivo es probar que $f^{-1}(C)$ es $\mathcal{T}_X$-cerrado. Ahora bien, si C es $\mathcal{T}_Y$-cerrado se tiene por la Definición 2.4.1 que $U := Y \setminus C \in \mathcal{T}_Y$. Por ser f continua $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ (Definición 2.1.5). Además $f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(C)$ (Propiedad A.2.5(7)) por lo tanto $f^{-1}(C) = X \setminus f^{-1}(U)$ es $\mathcal{T}_X$-cerrado ya que es el complementario de un conjunto abierto en X.

($\Leftarrow$) Partimos de que $f^{-1}(C)$ es $\mathcal{T}_X$-cerrado para todo $\mathcal{T}_Y$-cerrado C y queremos probar que f es continua. Para ello tomemos $U \in \mathcal{T}_Y$ y veamos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ (Definición 2.1.5). Sea $C := Y \setminus U$ cerrado en Y ya que U es abierto, entonces por hipótesis $f^{-1}(C)$ es $\mathcal{T}_X$-cerrado, que por definición implica que $X \setminus f^{-1}(C) \in \mathcal{T}_X$, ahora bien, $X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C) = f^{-1}(U)$ (Propiedad A.2.5(7)), por lo tanto hemos probado que $U \in \mathcal{T}_X$. □

PROPIEDAD 2.4.6. Si $f : X \to Y$ es una aplicación biyectiva, entonces son equivalentes:

(a) f es homeomorfismo.
(b) $\forall D \subset Y$, D es cerrado si y solo si $f^{-1}(D)$ es cerrado.
(c) $\forall C \subset X$, C es cerrado si y solo si $f(C)$ es cerrado.
(d) La aplicación $\mathcal{C}(f) : \mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_Y$, definida por $\mathcal{C}(f)(C) := f(C)$, es una biyección.

La demostración es la misma que la de la Propiedad 2.1.11(H4).

PROPIEDADES 2.4.7 (Cerrados). Sea $(X, \mathcal{T})$ E.T. y denotemos por $\mathcal{C}_\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ la colección de los $\mathcal{T}$-cerrados de X, entonces $\mathcal{C}_\mathcal{T}$ satisface las siguientes propiedades:

(C1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$.
(C2) Si $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de elementos de $\mathcal{C}_\mathcal{T}$, entonces $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$.
(C3) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$, entonces $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$.
(C3b) Si $\{C_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de elementos de $\mathcal{C}_\mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{i=1}^n C_i \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$.

Estas propiedades se deducen esencialmente de las leyes de Morgan, ver Propiedades A.1.3(Bl8) y Propiedades A.3.3(e). Análogamente al caso de abiertos, (C3) es equivalente a (C3b).

Del mismo modo se cumple el recíproco.

PROPOSICIÓN 2.4.8. *Sea X un conjunto cualquiera y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X que verifica* (C1)*,* (C2) *y* (C3)*, entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ sobre X cuya familia de $\mathcal{T}$-cerrados es $\mathcal{C}$ (es decir $\mathcal{C}_\mathcal{T} = \mathcal{C}$).*

La demostración se deja para la Tarea 4. A veces es más sencillo describir la familia de cerrados que la propia topología (es decir, la familia de abiertos). Este es el caso en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.4.9. Sea X un conjunto cualquiera y sea $\mathcal{C}_{\text{CF}} \subset \mathcal{P}(X)$ la colección de los subconjuntos finitos de X y el espacio total:

$$\mathcal{C}_{\text{CF}} := \mathcal{P}_F(X) \cup \{X\}, \tag{2.1}$$

ver Ejercicio A.5.7. En la Tarea 4 veremos que es la familia de cerrados de una topología.

Análogamente podemos razonar si sustituimos *finito* por *contable*. En tal caso obtenemos la llamada **topología conumerable**.

TAREA 4.

($\mathcal{C}$1) *Demuestra la Proposición* 2.4.8.

($\mathcal{C}2$) *Justifica que la familia* $\mathcal{C}_{\text{CF}}$ *del Ejemplo* 2.4.9 *es realmente la familia de cerrados de una topología* $\mathcal{T}_{\text{CF}}$.

($\mathcal{C}3$) *Define la topología conumerable* $\mathcal{C}_{\text{CN}}$ *sustituyendo* finito *por* contable.

($\mathcal{C}4$) *Asumamos el siguiente resultado:*

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $A \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ una familia arbitraria de polinomios. Entonces existen $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tales que

$$\{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(t_1, \ldots, t_n) = 0 \ \forall f \in A\} =$$
$$\{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n \mid f_j(t_1, \ldots, t_n) = 0 \ \forall j \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

Sea $X = \mathbb{K}^n$ *y sea*

$$\mathcal{C} := \{C \subset X \mid \ C \text{ es el lugar de ceros de una familia de } \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\}.$$

Demuestra que $\mathcal{C}$ *es la familia de cerrados de una topología (llamada de* Zariski*).*

($\mathcal{C}5$) *Para el caso* $n = 1$*, relaciónala con otra topología.*

($\mathcal{C}6$) *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un* E.T. *tal que* X *es finito. Entonces,* $\mathcal{T}$ *es la familia de cerrados de (en general)* otra *topología sobre* X*. ¿Se puede reemplazar* X finito *por* $\mathcal{T}$ finita*?*

($\mathcal{C}7$) *Usemos las nociones de abierto y cerrado para ver que la recta de Sorgenfrey y la recta usual no son homeomorfas (Ejercicio* 2.4.8*).*

(a) *En primer lugar, demuestra que en* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *no existen subconjuntos propios abiertos y cerrados. Trata de probarlo por reducción al absurdo, construyendo uno abierto y cerrado acotado y aplicando el Ejercicio* 2.4.2*.*

(b) *Observa que cualquier intervalo* $[a, b)$ *es abierto y cerrado en la topología de Sorgenfrey (Ejercicio* 2.4.3*).*

(c) *Usa lo anterior para probar que no existe un homeomorfismo entre las dos topologías.*

Ejercicios

Ejercicio 2.4.1 En un espacio topológico discreto todos los subconjuntos son cerrados.

Ejercicio 2.4.2 Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado con la topología usual. Demuestra que si $\text{ínf}\, C$ es finito entonces $\text{ínf}\, C \in C$. Lo mismo ocurre con $\sup C$.

Ejercicio 2.4.3 Demuestra que $[a, b) \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto y cerrado en la topología $\mathcal{S}$ de Sorgenfrey.

Ejercicio 2.4.4 Sea (X, d) un espacio seudométrico y $(X, \mathcal{T}(d))$ es su espacio topológico asociado, entonces para todo $x_0 \in X$ y $\varepsilon \geq 0$ se tiene:

(1) $\mathbb{D}_d(x_0; \varepsilon)$ es cerrado.
(2) $\mathbb{S}_d(x_0; \varepsilon)$ es cerrado.

Demuestra además que $\{x\}$ es cerrado $\forall x \in X$ si y solo si d es una métrica.

Ejercicio 2.4.5 Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{a_1, ..., a_r\} \to \mathbb{R}$ una aplicación que sea continua y de modo que en los puntos a_i, la aplicación f tenga asíntotas verticales; es decir, $\forall M > 0\ \exists \varepsilon > 0$ de modo que $\forall x \in (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$ se tiene que $|f(x)| > M$. Intuitivamente, que *cerca* de a_i, las imágenes *se hacen todo lo grande que queramos*. Demuestra que

$$\Gamma_f := \big\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, ..., a_r\}\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

(también llamado el grafo de f) es un cerrado de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.4.6 Demuestra que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}}) \not\approx (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CN}})$. (**Indicación:** Comprueba que el cardinal de los conjuntos cerrados debe ser invariante por homeomorfismo).

Ejercicio 2.4.7 Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado de $\mathbb{R}^n$. Demuestra que $C \times \mathbb{R}^m$ es un cerrado de $\mathbb{R}^{n+m}$. Deduce de esto que si $C_1 \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado de $\mathbb{R}^n$ y $C_2 \subset \mathbb{R}^m$ un cerrado de $\mathbb{R}^m$ entonces

$$C_1 \times C_2 := \{(\overbrace{x_1, ..., x_n}^{\bar{x}^1}, \overbrace{x_{n+1}, ..., x_{n+m}}^{\bar{x}^2}) \mid \bar{x}^1 \in C_1 \wedge \bar{x}^2 \in C_2\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

es un cerrado de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Ejercicio 2.4.8 Demuestra que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \not\approx (\mathbb{R}, \mathcal{S})$.

Tema 2.5. Subespacios

El punto de partida de este tema es un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un subconjunto $A \subset X$ de X. El objetivo será convertir el conjunto A en un espacio topológico (utilizando la topología $\mathcal{T}$) de manera que, por ejemplo, la inclusión $i_A : A \hookrightarrow X$ sea continua. Por el Ejercicio 2.1.5, si consideramos la topología discreta sobre A ya se tiene que i_A es continua. Sin embargo, buscamos una topología *óptima* que cumpla esta condición, y como la discreta no *discrimina* quién debe ser abierto vamos a buscar la que posea *menos* abiertos y satisfaga que i_A es continua. En realidad, lo que vamos a hacer es generalizar lo que ya se ha hecho para subconjuntos de espacios métricos.

Definición 2.5.1. Tomemos un subconjunto cualquiera $A \subset X$. La *topología de subespacio de* A es $\mathcal{T}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$. Diremos que $(A, \mathcal{T}_A)$ es un *subespacio topológico* de $(X, \mathcal{T})$. Llamaremos X*-abiertos* (o *abiertos absolutos*) a los elementos de $\mathcal{T}$ y A*-abiertos* (o *abiertos relativos*) a los elementos de $\mathcal{T}_A$. El mismo criterio se aplicará a otros conceptos (cerrados, entornos, ...).

Ejemplo 2.5.2. Sea $U \subset A$ abierto en X (es decir, $U \in \mathcal{T}_X$), entonces $U = U \cap A$ y por definición se tiene que U es un abierto relativo en A (es decir, $U \in \mathcal{T}_A$). En otras palabras, todo abierto de X contenido en A es un abierto en el subespacio A. Conviene observar que no todos los abiertos de A son abiertos de X contenidos en A. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{R}_{\geq 0}$, entonces $U = [0, a) = (-\infty, a) \cap A$ es intersección de un abierto de $\mathbb{R}$ con A y por tanto, U es abierto de A. En cambio, U no es abierto en $\mathbb{R}$ (Ejemplo 2.4.3(e)).

Se tienen las siguientes propiedades básicas de subespacios. Para ello consideremos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos, $A \subset X$ y $A' \subset Y$. Entonces:

Propiedades 2.5.3 (Subespacios).

(1) Si $A \subset B \subset X$, entonces $\mathcal{T}_A = (\mathcal{T}_B)_A$.

(2) $C \subset A$ es A-cerrado si y solo si existe $\tilde{C} \subset X$, X-cerrado, tal que $C = \tilde{C} \cap A$.

(3) Si A es X-abierto (resp. X-cerrado), entonces $V \subset A$ es A-abierto (resp. A-cerrado) si y solo si V es X-abierto (resp. X-cerrado).

(4) La inclusión $i_{A,X} : A \hookrightarrow X$ es continua. De hecho, si $\mathcal{T}$ es la topología de X, entonces $\mathcal{T}|_A = i_{A,X}^{-1}\mathcal{T}$ (la topología imagen inversa de $i_{A,X}$ del Ejemplo 2.1.3(ET9)).

(5) Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces $f|_A : A \to Y$ es continua.

(6) Si $f : X \to A'$ es una aplicación continua, entonces $g := i_{A',Y} \circ f : X \to Y$ es continua.

(7) Supongamos que $f : X \to Y$ es una aplicación continua, que $f(X) \subset A'$ y que $h : X \to A'$ es la única aplicación tal que $f = i_{A',Y} \circ h$. Entonces h es continua.

DEMOSTRACIÓN.

(1) ($\subset$) Sea $U \in \mathcal{T}_A$, entonces $U = \tilde{U} \cap A$ para cierto $\tilde{U} \in \mathcal{T}$. Por lo tanto $U = (\tilde{U} \cap B) \cap A$ donde $\tilde{U} \cap B \in \mathcal{T}_B$ así pues $U \in (\mathcal{T}_B)_A$.
($\supset$) Sea $U \in (\mathcal{T}_B)_A$, entonces $U = \tilde{U}_1 \cap A$ para cierto $\tilde{U}_1 \in \mathcal{T}_B$. Como $\tilde{U}_1 \in \mathcal{T}_B$, entonces $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 \cap B$ para cierto $\tilde{U}_2 \in \mathcal{T}$. Por lo tanto $U = (\tilde{U}_2 \cap B) \cap A = \tilde{U}_2 \cap (B \cap A) = \tilde{U}_2 \cap A$ con $\tilde{U}_2 \in \mathcal{T}$, es decir, $U \in \mathcal{T}_A$.

(2) El conjunto $C \subset A$ es un cerrado relativo si y solo si $A \setminus C \in \mathcal{T}_A$, es decir, $A \setminus C = U \cap A$ para cierto $U \in \mathcal{T}$. Esto es equivalente a que

$$C = A \setminus (U \cap A) = (X \cap A) \setminus (U \cap A) \overset{\text{Ej. A.1.2(1)}}{=} (X \setminus U) \cap A.$$

Tomando $\tilde{C} = X \setminus U \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ se tiene que $C = \tilde{C} \cap A$ donde $\tilde{C}$ es un cerrado absoluto.

(3) Lo demostramos solo para A abierto ya que si es cerrado se realiza de la misma manera.
($\Rightarrow$) Si $V \subset A$ es A-abierto entonces existe $\tilde{V} \subset X$ abierto de modo que $V = \tilde{V} \cap A$. Como la intersección de dos abiertos es abierta por la propiedad (T3) entonces V es abierto.
($\Leftarrow$) Si V es abierto entonces $V = V \cap A$ es un A-abierto.

(4) Por el Ejercicio 2.1.6 la segunda afirmación implica la primera. Por definición de topología imagen inversa, dado $U \subset A$, $U \in \mathcal{T}$ si y solo si existe $\tilde{U} \in \mathcal{T}$ tal que $U = i_{A,X}^{-1}(\tilde{U})$, es decir $U = \tilde{U} \cap A$ lo que equivale a $U \in \mathcal{T}_A$.

(5) Observemos que $f|_A = f \circ i_{A,X}$, por lo que se deduce de la Proposición 2.1.9.

(6) Es inmediato ya que composición de aplicaciones continuas es una aplicación continua (Proposición 2.1.9). Es decir, la extensión de una aplicación continua a un supraconjunto de la imagen es continua.

(7) Sea $U \in \mathcal{T}_{A'}$, es decir, $U = \tilde{U} \cap A'$ para cierto $\tilde{U} \in \mathcal{T}_Y$. Obsérvese que $h^{-1}(U) = f^{-1}(\tilde{U})$ que es un abierto de X por ser f continua. □

OBSERVACIÓN 2.5.4. Combinando las Propiedades 2.5.3(4) y (7) se tiene que si $f : X \to Y$ es continua, $A' \subset Y$ y $A := f^{-1}(A')$ entonces $\tilde{f} : A \to A'$, definida como f, es también continua.

Por último, ahora que hemos estudiado los subespacios de un espacio topológico, podemos dar un criterio útil para probar que una aplicación es continua basándonos en su restricción a subespacios. Este criterio formaliza la *continuidad por trozos*.

PROPOSICIÓN 2.5.5. *Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$* E.T. *y sea $f : X \to Y$ una aplicación. Supongamos que la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos recubre X (es*

decir, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = X$*). Denotemos por* $f_\lambda := f|_{A_\lambda} : A_\lambda \to Y$ *a la restricción. Supongamos que:*

(1) $A_\lambda \in \mathcal{T}_X$*, o bien*
(2) $A_\lambda \in \mathcal{C}_X$ *y* Λ *finito.*

Entonces f *es continua* $\Leftrightarrow$ f_λ *es continua* $\forall\lambda \in \Lambda$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Se verifica aunque A_λ no cumpla las condiciones (1) ó (2) del enunciado (Propiedad 2.5.3(5)).

($\Leftarrow$) Supongamos que estamos en el caso (1). Entonces, tomemos V un abierto de Y. Como $f|_{A_\lambda}$ es continua $f|_{A_\lambda}(V) = f(V) \cap A_\lambda$ es abierto de A_λ. Como A_λ es abierto, sus abiertos son abiertos de X (Propiedad (3)). Finalmente, la unión de todos ellos es abierto. Ahora bien,

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f|^{-1}_{A_\lambda}(V) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(V) \cap A_\lambda = f^{-1}(V) \cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda,$$

y como $\{A_\lambda\}$ cubre X, $f^{-1}(V)$ es abierto. Así, f es continua.

El segundo caso es igual, teniendo en cuenta que la unión es finita. Sea C un cerrado de Y, entonces $f^{-1}(C) = (f^{-1}(C) \cap A_1) \cup \cdots \cup (f^{-1}(C) \cap A_1)$, donde $f^{-1}(C) \cap A_i$ es cerrado por la continuidad de $f|_{A_i}$. Con lo que concluimos que $f^{-1}(C)$ es cerrado y por lo tanto f continua. □

Observación 2.5.6. Supongamos que $f : A\backslash\{a_1, ..., a_n\} \to B$ es una aplicación como en el Ejercicio 2.5.4; entonces $\Gamma_f \subset A \times B$ es cerrado relativo en $A \times B$. Supongamos ahora que A y B son cerrados en $\mathbb{R}$, entonces $A \times B$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$ (Ejercicio 2.4.7). Por tanto, por la Propiedad 2.5.3(3), se tiene que el grafo Γ_f de f, es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.5.7. Sea $\mathcal{P}$ una propiedad predicable de espacios topológicos. Diremos que una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es *hereditaria* si se cumple lo siguiente:

$$\text{Si } (X, \mathcal{T}) \text{ verifica } \mathcal{P} \text{ y } A \subset X \text{ no vacío } \Rightarrow (A, \mathcal{T}|_A) \text{ verifica } \mathcal{P}.$$

La inclusión $i_{A,X}$ de un subespacio topológico no vacío A propiamente contenido en el ambiente X no es homeomorfismo ya que no es biyectiva. En cambio podríamos decir que no está muy lejos de serlo. Bastaría cambiar el conjunto imagen al que nos referimos. Esta idea inspira la siguiente definición.

Definición 2.5.8. Sean X e Y e.t. y sea $f : X \to Y$ una aplicación. Diremos que f es un *homeomorfismo sobre la imagen* si la aplicación inducida $\bar{f} : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.

EJEMPLO 2.5.9. Si $(X, \mathcal{T}_X)$ es un E.T. y $A \subset X$, entonces $i_{A,X} : A \to X$ es homeomorfismo sobre la imagen dado que $\bar{i}_{A,X}$ no es más que la identidad en A, es decir, $\bar{i}_{A,X} = 1_A$, que es homeomorfismo (Propiedad 2.1.11(H1)).

EJEMPLO 2.5.10. En el tema de espacios seudométricos (Observación 1.4.2) ya dimos un método para construir un subespacio topológico a partir de uno dado. En particular, supongamos que (X, d) es un espacio seudométrico y que $A \subset X$, entonces la restricción de d a A ($d|_A$ o más propiamente $d|_{A\times A}$) es también un espacio seudométrico, por lo tanto podemos construir $\mathcal{T}(d|_A)$ que será una topología para A. En este tema tenemos una construcción alternativa, que consiste en partir de $\mathcal{T}(d)$, la topología inducida por d en X, y considerar en A la topología de subespacio, en notación, $\mathcal{T}(d)|_A$. Comprobemos que ambas construcciones dan lugar a la misma topología, es decir, que

$$\mathcal{T}(d|_A) = \mathcal{T}(d)|_A.$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a usar el Ejercicio 2.5.5. Por una parte una base $\mathcal{B}_1$ de $(A, \mathcal{T}(d|_A))$ es la formada por las bolas $\mathbb{B}_{d|_A}(x; \varepsilon)$, $x \in A$, $\varepsilon > 0$. Pero

$$\mathbb{B}_{d|_A}(x; \varepsilon) = \mathbb{B}_d(x; \varepsilon) \cap A$$

Por otra parte tenemos que una base $\mathcal{B}_2$ de $(A, \mathcal{T}(d)|_A)$ está formada por $\mathbb{B}_d(x; \varepsilon) \cap A$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Como $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ ya tenemos que $\mathcal{T}(d|_A) \subset \mathcal{T}(d)|_A)$.

Por otra parte los subconjuntos de la forma $\mathbb{B}_d(x; \varepsilon) \cap A$ son claramente abiertos en $\mathcal{T}(d|_A)$, por lo que $\mathcal{T}(d|_A) \supset \mathcal{T}(d)|_A)$. □

Ejercicios

Ejercicio 2.5.1 Demuestra que $(A, \mathcal{T}_A)$ es un E.T.

Ejercicio 2.5.2 Demuestra que $X := \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un subespacio discreto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, en cambio $Y := X \cup \{0\}$ no es discreto.

Ejercicio 2.5.3 Si $U \subset \mathbb{R}$, definamos $(-U) := \{-x \in \mathbb{R} \mid x \in U\}$. Demuestra que $\mathcal{T}_u|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = \{U \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \mid U \cup (-U) \in \mathcal{T}_u\}$.

Ejercicio 2.5.4 Sean $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ y $f : A \setminus \{a_1, ..., a_n\} \to B$ una aplicación continua con un número finito de asíntotas verticales en $\{a_1, ..., a_n\}$ (Ejercicio 2.4.5). Demuestra que $\Gamma_f \subset A \times B$ (el grafo de f) es un cerrado relativo de $A \times B \subset \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.5.5 Demuestra que si $\mathcal{B}$ es una base de abiertos de X y $A \subset X$, entonces $\mathcal{B}_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base de abiertos de A (se entiende que A posee la topología inducida como subespacio de X).

Ejercicio 2.5.6 Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x, 0)$ es un homeomorfismo sobre la imagen.

Ejercicio 2.5.7 Sea $f : X \to Y$ homeomorfismo y $A \subset X$, demuestra que $\bar{f}|_A : A \to f(A)$ (Ejercicio A.2.11) es también homeomorfismo.

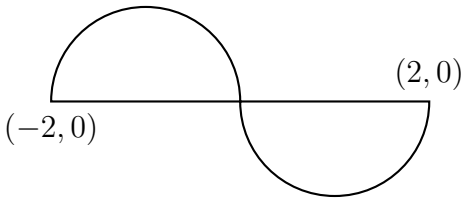


FIGURA 2.2. Figura ocho

Ejercicio 2.5.8 Considera el conjunto S de la Figura 2.2.

Formalmente podemos ver esta figura de dos formas distintas. Una, como imagen de la siguiente aplicación definida a trozos:

$$f(x) := \begin{cases} (2\pi x, 0) & \text{si } x \in [-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}] \\ (1 - \cos\frac{1}{x}, \operatorname{sen}\frac{1}{x}) & \text{si } x \in [\frac{1}{\pi}, +\infty) \\ (-1 + \cos\frac{1}{x}, -\operatorname{sen}\frac{1}{x}) & \text{si } x \in (-\infty, -\frac{1}{\pi}] \end{cases}$$

y otra, como subconjunto de $\mathbb{R}^2$. En cada caso obtenemos una topología: a la de S como subespacio de $\mathbb{R}^2$ la denotaremos por $\mathcal{T}_u|_S$, mientras que a la de S como imagen de f la denotaremos por $f\mathcal{T}_u$. Comprueba que $\mathcal{T}_u|_S \neq f\mathcal{T}_u$.

Tema 2.6. Aplicaciones abiertas y cerradas

Hasta ahora las únicas propiedades de aplicaciones que conocemos (aparte de la continuidad) no tienen que ver con espacios topológicos, sino con conjuntos, como son la inyectividad y la sobreyectividad. Vamos a dedicar este capítulo a estudiar propiedades de otras aplicaciones que tienen que ver con espacios topológicos, es decir, enunciadas en términos de abiertos.

DEFINICIÓN 2.6.1. Consideremos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ E.T. y una aplicación $f : X \to Y$. Diremos que f es *abierta* (resp. *cerrada*) si $\forall A \in \mathcal{T}_X$ (resp. $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_X}$), se tiene que $f(A) \in \mathcal{T}_Y$ (resp. $f(A) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_Y}$).

Veamos la relación entre las aplicaciones abiertas, las cerradas y los homeomorfismos, un resultado que ya hemos usado implícitamente y que se escribe mejor con las nociones de aplicaciones abiertas y cerradas.

PROPOSICIÓN 2.6.2. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación biyectiva. Son equivalentes:*

(a) *f es homeomorfismo.*
(b) *f es continua y abierta.*
(c) *f es continua y cerrada.*

La demostración se deja para la Tarea 5.

OBSERVACIONES 2.6.3.

(1) Si el punto $y_0 \in Y$ es cerrado (resp. abierto) en Y, entonces la aplicación constante $f_{y_0} : X \to Y$ definida por $f_{y_0}(x) := y_0$, $\forall x \in X$, es cerrada (resp. abierta) ya que

$$f_{y_0}(C) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } C = \emptyset \\ \{y_0\} & \text{si } C \neq \emptyset \end{cases}$$

que en ambos casos son conjuntos cerrados (resp. abiertos) en Y.

(2) Utilizando aplicaciones afines es fácil comprobar que existen aplicaciones continuas que son abiertas y no cerradas (en general si es sobreyectiva y la dimensión del espacio final es menor que la del inicial) y cerradas que no son abiertas (en general siempre que la dimensión del espacio final es mayor que la del inicial). Los detalles se dejan para la Tarea 5.

(3) La composición de aplicaciones abiertas (resp. cerradas) es abierta (resp. cerrada). Esto es inmediato ya que, si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son abiertas y $U \subset X$ es abierto en X, entonces $f(U) \subset Y$ es abierto en Y y por tanto $g \circ f(U) = g(f(U)) \subset Z$ es abierto en Z (análogamente para aplicaciones cerradas).

Los homeomorfismos sobre la imagen se caracterizan también con aplicaciones abiertas.

PROPOSICIÓN 2.6.4. *La aplicación f es un homeomorfismo sobre la imagen si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

(1) *f es inyectiva;*
(2) *f es continua;*
(3) *f es abierta sobre la imagen, es decir, $\forall U \subset X$ abierto, $f(U)$ es abierto en $f(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que f es continua por hipótesis, entonces $\bar{f}$ también es continua (Propiedad 2.5.3(7)). Además $\bar{f}$ es sobreyectiva (Ejercicio A.2.11(2)) e inyectiva, por el Ejercicio A.2.11(1) al ser f inyectiva. Por tanto, para probar que f es un homeomorfismo sobre la imagen basta ver que $\bar{f}$ es abierta (Proposición 2.6.2(b)) que es lo que afirma el apartado (3) de las hipótesis. □

Usando el concepto de aplicaciones abiertas vamos a ver que los homeomorfismos se pueden caracterizar como aplicaciones biyectivas que envían bases de abiertos a bases de abiertos. Como la Propiedad 2.1.11(d) da una caracterización de homeomorfismo en términos de abiertos, a partir de ella se puede obtener una caracterización de homeomorfismos en términos de bases.

PROPOSICIÓN 2.6.5. *Sean X e Y* E.T. *$\mathcal{B}_X$ una base de X, $\mathcal{B}_Y$ una base de Y y $f : X \to Y$ una biyección, entonces son equivalentes:*

(1) *f es homeomorfismo.*
(2) *$f\mathcal{B}_X = \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}_X\}$ es base de abiertos de Y.*
(3) *$f^{-1}\mathcal{B}_Y = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}_Y\}$ es base de abiertos de X.*

La demostración se deja para la Tarea 5.

EJEMPLO 2.6.6. Consideremos la aplicación $f_2(x) = x^2$ del Ejercicio 2.6.6. Sabemos que f_2 es continua, suprayectiva y abierta. Si tomamos $A = \mathbb{R}_{\geq 0}$ es claro que $f_2|_A : A \to A$ es biyectiva y continua. Veamos que es abierta. Sea $U \subset A$ A-abierto, entonces existe $V \in \mathcal{T}_u$ de modo que $U = V \cap A$. Dado que $f_2|_A$ es inyectiva se tiene que $f_2|_A(U) = f_2(V \cap A) = f_2(V) \cap f_2(A) = f_2(V)$ que es abierto en A dado que f_2 es abierta. Por lo tanto, la Proposición 2.6.2(b) nos asegura que $f_2|_A$ es un homeomorfismo.

TAREA 5.

($\mathcal{AC}$1) *Demuestra la Proposición* 2.6.2.

($\mathcal{AC}2$) *La aplicación entre espacios topológicos usuales* $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f_1(x, y) = x$ *es abierta pero no es cerrada.*

($\mathcal{AC}3$) *La aplicación* $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f_2(x) = (x, 0)$ *no es abierta pero sí es cerrada. ya que* $f_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\}$ *no es abierto en* $\mathbb{R}^2$*. En cambio sí es cerrada ya que, si* C *es un cerrado de* $\mathbb{R}$*, entonces* $f_2(C)$ *es el grafo de la aplicación continua* $f : (C, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$*, definida por* $f(x) := 0$*. Así pues* $f_2(C)$ *es un cerrado de* $C \times \mathbb{R}$ *(Ejercicio 2.5.4), pero como* C *y* $\mathbb{R}$ *son cerrados en* $\mathbb{R}$ *entonces* $f_2(C)$ *es de hecho cerrado en* $\mathbb{R}^2$ *(Observación 2.5.6).*

($\mathcal{AC}4$) *Si las aplicaciones* $f_1 : A_1 \to B_1$ *y* $f_2 : A_2 \to B_2$ *(*$A_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$*,* $A_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ $B_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ *y* $B_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$*) son abiertas, entonces la aplicación obvia* $f : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$ *es una aplicación abierta.*

($\mathcal{AC}5$) *Prueba lo mismo pero partiendo de* $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ *espacios topológicos con la topología de* $X \times Y$ *de la Tarea* 2[$\mathcal{B}11$].

($\mathcal{AC}6$) *La suma de aplicaciones abiertas definidas en subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *es una aplicación abierta.*

($\mathcal{AC}7$) *Demuestra la Proposición* 2.6.5.

Ejercicios

Ejercicio 2.6.1 Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una aplicación, $A \subset X$, $\mathcal{B}_X$ base de abiertos de X y $\mathcal{B}_Y$ base de abiertos de Y, entonces f es abierta si y solo si $\forall B \in \mathcal{B}_X$, $f(B)$ es abierto en Y.

Ejercicio 2.6.2 Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ E.T. y $\mathcal{S}$ subbase de X. La aplicación $f : X \to Y$ es abierta si y sólo si $f(S) \in \mathcal{T}_Y$ $\forall S \in \mathcal{S}$.

Ejercicio 2.6.3 Sea $f : X \to Y$ una aplicación y X un espacio seudométrico (X, d). Demuestra que f es abierta si y sólo si para todo $x_0 \in X$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(\mathbb{B}_d(x_0; \delta))$ es un entorno de $f(x_0)$ para cualquier $0 < \delta \leq \varepsilon$.

Ejercicio 2.6.4 Demuestra que una aplicación biyectiva entre espacios topológicos es cerrada si y solo si es abierta

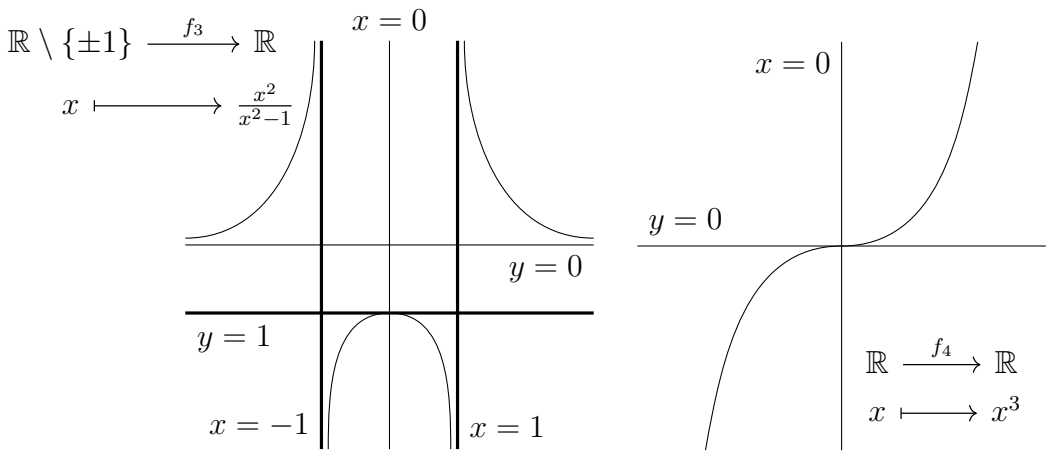


FIGURA 2.3

Ejercicio 2.6.5 Demuestra que la aplicación f_3 de la Figura 2.3a no es abierta ni cerrada, mientras que f_4, de la Figura 2.3b, es tanto abierta como cerrada.

Ejercicio 2.6.6 El hecho de que una aplicación sea abierta depende no sólo de la *fórmula* que define la aplicación sino también de los conjuntos inicial y final. Por ejemplo, demuestra que la aplicación $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_1(x) := x^2$ no es abierta, mientras que $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $f_2(x) := x^2$ sí lo es.

Ejercicio 2.6.7 Denotemos por $d := d_n^2$ la distancia euclídea en $\mathbb{R}^n$ y sea $d_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la *aplicación distancia a* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (definida en el Ejercicio 1.4.3). Demuestra que d_{x_0} es abierta.

Ejercicio 2.6.8 Consideremos X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una aplicación continua, abierta y suprayectiva y $\mathcal{B}$ una base de abiertos de X, entonces $f\mathcal{B} := \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base de abiertos de Y.

Ejercicio 2.6.9 Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ E.T. y sea $f : X \to Y$ una aplicación. Supongamos que $A \subset X$ es abierto (resp. cerrado). Demuestra que si f es abierta (resp. cerrada), entonces $f|_A$ es abierta (resp. cerrada).

Ejercicio 2.6.10 Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ E.T. y sea $f : X \to Y$ una aplicación. Supongamos que la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos recubre X (es decir, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = X$). Denotemos por $f_\lambda := f|A_\lambda : A_\lambda \to Y$ a la restricción. Demuestra que:

(1) Si f_λ es abierta $\forall \lambda \in \Lambda$, entonces f es abierta.
(2) Si Λ finito y f_λ es cerrada $\forall \lambda \in \Lambda$, entonces f es cerrada.

Capítulo 3

Entornos y posición de un punto con respecto a un conjunto

Tema 3.1. Entornos y bases de entornos

El concepto de entorno de un punto en un espacio (seudo)métrico como conjunto que contiene una bola centrada en dicho punto resultó fundamental para la definición de abiertos en espacios (seudo)métricos. Recordemos que la utilidad de estos era definir un abierto como aquel conjunto que es entorno de todos sus elementos. En el contexto general de espacios topológicos esta definición de entorno carece de sentido (puesto que no hay bolas en espacios topológicos en general) y además podría pensarse que su utilidad también desaparece en principio ya que los abiertos son el dato de partida de los espacios topológicos. En todo caso existe un concepto más general de entorno de un punto que generaliza el ya conocido y que también caracteriza los abiertos como aquellos conjuntos que son entornos de todos sus elementos. En este tema profundizaremos en el concepto de entorno de un punto y veremos de qué forma los entornos caracterizan una topología.

DEFINICIÓN 3.1.1. Diremos que $U^x \subset X$ es un *entorno de x en* $(X, \mathcal{T})$ (o que U^x es un *$\mathcal{T}$-entorno*) si existe $V \subset X$ abierto tal que $x \in V \subset U^x$. Como en el caso euclídeo, la notación $U^x \subset X$ siempre indicará que estamos tratando con un entorno de x en X.

EJEMPLO 3.1.2. Veamos que todo punto de un espacio topológico tiene al menos un entorno. Consideremos $(X, \mathcal{T})$ un E.T. y $x \in X$ un punto cualquiera. Como $X \in \mathcal{T}$ (Definición 2.1.1(T1)) entonces existe un abierto (el propio X) que contiene a x y que está contenido en X, así pues X es entorno de $x \in X$.

Los entornos se comportan bien con los subespacios. Observemos que el Ejemplo 1.2.2(E4) es un caso particular de la siguiente propiedad.

PROPIEDAD 3.1.3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un E.T. y sea $A \subset X$. Sea $x \in A$; $V \subset A$ es A-entorno de x si y solo si existe $\tilde{V} \subset X$, X-entorno de x, tal que $V = \tilde{V} \cap A$.

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Sea $x \in V \subset A$, entonces si V es A-entorno de x existe $U \in \mathcal{T}_A$ de modo que $x \in U \subset V$, es decir, existe $\tilde{U} \in \mathcal{T}$ de modo que $x \in \tilde{U} \cap A \subset V$. Tomando $\tilde{V} = V \cup \tilde{U}$ se tiene que $x \in \tilde{U} \subset \tilde{V}$ donde $\tilde{U} \in \mathcal{T}$, por tanto $\tilde{V}$ es un entorno de x. Además $\tilde{V} \cap A = (V \cup \tilde{U}) \cap A = (V \cap A) \cup (\tilde{U} \cap A) = V$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $V = \tilde{V} \cap A$ donde $\tilde{V}$ es un entorno de $x \in A$. Entonces existe $\tilde{U} \in \mathcal{T}$ de modo que $x \in \tilde{U} \subset \tilde{V}$ y por tanto $x \in \tilde{U} \cap A \subset \tilde{V} \cap A = V$. Por lo tanto $U = \tilde{U} \cap A$ es un abierto relativo de A y así V es un A-entorno de x. $\square$

Por el resultado del Ejercicio 3.1.2, a partir de ahora, utilizaremos el término entorno en espacios seudométricos para referirnos a cualquiera de los dos conceptos equivalentes.

Conviene observar que el hecho de *ser entorno* no es una propiedad intrínseca de un conjunto, sino que depende del conjunto X y de la topología que se considera en tal conjunto. Una muestra de esto se describe en los Ejercicios 3.1.1 y 3.1.3.

Como anunciamos al principio del tema, los abiertos de una topología se pueden caracterizar como los conjuntos que son entorno de todos sus elementos.

PROPOSICIÓN 3.1.4. *Sea $(X, \mathcal{T})$* E.T. *y $U \subset X$. Entonces son equivalentes:*

(1) *U es abierto.*
(2) *$\forall x \in U$, U es entorno de x.*

DEMOSTRACIÓN.

(1)⇒(2) Sea $U \in \mathcal{T}$ y $x \in U$. Es claro que U es entorno de x ya que $\exists V = U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V \subset U$.

(2)⇒(1) Supongamos que $U \subset X$ es entorno de todos sus elementos. Entonces, por definición, $\forall x \in U$, $\exists V_x \in \mathcal{T}$ de modo que $x \in V_x \subset U$. Consideremos $V := \bigcup_{x \in U} V_x$. Puesto que V es unión de abiertos, por (T2) $V \in \mathcal{T}$. Veamos por último que $V = U$. Es claro que $V \subset U$ ya que $V_x \subset U$ $\forall x \in U$. Recíprocamente, sea $x_0 \in U$, entonces $x_0 \in V_{x_0} \subset U$, por lo tanto $x_0 \in V_{x_0} \subset \bigcup_{x \in U} V_x \subset V$. □

Puesto que los entornos caracterizan los abiertos de una topología y estos caracterizan las aplicaciones continuas, parece razonable pensar que los entornos caracterizan las aplicaciones continuas.

PROPOSICIÓN 3.1.5. *Sean $f : X \to Y$ una aplicación y $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$* E.T. *Entonces f es continua si y solo si $\forall x \in X$ y $\forall V^{f(x)} \subset Y$ entorno de $f(x) \in Y$ se tiene que $f^{-1}(V^{f(x)}) \subset X$ es un entorno de $x \in X$.*

Se puede tomar tal cual la demostración de la Proposición 1.3.9. La siguiente proposición es una caracterización del concepto de aplicación abierta en términos de entornos:

PROPOSICIÓN 3.1.6. *Sea $f : X \to Y$ aplicación. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *$\forall x \in X$ y $\forall V^x$ entorno de $x \in X$, se tiene que $f(V^x)$ es entorno de $f(x) \in Y$.*
(2) *La aplicación f es abierta.*

La demostración se deja para la Tarea 6. Por último, y al igual que hicimos para familias de abiertos y de cerrados, vamos a extraer las propiedades esenciales de la familia de entornos de un espacio topológico.

PROPIEDADES 3.1.7 (Entornos). Sea $x \in X$, denotemos por $\mathcal{E}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ la familia de todos los $\mathcal{T}$-entornos de x, entonces

(N1) $\mathcal{E}(x) \neq \emptyset$.
(N2) $\forall U^x \in \mathcal{E}(x)$, $x \in U^x$.
(N3) $\forall U_1^x, U_2^x \in \mathcal{E}(x)$, $U_1^x \cap U_2^x \in \mathcal{E}(x)$.
(N4) $\forall U^x \in \mathcal{E}(x)$ y $\forall A \subset X$ tal que $U^x \subset A$, $A \in \mathcal{E}(x)$.
(N5) $\forall U^x \in \mathcal{E}(x)$, existe $V^x \in \mathcal{E}(x)$ tal que $\forall y \in V^x$ se tiene que $U^x \in \mathcal{E}(y)$.

Como antes, la demostración se deja para la Tarea 6.

OBSERVACIÓN 3.1.8. Por inducción sobre la propiedad (N3), podemos probar que la intersección finita de entornos de x es un entorno de x.

Estas propiedades son *esenciales* en el sentido de que una familia de conjuntos que las verifique define una única topología que tenga a dicha familia como familia de entornos. Esto aparece reflejado en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.1.9. *Sea X un conjunto cualquiera y supongamos que para cada $x \in X$, $\mathcal{E}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ que cumple las propiedades* (N1)-(N5)*. Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ sobre X tal que $\mathcal{E}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ es la familia de los $\mathcal{T}$-entornos de x para cada $x \in X$.*

Los argumentos son similares a demostraciones anteriores y la demostración se deja para la Tarea 6.

OBSERVACIÓN 3.1.10. Una interpretación útil de la Proposición 3.1.9 es la siguiente: supongamos que $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son dos topologías de X. Consideremos $\mathcal{E}_1(x)$ y $\mathcal{E}_2(x)$ las familias de entornos de x en $\mathcal{T}_1$ y en $\mathcal{T}_2$ respectivamente. Entonces $\mathcal{E}_1(x) = \mathcal{E}_2(x)$ para cualquier $x \in X$ si y sólo si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Es más, $\mathcal{E}_1(x) \subset \mathcal{E}_2(x)$ para cualquier $x \in X$ si y sólo si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. En otras palabras, si probamos que todo entorno de x en $\mathcal{T}_1$ es entorno de x de $\mathcal{T}_2$, entonces todo abierto de $(X, \mathcal{T}_1)$ es abierto de $(X, \mathcal{T}_2)$.

En algunas ocasiones, describir entornos de puntos es más cómodo que describir toda una familia de abiertos o de cerrados. Por ejemplo, la definición de la recta de Sorgenfrey, ver Ejemplo 2.1.3(ET3), esconde la descripción de los entornos de dicha topología.

EJEMPLO 3.1.11. Veamos otra manera de definir la recta de Sorgenfrey. Diremos que $U^x \subset \mathbb{R}$ es un *entorno de Sorgenfrey* de $x \in U^x$ si $\exists y > x$ tal que $[x, y) \subset U^x$. Dado $x \in \mathbb{R}$, denotemos $\mathcal{S}_x$ el conjunto de entornos de Sorgenfrey de x. La familia $\{\mathcal{S}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ verifica las propiedades (N1)-(N5) y la topología que define es exactamente $\mathcal{S}$. En particular, $[a, b)$ es un entorno de a en $\mathcal{S}$ (mientras que no lo es en $\mathcal{T}_u$).

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{S}_x$ satisface las propiedades (N1)-(N5).

(N1) $[x, x + 1)$ es un entorno de Sorgenfrey de x, luego $\mathcal{S}_x \neq \emptyset$.

(N2) Si $U \in \mathcal{S}_x$, entonces existe $y > x$ de modo que $[x, y) \subset U$, por lo tanto $x \in U$.

(N3) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{S}_x$, entonces $\exists y_1 > x$, $y_2 > x$ de modo que $[x, y_1) \subset U_1$ y $[x, y_2) \subset U_2$. Por lo tanto, si $y := \text{mín}\{y_1, y_2\}$ se tiene que $[x, y) \subset U_1 \cap U_2$ y así $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{S}_x$.

(N4) Si $U \in \mathcal{S}_x$ y $U \subset V$, entonces $\exists y > x$ de modo que $[x, y) \subset U \subset V$, luego $V \in \mathcal{S}_x$.

(N5) Sea $U \in \mathcal{S}_x$, entonces $\exists y > x$ de modo que $[x, y) \subset U$. Tomemos $V = [x, y)$. Es claro que $V \in \mathcal{S}_x$ ya que $[x, y) \subset V$. Además, para cualquier $z \in V$ se tiene que $[z, y) \subset V$, por lo tanto $V \in \mathcal{S}_z$.

De esta manera podemos reescribir la definición de $\mathcal{S}$ en el Ejemplo 2.1.3(ET3) de la siguiente manera:

$$\mathcal{S} := \{U \subset \mathbb{R} \mid U \in \mathcal{S}_x, \forall x \in U\}.$$

Es decir, un subconjunto de $\mathbb{R}$ es abierto de Sorgenfrey si es entorno de Sorgenfrey de todos sus elementos.

Por lo tanto $[a, b)$ es un entorno de a en $\mathcal{S}$ ya que existe $y(= b) > a$ tal que $[a, y) = [a, b) \subset [a, b)$. En cambio $[a, b)$ no es entorno de a en $\mathcal{T}_u$, ver la demostración de Ejemplo 2.4.3(e). □

EJEMPLO 3.1.12. Consideremos el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ y para cada número entero $n \in \mathbb{Z}$ denotemos por $D(n)$ el conjunto de divisores enteros de n, es decir,

$$D(n) := \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n = km\}.$$

Definamos la siguiente familia de subconjuntos de números enteros

$$\mathcal{E}(n) := \{U \subset \mathbb{Z} \mid D(n) \subset U\}.$$

Dicha familia satisface claramente las propiedades (N1)-(N5) y por lo tanto define una única topología en $\mathbb{Z}$ que los tiene por sistemas de entornos.

Introduciremos ahora un concepto fundamental en el estudio de las propiedades locales de los espacios topológicos, las *bases de entornos*, es decir, familias de entornos del punto x que de alguna manera codifiquen todas las propiedades que tiene la familia $\mathcal{E}(x)$ de todos los entornos de x. El motivo es que a menudo trabajar con bases de entornos es más sencillo (o al menos no es más complicado) que utilizar todos los entornos.

DEFINICIÓN 3.1.13. Diremos que una familia $\mathcal{B}^x$ de entornos de x es una **base de entornos de** x (o un **sistema fundamental**) si $\forall V^x$ entorno de x $\exists B^x \in \mathcal{B}^x$ tal que $B^x \subset V^x$. Los elementos de $\mathcal{B}^x$ se llaman **entornos básicos**.

EJEMPLOS 3.1.14.

(1) La familia $\mathcal{E}(x)$ de todos los entornos de x es una base de entornos ya que si V^x es entorno de x, entonces es claro que existe un elemento de $\mathcal{E}(x)$ (el propio V^x) contenido en V^x.

(2) Análogamente, la familia $\mathcal{T}_X(x) := \mathcal{E}(x) \cap \mathcal{T}_X$ de todos los entornos abiertos de x es una base de entornos, ya que si V^x es entorno de x, entonces (por definición) existe un abierto U de modo que $x \in U \subset V^x$. Por ser U abierto y contener a x, entonces es un entorno de x (Proposición 3.1.4), luego $U \in \mathcal{T}_X(x)$ y cumple $U \subset V^x$.

(3) Sea (X, d) un espacio seudométrico y $x \in X$. Las siguientes familias son bases de entornos de x:

   (i) $\mathcal{B}^x := \{\mathbb{B}_d(x;\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$.
   Esto se deduce de la definición de entorno en un espacio seudométrico. V^x es entorno de x si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}_d(x;\varepsilon) \subset V^x$, que es exactamente decir que $\mathcal{B}^x$ es base de entornos de x.

   (ii) $\mathcal{B}^x_K := \{\mathbb{B}(x;\varepsilon) \mid K > \varepsilon > 0\}$ donde $K \in \mathbb{R}$ está fijo.
   De nuevo, si V^x es entorno de x, entonces existe $\varepsilon' > 0$ tal que $\mathbb{B}_d(x;\varepsilon') \subset V^x$, tomando $\varepsilon := \frac{1}{2}\min\{\varepsilon', K\} > 0$ podemos asegurar que $\mathbb{B}_d(x;\varepsilon) \subset \mathbb{B}_d(x;\varepsilon') \subset V^x$ donde $\mathbb{B}_d(x;\varepsilon) \in \mathcal{B}^x_K$ y por tanto $\mathcal{B}^x_K$ es base de entornos de x.

   (iii) $\bar{\mathcal{B}}^x_K := \{\bar{\mathbb{B}}(x;\varepsilon) \mid K > \varepsilon > 0\}$ donde $K \in \mathbb{R}$ está fijo.
   Sea V^x entorno de x. Como $\mathcal{B}^x_K$ es base de entornos, existe un $K > \varepsilon' > 0$ de modo que $\mathbb{B}_d(x;\varepsilon') \subset V^x$. Tomando $K > \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} > 0$ tenemos que $\bar{\mathbb{B}}_d(x;\varepsilon) \subset \mathbb{B}_d(x;\varepsilon') \subset V^x$ donde $\bar{\mathbb{B}}_d(x;\varepsilon) \in \bar{\mathcal{B}}^x_K$, luego $\bar{\mathcal{B}}^x_K$ es base de entornos de x.

   (iv) $\mathcal{B}^x_A := \{\mathbb{B}(x;\varepsilon) \mid \varepsilon \in A\}$ donde $A \subset \mathbb{R}_{>0}$ e $\mathrm{Inf}(A) = 0$. Por ejemplo podemos tomar como A el conjunto de los racionales positivos o cualquier sucesión de números positivos que converja a 0.

Sea V^x entorno de x, entonces existe $\varepsilon' > 0$ tal que $\mathbb{B}_d(x;\varepsilon') \subset V^x$. Como $\mathrm{Inf}(A) = 0$ entonces existe $\varepsilon \in A$ de modo que $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, así pues $\mathbb{B}(x;\varepsilon) \in \bar{\mathcal{B}}_A^x$ y además $\mathbb{B}(x;\varepsilon) \subset \mathbb{B}(x;\varepsilon') \subset V^x$, es decir, $\mathcal{B}_A^x$ es base de entornos de x.

(4) Un espacio X es discreto si y sólo si $\mathcal{B}^x := \{\{x\}\}$ es base de entornos de x, $\forall x \in X$. El motivo es el siguiente: si X fuera discreto $\{x\}$ es entorno de x (por ser $\{x\}$ abierto y contener a x) y además todo entorno de x debe contener a $\{x\}$ (por definición). Recíprocamente, si $\mathcal{B}^x := \{\{x\}\}$ es base de entornos de x $\forall x \in X$, entonces $\{x\}$ debe ser entorno de x (por definición) y por tanto el propio $\{x\}$ es abierto, así pues X es discreto (Ejercicio 2.1.3).

(5) Del Ejemplo 3.1.11, deducimos que $\mathcal{B}^a := \{[a,b) \mid b > a\}$ es base de entornos de a para la topología de Sorgenfrey.

Es inmediato probar esta relación entre bases de entornos y bases de una topología:

LEMA 3.1.15. *Si para cualquier $x \in X$ tenemos $\mathcal{B}^x$ una base de entornos abiertos de x, entonces $\mathcal{B}_X := \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}^x$ es una base de abiertos de X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $U \subset X$ abierto de X, y sea $x \in U$, entonces, dado que $\mathcal{B}^x$ es base de entornos de x existe $B \in \mathcal{B}^x \subset \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B \subset U$, y por tanto $\mathcal{B}_X$ es base de abiertos de X (Proposición 2.2.3). □

El comentario al principio del capítulo tiene su explicación en la siguiente lista de caracterizaciones de conceptos topológicos en términos de bases de entornos.

El siguiente resultado nos será muy útil a la hora de probar que ciertas familias son bases de entornos.

PROPOSICIÓN 3.1.16. *Sea X E.T. y sea $x \in X$. Sean $\mathcal{B}^x$ una base de entornos de x y $\mathcal{D}^x$ una familia de entornos de x. Entonces, $\mathcal{D}^x$ es una base de entornos si y solo si $\forall B \in \mathcal{B}^x$ existe $D \in \mathcal{D}^x$ tal que $D \subset B$.*

La demostración es similar a otras que hemos visto y se deja para la Tarea 6.

OBSERVACIÓN 3.1.17. Obsérvese que, por la Proposición 3.1.16, si $\mathcal{B}^x$ es base de entornos de x y $\mathcal{E}(x) \supset \tilde{\mathcal{B}}^x \supset \mathcal{B}^x$, entonces también $\tilde{\mathcal{B}}^x$ es base de entornos de x.

Como en ocasiones anteriores, vamos a resaltar las propiedades principales de las familias de bases de entornos.

PROPIEDADES 3.1.18. Sea X un conjunto y sea $\{\mathcal{B}^x\}_{x\in X} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ de modo que cada $\mathcal{B}^x$ es una base de entornos de x, para cada $x \in X$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades para cualquier $x \in X$:

(BE1) $\mathcal{B}^x \neq \emptyset$.
(BE2) $\forall B^x \in \mathcal{B}^x$, $x \in B^x$.
(BE3) $\forall B_1^x, B_2^x \in \mathcal{B}^x$, existe $B_3^x \in \mathcal{B}^x$ tal que $B_3^x \subset B_1^x \cap B_2^x$.
(BE4) $\forall B^x \in \mathcal{B}^x$, $\exists W^x \in \mathcal{B}^x$ tal que $\forall y \in W^x$ existe $B^y \in \mathcal{B}^y$ cumpliendo $B^y \subset B^x$.

Lo interesante de estas propiedades es que caracterizan la topología en la cual la familia $\{\mathcal{B}^x\}_{x\in X}$ es una familia de bases de entornos. La demostración se deja para la Tarea 6.

PROPOSICIÓN 3.1.19. *Sea X un conjunto cualquiera y $\{\mathcal{B}^x\}_{x\in X}$ una familia que verifica* (BE1)*,* (BE2)*,* (BE3) *y* (BE4)*, entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ sobre X tal que $\mathcal{B}^x$ es base de entornos de x, $\forall x \in X$.*

EJEMPLO 3.1.20. Sea $X := \mathbb{R} \overset{\emptyset}{\cup} \{*\}$, donde $* \notin \mathbb{R}$. Sean

$$\mathcal{B}^x := \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R} \mid \varepsilon > 0\}, x \in \mathbb{R},\ \mathcal{B}^* := \{(-\varepsilon, 0) \cup \{*\} \cup (0, \varepsilon) \subset X \mid \varepsilon > 0\}.$$

Veremos en la Tarea 6 que determinan una única topología en X que se denomina **recta de dos orígenes**.

Estudiaremos cómo se comportan las bases de entornos con respecto a aplicaciones continuas o abiertas.

PROPOSICIÓN 3.1.21. *Sea $f : X \to Y$ aplicación continua y abierta entre espacios topológicos y sea $\mathcal{B}^x$ base de entornos de $x \in X$. Entonces $f\mathcal{B}^x := \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}^x\}$ es base de entornos de $f(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.1.6 sabemos que $f\mathcal{B}^x$ es una familia de entornos de $f(x)$. Solo nos queda comprobar que de hecho $f\mathcal{B}^x$ es base de entornos de $f(x) \in Y$. Para ello consideremos $V^{f(x)} \subset Y$ entorno de $f(x)$. Por continuidad, $f^{-1}(V^{f(x)})$ es entorno de x en X. Como $\mathcal{B}^x$ es base de entornos, sabemos que existe $B \in \mathcal{B}^x$ tal que $B \subset f^{-1}(V^{f(x)})$. Por tanto $f(B) \in f\mathcal{B}^x$ y cumple

$$f(B) \subset f(f^{-1}(V^{f(x)})) \overset{\text{Prop. A.2.5((5))}}{\subset} V^{f(x)}. \qquad \square$$

TAREA 6.

($\mathcal{EB}$1) *Demuestra la Proposición* 3.1.6.

($\mathcal{EB}$2) *Demuestra* (N1)-(N5) *de las Propiedades* 3.1.7.

($\mathcal{EB}$3) *Demuestra la Proposición* 3.1.9*, es decir, que si en un conjunto X hay una familia $\{\mathcal{E}_x\}_{x\in X}$ de familias de subconjuntos de X que cumplen* (N1)-(N5)*, entonces hay una única topología que para la que $\mathcal{E}_x$ es la familia de los entornos de x, $\forall x \in X$.*

($\mathcal{EB}4$) *Demuestra la Proposición* 3.1.16.

($\mathcal{EB}5$) *Considera la topología de* $\mathbb{Z}$ *dada en el Ejemplo* 3.1.12. *Encuentra bases de entornos cuya definición no implique largas perífrasis.*

(a) *Demuestra que* $\{1,-1\}$ *es abierto pero que* $\{1,2,4\}$ *no lo es.*

(b) *El conjunto* $\tilde{\mathcal{P}} := \{\pm p \mid p \text{ primo}\} \cup \{\pm 1\}$ *es abierto.*

(c) *Demuestra que* $C \subset \mathbb{Z}$ *es cerrado si y solo si* $\forall n \in C$, *todos los múltiplos de* n *están en* C.

($\mathcal{EB}6$) *Demuestra* (BE1)-(BE4) *de las Propiedades* 3.1.18.

($\mathcal{EB}7$) *Demujestra la Proposición* 3.1.19, *es decir, que si en un conjunto* X *hay una familia* $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ *de familias de subconjuntos de* X *que cumplen* (BE1)-(BE4), *entonces hay una única topología que para la que* $\mathcal{B}_x$ *es base los entornos de* x, $\forall x \in X$.

($\mathcal{EB}8$) *Demuestra que las familias* $\mathcal{B}_x$ *del Ejemplo* 3.1.20 *dan efectivamente lugar a una topología en* $\mathbb{R} \overset{\emptyset}{\cup} \{*\}$ *(*recta de dos orígenes*).*

Ejercicios

Ejercicio 3.1.1 Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual. Demuestra que $A = [a, b]$ es entorno de $c \in \mathbb{R}$ si y solo si $a < c < b$. Sin embargo, A es entorno en A de todos sus puntos.

Ejercicio 3.1.2 En la Definición 1.2.1 introdujimos el concepto de entorno espacios en espacios (seudo)métricos. Demuestra que si $(X, \mathcal{T}(d))$ es un espacio seudométrico, y si $x \in U^x \subset X$, entonces U^x es entorno de x si y solo si U^x es entorno de x en $(X, \mathcal{T}(d))$.

Ejercicio 3.1.3 Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es entorno de $x \in A$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ si y solo si $A \in \mathcal{T}_{\text{CF}}$ y $x \in A$. Demuestra un resultado análogo para la topología conumerable. Como consecuencia de esto demuestra que el intervalo $A = [a, b]$ no es entorno de ningún elemento en la topología cofinita o conumerable.

Ejercicio 3.1.4 Demuestra que las familias $\mathcal{E}(n)$ del Ejemplo 3.1.12 satisfacen las propiedades (N1)-(N5).

Ejercicio 3.1.5 Supongamos que $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ son E.T, que $f : X \to Y$ es una aplicación y que $\mathcal{B}_X^x$, $\mathcal{B}_Y^{f(x)}$ son bases de entornos de $x \in X$ y $f(x) \in Y$ respectivamente. Demuestra las siguientes caracterizaciones:

(1) $U \subset X$ es entorno de $x \in U \Leftrightarrow$ existe $B \in \mathcal{B}_X^x$ tal que $B \subset U$.
(2) $U \subset X$ es abierto $\Leftrightarrow \forall x \in U$, existe $B \in B_X^x$ tal que $B \subset U$ (Proposición 3.1.4).
(3) f es continua en $x \in X \Leftrightarrow \forall B_Y \in \mathcal{B}_Y^{f(x)}$ $f^{-1}(B_Y)$ es entorno de x (Proposición 3.1.5).
(4) f es abierta $\Leftrightarrow \forall x \in X$ y $\forall B_X \in \mathcal{B}_X^x$, se tiene que $f(B_X)$ es entorno de $f(x)$ (Proposición 3.1.6).

Ejercicio 3.1.6 Sea $\mathcal{B}^x$ base de entornos de x en un E.T. $(X, \mathcal{T})$. Sea $U \in \mathcal{T}$ abierto de X tal que $x \in U$. Entonces demuestra que la familia

$$\mathcal{B}^x(U) := \{B \in \mathcal{B}^x \mid B \subset U\}$$

es también una base de entornos de x en X.

Ejercicio 3.1.7 Sea $\mathcal{B}^x$ base de entornos de x en un E.T. $(X, \mathcal{T})$. Sea $A \subset X$ tal que $x \in A$. Entonces demuestra que la familia

$$\mathcal{B}_A^x := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}^x\}$$

es una base de entornos de x en $(A, \mathcal{T}|_A)$.

Ejercicio 3.1.8 Sea X un E.T, $U \subset X$ abierto y $x \in U$, entonces toda base de entornos de x en U es base de entornos de x en X.

Ejercicio 3.1.9 Sea $a \in \mathbb{R}$, demuestra que la familia de intervalos semiabiertos $\mathcal{B}_A^a := \{[a, a+\varepsilon) \mid \varepsilon \in A\}$ donde $A \subset \mathbb{R}_{>0}$ e $\mathrm{Inf}(A) = 0$ es una base de entornos de $a \in \mathbb{R}$ en la topología de Sorgenfrey.

Ejercicio 3.1.10 Sea $\mathcal{B}$ una base de la topología de cierto espacio $(X, \mathcal{T})$. Demuestra que para cada $x \in X$, $\mathcal{B}^x = \{\, B \in \mathcal{B} \mid x \in B \,\}$ es una base de entornos en x para esta topología.

Tema 3.2. Clausura

Sea $(X, \mathcal{T})$ E.T. y $A \subset X$; denotemos por $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}(A)$ a la familia de cerrados que contienen a A, es decir,

$$\mathcal{C}_{\mathcal{T}}(A) := \{C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \mid A \subset C\}.$$

Como $A \subset X$ y X es un cerrado, entonces $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}(A)$ es no vacío. Por tanto definiremos la siguiente intersección

DEFINICIÓN 3.2.1. Llamaremos *clausura de A* o *adherencia de A en X* al conjunto

$$\overline{A} := \bigcap \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(A).$$

Los elementos de la clausura de A en X se llaman *puntos adherentes a A en X* o simplemente *puntos adherentes a A* si el espacio topológico se da por sobreentendido.

OBSERVACIÓN 3.2.2. La clausura del conjunto A no está definida de manera intrínseca a A, sino que depende de la topología $\mathcal{T}$ de X escogida o del supraconjunto X. Si es necesario especificar el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ donde tomamos la clausura de A, escribiremos $\mathrm{Adh}_{(X,\mathcal{T})}(A) = \mathrm{Adh}_X(A) = \overline{A}^X$.

PROPIEDADES 3.2.3 (Clausura). Sean $(X, \mathcal{T})$ E.T. y $A \subset X$, entonces:

(1) $\overline{A}$ es cerrado.
(2) Si C es un cerrado y $C \supset A$, entonces $C \supset \overline{A}$.
(3) $A \subset \overline{A}$. Es decir, $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.
(4) Sean $A, B \subset X$ tal que $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
(5) A es un cerrado si y solo si $A = \overline{A}$ (en particular $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$).
(6) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.
(7) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
(8) $\overline{A} = \{x \in X \mid (X \setminus A) \text{ no es entorno de } x\}$.
(9) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Es consecuencia de que la clausura de A es una intersección de cerrados, y la intersección de cerrados es un cerrado (Propiedad 2.4.7(C2)).

(2) Si C es un cerrado y $A \subset C$, entonces $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(A)$, y por lo tanto $\bigcap \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(A) = \overline{A} \subset C$.

(3) Como $A \subset C$, $\forall C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(A)$, entonces $A \subset \bigcap \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(A) = \overline{A}$.

(4) Por el apartado (3) tenemos $A \subset B \subset \overline{B}$. Por el apartado (1), $\overline{B}$ es cerrado y por el apartado (2), $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(5)($\Rightarrow$) Por el apartado (3), $A \subset \overline{A}$, luego basta ver que $\overline{A} \subset A$. Para ello basta observar que, por el apartado (2), como A es cerrado y $A \subset A$, entonces $\overline{A} \subset A$.

($\Leftarrow$) Si $\overline{A} = A$, como $\overline{A}$ es cerrado (apartado (1)), entonces A es cerrado.

La conclusión de que $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$ se debe a que ambos son cerrados (Propiedad 2.4.7(C1)).

(6) Como $\overline{A}$ es cerrado por el apartado (1) y la clausura de un cerrado es él mismo, por el apartado (5), entonces la clausura de $\overline{A}$ (es decir, $\overline{(\overline{A})}$) coincide con $\overline{A}$.

(7) ($\subset$) Como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, entonces se tiene (apartado (4)) que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y que $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, es decir, $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ (Ejercicio A.1.1(4)).

($\supset$) Por (C3) y el apartado (5), tenemos que $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado. Además $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ por el apartado (4). Aplicando el apartado (2), tenemos $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

(8) Lo más sencillo es probar la igualdad de los complementarios, es decir, que $X \setminus A$ es entorno de x si y solo si $x \notin \overline{A}$. Para ello basta ver que $X \setminus A$ es entorno de x si y solo si $\exists U \in \mathcal{T}$ de modo que $x \in U \subset X \setminus A$, lo cual es equivalente a que exista $C := X \setminus U \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ de modo que $x \notin C$ y $A \subset C$, es decir, a que $x \notin \overline{A}$.

(9) Como $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, entonces (apartado (3)) se tiene que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ y $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, es decir, que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (Ejercicio A.1.1(3)). $\square$

Observemos que, si bien se tiene $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (Propiedad 3.2.3(9)), en general no se da la igualdad, como se prueba en el Ejercicio 3.2.2.

Podemos caracterizar la clausura de un subconjunto del siguiente modo. Intuitivamente, los puntos adherentes a un subconjunto son los puntos *cercanos*.

PROPOSICIÓN 3.2.4. *Sea $A \subset X$ y $x \in X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $x \in \overline{A}$.
(2) $\forall U \subset X$ *abierto tal que* $x \in U$ *se tiene que* $U \cap A \neq \emptyset$.
(3) $\forall V^x \subset X$ *entorno de* x *en* X *se tiene que* $V^x \cap A \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN.

(1)$\Rightarrow$(2) Sea $U \subset X$ abierto de modo que $x \in U$ y supongamos que $U \cap A = \emptyset$. Entonces $C := X \setminus U$ es un cerrado y $A \subset C$ (Ejercicio A.1.2(3)). Por lo tanto $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(A)$, en cambio $x \notin C$, por lo cual $x \notin \bigcap \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(A) = \overline{A}$ lo cual contradice la hipótesis.

(2)$\Rightarrow$(3) Supongamos que existiera $V^x \subset X$ entorno de x en X tal que $V^x \cap A = \emptyset$, entonces por ser $V^x \subset X$ entorno de x en X existiría un abierto $U \subset X$ tal que

$x \in U \subset V^x$, por tanto $U \cap A \subset V^x \cap A = \emptyset$ (Ejercicio A.1.1(b)), lo cual contradice la hipótesis.

(3)⇒(1) Supongamos que $x \notin \overline{A}$; entonces se tiene $X \setminus A$ es entorno de x (Propiedad 3.2.3(8)) y, sin embargo, $(X \setminus A) \cap A = \emptyset$ (Propiedad A.1.3(b)), lo cual contradice la hipótesis. □

Observación 3.2.5. En las propiedades donde se comprueben afirmaciones para todos los abiertos de la topología (con alguna condición), puede resducirse a probar es afirmacion únicamente para los abiertos de una base o una base de entornos según el caso. Por ejemplo la condición (2) de la proposición anterior es equivalente a:

$$\forall U \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in U \text{ se tiene que } U \cap A \neq \emptyset,$$

siendo $\mathcal{B}$ una base de la topología.

La condición (3) es posible escribirla en términos de una base de entornos $\mathcal{B}^x$

$$\forall N \in \mathcal{B}^x \text{ se tiene que } N \cap A \neq \emptyset.$$

Observación 3.2.6. Siguiendo en la línea de la Observación 2.4.4 obsérvese que no es cierto en general que $\overline{\mathbb{B}}_d(x;\varepsilon) = \mathbb{D}_d(x;\varepsilon)$. Por ejemplo, si $d = \delta$ es la distancia discreta en X se tiene que $\mathbb{D}_\delta(x;1) = X$ y en cambio, dado que $\mathbb{B}_d(x;1) = \{x\}$ es un cerrado (Ejercicio 2.4.4), se tiene que $\overline{\mathbb{B}}_d(x;1) \overset{\text{Prop. 3.2.3(5)}}{=} \{x\} \subset X = \mathbb{D}_\delta(x;1)$. Así pues, si X tiene más de un elemento, $\overline{\mathbb{B}}_d(x;1) \subsetneq \mathbb{D}_\delta(x;1)$.

En cambio, para cualquiera de las métricas $d := d_n^1, d_n^2, d_n^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sí se cumple que $\overline{\mathbb{B}}_d(x;\varepsilon) = \mathbb{D}_d(x;\varepsilon)$. Se puede hacer una demostración directa de este resultado usando la Proposición 3.2.4 o bien algo más sutil, pero con algo más de maquinaria técnica (Ejercicio 3.3.14).

Definición 3.2.7. Un subconjunto A *es denso en* X si $\overline{A} = X$.

Utilizando la caracterización de la clausura de un conjunto podemos dar una útil caracterización de densidad.

Proposición 3.2.8. *El conjunto $A \subset X$ es denso en $(X, \mathcal{T})$ si y solo si $\forall U \in \mathcal{T}$ no vacío, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración.

(⇒) Supongamos que $\overline{A} = X$ y consideremos $U \in \mathcal{T}$ no vacío. Podemos, por tanto, tomar $x \in U$. Por la Proposición 3.2.4(2) tenemos que $U \cap A \neq \emptyset$.

(⇐) Basta probar que $X \subset \overline{A}$. Sea $x \in X$ un punto cualquiera y sea $U \in \mathcal{T}$ de modo que $x \in U$. Por hipótesis $U \cap A \neq \emptyset$ y así pues, por la Proposición 3.2.4, $x \in \overline{A}$. □

Como hicimos con cerrados y entornos, también podemos entresacar las propiedades de la clausura que determinan la topología.

TAREA 7. *Sea X un conjunto. Un* operador de Kuratowski *de X es una aplicación $K : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que cumple:*

(K1) $K(\emptyset) = \emptyset$.
(K2) $A \subset K(A)$, $\forall A \subset X$.
(K3) $K(K(A)) = K(A)$, $\forall A \subset X$.
(K4) $K(A) \cup K(B) = K(A \cup B)$, $\forall A, B \subset X$.

Resuelve los siguientes problemas.

($\mathcal{K}1$) *Demuestra que la clausura define un operador de Kuratowski.*
($\mathcal{K}2$) *Sea K un operador de Kuratowski en un conjunto X y sean $A, B \subset X$. Demuestra que si $A \subset B$ entonces $K(A) \subset K(B)$.*
($\mathcal{K}3$) *Sea K un operador de Kuratowski en un conjunto X y sean $A, B \subset X$. Demuestra que si $A \subset B$ entonces $K(A) \subset K(B)$.*
($\mathcal{K}4$) *Demuestra que K es un operador de Kuratowski de X si y solo si*

$$\forall A, B \subset X \text{ se tiene } A \cup K(A) \cup K(K(B)) = K(A \cup B) \setminus K(\emptyset)$$

($\mathcal{K}5$) *Sea X un conjunto y sea K un operador de Kuratowski de X. Existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\overline{A} = K(A)$, $\forall A \subset X$.*
($\mathcal{K}6$) *Sea $f : X \to Y$ una aplicación; entonces, f es continua si y solo si $\forall A \subset X$ se tiene $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
($\mathcal{K}7$) *Sea $f : X \to Y$ una aplicación; entonces, f es cerrada si y solo si $\forall A \subset X$ se tiene $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$.*
($\mathcal{K}8$) *Sean K_1, K_2 dos operadores de Kuratowski sobre X tales que $K_1(A) \subset K_2(A)$, $\forall A \subset X$. Demuestra que la topología que induce K_1 está contenida en la topología que induce K_2.*
($\mathcal{K}9$) *Sea X un conjunto y $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ dos topologías; denotemos K_1, K_2 los operadores de Kuratowski que inducen las clausuras de cada uno de ellos. Demuestra que $K_2(A) \subset K_1(A)$, $\forall A \subset X$.*

Ejercicios

Ejercicio 3.2.1 Calcula la clausura del conjunto $A = (a, b)$ en la topología usual de $\mathbb{R}$ y en la topología de la recta de Sorgenfrey.

Ejercicio 3.2.2 Sea $A = (0, 1)$ y $B = (1, 2)$. Calcula $\overline{A \cap B}$ y $\overline{A} \cap \overline{B}$ en la topología usual.

Ejercicio 3.2.3 Calcula la clausura del conjunto $A_+ := \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y $A_- := \{-\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ en la topología usual $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, en la de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{S}|_{\mathbb{R}})$, en la topología conumerable $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CN}})$ y en la cofinita $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}})$.

Ejercicio 3.2.4 Caracteriza las clausuras de subconjuntos de X con la topología cofinita y conumerable.

Ejercicio 3.2.5 Consideremos (X, d) espacio seudométrico, $A \subset X$ y d_A la aplicación definida en el Ejercicio 1.4.4. Demuestra:

$$\overline{A} = \{x \in X \mid d_A(x) = 0\}.$$

Ejercicio 3.2.6 Demuestra que $\mathbb{Q}$ es denso en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y en $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ y por lo tanto $\mathbb{Q}$ no es cerrado ni en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ ni en $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ (Propiedad 3.2.3(5)).

Ejercicio 3.2.7 Sea $f : X \to Y$ aplicación continua y sobreyectiva entre espacios topológicos, y sea $D \subset X$ un conjunto denso; demuestra que $f(D) \subset Y$ es denso.

Ejercicio 3.2.8 Sea $A \subset Y \subset X$. Demuestra que $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$. En particular A es denso en Y si y solo si $Y \subset \overline{A}^X$.

Tema 3.3. Interior, Exterior, frontera, aislado y derivado

Como en estos últimos temas, partiremos de un espacio topológico X y de un subconjunto $A \subset X$. En este tema definiremos los conceptos de interior, exterior, frontera, aislado y derivado del conjunto A. Dichos conceptos clasifican los puntos de X por su situación respecto de A. Los conceptos que vamos a introducir están muy relacionados con clausura e interior.

Comencemos que el concepto de interior, que es análogo al de clausura pero referido a abiertos contenidos en un conjunto dado. Sea $(X, \mathcal{T})$ E.T. y sea $A \subset X$. Denotaremos por $\mathcal{T}(A)$ a la familia de abiertos contenidos en A, es decir,

$$\mathcal{T}(A) := \{U \subset X \mid U \subset A,\ U \text{ abierto en } X\}.$$

Dado que $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $\emptyset \subset A$, se tiene que $\mathcal{T}(A)$ es siempre una familia no vacía de abiertos, por tanto tiene sentido definir la unión de esta familia como sigue

DEFINICIÓN 3.3.1. Llamaremos *interior de A en X* al siguiente conjunto:

$$\operatorname{Int}(A) := \bigcup \mathcal{T}(A).$$

Los elementos de $\operatorname{Int}(A)$ se denominan *puntos interiores de A en $(X, \mathcal{T})$* o simplemente *puntos interiores de A* si el contexto permite sobreentender quién es X y quién la topología $\mathcal{T}$.

OBSERVACIÓN 3.3.2. Como ocurre con la clausura, el interior del conjunto A tampoco está definido de manera intrínseca a A, sino que depende de la topología $\mathcal{T}$ de X escogida. Escribiremos $\operatorname{Int}_{(X,\mathcal{T})}(A) = \operatorname{Int}_X(A)$ cuando sea necesario especificar el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ donde tomamos el interior de A.

PROPIEDADES 3.3.3 (Interior).

(1) $\operatorname{Int}(A)$ es abierto.
(2) Si U es un abierto y $U \subset A$, entonces $U \subset \operatorname{Int}(A)$.
(3) $\operatorname{Int}(A) \subset A$. Es decir, $\operatorname{Int}(A)$ es el mayor abierto contenido en A.
(4) Sean $A, B \subset X$ tal que $A \subset B$, entonces $\operatorname{Int}(A) \subset \operatorname{Int}(B)$.
(5) A es un abierto si y solo si $A = \operatorname{Int}(A)$.
(6) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A)) = \operatorname{Int}(A)$.
(7) Si $A, B \subset X$, entonces $\operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B) = \operatorname{Int}(A \cap B)$.
(8) $\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \mid A \text{ es entorno de } x\}$.
(9) $X \setminus \operatorname{Int}(A) = \overline{X \setminus A}$.
(10) $X \setminus \overline{A} = \operatorname{Int}(X \setminus A)$.
(11) $\operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(B) \subset \operatorname{Int}(A \cup B)$.

La demostración de estas propiedades se deja para la Tarea 8.

Caracterizamos un punto interior de un subconjunto del siguiente modo.

PROPOSICIÓN 3.3.4. *Sea $A \subset X$ y $x \in X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $x \in \operatorname{Int}(A)$.
(2) $\exists U \subset X$ *abierto tal que* $x \in U \subset A$.
(3) $\exists V^x \subset X$ *entorno de* x *en* X *tal que* $V^x \subset A$.

La demostración también se deja para la Tarea 8.

TAREA 8.

($\mathcal{INT}1$) *Demuestra las Propiedades* 3.3.3.

($\mathcal{INT}2$) *Demuestra la Proposición* 3.3.4.

($\mathcal{INT}3$) *Sea $A \subset B \subset X$ ¿qué relación hay entre $\operatorname{Int}_B(A)$ e $\operatorname{Int}_X(A)$? Da condiciones sobre B para garantizar la igualdad de ambos interiores.*

($\mathcal{INT}4$) *Observa que no hay ninguna relación entre $\overline{\operatorname{Int}(A)}$ y $\operatorname{Int}(\overline{A})$. Construye un ejemplo en el que uno de esos conjuntos esté contenido en el otro y otro con el contenido en el otro sentido viceversa.*

($\mathcal{INT}5$) *Define cuatro propiedades para un operador $\mathbf{i} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que sustituyan a las que definen el operador de Kuratowski y que las cumpla la operación* interior *(lo llamaremos* operador interior*).*

($\mathcal{INT}6$) *Demuestra que un operador $\mathbf{i}$ determina una única topología tal que $\mathbf{i}(A) = \operatorname{Int} A$, $\forall A \subset X$.*

($\mathcal{INT}7$) *Sea K un operador de Kuratowski en X. Demuestra que $\mathbf{i} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $\mathbf{i}(A) := X \setminus K(X \setminus A)$, es un operador interior.*

Si el interior es la formalización de la idea de "estar dentro de un conjunto", el exterior formaliza "estar fuera".

DEFINICIÓN 3.3.5. Llamaremos *exterior de A en X* a $\operatorname{Ext}(A) := \operatorname{Int}(X \setminus A)$. Los elementos de $\operatorname{Ext}(A)$ se dicen *puntos exteriores a A*.

PROPIEDADES 3.3.6 (Exterior).

(1) $\operatorname{Ext}(A)$ es un conjunto abierto.
(2) $X = \operatorname{Ext}(A) \overset{\emptyset}{\cup} \overline{A}$.
(3) $\operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Ext}(A) = \emptyset$.

La mayoría de los resultados de este tema dependen de lo visto para clausura e interior, por lo que las demostraciones se dejan para la Tarea 9. Un resultado se ha probado para interiores y se demostrará en la misma tarea.

PROPOSICIÓN 3.3.7. *Sea $A \subset X$ y $x \in X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $x \in \mathrm{Ext}(A)$.
(2) $\exists U \subset X$ *abierto tal que* $x \in U$ *y* $U \cap A = \emptyset$.
(3) $\exists V^x \subset X$ *entorno de* x *en* X *tal que* $V^x \cap A = \emptyset$.

El siguiente concepto es el de frontera, que se define a partir del de clausura. Sus propiedades se demuestran en la Tarea 9.

DEFINICIÓN 3.3.8. Llamaremos *frontera de A en $(X, \mathcal{T})$* al subconjunto

$$\mathrm{Fr}(A) := \{x \in X \mid x \notin \mathrm{Int}(A) \wedge x \notin \mathrm{Ext}(A)\}$$

Los elementos de $\mathrm{Fr}(A)$ se dicen *puntos frontera de A*.

PROPIEDADES 3.3.9 (Frontera).

(1) $\mathrm{Fr}(A)$ es cerrado.
(2) $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$.
(3) $\mathrm{Fr}(A) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A}$.
(4) $\overline{A} = \mathrm{Fr}(A) \overset{\emptyset}{\cup} \mathrm{Int}(A)$.
(5) $X = \mathrm{Int}(A) \overset{\emptyset}{\cup} \mathrm{Ext}(A) \overset{\emptyset}{\cup} \mathrm{Fr}(A)$.

También podemos dar una caracterización de los puntos frontera de A en términos de abiertos o entornos, que se demostrará en la Tarea 9.

PROPOSICIÓN 3.3.10. *Sea $A \subset X$ y $x \in X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $x \in \mathrm{Fr}(A)$.
(2) $\forall U \subset X$ *abierto tal que* $x \in U$, *se tiene que*[1] $\emptyset \subsetneqq U \cap A \subsetneqq U$.
(3) $\forall V^x \subset X$ *entorno de* x *en* X, *se tiene que* $\emptyset \subsetneqq V^x \cap A \subsetneqq V^x$.

El siguiente concepto es el de puntos aislados. Las propiedades siguientes se demuestran también en la Tarea 9.

DEFINICIÓN 3.3.11. Llamaremos *aislado de A en X* al subconjunto

$$\mathrm{Ais}(A) := \{x \in X \mid \exists U \subset X \text{ abierto tal que } U \cap A = \{x\}\}.$$

Los elementos de $\mathrm{Ais}(A)$ se dicen *puntos aislados de A*.

PROPIEDADES 3.3.12 (Aislado).

(i) $\mathrm{Ais}(A) \subset A$.

[1] La condición es evidentemente equivalente a que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

(ii) $\mathrm{Ais}(A) = \{x \in X \mid \exists V^x \subset X \text{ entorno de } x \text{ tal que } V^x \cap A = \{x\}\}$.

(iii) Los puntos aislados de A son abiertos relativos de A.

Terminamos con el último concepto, el de derivado de un subconjunto.

DEFINICIÓN 3.3.13. Llamaremos *derivado de A en X* al subconjunto

$$A' := \{\, x \in X \mid \forall U \subset X \text{ abierto tal que } x \in U \text{ se tiene } (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \,\}.$$

Los elementos de A' se dicen *puntos de acumulación de A*.

PROPIEDADES 3.3.14 (Derivado).

(a) $A' = \{x \in X \mid \forall V^x \subset X \text{ entorno de } x \text{ se tiene } (V^x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$.

(b) $\overline{A} = \mathrm{Ais}(A) \overset{\emptyset}{\cup} A'$.

(c) $X = \mathrm{Ais}(A) \overset{\emptyset}{\cup} A' \overset{\emptyset}{\cup} \mathrm{Ext}(A)$.

OBSERVACIÓN 3.3.15. Todas las condiciones en términos de puntos y abiertos (o entornos), como la propiedad 3.3.14(a), pueden comprobarse únicamente para bases en vez de para todos los abiertos.

TAREA 9.

(Pos1) *Demuestra las Propiedades* 3.3.6.

(Pos2) *Demuestra la Proposición* 3.3.7.

(Pos3) *Demuestra las Propiedades* 3.3.9.

(Pos4) *Demuestra la Proposición* 3.3.10.

(Pos5) *Demuestra las Propiedades* 3.3.12.

(Pos6) *Demuestra las Propiedades* 3.3.14.

(Pos7) *Expresa interior, exterior, frontera, aislado y derivado en términos de clausura.*

(Pos8) *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $Y \subset X$ con la topología de subespacio. Sea $A \subset X$; para cada uno de los conceptos anteriores (clausura, interior, exterior, frontera, aislado y derivado) demuestra cuando el relativo a Y se obtiene a partir del relativo a X y da ejemplos cuando no sea el caso.*

Ejercicios

Ejercicio 3.3.1 Calcula el interior del conjunto $A = [a, b]$ en la topología usual $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y en la de la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$.

Ejercicio 3.3.2 Comprueba que $A = [0, 1]$ y $B = [1, 2]$ no verifican la igualdad $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Int}(A \cup B)$ con respecto a la topología usual.

Ejercicio 3.3.3 Caracteriza los interiores de subconjuntos de $\mathbb{R}$ con la topología cofinita y conumerable.

Ejercicio 3.3.4 Demuestra que ningún intervalo de números reales está totalmente contenido en $\mathbb{Q}$ y por tanto $\mathrm{Int}_{(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)} \mathbb{Q} = \mathrm{Int}_{(\mathbb{R},\mathcal{S})} \mathbb{Q} = \emptyset$.

Ejercicio 3.3.5 Calcula $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{CF}})$ y en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{CN}})$.

Ejercicio 3.3.6 Calcula la frontera de $A = \{\frac{1}{n}\}$ y de $B = A \cup \{0\}$ en $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u)$.

Ejercicio 3.3.7 Demuestra las siguientes igualdades:

(1) $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$
(2) $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A)$

Ejercicio 3.3.8 Calcula los puntos aislados de $\mathbb{Z}$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{CF}})$ y en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{CN}})$.

Ejercicio 3.3.9 Calcula el conjunto derivado de $A = \{\frac{1}{n}\}$ y de $B = A \cup \{0\}$ en $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u)$.

Ejercicio 3.3.10 Sea $A \subset X$. Demuestra que si $A \cap A' = \emptyset$, entonces $A = \mathrm{Ais}(A)$. Demuestra también que si, además, $A' = \emptyset$, entonces $A = \overline{A} = \mathrm{Ais}(A)$, es decir, A es cerrado.

Ejercicio 3.3.11 Supongamos que $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ son E.T, que $f : X \to Y$ es una aplicación y que $\mathcal{B}_X^x$, $\mathcal{B}_Y^{f(x)}$ son bases de entornos de $x \in X$ y $f(x) \in Y$ respectivamente. Demuestra las siguientes caracterizaciones:

(1) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_X^x$ se tiene que $B \cap A \neq \emptyset$ (Proposición 3.2.4).
(2) $x \in \mathrm{Int}(A) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}_X^x$ tal que $B \subset A$ (Proposición 3.3.4).
(3) $x \in \mathrm{Ext}(A) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}_X^x$ tal que $B \cap A = \emptyset$ (Proposición 3.3.7).
(4) $x \in \mathrm{Fr}(A) \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_X^x$ se tiene que $\emptyset \subsetneq B \cap A \subsetneq B$ (Proposición 3.3.10).
(5) $x \in \mathrm{Ais}(A) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}_X^x$ tal que $B \cap A = \{x\}$ (Propiedad 3.3.12((ii))).
(6) $x \in A' \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_X^x$ se tiene que $(B \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ (Propiedad 3.3.14((a)))

Ejercicio 3.3.12 Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una aplicación, $A \subset X$, $\mathcal{B}_X$ base de abiertos de X y $\mathcal{B}_Y$ base de abiertos de Y, entonces:

(1) La familia $\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B}_X \mid x \in B\}$ es base de entornos de $x \in X$.
(2) A es entorno de $x \in X$ si y solo si $\exists B \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B \subset A$.
(3) $x \in \overline{A}$ si y solo si $\forall B \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B$ se tiene que $B \cap A \neq \emptyset$.
(4) $x \in \mathrm{Int}(A)$ si y solo si $\exists B \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B \subset A$.
(5) $x \in \mathrm{Fr}(A)$ si y solo si $\forall B \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B$ se tiene que $B \cap A \neq \emptyset$ y $B \cap A^c \neq \emptyset$.
(6) $x \in \mathrm{Ais}(A)$ si y solo si $\exists B \in \mathcal{B}_X$ tal que $B \cap A = \{x\}$.
(7) $x \in A'$ si y solo si $\forall B \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B$ se tiene que $(B \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
(8) A es denso en X si y solo si $\forall B \in \mathcal{B}$ tal que $B \neq \emptyset$ se tiene $B \cap A \neq \emptyset$.

Ejercicio 3.3.13 Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y abierta entre espacios topológicos. Demuestra que si $B \subset Y$, entonces $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.

Ejercicio 3.3.14 Utiliza los Ejercicios 3.3.13 y 2.6.7 para probar que

$$\overline{\mathbb{B}_d(x_0;\varepsilon)} = \mathbb{D}_d(x_0;\varepsilon),$$

donde $d := d_n^2$ es la distancia euclídea en $\mathbb{R}^n$ (ver Observación 3.2.6).

Ejercicio 3.3.15 Estudia la topología que engendra en $\mathbb{R}$ la siguiente familia de conjuntos $\mathcal{N} := \{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Calcula el interior, clausura, frontera, exterior, puntos aislados y conjunto derivado de $A = \mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.3.16 Demuestra que la familia $\mathcal{E} := \{(-a, b) \subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ satisface las propiedades (B1) y (B2). Estudia la topología que engendra en $\mathbb{R}$ dicha familia calculando el interior, clausura, frontera, exterior, puntos aislados y conjunto derivado de $A = \mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.3.17 Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ E.T. y $\mathcal{S}$ subbase de X; demuestra que si $A \subset X$ es denso en X entonces $A \cap S \neq \emptyset$ $\forall S \in \mathcal{S}$, $S \neq \emptyset$. Da un contraejemplo para la recíproca.

Ejercicio 3.3.18 Demuestra que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 3.3.19 Considera el conjunto triádico de Cantor

$$C = \left\{ \sum_{i \geq 0} \frac{a_i}{3^i} \;\middle|\; a_i \in \{0, 2\} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Demuestra que cada sucesión de números (a_i) como las de la definición corresponde a un único punto[2] de C. Calcula la clausura, el interior, el exterior, frontera y derivado de C.

Ejercicio 3.3.20 Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Demuestra que f es abierta si y sólo si $f(\operatorname{Int} A) \subset \operatorname{Int} f(A)$.

[2]Recuerda que, en base 10, se tiene que $0,0999\cdots = 0,1$ y análogamente, en base 3, se tiene $0,022222\cdots = 0,1$. Debes demostrar que esto no ocurre para la escritura que hemos dado para los puntos de C.

Capítulo 4

Axiomas de numerabilidad, convergencia de sucesiones y axiomas de separación

Tema 4.1. Separabilidad

En este tema y los siguientes estudiaremos dos importantes propiedades topológicas que están relacionadas con el *mínimo* cardinal de las bases de abiertos de una topología.

Definición 4.1.1. Sea X un espacio topológico; diremos que X es **separable** si posee un subconjunto denso y contable.

A continuación veremos algunos ejemplos:

Ejemplos 4.1.2.

(1) Si X es contable, entonces es separable ya que X es un subconjunto de X contable y denso ($\overline{X} = X$).

(2) $\mathbb{R}$ es separable, pues $\mathbb{Q}$ es denso (Ejercicio 3.2.6) y es numerable (Ejemplo A.5.21(a)).

(3) $\mathbb{R}^n$ es separable, pues $\mathbb{Q}^n$ es denso (Ejercicio 3.3.18) y es numerable (al ser producto finito de conjuntos numerables, por la Propiedad A.5.19(2)).

(4) La recta de Sorgenfrey es separable ya que $\mathbb{Q}$ también es denso en esta topología (Ejercicio 3.2.6).

(5) La recta real discreta no es separable ya que todo punto es abierto y un conjunto denso debe cortar a todo abierto no vacío (Proposición 3.2.8). Por lo tanto el único conjunto denso es el total, que no es contable. Este mismo razonamiento también implica que un espacio topológico X discreto es separable si y sólo si es contable.

(6) La recta real cofinita es separable, ya que $\mathbb{Z}$ es denso en esta topología. De hecho, todo espacio topológico cofinito es separable. Por el apartado (1) basta suponer que X es infinito no numerable. Además por el Ejercicio 3.2.4, todo subconjunto infinito de X es denso. Por lo tanto, todo conjunto infinito numerable de X es denso y X posee tales subconjuntos, ver Teorema A.5.15.

(7) La recta real conumerable no es separable, ya que todo subconjunto contable de $\mathbb{R}$ es cerrado y por tanto no puede ser denso en $\mathbb{R}$ ya que $\mathbb{R}$ tiene cardinal no numerable (Ejemplo A.5.21(b)). Esto mismo ocurre en general si X es infinito no numerable y tiene la topología conumerable.

Proposición 4.1.3. *La separabilidad es una propiedad topológica.*

Demostración. Sea X e.t. separable e Y e.t. homeomorfo a X. Consideremos $f : X \to Y$ un homeomorfismo entre ambos y $A \subset X$ un subconjunto de X denso y contable. Por ser f biyectiva $\#f(A) \overset{\text{Ejer. A.5.3}}{=} \#A \leq \aleph_0$. Basta

probar que $f(A)$ es denso en Y. Para ello consideremos $V \subset Y$ abierto, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto en X y por tanto $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ lo que implica que $f(A \cap f^{-1}(V)) = f(A) \cap f(f^{-1}(V)) \neq \emptyset$ ((A.5) en Ejemplo A.2.14). Por último, como f es sobre se tiene que $f(f^{-1}(V)) = V$ y así $f(A) \cap V \neq \emptyset$ lo que implica que $f(A)$ es denso. □

Observación 4.1.4. Esta proposición muestra qué características debe tener una propiedad topológica: estar basada en el concepto de abierto (o conceptos que nazcan de él) y en aquellos que son respetados por las biyecciones, como los cardinales.

Ejemplos 4.1.5.

(1) La separabilidad no es hereditaria. Un ejemplo típico de este hecho es el plano de Moore (Tarea 2), que es separable pero el eje horizontal no lo es.

(2) Si X es separable y $U \subset X$ es abierto, entonces U es separable. Esto es una consecuencia inmediata de la Propiedad 2.5.3(3). Si $A \subset X$ es denso y $\#A \leq \aleph_0$, entonces $\#(A \cap U) \overset{\text{Ejer. A.5.12(1)}}{\leq} \#A \leq \aleph_0$. Veamos que $A \cap U$ es denso en A; sea V un U-abierto no vacío, es decir un X-abierto contenido en U. Por tanto $(A \cap U) \cap V = A \cap V \neq \emptyset$.

Tema 4.2. Primer axioma de numerabilidad

DEFINICIÓN 4.2.1. Diremos que un E.T. X es **primero numerable** (en notación IAN) si todo $x \in X$ posee una base contable de entornos.

PROPOSICIÓN 4.2.2. *La propiedad "ser primero numerable" es una propiedad topológica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ E.T. primero numerable y supongamos que el E.T. $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es homeomorfo a X. Llamemos $f : X \to Y$ a un homeomorfismo entre ambos. Queremos probar que para cualquier $y \in Y$ existe una base contable de entornos de y. Para ello consideremos $x := f^{-1}(y)$ y una base $\mathcal{B}^x$ de entornos de $x \in X$ con $\#\mathcal{B}^x \leq \aleph_0$. Como f es un homeomorfismo, $f\mathcal{B}^x := \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}^x\}$ es una base de entornos de y (Proposición 3.1.21). Por último, $\#f\mathcal{B}^x \underset{\text{Ejer. A.5.8(ii)}}{\leq} \#\mathcal{B}^x \leq \aleph_0$ y por tanto Y es IAN. □

Veremos algunos ejemplos y propiedades de espacios primero numerables:

EJEMPLOS Y PROPIEDADES 4.2.3.

(I1) Un espacio discreto es IAN. Esto es consecuencia del hecho de que $\mathcal{B}^x := \{\{x\}\}$ es base de entornos de x (Ejemplo 3.1.14(4)).

(I2) X seudometrizable $\Rightarrow$ X IAN.

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar como base de entornos la familia $\mathcal{B}^x := \{\mathbb{B}(x; \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (Ejemplo 3.1.14(iv)). Dado que hay una aplicación sobreyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{B}^x$ definida como $\varphi(n) := \mathbb{B}(x; \frac{1}{n})$ entonces $\#\mathcal{B}^x \leq \#\mathbb{N} = \aleph_0$ (Definition A.5.11) (obsérvese que pudiera ser finita si la función seudodistancia tomara sólo una cantidad finita de valores en el intervalo $[0, 1]$). □

(I3) Un espacio cofinito es IAN si y sólo si es contable (es decir: $(X, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ es IAN $\Leftrightarrow \#X \leq \aleph_0$).

(I4) Un espacio conumerable es IAN si y sólo si es contable (es decir: $(X, \mathcal{T}_{\text{CN}})$ es IAN $\Leftrightarrow \#X \leq \aleph_0$).

(I5) Primero numerable se conserva por aplicaciones continuas abiertas y suprayectivas. Esto es consecuencia inmediata de la Proposición 3.1.21.

En el caso de la separabilidad observamos que no es una propiedad hereditaria. En cambio:

LEMA 4.2.4. *La propiedad se* IAN *es hereditaria.*

La demostración de este hecho se deja para la Tarea 10.

Tema 4.3. Segundo axioma de numerabilidad

DEFINICIÓN 4.3.1. Diremos que un E.T. X es **segundo numerable** (en notación IIAN) si posee una base contable de abiertos.

PROPOSICIÓN 4.3.2. *"Ser segundo numerable" es una propiedad topológica.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X e Y son E.T, que X es IIAN y que $f : X \to Y$ es un homeomorfismo. Por ser X IIAN existe una base $\mathcal{B}_X$ de abiertos de X tal que $\#\mathcal{B}_X \leq \aleph_0$. Como f es homeomorfismo, entonces f es biyectiva, continua y abierta (Propiedad 2.1.11(H4)) y así $f\mathcal{B}_X$ es base de abiertos de Y (Ejercicio 2.6.8). Por último, como $\#\mathcal{B}_X = \#f\mathcal{B}_X$ (por el Ejercicio A.2.8(c), sabemos que $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ es una biyección, además $\mathcal{P}(f)(\mathcal{B}_X) = f\mathcal{B}_X$, luego $\#\mathcal{B}_X = \mathcal{P}(f)(\mathcal{B}_X) = \#f\mathcal{B}_X$) entonces se tiene que $\#f\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_X \leq \aleph_0$. □

Veremos algunos ejemplos y propiedades de espacios segundo numerables:

EJEMPLOS Y PROPIEDADES 4.3.3.

(II1) Si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es IIAN y $f : X \to Y$ es una aplicación, entonces $(X, f^{-1}(\mathcal{T}_X))$ es IIAN. Por lo tanto, IIAN es una propiedad hereditaria (ver este mismo comentario en Ejercicio 4.4.2).

DEMOSTRACIÓN. Es análoga a la demostración del Ejercicio 4.4.2 para espacios primero numerables. □

(II2) X E.T. IIAN $\Rightarrow$ X IAN y separable.

DEMOSTRACIÓN. La primera parte es consecuencia inmediata de la Propiedad 3.3.12(1). Para probar que X es separable tomemos una aplicación $e : \mathcal{B} \to X$ de una base contable en X que cumpla $e(B) \in B$.

El conjunto $e(\mathcal{B}) \subset X$ es contable ya que $\#e(\mathcal{B}) \overset{\text{Ejer. A.5.3}}{\leq} \#\mathcal{B} \leq \aleph_0$). Además, es denso en X: Sea $B \in \mathcal{B}$, tenemos $e(B) \in B \cap e(\mathcal{B})$ y así, por el Ejercicio 3.3.12(8), $e(\mathcal{B})$ es denso. □

(II3) X E.T. pseudometrizable y separable $\Rightarrow$ X es IIAN.

DEMOSTRACIÓN. Por ser X separable existe $A \subset X$ subconjunto denso y contable de X. Consideremos la siguiente familia de abiertos $\mathcal{B} := \cup_{x \in A} \mathcal{B}^x$ donde $\mathcal{B}^x := \{\mathbb{B}(x; \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($\#\mathcal{B}^x \overset{\text{Ejer. A.5.8(i)}}{\leq} \#\mathbb{N} = \aleph_0$). Dado que la unión contable de conjuntos contables es contable (Propiedad A.5.18(3)) se tiene que $\#\mathcal{B} \leq \aleph_0$. Por tanto, basta probar que $\mathcal{B}$ es una base de abiertos de X. Utilizaremos la Proposición 2.2.8 tomando la base de todas las bolas. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ y consideremos $\mathbb{B}(x; \varepsilon)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como A es denso en X, entonces

existe $x_0 \in \mathbb{B}(x; \frac{1}{n}) \cap A \subset X$. Obsérvese que $\mathbb{B}(x_0; \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}_{x_0} \subset \mathcal{B}$ y que, por la desigualdad triangular de la pseudométrica se tiene que $\mathbb{B}(x_0; \frac{1}{n}) \subset \mathbb{B}(x; \varepsilon)$. □

(II4) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es IIAN ya que $\mathcal{B} := \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b \text{ y } a, b \in \mathbb{Q}\}$ es una base (Ejercicio 2.2.1) numerable ($\#\mathcal{B} \overset{\text{Ejer. A.5.8(i)}}{\leq} \#\mathbb{Q}^2 \overset{\text{Ejem. A.5.21(a)}}{=} \aleph_0$).

(II5) Un espacio discreto es IIAN si y sólo si es contable.

DEMOSTRACIÓN. Se debe a que los subconjuntos unitarios $\{x\}$ deben pertenecer a toda base de abiertos de un espacio discreto. □

(II6) La recta de Sorgenfrey no es IIAN.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B}$ una base de abiertos. Sea $x \in \mathbb{R}$; sabemos que existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset [x, x + 1)$; observemos que $x = \min B_x$. En particular, la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$, $\varphi(x) := B_x$ es inyectiva, por lo que $\#\mathbb{R} \leq \#\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ no puede ser contable. □

(II7) IAN + separable $\not\Rightarrow$ IIAN.

(II8) Sea X E.T. y sea $\mathcal{S}$ una subbase contable. Entonces, X es IIAN.

DEMOSTRACIÓN. Para construir una base $\mathcal{B}(\Sigma)$ a partir de la subbase Σ es necesario tomar intersecciones finitas de elementos de Σ. De este modo podemos construir una aplicación sobreyectiva $\varphi : \mathcal{P}_F(\Sigma) \to \mathcal{B}(\Sigma)$ de manera que si $\mathcal{S} := \{S_1, ..., S_n\} \in \mathcal{P}_F(\mathcal{S})$ es un subconjunto finito de Σ, entonces $\varphi(\mathcal{S}) := \cap\mathcal{S} = S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_n \in \mathcal{B}(\Sigma)$ y todo elemento de $\mathcal{B}(\Sigma)$ se puede obtener de esta forma, como imagen por φ de algún subconjunto finito de Σ. Así pues, $\#\mathcal{B}(\Sigma) \overset{\text{Obs. A.5.12(3)}}{\leq} \mathcal{P}_F(\mathcal{S}) \overset{\text{Ejer. A.5.7}}{\leq} \aleph_0$. □

Tema 4.4. Convergencia de sucesiones

DEFINICIÓN 4.4.1. Sea X un conjunto: una **sucesión** en X es una aplicación $s : \mathbb{N} \to X$; denotaremos $x_n := s(n)$ y por $S := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión. En algunas ocasiones nos referiremos a S como un conjunto, en tal caso estamos identificando S con la imagen de s en X, es decir, $s(\mathbb{N}) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (aunque es un abuso de notación).

Si X es además un espacio topológico podemos definir la idea de que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se *acerca* a un punto $x \in X$.

DEFINICIÓN 4.4.2. Sea $(X, \mathcal{T})$ E.T. y $S := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Diremos que x es **límite** de S (o que S **converge** a x, en notación $x_n \to x$) si $\forall V$ entorno de x en X existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene $x_n \in V$. Al conjunto de puntos límite de S denotaremos por $\text{Lím}_{(X,\mathcal{T})}\, S$.

Diremos que x es un **punto de aglomeración** de S si $\forall V$ entorno de x en X y $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \geq n_0$ tal que $x_n \in V$. Al conjunto de puntos de aglomeración de S denotaremos por $\text{Agl}_{(X,\mathcal{T})}\, S$. Como de costumbre, omitiremos la referencia a $\mathcal{T}$ si no hay lugar a confusión.

OBSERVACIÓN 4.4.3. Observa que en las definiciones de límite y punto de aglomeración podemos cambiar la palabra *entorno* por *abierto que contenga a* x. En particular:

(i) $x \in \text{Lím}_{(X,\mathcal{T})}\, S \Leftrightarrow \forall U$ abierto en X tal que $x \in U$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene $x_n \in U$.

(ii) $x \in \text{Agl}_{(X,\mathcal{T})}\, S \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T}$ t.q. $x \in U$ y $\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0$ t.q. $x_n \in U$.

OBSERVACIÓN 4.4.4. Con los mismos criterios que en la Observación 4.4.3, podemos sustituir *entorno* o *entorno abierto* por *entorno básico* una vez fijada una base de entornos del punto candidato a ser límite o punto de aglomeración.

EJEMPLO 4.4.5. Considera $\mathbb{R}$ con la topología usual y la sucesión $S = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $\text{Lím}\, S = \text{Agl}\, S = \{0\}$.

La sucesión $S' = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene $\text{Lím}\, S' = \emptyset$ y $\text{Agl}\, S' = \{\pm 1\}$.

EJEMPLO 4.4.6. Considera ahora $\mathbb{R}^2$ con la seudodistancia dada en el Ejemplo 1.4.3(SD2). El conjunto de límites de la sucesión $\{(0,0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

DEFINICIONES 4.4.7. Sea $S := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sucesión en X.

(a) Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales; entonces diremos que la sucesión $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **subsucesión de** $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Una subsucesión S_t de S es **truncada** si es de la forma $S_t = \{x_{n+n_0}\}_{n\in\mathbb{N}}$ para cierto $n_0 \geq 0$.

(c) Dos sucesiones son **asintóticas** si poseen subsucesiones truncadas comunes.

(d) Diremos que una sucesión es **constante** si la aplicación es constante. Diremos que es **casiconstante** si es asintótica a una constante.

Observaciones 4.4.8.

(1) Es claro que en cualquier espacio topológico, una sucesión casiconstante converge a la constante.

(2) Otra manera de decir que $x \in X$ es límite de la sucesión $S \subset X$ es que todo entorno de x contiene una subsucesión truncada de S.

(3) Otra manera de decir que $x \in X$ es un punto de aglomeración de $S \subset X$ es que todo entorno de x contiene infinitos puntos de S.

(4) Si S_t y S'_t son dos subsucesiones truncadas de una sucesión S dada entonces, o bien $S_t \subset S'_t$, o bien $S'_t \subset S_t$: en cualquier caso $S_t \cap S'_t \neq \emptyset$.

(5) Como hemos visto en el Ejemplo 4.4.6, los límites de sucesiones no tienen porqué ser únicos. Si repasamos la demostración de la segunda parte del Ejercicio 4.4.8 (que el límite de sucesiones convergentes en espacios métricos sí es único) observaremos que la única propiedad que hemos utilizado de un espacio métrico es que dados dos puntos distintos x, y existen B^x y B^y entornos disjuntos de x e y respectivamente. Los espacios que cumplen esta propiedad se denominan **espacios Hausdorff** (véase el tema siguiente).

Propiedades 4.4.9 (Sucesiones). Sea $S := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X y sea $x \in X$.

(1) Sea S' subsucesión de S, entonces $\text{Lím}_X S \subset \text{Lím}_X S' \subset \text{Agl}_X S$.
(2) Sea S_t subsucesión truncada de S, entonces $\text{Lím}_X S_t = \text{Lím}_X S$.
(3) Sea S_a una sucesión asintótica a S, entonces $\text{Lím}_X S_a = \text{Lím}_X S$.
(4) Si $S \subset A \subset X$ entonces $\text{Lím}_X S \subset \text{Agl}_X S \subset \overline{A}$
(5) Sea Y espacio topológico y sea $f : X \to Y$ continua, entonces $f(\text{Lím}_X S) \subset \text{Lím}_Y f(S)$, es decir, si $x_n \to x$ entonces $f(x_n) \to f(x)$. Lo mismo ocurre para $\text{Agl}_X S$.
(6) El límite de sucesiones convergentes en espacios topológicos Hausdorff es único.
(7) $\text{Agl}_X S = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{S_m}$, donde $S_m := \{x_n \mid m \leq n\}$.

Demostración. Vemos solo las que no aparecen en la Tarea 10.

(6) Utilizamos la Observación 4.4.8(5). Supongamos $x, y \in \text{Lím}_X S$ con $x \neq y$. Por ser X Hausdorff existen U^x y U^y entornos de x e y respectivamente disjuntos.

Puesto que $x_n \to x$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U^x$, $\forall n \geq n_1$. Análogamente, puesto que $x_n \to y$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U^y$, $\forall n \geq n_2$. Tomando $n > \text{máx}\{n_1, n_2\}$ se tiene que $x_n \in U^x \cap U^y$ lo cual contradice que U^x y U^y sean disjuntos.

(7)

$\subset$) Sea $x \in \text{Agl}_X S$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\forall U$ entorno de x, $\exists n \geq m$ tal que $x_n \in U$, es decir, $U \cap S_m \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{S_m}$.

$\supset$) Sea $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{S_m}$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y U entorno de x. Como $x \in \overline{S_m}$, tenemos que $U \cap S_m \neq \emptyset$, es decir, $\exists n \geq m$ tal que $x_n \in U$. □

NOTACIÓN 4.4.10. En el caso de sucesiones convergentes $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con límite único x, denotaremos este como $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Parece que la experiencia de sucesiones en $\mathbb{R}$ nos dice que si una sucesión es convergente, entonces no tiene otros puntos de aglomeración que no sean puntos límite. El Ejercicio 4.4.7 estudia esta cuestión.

Al comparar el concepto de convergencia de sucesiones en $\mathbb{R}$ y en un espacio topológico en general observamos que las diferencias más notables aparecen destacadas en los Ejercicio 4.4.12 y 4.4.9 y en otros que veremos más adelante. A continuación veremos que si el espacio topológico en cuestión es IAN, entonces las Propiedades 4.4.9(4)-(6) a que estos Ejercicios hacen referencia, son equivalencias y por tanto permiten describir las propiedades topológicas de adherencia, aglomeración, continuidad y propiedad Hausdorff en términos de sucesiones y subsucesiones.

PROPOSICIÓN 4.4.11. *Sea X E.T. IAN, $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X y x un punto de X. Entonces se tiene que:*

1. *$x \in \text{Agl}_X S$ si y sólo si $x \in \text{Lím}_X S'$ para cierta S' subsucesión de S.*
2. *Si $A \subset X$, entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si $x \in \text{Lím}_X S$ para cierta sucesión $S \subset A$.*
3. *Si Y es un E.T. cualquiera y $f : X \to Y$ una aplicación. Entonces f es continua si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\forall x \in X$ tal que $x_n \to x$ se tiene $f(x_n) \to f(x)$.*
4. *X es Hausdorff si y sólo si las sucesiones convergentes tienen límite único.*

DEMOSTRACIÓN.

(1) Por la Propiedad 4.4.9(1) basta ver que si $x \in \text{Agl}_X S$, entonces existe una subsucesión de S que converja a x. Para construir la subsucesión seguiremos un siguiente procedimiento recursivo: Tomamos la base de entornos contable

$\mathcal{B}^x = \{B_1, B_2, B_3, \ldots\}$. Como $x \in \operatorname{Agl} S$, existe n_1 tal que $x_{x_1} \in B_1$. Para el caso general, supongamos que tenemos n_k tal que $x_{n_k} \in B_1 \cap \cdots \cap B_k$. Entonces, como $x \in \operatorname{Agl} S$, existe $n_{k+1} \geq n_k + 1$ tal que $x_{n_{k+1}} \in B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap B_{k+1}$.

Ahora es sencillo comprobar que esta subsucesión converje a x, ya que para cualqueir entorno $N \in \mathcal{E}(x)$ existe $B_k \subset N$ ya que $\mathcal{B}^x$ es una base de entornos. Ahora, $\{x_{n_i}\}_{i \geq k} \subset B_k \subset N$.

(2) Por la Propiedad 4.4.9(4) basta ver que si $x \in \overline{A}$, entonces existe una sucesión S en A que converja a x. Para ello tomaremos $\mathcal{B}^x$ una base contable de entornos de x como en el paso anterior. Entonces, como x es un punto adherente, $(B_1 \cap \cdots \cap B_n) \cap A \neq \emptyset$, ya que $B_1 \cap \cdots \cap B_n \in \mathcal{E}(x)$. Elijamos un punto en dicha intersección y denotémoslo por $x_n \in B_1 \cap \cdots \cap B_n \cap A$. Es inmediato probar que $S := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ converge a x como en el apartado anterior.

(3) Por la Propiedad 4.4.9(5) basta ver que si $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ para toda sucesión de X, entonces f es continua. En particular, probaremos que si $C \subset Y$ es cerrado, entonces $f^{-1}(C)$ es cerrado en X. Sea $x \in \overline{f^{-1}(C)}$, entonces, por el apartado (2) existe una sucesión $S = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f^{-1}(C)$ que converge a x. Por hipótesis, $f(x_n) \to f(x)$, y por la Propiedad 4.4.9(4) se tiene que $f(x) \in \overline{C}$, pero como C es cerrado, entonces $f(x) \in \overline{C} = C$, es decir, que $x \in f^{-1}(C)$. Así pues, $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C) \subset \overline{f^{-1}(C)}$, por tanto $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$, luego $f^{-1}(C)$ es cerrado.

(4) Por la Propiedad 4.4.9(6) basta ver que si toda sucesión convergente tiene límite único, entonces X es Hausdorff. Para ello tomemos $x, y \in X$ dos puntos distintos en X. Tomemos $\mathcal{B}^x$ y $\mathcal{D}^y$ sucesiones ordenadas de entornos de x e y respectivamente. Vamos a probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $B_{n_0} \cap D_{n_0} = \emptyset$, en cuyo caso habremos probado que X es T_2. De no existir tal n_0 ocurriría que $\forall n \in \mathbb{N}\ B_n \cap D_n \neq \emptyset$. Tomando un punto en cada intersección y denotándolo por $x_n \in B_{n_0} \cap D_{n_0}$ tendríamos una sucesión $S := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x (ya que $x_n \in B_n\ \forall n$) y a y (ya que $y_n \in D_n\ \forall n$), lo cual es contradictorio con la hipótesis de que toda sucesión convergente en X tiene límite único. □

Los ejemplos más importantes que tenemos de espacios IAN son los espacios seudometrizables. Veamos cómo se interpreta la convergencia en estos casos.

PROPOSICIÓN 4.4.12. *Sea (X, d) un espacio seudométrico y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión. Entonces, $x \in \operatorname{Lím} x_n \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} d(x, x_n) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Observación 4.4.4 tenemos que la condición $x \in \operatorname{Lím} x_n$ equivale a

$$(*) \qquad \forall \mathbb{B}_d(x; \varepsilon), \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0, x_n \in \mathbb{B}_d(x; \varepsilon).$$

Traduciendo los cuantificadores, la condición (*) es equivalente a

$$(**) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0, d(x_n, x) < \varepsilon.$$

La condición (**) es claramente equivalente a $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$ en $\mathbb{R}$. □

TAREA 10. *Vamos a proponer la resolución de algunos resultados de separabilidad, axiomas de numerabilidad y convergencia.*

- (ℕ1) *Demuestra que la separabilidad no es hereditaria. Se ha comentado en el Ejemplo* 4.1.5(1) *usando el plano de Moore. Comprueba que también se puede usar el plano del semidisco.*
- (ℕ2) *Demuestra que un espacio topológico cofinito es primero numerable si y solo si es contable (Propiedad* 4.2.3(I3)*).*
- (ℕ3) *Demuestra que un espacio topológico conumerable es primero numerable si y solo si es contable (Propiedad* 4.2.3(I4)*).*
- (ℕ4) *Demuestra usando el plano de Moore y la recta de Sorgenfrey que un espacio puede ser* IAN *y separable pero no* IIAN *(Propiedad* 4.3.3(II7)*).*
- (ℕ5) *Demuestra que ser* IAN *y* IIAN *son propiedades hereditarias.*
- (ℕ6) *Enuncia y demuestra los conceptos de límite y punto de aglomeración usando bases de entornos.*
- (ℕ7) *Demuestra las Propiedades* 4.4.9(1)-(5).
- (ℕ8) *Sea* (X, d) *un espacio seudométrico, sea* $S := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *sea* $x \in \operatorname{Lím} S$. *Demuestra que* $\operatorname{Lím} S = \{y \in X \mid d(x, y) = 0\}$.
- (ℕ9) *Sea* X *un* E.T. *conumerable. Dada una sucesión* S *estudia* $\operatorname{Lím} S$ *y* $\operatorname{Agl} S$.

Finalmente, diremos que $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *es una* ***base ordenada de entornos de*** x *si es base de entornos de* x *y si* $B_m \subset B_n$ *siempre que* $n \leq m$.

Las bases ordenadas de entornos tienen un uso muy común en análisis, donde se hace principalmente uso de estos dos resultados que debes probar:

- (ℕ10) *Si* X *es* IAN *y* $x \in X$*; entonces* x *posee una base ordenada de entornos.*
- (ℕ11) *Si* $x \in X$, $\mathcal{B}^x := \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *es una base ordenada de entornos y* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión tal que* $x_n \in B_n$, *entonces* $x_n \to x$.

Ejercicios

Ejercicio 4.4.1 Estudia si las topologías de los Ejercicios 3.3.16 y 3.3.15 son separables o no.

Ejercicio 4.4.2 Demuestra que si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es IAN y $f : X \to Y$ es una aplicación, entonces $(X, f^{-1}\mathcal{T}_Y)$ (ver Ejemplo 2.1.3(ET9)) es IAN y, por tanto, primero numerable es una propiedad hereditaria.

Ejercicio 4.4.3 Demuestra que la recta de Sorgenfrey es IAN.

Ejercicio 4.4.4 Demuestra que el plano de Moore (Tarea 2) es IAN.

Ejercicio 4.4.5 Demuestra que si X es IAN y verifica que toda sucesión convergente tiene límite único, entonces X es los conjuntos unipuntuales son cerrados.

Ejercicio 4.4.6 Demuestra que si x es un punto de aglomeración de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces x es un punto adherente del conjunto $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Observa que el recíproco no es cierto. Por ejemplo, todo punto de $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es adherente, y no necesariamente de aglomeración.

Ejercicio 4.4.7 Sea $(X, \mathcal{T})$ un E.T. Hausdorff y sea $S \subset X$ una sucesión convergente. Demuestra que $\operatorname{Agl} S = \operatorname{Lím} S$ y por tanto, toda subsucesión convergente de S tiene el mismo límite que S. En cambio esto no es cierto en general. Sea $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{0,\to})$ E.T. donde

$$\mathcal{T}_{0,\to} := \{(a, +\infty) \mid a \geq 0\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

es decir, $\mathcal{T}_{0,\to} = \mathcal{T}_{\to}|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ (Ejemplo 2.1.3(ET4)). Consideremos la sucesión $S := \{1 + (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Demuestra que S tiene límite único, pero en cambio $\operatorname{Agl} S \supsetneq \operatorname{Lím} S$.

Ejercicio 4.4.8 Sea $x_n := \frac{1}{n}$ una sucesión en el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\to})$. Demuestra que $x_n \to x$ si y sólo si $x \leq 0$. Es decir, el límite de una sucesión convergente en un espacio topológico no tiene porqué ser único. Demuestra en cambio que el límite de sucesiones convergentes en espacios métricos sí es único. (Por lo tanto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\to})$ no es un espacio metrizable).

Ejercicio 4.4.9 Sea X un conjunto infinito no numerable. Consideremos en él las topologías $(X, \mathcal{T}_{\text{CN}})$ (topología conumerable) y $(X, \mathcal{T}_d)$ (topología discreta). Demuestra que sólo las sucesiones casiconstantes en X tienen límite, con lo cual se cumple la tesis de Propiedad 4.4.9(6) aunque la topología conumerable $(X, \mathcal{T}_{\text{CN}})$ no es Hausdorff. Demuestra también que la aplicación identidad $i : (X, \mathcal{T}_{\text{CN}}) \to (X, \mathcal{T}_d)$

no es continua pero que se satisface la tesis de Propiedad 4.4.9(5). Por lo tanto el recíproco de ambas propiedades no es cierto.

Ejercicio 4.4.10 Demuestra las condiciones que aparecen en la Obsevación 4.4.3 son equivalentes a las dadas en la definición de límite y aglomeración.

Ejercicio 4.4.11 Sea X un E.T. IAN. Demuestra que $A \subset X$ es cerrado si y sólo si toda sucesión convergente $S \subset A$ tiene límite en A, es decir, $\operatorname{Lím} S \subset A$.

Ejercicio 4.4.12 Considera el conjunto $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dotado de la siguiente topología $\mathcal{T}$ definida por bases de entornos:

- Si $(m, r) \neq (1, 1)$, $\mathcal{B}_{(m,r)} = \{\{(m, r)\}\}$.
- Si $(m, r) = (1, 1)$, $\mathcal{B}_{(1,1)} = \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{B}_n$, donde

$$\mathcal{B}_n := \{U \subset X \mid (1, 1) \in U, \forall m \geq n, \#\{r \in \mathbb{N} \mid (m, r) \notin U\} < \infty\}.$$

Considera la sucesión $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida al numerar $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ por antidiagonales. Es decir, $x_n := (m, M - m)$ con $\binom{M+1}{2} \leq n < \binom{M+2}{2}$ y $m = n - \binom{M+1}{2}$. Demuestra:

a) $(1, 1) \in \operatorname{Agl}_X(S)$.

b) $(1, 1)$ no es límite de ninguna susbsucesión de S.

Tema 4.5. Axiomas de separación: conceptos básicos

El objetivo de este capítulo es considerar ciertas propiedades topológicas que comparten algunos espacios topológicos y los espacios métricos.

Partiremos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y de V un subconjunto de X. Hemos visto lo que significa que V sea un entorno de un punto $x \in X$.

DEFINICIÓN 4.5.1. Si V es entorno de todos los puntos de un conjunto $A \subset X$, diremos que V es un **entorno de** A (es decir, si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $A \subset U \subset V$).

DEFINICIÓN 4.5.2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un E.T. y sean $A, B \subset X$. Diremos que A y B **se pueden separar en** $(X, \mathcal{T})$ si existen entornos disjuntos $V^A, V^B \subset X$ de A y B respectivamente.

OBSERVACIONES 4.5.3.

(AxS1) Observa que si $A = \{x\}$, entonces $V \subset X$ es entorno de A si y sólo si es entorno de x en el sentido clásico (Definición 3.1.1). En lugar de decir que $\{x\}$ y B se pueden separar, diremos que x y B se pueden separar, es decir, existen entornos disjuntos de x y B.

(AxS2) Todo abierto que contenga a A es un entorno de A.

(AxS3) Observa que las Propiedades 3.1.7(N1)-(N4) de entornos tienen fácil traducción para entornos de conjuntos.

- ($\mathcal{N}1$) Todo conjunto $A \subset X$ admite algún entorno (ya que por ejemplo el espacio total es entorno de cualquier subconjunto suyo).
- ($\mathcal{N}2$) Si V^A es entorno de $A \subset X$, entonces $A \subset V^A$.
- ($\mathcal{N}3$) Si V_1^A y V_2^A son entornos de $A \subset X$, entonces $V_1^A \cap V_2^A$ es entorno de A.
- ($\mathcal{N}4$) Si V^A es entorno de A y $V^A \subset W$, entonces W es entorno de A.

(AxS4) La propiedad de que dos conjuntos $A, B \subset X$ se pueden separar también se puede expresar con las siguientes propiedades equivalentes:

- (a) Existen abiertos U^A, U^B tal que $A \subset U^A$, $B \subset U^B$ y $U^A \cap U^B = \emptyset$ (abreviando, existen entornos abiertos disjuntos).
- (b) Existe un abierto U^A de A tal que $\overline{U^A} \cap B = \emptyset$.
- (c) Existe un entorno V^A de A tal que $\overline{V^A} \cap B = \emptyset$.
- (d) Existe un entorno cerrado V^A de A tal que $V^A \cap B = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN.

(Def. 4.5.2)⇒(a): Supongamos que existen V^A y V^B entornos de A y B respectivamente tal que $V^A \cap V^B = \emptyset$, entonces existen U^A y U^B abiertos tales que $A \subset U^A \subset V^A$ y $B \subset U^B \subset V^B$. Por el apartado (AxS2),

U^A y U^B son entornos abiertos de A y B respectivamente y además cumplen $U^A \cap U^B \subset V^A \cap V^B = \emptyset$.

(a)⇒(b)**:** Supongamos que existen abiertos U^A, U^B tales que $A \subset U^A$, $B \subset U^B$ y $U^A \cap U^B = \emptyset$. Así pues $U^A \subset X \setminus U^B \in \mathcal{C}_X$ (Ejercicio A.1.2(3)) y por tanto $\overline{U^A} \subset X \setminus U^B$ (Propiedad 3.2.3(2)). Así $\overline{U^A} \cap B \subset (X \setminus U^B) \cap U^B = \emptyset$.

(b)⇒(c)**:** Es claro por el apartado (AxS2).

(c)⇒(d)**:** Es claro, ya que si V^A es entorno de A, como $V^A \subset \overline{V^A}$ entonces el cerrado $\overline{V^A}$ es también entorno de A, por el apartado (AxS3)($\mathcal{N}4$).

(d)⇒(Def. 4.5.2): Supongamos que existe V^A entorno cerrado de A tal que $V^A \cap B = \emptyset$. Entonces, tomando $V^B := X \setminus V^A \in \mathcal{T}_X$ tenemos que $B \subset V^B \in \mathcal{T}_X$ y por tanto V^B es entorno de B (apartado (AxS2)). Además $V^A \cap V^B = V^A \cap (X \setminus V^A) = \emptyset$, luego A y B se pueden separar. □

En este tema nos centraremos en la capacidad que tienen algunas topologías de separar entre sí conjuntos o puntos.

Definición 4.5.4. Sea X un espacio topológico. Diremos que:

(T0) X es T_0 si para cualesquiera dos puntos distintos de X, existe un entorno de uno de los puntos que no contiene al otro.

(T1) X es T_1 si para cualesquiera dos puntos distintos de X, existen entornos de cada uno de los puntos que no contienen al otro.

(T2) X es T_2 o **Hausdorff** si se pueden separar puntos distintos.

(Treg) X es **regular** si se pueden separar puntos de cerrados (que no contengan al punto).

(T3) X es T_3 si es T_1 y regular.

(Tnor) X es **normal** si se pueden separar cerrados disjuntos.

(T4) X es T_4 si es T_1 y normal.

Observación 4.5.5. De la Observación 4.5.3(AxS4) se deduce inmediatamente que podemos substituir el término *entorno* por el de *entorno abierto* en las definiciones de T_2, regular y normal. Una demostración casi idéntica prueba que también ocurre esto con las definiciones de T_0 y T_1.

Otra útil observación es la siguiente: sean $x, y \in X$ $(x \neq y)$; si $\mathcal{B}$ es una base de abiertos de X (o bien si $\mathcal{B}^x$ y $\mathcal{B}^y$ son bases de entornos de x e y resp.) entonces x e y se pueden separar si y sólo si existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_1$, $y \in B_2$ (o bien $B_1 \in \mathcal{B}^x$ y $B_2 \in \mathcal{B}^y$) tal que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Por lo tanto, en la definición de T_2 (y análogamente en la de T_0 y T_1) podemos substituir el término *entorno* por el de *abierto básico que contiene a* x (o bien *entorno básico*).

También es sencillo demostrar que si $x \in X$, $\mathcal{B}$ es una base de X (o bien $\mathcal{B}^x$ es una base de entornos de x) y $C \subset X$ es un cerrado de X tal que $x \notin C$, entonces x y C se pueden separa si y sólo si existe $U^C \subset X$ un entorno de C y $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$ (o bien $B \in \mathcal{B}^x$) tal que $U^C \cap B = \emptyset$.

Por lo tanto, en la definición de *regular* también podemos cambiar los *entornos de* x por *abiertos básicos que contienen a* x *entornos básicos de* x.

Las siguientes son propiedades más o menos inmediatas a partir de las definiciones:

PROPIEDADES 4.5.6 (Separación).

(1) Todos los axiomas de separación son propiedades topológicas.
(2) Un espacio topológico es T_1 si y sólo si sus puntos son cerrados.
(3) $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.
(4) Todo espacio seudometrizable es normal y regular.
(5) Todo espacio metrizable es T_4.
(6) Todo espacio seudometrizable y T_0 es metrizable.
(7) X es T_1 si y sólo si $\forall x \in X$, x es el único elemento de la intersección de todos los entornos de x.
(8) X es T_2 si y sólo si $\forall x \in X$, x es el único elemento de la intersección de todos los entornos cerrados de x.
(9) Las siguientes propiedades son equivalentes:
    (a) X regular.
    (b) $\forall x \in X$ y $\forall V \subset X$ entorno de x en X existe un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$.
    (c) $\forall x \in X$ los entornos cerrados de x forman una base de entornos de x.
(10) T_0, T_1, T_2, regular y T_3 son propiedades hereditarias.
(11) Si X es normal (resp. T_4) y $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_X}$, entonces $(C, \mathcal{T}_C)$ es normal (resp. T_4).

DEMOSTRACIÓN. Demostremos los distintos apartados.

(1) Es inmediato pues así ocurre con todos los objetos implicados en las definiciones.
(2)($\Rightarrow$) Sea $x \in X$; para probar que $\{x\}$ es cerrado veamos que $X \setminus \{x\}$ es abierto, es decir, que es entorno de todos sus elementos. Sea $y \in X \setminus \{x\}$ (en particular $x \neq y$). Por definición de T_1, existe un entorno V^y de y

tal que $x \notin V^y$, es decir $V^y \subset X \setminus \{x\}$. Por tanto $X \setminus \{x\}$ es entorno de y.

($\Leftarrow$) Para ver que X es T_1 consideremos $x, y \in X$ $x \neq y$. Por hipótesis sabemos que $\{x\}$ es cerrado, es decir, que $X \setminus \{x\}$ es abierto. Como $y \neq x$ entonces $y \in X \setminus \{x\}$ y por tanto $X \setminus \{x\}$ es un entorno de y que no contiene a x. Análogamente, como $\{y\}$ es cerrado, $X \setminus \{y\}$ es un entorno de x que no contiene a y. Esto prueba que X es T_1.

(3)

($T_1 \Rightarrow T_0$) Obvio.

($T_2 \Rightarrow T_1$) Sean $x, y \in X$ $(x \neq y)$. Sabemos que existen V^x y V^y entornos disjntos de x e y respectivamente. En tal caso, como $x \in V^x$ y $V^x \cap V^y = \emptyset$ se tiene que $x \notin V^y$ y análogamente $y \notin V^x$.

($T_3 \Rightarrow T_2$) Sean $x, y \in X$ $(x \neq y)$. Por ser X un espacio T_3 es en particular T_1 y así pues $\{y\}$ es cerrado, por el apartado (2). Por ser regular se pueden separar x e $\{y\}$, es decir, se pueden separar x e y (Observación 4.5.3(AxS1)).

($T_4 \Rightarrow T_3$) Basta ver que $T_4 \Rightarrow$ regular. Para ello consideremos $x \in X$, $C \in \mathcal{C}_X$ tal que $x \notin C$. Como X es T_1 por hipótesis, entonces $\{x\}$ es un cerrado (apartado (2)) disjunto de C. Por ser X normal se pueden separar cerrados, por lo tanto se pueden separar x y C (Observación 4.5.3(AxS1)).

(4) Fijemos una seudométrica d que corresponda a la topología de X. Recordemos (ver Ejercicio 3.2.5) que si $Z \subset X$ se tiene

$$\overline{Z} = \{x \in X \mid d(Z, x) = 0\}.$$

Vamos a probar regular y normal a la vez. Para ello consideraremos $B \subset X$ cerrado y $A \subset X$ o bien cerrado disjunto de B (para probar normalidad) o bien un punto que no está en B (para probar regularidad). Como B es cerrado, si $x \in A$ se tiene que $d(B, x) = \varepsilon_x > 0$. Análogamente, tanto si A es cerrado como si es un punto, dado $y \in B$, se tiene $d(A, y) = \delta_y > 0$. Definimos

$$U := \bigcup_{x \in A} \mathbb{B}\left(x; \frac{\varepsilon_x}{2}\right), \quad V := \bigcup_{y \in B} \mathbb{B}\left(y; \frac{\delta_y}{2}\right).$$

Veamos que $U \cap V = \emptyset$. Si esto no fuera cierto existiría $z \in U \cap V$. Sean $x \in A$, $y \in B$ tales que $z \in \mathbb{B}(x; \frac{\varepsilon_x}{2})$ y $z \in \mathbb{B}(y; \frac{\delta_y}{2})$. Supongamos que $\varepsilon_x \leq \delta_y$. Así

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\delta_y}{2} \leq \delta_y,$$

por lo que $d(A, y) < \delta_y$ lo que da lugar a contradicción. Por tanto, X es normal y regular.

(5) Por el apartado (4) sabemos que X es normal. Por otra parte, si $x \in A$, se tiene que $\{x\} = \{y \in X \mid d(x, y) = 0\} = \overline{\{x\}}$, por lo que X es T_1 y por tanto T_4.

(7)($\Rightarrow$) Denotemos por $\mathcal{E}(x)$ a la familia de entornos de x en X. Se trata, pues, de probar que $\{x\} = \bigcap \mathcal{E}(x)$. Es claro que $x \in \bigcap \mathcal{E}(x)$, por lo tanto basta ver el contenido inverso.

($\supset$) Sea $y \in X$, veamos que si $y \neq x$ entonces $y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{E}(x)} U$. Esto es consecuencia de que X es un espacio T_1 y así existe $V \in \mathcal{E}(x)$ tal que $y \notin V$, por lo tanto $y \notin \bigcap \mathcal{E}(x)$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Por hipótesis $y \notin \{x\} = \bigcap \mathcal{E}(x)$, por lo tanto existe $V^x \in \mathcal{E}(x)$ tal que $y \notin V^x$. Análogamente $x \notin \{y\} = \bigcap \mathcal{E}(y)$, así existe $V^y \in \mathcal{E}(y)$ tal que $x \notin V^y$. Así pues, X es T_1.

(8)($\Rightarrow$) Denotemos por $\mathcal{E}_c(x)$ a la familia de entornos cerrados de x en X. Se trata, pues, de probar que $\{x\} = \bigcap \mathcal{E}_c(x)$. Es claro que $x \in \bigcap \mathcal{E}_c(x)$, por lo tanto basta ver el contenido recíproco.

($\supset$) Sea $y \in X$, veamos que si $y \neq x$ entonces $y \notin \bigcap \mathcal{E}_c(x)$. Esto es consecuencia de que X es un espacio T_2 y así existe $V \in \mathcal{E}_c(x)$ tal que $y \notin V$ (Definición 4.5.4 y Observación 4.5.3(d)), por lo tanto $y \notin \bigcap \mathcal{E}_c(x)$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Por hipótesis $y \notin \{x\} = \bigcap \mathcal{E}_c(x)$, por lo tanto existe $V^x \in \mathcal{E}_c(x)$ tal que $y \notin V^x$. Así pues, X es T_2 (Definición 4.5.4 y Observación 4.5.3(d)).

(9) (a)$\Rightarrow$(b): Sea $x \in X$ y sea V un entorno de x. Sea W abierto tal que $x \in W \subset V$. Denotemos $C := X \setminus W$ cerrado de X tal que $x \notin C$. Como podemos separar x de C existe U abierto tal que $x \in U$ y $\overline{U} \cap C = \emptyset$, es decir, $\overline{U} \subset V$, y por tanto $x \in U \subset \overline{U} \subset V$.

(b)$\Rightarrow$(c): Basta ver que si V es un entorno de x existe un entorno cerrado de x contenido en él. Con la notación de ((b)), $\overline{U}$ es un entorno cerrado contenido en V.

(c)$\Rightarrow$(a): Sea $x \in X$ y $C \subset X$ cerrado tal que $x \notin C$. Por tanto $x \in U := X \setminus C$ abierto. Sabemos que existe V entorno cerrado de x tal que $x \in V \subset U$. Por tanto $V \cap C = \emptyset$ y V separa x y C. $\square$

Dejamos para la Tarea 11 ver que existen espacios T_3 que no son T_4. De esta manera habremos demostrado también que existen espacios regulares que no son normales. La principal herramienta será este lema.

PROPOSICIÓN 4.5.7 (Lema de Jones). *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico normal. Sea $Y \subset X$ un cerrado de modo que $\mathcal{T}|_Y$ sea la topología discreta sobre Y. Si $D \subset X$ es denso en X, entonces $\#\mathcal{P}(Y) \leq \#\mathcal{P}(D)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \subset Y$; como la topología en Y es la discreta, tanto A como $Y \setminus A$ son cerrados en disjuntos Y y como Y es cerrado, ambos son cerrados disjuntos de X (Propiedad 2.5.3(3)). Como X es normal, A e $Y \setminus A$ se pueden separar, es decir, existe $U^A \subset X$ entorno abierto de A tal que $\overline{U^A} \cap (Y \setminus A) = \emptyset$ (Observación 4.5.3(a)). Definamos una aplicación $\psi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(D)$ tal que $\psi(A) := U^A \cap D$, $\forall A \subset Y$.

Veamos que ψ es inyectiva. Para ello, sean $A, B \subset Y$, $A \neq B$. Podemos suponer que existe $x \in B \setminus A$. Denotemos U^A y U^B los abiertos que sirven para definir $\psi(A)$ y $\psi(B)$. Obsérvese que $x \in B \subset U^B \in \mathcal{T}_X$ y que $x \in Y \setminus A$, luego $x \notin \overline{U^A}$ y así $x \in X \setminus \overline{U^A} \in \mathcal{T}_X$. Tomemos $W := U^B \cap (X \setminus \overline{U^A})$ (que es abierto por ser intersección de dos abiertos). Por lo visto anteriormente, $x \in W \in \mathcal{T}_X$. Por ser W abierto y D denso se tiene que $W \cap D \neq \emptyset$. Consideremos $y \in W \cap D \neq \emptyset$. Entonces $y \in U^B \cap D$ e $y \in (X \setminus \overline{U^A}) \cap D$, (luego $y \notin U^A \subset \overline{U^A}$) es decir, $y \in U^B \cap D = \psi(B)$, pero $y \notin U^A \cap D = \psi(A)$. Así pues, $\psi(A) \neq \psi(B)$. Por tanto, $\#\mathcal{P}(Y) \leq \#\mathcal{P}(D)$. □

A la hora de distinguir dos espacios topológicos se pueden utilizar invariantes un poco más finos que simplemente verificar si un conjunto cumple o no los axiomas de separación. Por ejemplo, no es lo mismo que un espacio cumpla que ningunos dos puntos se pueden separar a que cumpla que todos se pueden separar exepto uno.

TAREA 11.

[1] *Demuestra la Observación* 4.5.3(AxS3).
[2] *Sea X un espacio topológico. Sea $A \subset X$; diremos que $\mathcal{B}_A$ es una base de entornos de A si sus elementos son entornos de A y si dado cualquier entorno V de A existe $B \in \mathcal{B}_A$ tal que $B \subset V$. Demuestra que los axiomas de separación son los mismos si cambiamos* entornos *por* entornos básicos.
[3] *Demuestra la Propiedad* 4.5.6(6).
[4] *Demuestra la Propiedades* 4.5.6(10) *y* (11).
[5] *Demuestra que si $\mathcal{B}^x$ es una base de entornos de x en X, entonces $\bigcap \mathcal{B}^x = \bigcap \mathcal{E}(x)$. Enuncia T_0 y T_1 en función de bases de entornos usando esta propiedad.*

[6] *Usa el plano del semidisco para demostrar que que hay espacios T_2 que no son T_3.*

[7] *Demuestra que si un espacio es T_2 y no es regular, entonces tampoco puede ser normal.*

[8] *Demuestra que un espacio topológico separable que admita un cerrado discreto cuyo cardinal es la potencia del continuo no es normal. Aplícalo a los planos del Moore y del semidisco.*

[9] *Demuestra que la recta de Sorgenfrey es T_4.*

[10] *Encuentra espacios topológicos que cumplan:*

(a) *Es T_0 y no T_1.*

(b) *Es T_1 y no T_2.*

(c) *Es normal y no regular.*

Ejercicios

Ejercicio 4.5.1 Existen espacios topológicos que no son T_0. Demuestra que la topología $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ definida en el Ejercicio 3.3.15 no es T_0. Encuentra otro ejemplo más general.

Ejercicio 4.5.2 Existen espacios topológicos T_0 que no son T_1. Demuestra que la topología $\mathcal{T}_{\rightarrow}$ definida en el Ejemplo 2.1.3(ET4) es T_0 pero no es T_1.

Ejercicio 4.5.3 Existen espacios topológicos T_1 que no son T_2. Demuestra que la topología cofinita definida sobre $\mathbb{R}$ es T_1 pero no es T_2.

Ejercicio 4.5.4 Demuestra que la recta de dos orígenes (Ejemplo 3.1.20) es T_1, pero no es homeomorfa a la recta real usual (ya que no es T_2).

Ejercicio 4.5.5 Sea $(X, \mathcal{T}_1)$ E.T. T_i $(i = 0, 1, 2)$. Si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, entonces $(X, \mathcal{T}_2)$ también es T_i.

Ejercicio 4.5.6 Existen espacios topológicos normales que no son regulares (por la Propiedad 4.5.6(3), obsérvese que tales espacios no pueden ser T_1). Demuestra que $\mathcal{T}_{\rightarrow}$ (ver Ejercicio 4.5.2) es normal pero no regular.

Ejercicio 4.5.7 Demuestra que el plano de Moore (Ejemplo 2.2.10) y el plano del semidisco (Ejemplo 2.2.11) no son homeomorfos.

Ejercicio 4.5.8 Consideremos la topología $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\rightarrow})$ del Ejemplo 2.1.3(ET4) y $\mathcal{T}_{\circlearrowleft}$ la topología sobre $\mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{T}_{\circlearrowleft} := \{[0, b) \mid b \in \mathbb{R}_{>0}\} \cup \{(-\infty, a) \cup [0, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}.$$

Demuestra que ambas son T_0 y normales, pero no son T_1 ni regulares. Demuestra que ambas topologías no son homeomorfas.

Ejercicio 4.5.9 Demuestra que si X es IAN y verifica que toda sucesión convergente tiene límite único, entonces X es T_1.

Capítulo 5

Construcción de topologías

Por *construir topologías* queremos decir lo siguiente. Supongamos que un conjunto A (no espacio topológico) está relacionado de alguna manera con un espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$ (*estar relacionado* se entiende siempre como que haya una aplicación entre uno y el otro). Entonces definiremos una topología en A basándonos en los abiertos de X, de manera que las aplicaciones entre A y X sean continuas. Eventualmente en lugar de un espacio topológico X podremos hacer lo mismo para A y una familia de espacios topológicos relacionados con A. Esta descripción un tanto vaga de construcción de topologías la refinaremos a lo largo del capítulo.

Este concepto responde a la idea de construir topologías en conjuntos que se pueden construir a partir de otros más básicos. Por ejemplo, si tenemos una recta y la enrollamos obtenemos una circunferencia, o si tenemos una banda y la enrollamos obtenemos un cilindro, que al enrollar de nuevo se convierte en un toro (es decir, en una llanta de camión).

Las construcciones de topologías se clasifican conceptualmente en dos grupos.

Tema 5.1. Topologías iniciales: imagen inversa y producto finito

Ciertas operaciones de conjuntos (como el producto cartesiano) tienen asociadas aplicaciones naturales del nuevo conjunto $(X \times Y)$ en cada uno de los conjuntos de partida (X e Y). Suponiendo ahora que los conjuntos de partida sean espacios topológicos, estamos interesados en obtener una topología para el nuevo conjunto que haga que las aplicaciones naturales en los conjuntos de partida sean continuas. Esto así enunciado es un problema trivial, porque bastaría elegir la topología discreta para resolverlo. La pregunta que se plantea es: ¿Cuál será la topología con *menos abiertos* posible que permita que tales aplicaciones sean continuas? Esta es intuitivamente la idea de las topologías iniciales.

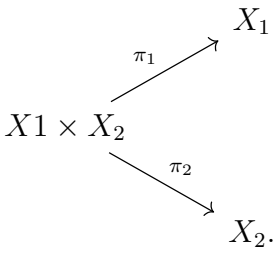
CONSTRUCCIÓN 5.1.1 (Topología imagen inversa (Ejemplo 2.1.3(ET9))). Supongamos que $f : X \to Y$ es una aplicación entre dos conjuntos donde $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un E.T. En la línea del párrafo anterior intentamos definir la *menor* topología en X que haga f una aplicación continua. Por definición de continuidad, si $V \in \mathcal{T}_Y$ entonces $f^{-1}(V)$ debería ser abierto en X. De hecho, la familia

$$f^{-1}\mathcal{T}_Y := \{\, f^{-1}(V) \subset X \mid V \in \mathcal{T}_Y \,\}$$

es una topología (Ejercicio 2.1.1) y por tanto cumple que si $\mathcal{T}_X$ es una topología de X tal que $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es continua, entonces $f^{-1}\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_X$ (en este sentido decimos $f^{-1}\mathcal{T}_Y$ es *la menor topología que hace que f sea continua*). Esta topología se denomina **topología imagen inversa** de f en X y es un sencillo ejemplo de topología inicial. La topología inducida sobre un **subespacio topológico** (ver Definición 2.5.1) es la topología imagen inversa para la inclusión.

En este tema solo consideramos espacios topológicos no vacíos.

CONSTRUCCIÓN 5.1.2 (Producto de dos topologías (Tarea 2[$\mathcal{B}$11])). Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ e $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. El producto cartesiano $X_1 \times X_2$ tiene proyecciones naturales en cada una de las coordenadas



Para que las proyecciones sean continuas se debe cumplir que tanto $\pi_1^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2$ como $\pi_2^{-1}(U_2) = X_1 \times U_2$ sean abiertos para cualquier $U_1 \in \mathcal{T}_1$ y $U_2 \in \mathcal{T}_2$.

La *mínima* topología que contiene a dichos conjuntos como abiertos es aquella que los tiene como subbase. En otras palabras, la familia

$$\Sigma(X_1, X_2) = \Sigma_p = \{U_1 \times X_2 \mid U_1 \in \mathcal{T}_1\} \cup \{X_1 \times U_2 \mid U_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

es subbase de una topología $\mathcal{T}_p$ que se denomina **topología producto**.

Obsérvese que, por construcción, tanto π_1 como π_2 son continuas.

EJEMPLO 5.1.3. Según la definición de subbase, todo abierto del producto debe ser unión de intersecciones finitas de abiertos de Σ_p. Observemos por ejemplo que, $U_1 \times U_2 = (U_1 \times X_2) \cap (X_1 \times U_2)$ (Ejercicio A.1.2(b)). Por lo tanto, el producto de abiertos es un abierto del producto.

PROPIEDADES 5.1.4 (Topología producto). Supongamos que $(X_1, \mathcal{T}_1)$ e $(X_2, \mathcal{T}_2)$ son E.T. no vacíos y consideremos el producto cartesiano $X_1 \times X_2$ con la topología producto $\mathcal{T}_p$. Las proyecciones π_1 y π_2 sobre las coordenadas son ahora aplicaciones entre espacios topológicos.

(1) Las aplicaciones π_1 y π_2 son continuas, abiertas y suprayectivas.
(2) Si $A_i \subset X_i$ para $i = 1, 2$, entonces
   a) $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$.
   b) $\mathrm{Int}(A_1 \times A_2) = \mathrm{Int}(A_1) \times \mathrm{Int}(A_2)$.
(3) Si Z es un E.T. y $f : Z \to X_1 \times X_2$ una aplicación, entonces f es continua si y sólo si $\pi_i \circ f : Z \to X_i$ para $i = 1, 2$.

DEMOSTRACIÓN.

(1). Estudiaremos únicamente la primera proyección. Para probar que π_1 es continua basta ver que $\pi_1^{-1}(U)$ para todo $U \in \mathcal{T}_1$. Ahora bien, $\pi_1^{-1}(U) = U \times X_2 \in \Sigma_1 \subset \mathcal{T}_p$, luego efectivamente $\pi_1 : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_p) \to (X_1, \mathcal{T}_1)$ es una aplicación continua. Como $X_2 \neq \emptyset$, sea $y_0 \in X_2$. Entonces, si $x \in X_1$, tenemos que $\pi_1(x, y_0) = x$, es decir, π_1 es sobreyectiva.

Veamos finalmente que π_1 es abierta. Sea W un abierto de $X_1 \times X_2$; basta probar que $\pi_1(W)$ es entorno de todos sus puntos. Sea $x \in \pi_1(W)$. Sabemos que $\exists y \in Y$ tal que $(x, y) \in W$. Como W es abierto, existen $U_i \subset X_i$ con $i = 1, 2$ abiertos tal que $(x, y) \in U_1 \times U_2 \subset W$. Por tanto, $x \in U_1 \subset \pi_1(W)$.

(2). a) Como $\mathcal{B}_p$ es base de $\mathcal{T}_p$, entonces $(x_1, x_2) \in \overline{A_1 \times A_2}$ si y sólo si $(U_1 \times U_2) \cap (A_1 \times A_2) \neq \emptyset$ para cualquier $U_1 \times U_2 \in \mathcal{B}_p$ tal que $(x, y) \in U_1 \times U_2$ (Ejercicio 3.3.12(3)). Esto equivale a que $U_i \cap A_i \neq \emptyset$ para todo $U_i \in \mathcal{T}_X$ con $x_i \in U_i$ para $i = 1, 2$. En otras palabras, $x_i \in \overline{A_i}$ y por tanto a que $(x_1, y_2) \in \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.

b) Como $\mathcal{B}_p$ es base de $\mathcal{T}_p$, entonces $(x_1, x_2) \in \mathrm{Int}(A_1 \times A_2)$ si y sólo si existe $U_1 \times U_2 \in \mathcal{B}_p$ tal que $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset A_1 \times A_2$ (Ejercicio 3.3.12(4)), es decir, existen $U_i \in \mathcal{T}_i$ tal que $x_i \in U_i \subset A_i$ para $i = 1, 2$. Esto equivale a que $x_i \in \mathrm{Int}(A_i)$, es decir, a que $(x_1, x_2) \in \mathrm{Int}(A_1) \times \mathrm{Int}(A_2)$.

(3).($\Rightarrow$) Supongamos que f es continua; como por el apartado (1), las proyecciones también lo son, entonces $\mathrm{pr}_1 \circ f$ y $\mathrm{pr}_2 \circ f$ son continuas.

($\Leftarrow$) Utilizaremos la Proposición 2.2.15 probando que la imagen inversa de los elementos de la subbase Σ_p son abiertos de Z. Sea $U := U_1 \times X_2 \in \mathcal{S}_p$ ($U_1 \in \mathcal{T}_1$) un abierto de la subbase $\mathcal{S}_p$ de $X_1 \times X_2$. Obsérvese que $U = \pi_1^{-1}(U_1)$, por lo tanto

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\pi_1^{-1}(U_1)) \overset{\text{Ejer. A.2.8(2)}}{=} (\pi_1 \circ f)^{-1}(U_1) \in \mathcal{T}_Z$$

ya que $\pi_1 \circ f$ es continua. Análogamente ocurre si tomamos el otro tipo de abiertos $U := X_1 \times U_2 \in \mathcal{S}_p$. □

Observación 5.1.5. La Propiedad 5.1.4(2) puede leerse también diciendo que $A \times B$ es cerrado (resp. abierto) si y sólo si A y B lo son. Obsérvese de todos modos que no todo cerrado tiene que ser producto de cerrados, ni todo abierto producto de abiertos. Tal es el caso del conjunto $L := \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ en el plano usual $\mathbb{R}^2$ (cuya topología producto es la topología usual por el Ejercicio 2.2.3). Al ser el grafo de una aplicación continua, L es un cerrado de $\mathbb{R}^2$, en cambio no puede escribirse como el producto de cerrados de $\mathbb{R}$. Análogamente, cualquier bola abierta $\mathbb{B}((x, y); \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto de la topología producto pero no es de la forma $A \times B$ para $A, B \subset \mathbb{R}$. En efecto, si $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{d_2^2}((0, 0); 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ fuera de la forma $\mathbb{B} = A \times B$, entonces como $(\frac{3}{4}, 0) \in \mathbb{B}$, se tendría que $\frac{3}{4} \in A$. Análogamente, como $(0, \frac{3}{4}) \in \mathbb{B}$, se tendría que $\frac{3}{4} \in B$. Por lo tanto $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) \in A \times B$. En cambio, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) \notin \mathbb{B}$ ya que $(\frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{8} > 1$.

Ejemplo 5.1.6. En la Propiedad 5.1.4(1) vimos que las proyecciones son abiertas, por lo tanto las proyecciones de un conjunto abierto son conjuntos abiertos en cada coordenada. En cambio, aunque las proyecciones de un conjunto sean abiertas, este conjunto puede no ser abierto. Para ello veamos el siguiente ejemplo, de nuevo en $\mathbb{R}^2$. Consideremos el conjunto $A := (-1, 0) \cup (0, 1)$, y $B := (A \times A) \cup \{(0, 0)\}$. Veamos que B no es abierto en $\mathbb{R}^2$. Para ello basta ver que ningún entorno de tipo $V_\varepsilon := (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, 0) \in B$ está contenido en B (ya que $(\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in V_\varepsilon$ pero $(\frac{\varepsilon}{2}, 0) \notin B$). Dado que la familia $\{V_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$ forma una base de entornos de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ (Ejemplo 3.1.14(i)) entonces $(0, 0) \notin \mathrm{Int}(B)$ (Ejercicio 3.1.5(2)), y así $(0, 0) \in B \setminus \mathrm{Int}(B)$, luego B no es abierto. En cambio ambas proyecciones $\pi_1(B) = \pi_2(B) = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ son abiertas.

OBSERVACIÓN 5.1.7. Del Ejercicio 5.1.6(4), obtenemos que el espacio producto contiene subespacios homeomorfos a los factores. Como consecuencia, toda propiedada topológica y hereditaria del producto también lo es de los factores.

El próximo objetivo será estudiar qué tipo de propiedades topológicas de las estudiadas hasta ahora (separabilidad, IAN, IIAN, axiomas de separación) se transmiten de los factores al producto y cuáles del producto a los factores. Veamos primero un resultado previo.

PROPOSICIÓN 5.1.8. *Sean $D_i \subset X_i$ con $i = 1, 2$ densos. Entonces $D_1 \times D_2$ es denso en $X_1 \times X_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos $\overline{D}_i = X_i$ con $i = 1, 2$. Entonces:

$$\overline{D_1 \times D_2} \overset{\text{Prop. 5.1.4a)}}{=} \overline{D}_1 \times \overline{D}_2 = X_1 \times X_2. \qquad \square$$

PROPOSICIÓN 5.1.9. *Sean $X1$ y X_2 espacios topológicos. Entonces $X_1 \times X_2$ es separable si y solo si lo son X_1 y X_2.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X_i para $i = 1, 2$ son separables. Nos preguntamos si $X_1 \times X_2$ será también separable. Sabemos que existen $D_i \subset X_i$ con $i = 1, 2$ subconjuntos densos contables y queremos construir uno en $X_1 \times X_2$ que sea denso y contable. Un candidato natural es $D = D_1 \times D_2 \subset X_1 \times X_2$ ya que su cardinal es contable (Propiedad A.5.19(2)). Por la Proposición 5.1.8 D es denso. Hemos demostrado $\Leftarrow$).

Veamos ahora $\Rightarrow$). Supongamos que $X_1 \times X_2$ es separable; basta que veamos que X_1 es separable. Para ello sabemos que existe $D \subset X_1 \times X_2$ denso y contable. Buscamos un subconjunto denso de X_1 contable. Un razonable candidato es $\pi_1(D) \subset X_1$ que es contable ya que es imagen de D por una aplicación sobreyectiva $\pi_1|_D : D \to \pi_1(D)$. Además, como π_1 es continua y sobreyectiva (Propiedad 5.1.4(1)) entonces $\pi_1(D)$ es denso (Ejercicio 3.2.7). $\square$

Para demostrar un resultado similar para el Primer Axioma de Numerabilidad veremos algún resultado previo.

PROPOSICIÓN 5.1.10. *Sea $V_i \subset X_i$ entorno de $x_i \in X_i$ con $i = 1, 2$, entonces $V_1 \times V_2$ es entorno de (x_1, x_2) en $X_1 \times X_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Por ser $N_i \subset X_i$ entorno de $x_i \in X_I$ existe un abierto $U_i \in \mathcal{T}_i$ de X_i para cada $i = 1, 2$. Por lo tanto $U_1 \times U_2$ es un abierto de $X_1 \times X_2$ (Ejemplo 5.1.3) que cumple $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset N_1 \times N_2$. $\square$

PROPOSICIÓN 5.1.11. *Sea $\mathcal{B}^{x_i}$ base de entornos de $x_i \in X_i$ con $i = 1, 2$. Entonces $\mathcal{B}^{(x_1,x_2)} := \{ N_1 \times N_2 \mid N_i \in \mathcal{B}^{x_i} \text{ con } i = 1, 2 \}$ es base de entornos de (x_1, x_2) en $X_1 \times X_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 5.1.10, la familia $\mathcal{B}^{(x_1,x_2)}$ es una familia de entornos de $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Según la Definición 3.1.13, $\mathcal{B}$ es base de entornos si para todo $V \subset X_1 \times X_2$ entorno de (x_1, x_2) existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $(x_1, x_2) \in B \subset V$. Por tanto partamos que $V \subset X_1 \times X_2$ entorno de (x_1, x_2). Dado que $(x_1, x_2) \in V$ y que $\mathcal{B}_p := \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \in \mathcal{T}_i, i = 1, 2 \}$ es base del producto (Ejercicio 5.1.1), entonces existen $U_i \in \mathcal{T}_i$ con $i = 1, 2$ tal que $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset V$ (Proposición 2.2.3). Así pues $x_i \in U_i$ es entorno de x_i con lo cual existe $B_i \in \mathcal{B}^{x_i}$ tal que $x_i \in B_i \subset U_i$ para cualqueir $i = 1, 2$. Por lo tanto existe $B := B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}^{(x_1,x_2)}$ cumpliendo $(x_1, x_2) \in B \subset U_1 \times U_2 \subset V$. □

PROPOSICIÓN 5.1.12. *Sean X_1 y X_2 espacios topológicos. Entonces $X_1 \times X_2$ es* IAN *si y solo si X_i es* IAN *para cada $i = 1, 2$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X_i es E.T. IAN(para $i = 1, 2$), es decir, que posee bases de entornos contables de cada punto. Las bases productos de la Proposición 5.1.11 dan lugar a bases de entornos contables para todos los elementos de $X_1 \times X_2$. En efecto, sea $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Como X_i es IAN, existen $\mathcal{B}^{x_i}$ base de entornos contable para x_i. En tal caso $\mathcal{B}^{(x_1,x_2)}$ es base de entornos de (x_1, x_2) en $X_1 \times X_2$ (Proposición 5.1.11). Además su cardinal es contable por ser producto de dos conjuntos de cardinal contable (Propiedades A.5.19(1) y (2)).

Si $X_1 \times X_1$ es IAN, sus factores lo son por ser IAN una propiedad hereditaria y topológica, ver Observación 5.1.7. □

PROPOSICIÓN 5.1.13. *Sean X_1 y X_2 espacios topológicos. Entonces $X_1 \times X_2$ es* IIAN *si y solo si X_i es* IIAN *para cada $i = 1, 2$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos ahora que X_i es E.T. IIAN (para $i = 1, 2$), es decir, que posee una base (de abiertos) contables. Por la Tarea 2(c), el producto de estas bases es base de $X_1 \times X_2$. Además es una familia contable (Propiedades A.5.19(1) y (2)). Hemos probado $\Leftarrow$).

El recíproco también se sigue de la Observación 5.1.7. □

Veamos también como es posible encontrar otras subbases para la topología producto.

PROPOSICIÓN 5.1.14. *Sean X_i un espacios topológicos y $\mathcal{S}_i$ una subbase, con $i = 1, 2$. Entonces*

$$\mathcal{S} := \{\pi_1^{-1}(S_1) = S_1 \times X_2 \mid S_1 \in \mathcal{S}_1\} \cup \{\pi_2^{-1}(S_2) = X_1 \times S_2 \mid S_2 \in \mathcal{S}_2\}$$

es una subbase de $X_1 \times X_2$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $\mathcal{S}$ es subbase de la topología producto $\mathcal{T}_p$ si y solo si es la menor topología que la contiene. Denotemos $\mathcal{T}$ la topología engendrada por $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_p$, entonces $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_p$ y por tanto, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_p$.

Como cualquier abierto de X_i se obtiene como unión de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}_i$), y estas operaciones conmutan con la de tomar preimágenes (Propiedades A.3.3(h) y (i)), tenemos que $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{T}$, por lo que $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}$ □

Con estos datos podemos rellenar el siguiente recuadro:

	Separable	IAN	IIAN
$X_i \Rightarrow X_1 \times X_2$	✓	✓	✓
$X_1 \times X_2 \Rightarrow X_i$	✓	✓	✓

donde

- $X_i \Rightarrow X_1 \times X_2$ representa: "si X_1 y X_2 cumplen cierta propiedad, entonces $X_1 \times X_2$ también la cumple".
- $X_1 \times X_2 \Rightarrow X_i$ representa: "si $X_1 \times x_2$ cumple cierta propiedad, entonces X_1 y X_2 también la cumplen".

Veamos ahora cómo funciona el producto con los axiomas de separación.

PROPOSICIÓN 5.1.15. *Sean* X_i *con* $i = 1, 2$ *espacios topológicos. Entonces* X_i *son* T_0 *para cada* $i = 1, 2$ *si y solo si* $X_1 \times X_2$ *es* T_0.

DEMOSTRACIÓN. La implicación $\Rightarrow$) se sigue de la Observación 5.1.7.

Veamos $\Leftarrow$). Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ dos puntos distintos de $X_1 \times X_2$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_1 \neq y_1$. Como X_1 es T_0, entonces existe, por ejemplo, U^{x_1} entorno abierto de x_1 tal que $y_1 \notin U^{x_1}$ (Observación 4.5.5). De este modo $U^{x_1} \times X_2$ es un abierto que contiene a (x_1, x_2) (es decir, es un entorno abierto de (x_1, x_2)) que no contiene a (y_1, y_2). □

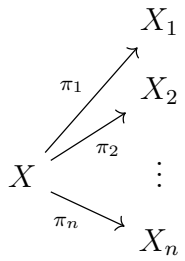
PROPOSICIÓN 5.1.16. *Sean* X_i *con* $i = 1, 2$ *espacios topológicos. Entonces* X_i *es regular para cada* $i = 1, 2$ *si y solo si* $X_1 \times X_2$ *es regular.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Observación 5.1.7, obtenemos la implicación $\Leftarrow$). Recíprocamente, aplicando la caracterización de regularidad dada en la Observación 4.5.6(c) (que todo punto admite una base de entornos cerrados) a los factores, y luego la Proposición 5.1.11 y la Observación 5.1.5 concluimos el resultado. □

PROPOSICIÓN 5.1.17. *Sean* X_1 *y* X_2 *espacios topológicos tales que* $X_1 \times X_2$ *es normal. Entonces ambos son normales.*

DEMOSTRACIÓN. Basta que veamos que X_1 es normal; como es un propiedad topológica, fijemos $x_2 \in X_2$ y probemos que $X_{x_2} := X_1 \times \{x_2\}$ es normal. Sean $A_{x_2}, B_{x_2} \subset X_{x_2}$ cerrados disjuntos; notemos que $A_{x_2} = A \times \{x_2\}$ y $B_{x_2} = B \times \{x_2\}$, con $A, B \subset X_1$ cerrados disjuntos. Como $A \times X_2, B \times X_2$ son cerrados disjuntos de $X_1 \times X_2$, espacio normal, existen $\tilde{U}, \tilde{V} \subset X_1 \times X_2$ abiertos disjuntos que los separan. Sean $U := \tilde{U} \cap X_{x_2}$, $V := \tilde{V} \cap X_{x_2}$; se trata de abiertos disjuntos que separan A_{x_2} y B_{x_2}. □

CONSTRUCCIÓN 5.1.18 (Producto de una familia finita de topologías). La Construcción 5.1.2 puede extenderse de manera inmediata para el caso del producto cartesiano de un número finito de espacios topológicos. Consideremos $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, \ldots, n$ una familia de E.T. El producto cartesiano $X := \prod_{i=1}^n X_i$ tiene proyecciones en cada coordenada



Consideremos $\Sigma_i := \{\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{T}_i\}$, entonces la **topología producto** $\mathcal{T}_p$ de X tiene por subbase a

$$\Sigma_p := \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i.$$

Observemos que

$$\pi_i^{-1}(U_i) = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \ldots \cdots \times X_n.$$

Según la definición de subbase, todo abierto del producto debe ser unión de intersecciones finitas de abiertos de Σ_p. Para el caso de productos finitos, obtenemos como en el caso binario una base de abiertos cuyos elementos son de la forma

$$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \overset{\text{Ej. A.1.2(b)}}{=} \bigcap_{i=1}^{n} (X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \ldots \cdots \times X_n),\ U_i \subset X_i \text{ abierto.}$$

Todas las propiedades vistas para productos binarios se aplican en productos finitos. Para ello basta aplicar el principio de inducción y tener en cuenta que hay un homeomorfismo natural entre $X_1 \times \cdots \times X_n$ y $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$, así como una *asociatividad* natural: $(X \times Y) \times Z$, $X \times (Y \times Z)$ y $X \times Y \times Z$ son naturalmente isomorfos. Lo mismo ocurre con las permutaciones de los factores.

Ejercicios

Ejercicio 5.1.1 Demuestra que

$$\mathcal{B}_p := \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \mathcal{T}_X, U_2 \in \mathcal{T}_Y\}$$

es una base de $\mathcal{T}_p$.

Ejercicio 5.1.2 Utiliza la Tarea 5($\mathcal{AC}2$) para demostrar que las proyecciones no son siempre cerradas. En particular prueba que la primera proyección $\mathrm{pr}_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_p) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ no es cerrada (observa que para aplicar la Tarea 5($\mathcal{AC}2$) es necesario el Ejercicio 2.2.3).

Ejercicio 5.1.3 Sean X, Y, Z espacios topológicos y sean $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ aplicaciones continuas. Demuestra que la aplicación $f \times g : Z \to X \times Y$ dada por $(f \times g)(z) := (f(z), g(z))$, $\forall z \in Z$, es continua.

Ejercicio 5.1.4 Sean X_1, X_2, Y_1, Y_2 espacios topológicos y sean $f_i : X_i \to Y_i$, $i = 1, 2$, aplicaciones continuas. Demuestra que la aplicación $(f_1, f_2) : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ dada por $(f_1, f_2)(x_1, x_2) := (f_1(x_1), f_2(x_2))$, $\forall x_1 \in X_1$, $\forall x_2 \in X_2$, es continua.

Ejercicio 5.1.5 Sean X e Y espacios topológicos y sean $A \subset X$, $B \subset Y$. Sea $\mathcal{T}_1$ la topología de $A \times B$ obtenida como producto de las topologías de subespacio de A y B y sea $\mathcal{T}_2$ la obtenida como topología de subespacio de $A \times B$ en $X \times Y$ con la topología producto. Demuestra que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Ejercicio 5.1.6 Sean X e Y espacios topológicos. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) $X \times Y \approx Y \times X$.
(2) Si $Z \approx X$, entonces $X \times Y \approx Z \times Y$.
(3) Si $\tilde{X} \approx X$ e $\tilde{Y} \approx Y$, entonces $X \times Y \approx \tilde{X} \times \tilde{Y}$.
(4) Si $x \in X$, entonces $\{x\} \times Y \approx Y$ mediante la aplicación $y \mapsto (x, y)$. Análogamente si $y \in Y$, entonces $X \times \{y\} \approx X$.

Ejercicio 5.1.7 Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Consideremos $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ el **grafo de** f. Demuestra que Γ_f es un espacio topológico homeomorfo a X.

Ejercicio 5.1.8 Demuestra que el producto de espacios (seudo)métricos es un espacio (seudo)métrico. En concreto, sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios (seudo)métricos. En principio $(X \times Y, \mathcal{T}_p)$ es simplemente un espacio topológico. Demuestra que si definimos $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ del siguiente modo $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$. Entonces $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}(d)$.

Ejercicio 5.1.9 Prueba propiedades análogas a la anterior para los Axiomas T_1 y T_2, en otras palabras: X, Y son T_1 (resp. T_2) si y solo si $X \times Y$ es T_1 (resp. T_2).

Ejercicio 5.1.10 Demuestra que el producto de dos copias de la recta de Sorgenfrey no es normal. En particular, el producto de espacios normales no tiene porqué ser normal.

Ejercicio 5.1.11 Sean $S_1 := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $S_2 := \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X e Y respectivamente. Entonces (x, y) es límite de $S := \{(x_n, y_n)\}$ en $X \times Y$ si y sólo si $x \in \text{Lím}_X S_1$ e $y \in \text{Lím}_Y S_2$.

En cambio esto no ocurre para puntos de aglomeración. Concretamente, si (x, y) es un punto de aglomeración de $S := \{(x_n, y_n)\}$ en $X \times Y$, entonces $x \in \text{Agl}_X S_1$ e $y \in \text{Agl}_Y S_2$. Sin embargo, el recíproco no es cierto.

Ejercicio 5.1.12 Demuestra que $X_1 \times \cdots \times X_n$ es homeomorfo a $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$.

Ejercicio 5.1.13 Se define el espacio topológico cilindro como $\mathcal{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ con la topología producto. Demuestra que el cilindro es homeomorfo a $(\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 5.1.14 Sea X un espacio topológico y definamos la diagonal como el conjunto

$$\Delta = \{\, (x, x) \mid x \in X \,\} \subset X \times X.$$

Demostrar que X es de Hausdorff si y sólo si Δ es cerrado en $X \times X$.

Ejercicio 5.1.15 Considera el conjunto de funciones continuas $C(X, \mathbb{R})$ de X a $\mathbb{R}$. Sean $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ y definimos las aplicaciones $f + g, f \cdot g : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$(f + g)(x \in X) := f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x \in X) := f(x)g(x).$$

Además, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ podemos definir de manera similar $(\lambda f)(x \in X) := \lambda f(x)$.

Demuestra que $C(X, \mathbb{R})$ es una $\mathbb{R}$-álgebra con las operaciones antes descritas.

Ejercicio 5.1.16 Considera el $\mathbb{R}$ con las topologías usual $\mathcal{T}_u$ y de Sorgenfrey $\mathcal{S}$. Tenemos entonces las aplicaciones

$$1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \qquad 1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{S})$$

¿Cómo es el la topología inicial en $\mathbb{R}$ para esta topología? Si añadimos las aplicación $x \mapsto -x$ con ambas topologías ¿cómo es la topología inicial en este caso?

Tema 5.2. Productos numerables

Como en el Tema 5.1 en este tema solo trabajaremos con espacios topológicos no vacíos.

CONSTRUCCIÓN 5.2.1 (Producto de una familia numerable de topologías). Queremos extender la Construcción 5.1.18 al caso de una familia numerable de espacios topológicos. Consideremos $(X_n, \mathcal{T}_n)$, $n \in \mathbb{N}$ una familia de E.T. Consideramos el producto cartesiano $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y las proyecciones $\pi_n : X \to X_n$. Los elementos de X son *sucesiones* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $x_n \in X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Podemos generalizar la Construcción 5.1.18

Consideremos por una parte $\Sigma_n := \{\pi_n^{-1}(U_n) \mid U_n \in \mathcal{T}_n\}$. Podemos considerar la **topología producto** $\mathcal{T}_p$ de X como aquella que tiene por subbase a $\Sigma_p := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$. En esta situación,

$$\pi_n^{-1}(U_n) = X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times U_n \times \prod_{m=n+1}^{\infty} X_m.$$

La otra alternativa es considerar una topología $\mathcal{T}_b$ que admita como base:

$$\mathcal{B}_b := \left\{ \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \;\middle|\; U_n \in \mathcal{T}_n, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

PROPOSICIÓN 5.2.2. *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos y sea $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología producto. Sea $\emptyset \neq U \subset X$, abierto. Demuestra que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, $\pi_n(U) = X_n$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que todo abierto $U \in \mathcal{T}_p$ no vacío es unión de elementos de la base $\mathcal{B}_p$, entonces podemos suponer que U contiene a un abierto básico $B = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{n_0} \times \prod_{n=n_0+1}^{\infty} X_n$. Dado que $\pi_n(B) = X_n$, $\forall n > n_0$ se cumple que $X_n \supset \pi_n(U) \supset \pi_n(B) = X_n$ y así $\pi_n(U) = X_n$, $\forall n > n_0$. □

OBSERVACIÓN 5.2.3. Observemos que si $B := U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times \prod_{m=n+1}^{\infty} X_m \in \mathcal{B}_p$, entonces todos sus factores son abiertos ($U_i \in \mathcal{T}_i$, $i = 1, \ldots, n$ y $X_j \in \mathcal{T}_j$, para todo $j > n$) así pues $B \in \mathcal{B}_b$. Por lo tanto $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_b$. Pero en general $\mathcal{T}_p \subsetneq \mathcal{T}_b$ como se demuestra en el siguiente ejercicio.

Vamos a estudiar los productos numerables. Demostraremos solo aquellos resultados cuyas demostraciones difieran sustancialmente de las hechas en el caso de productos de dos espacios topológicos.

PROPIEDADES 5.2.4 (Topología producto numerable). Sean $(X_n, \mathcal{T}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, E.T. y consideremos el producto cartesiano $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología producto

$\mathcal{T}_p$. Las proyecciones π_n sobre las coordenadas son ahora aplicaciones entre espacios topológicos.

(1) Las aplicaciones π_n son continuas, abiertas y suprayectivas $\forall n \in \mathbb{N}$.
(2) Si $A_n \subset X_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces
   (2) $\overline{\prod_{n\in\mathbb{N}} A_i} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$.
   (2) $\operatorname{Int}(\prod_{n\in\mathbb{N}} A_i) \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Int}(A_n)$.
(3) Si Z es un E.T. y $f : Z \to X$ una aplicación, entonces f es continua si y sólo si $\pi_n \circ f$ es continua $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observación 5.2.5. Observa por la Proposición 5.2.2 si $A_n \subsetneq X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\operatorname{Int}(\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \emptyset$.

Observación 5.2.6. Como en la Observación 5.1.5 el producto de cerrados es cerrado si y solo si los factores lo son. Con respecto a los subespacios el resultado correspondiente al Ejercicio 5.1.5 también se cumple. Lo mismo ocurre con las permutaciones u homeomorfismos de factores del Ejercicio 5.1.6.

Observación 5.2.7. Como en el Ejercicio 5.1.6(4), también los factores son homeomorfos a subespacios del producto. Aplicaremos las reglas de la Observación 5.1.7: *Si una propiedad es topológica y hereditaria y la posee el producto, entonces la poseen los factores.*

Estudiemos la relación entre separabilidad y producto numerable que generalice la Proposición 5.1.9 en la que el elemento clave de la demostración era la Proposición 5.1.8: *El producto de densos es denso.* En esta situación necesitamos un resultado un poco más fuerte, ya que el producto numerable de conjuntos numerables no es numerable (Propiedad A.5.19(3)).

Proposición 5.2.8. *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de* E.T. *no vacíos y sea $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Consideremos $D_n \subset X_n$ conjuntos densos $\forall n \in \mathbb{N}$ y tomemos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ un punto cualquiera de X. Denotemos $E_m := D_1 \times \cdots \times D_m \times \prod_{n=m+1}^{\infty} \{x_n\}$, entonces $E := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m$ es denso en X.*

Demostración. Sea $U = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ un abierto de la base $\mathcal{B}_p$ de X. Según vimos en el Ejercicio 5.2.2 existe un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $U_n = X_n$ $\forall n > n_0$. En tal caso $U \cap E_{n_0} \neq \emptyset$ ya que si $n \leq n_0$ entonces $U_n \cap D_n \neq \emptyset$ por ser D_n denso en X_n y si $n > n_0$ entonces obviamente $U_n \cap \{x_n\} \neq \emptyset$ ya que $U_n = X_n$. □

Proposición 5.2.9. *El producto numerable de espacios topológicos es separable si y solo si lo son los factores.*

DEMOSTRACIÓN. La dirección $\Rightarrow$) se demuestra de la misma forma que en la Proposición 5.1.9. Veamos $\Leftarrow$). Dado $n \in \mathbb{N}$, elegimos $D_n \subset X_n$ denso y contable.

Siguiendo la notación de la Proposición 5.2.8, existe un subconjunto denso $E = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m$ en $X := \prod_{n\in\mathbb{N}}\{X_n\}$. Además, E_m tiene el mismo cardinal que $\prod_{j=1}^{m} D_j$. Por la Propiedad A.5.19(2), E_m es contable, $\forall m \in \mathbb{N}$. Por la Propiedad A.5.18(3), E es contable ya que es unión contable de subconjuntos contables. □

Veamos cómo construir bases de entornos para productos numerables.

PROPOSICIÓN 5.2.10. *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios topológicos no vacíos y sea $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Fijemos un punto $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, fijemos también una base de entornos $\mathcal{B}_n$ de x_n en X_n. Entonces si definimos*

$$\mathcal{B}^{x,n} := \left\{ \prod_{j=1}^{n} B_j \times \prod_{j=n+1}^{\infty} X_j \;\middle|\; B_j \in \mathcal{B}_j, j = 1\ldots, n \right\},$$

entonces, $\mathcal{B}^x := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}^{x,n}$ es base de entornos de x en X.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que $\mathcal{B}^x$ es una familia de entornos de x. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y $B_j \in \mathcal{B}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Dado $j \in \{1, \ldots, n\}$, como B_j es entorno de x_j, existe $U_j \subset X_j$ abierto tal que $x_j \in U_j \subset B_j$. Deducimos que

$$x \in \prod_{j=1}^{n} U_j \times \prod_{j=n+1}^{\infty} X_j \subset \prod_{j=1}^{n} B_j \times \prod_{j=n+1}^{\infty} X_j$$

y como $\prod_{j=1}^{n} U_j \times \prod_{j=n+1}^{\infty} X_j \in \mathcal{B}_p$ es abierto, tenemos que $\prod_{j=1}^{n} B_j \times \prod_{j=n+1}^{\infty} X_j$ es entorno de x en X.

Sea V un entorno de x en X. Sabemos que existe un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$. Como $\mathcal{B}_p$ es base, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ y $U_j \subset X_j$ abiertos, $j = 1, \ldots, n$, tales que:

$$x \in \prod_{j=1}^{n} U_j \times \prod_{j=n+1}^{\infty} X_j \subset U \subset V.$$

Fijemos $j \in \{1, \ldots, n\}$. Tenemos que $x_j \in U_j$, y como este es abierto se trata de un entorno de x_j, por lo que existe $B_j \in \mathcal{B}_j$ tal que $x_j \in B_j \subset U_j$. Por tanto,

$$x \in \prod_{j=1}^{n} B_j \times \prod_{j=n+1}^{\infty} X_j \subset \prod_{j=1}^{n} U_j \times \prod_{j=n+1}^{\infty} X_j \subset V.$$

Hemos probado que $\mathcal{B}^x$ es base de entornos. □

Vamos a demostrar el resultado análogo a la Proposición 5.1.12.

PROPOSICIÓN 5.2.11. *El producto numerable de espacios topológicos es* IAN *si y solo si lo son los factores.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Observación 5.2.7 basta que probemos que si los factores son IAN entonces lo es el producto.

Mantenemos las notaciones anteriores. Sea $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Sabemos que existen bases de entornos contables $\mathcal{B}_n$ de x_n en X_n. Con la notación de la Proposición 5.2.10, construímos una base de entornos $\mathcal{B}^x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}^{x,n}$ de x en X.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $\mathcal{B}^{x,n}$ tiene el mismo cardinal que $\prod_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j$, que poor la Propiedad A.5.19(2) es contable. Usando la Propiedad A.5.18(3) obtenemos que $\mathcal{B}^x$ es contable. □

Para demostrar el resultado equivalente *numerable* correspondiente a la Proposición 5.1.13 vamos a enunciar el que se corresponde con la Proposición 5.1.14 cuya demostración se omite.

PROPOSICIÓN 5.2.12. *Sean X_n, $n \in \mathbb{N}$, espacios topológicos y $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ el producto. Sean $\mathcal{S}_n$, $n \in \mathbb{N}$, subbases para X_n. Entonces, si dado $n \in \mathbb{N}$ denotamos*

$$\tilde{\mathcal{S}}_n := \{\pi_n^{-1}(U_n) \mid U_n \in \mathcal{S}_n\},$$

se tiene que $\mathcal{S} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mathcal{S}}_n$ es subbase de X.

PROPOSICIÓN 5.2.13. *El producto numerable de espacios topológicos es* IIAN *si y solo si lo son los factores.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Observación 5.2.7 basta que probemos que si los factores son IIAN entonces lo es el producto.

Por la Propiedad 4.3.3(II8) basta ver que si los factores son IIAN, entonces el producto posee una subbase contable y esto es consecuencia directa de la Proposición 5.2.12. □

OBSERVACIÓN 5.2.14. Todas las propiedades que hemos estudiado de productos y axiomas de separación se enuncian y demuestran igual para productos numerables y para productos binarios, por lo que la Proposición 5.1.15, el Ejercicio 5.1.9 y las Proposiciones 5.1.16 y 5.1.17 se traducen inmediatamente a este caso. Lo mismo ocurre con convergencia y puntos de aglomeración de sucesiones, ver Ejercicio 5.1.11.

Por el Ejercicio 5.1.8 el producto finito de espacios (seudo)metrizables es metrizable. El resultado también es cierto para productos numerables

TEOREMA 5.2.15. *El producto numerable de espacios (seudo)metrizables es (seudo)metrizable.*

La demostración se deja para el Ejercicio 5.2.4.

EJEMPLO 5.2.16. Consideremos el conjunto $\mathbf{2} := \{0, 1\}$ con la topología discreta. Consideremos también el producto de una cantidad numerable de copias de $\mathbf{2}$, denotado $X := \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, con la correspondiente topología producto. La Proposición 5.2.2 implica que la topología de X no es la discreta. Deducimos de los resultados de este tema que X es metrizable (y por tanto T_4); además es también separable (y por tanto, IIAN e IAN).

TAREA 12 (Topología caja). *En esta tarea veremos algunos de los problemas que tendría considerar la topología producto más natural. Sea $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos no vacíos.*

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i \;\middle|\; U_i \in \mathcal{T} \text{ para cada } i \in \mathbb{N} \right\}$$

(a) *Demuestra que $\mathcal{B}$ es una base. ¿Cómo es la topología generada por esta topología con respecto a la topología producto?*

Esta topología se denomina topología caja.

(b) *Veamos que el resultado Proposición* 5.2.4(3) *no es cierto para la topología caja. Muestra que $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dada por $\xi(x) = (x, x, \ldots)$ no es continua. Observa que la imagen inversa de $\prod_{i\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$ por ξ no puede ser abierto.*

Considera el conjunto $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ donde cada factor tiene la topología discreta.

(c) *Demuestra que X dotado de la topología producto es homeomorfo al conjunto triádico de Cantor.*

(d) *¿Qué topología es la topología caja en este caso? Concluye que ser segundo numerable o separable no se conserva en la topología caja.*

(e) *Haz el Ejercicio* 5.2.4 *y deduce de ahí el Teorema* 5.2.15.

(f) *Veamos que el Teorema* 5.2.15 *no se cumple para la topología caja. Considera $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dotado de la topología caja.*

  a) *Demuestra que si tienes una base de entornos de $(0) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ siempre puedes tomarla de manera que los entornos básicos sean de la forma $\prod_{i\in\mathbb{N}}(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ con $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$*

  b) *Si tienes una base de la forma anterior que es contable, demuestra que puedes construir un abierto que contiene a (0) pero ninguno de los entornos básicos puede estar contenido*

TAREA 13 (Topologías iniciales. Los detalles escabrosos). *Consideremos X y $\mathcal{F} := \{(f_\lambda, (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda))\}_{\lambda\in\Lambda}$ conjuntos donde $\forall\lambda \in \Lambda$ el par $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ es un* E.T. *y $f_\lambda : X \to X_\lambda$ es una aplicación. Se llama* ***topología inicial*** *en X para la familia*

$\mathcal{F}$ a la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ que tiene por subbase

$$\Sigma_{\mathcal{F}} := \{ f_\lambda^{-1}(U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \}.$$

(1) *Demuestra que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ cumple que*
   (a) *$f_\lambda : X \to X_\lambda$ es continua $\forall \lambda \in \Lambda$, y*
   (b) *toda topología que satisfaga* (1a) *es más fina que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.*
   Es decir, $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ es la topología menos fina sobre X que hace las aplicaciones f_λ continuas.

Probaremos ahora la llamada 'Propiedad Universal de Topologías Iniciales' (análoga a las Propiedades 5.1.4(3) *y* 5.2.4(3)*).*

(2) *Demuestra que dada una topología $\mathcal{T}$ sobre X, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ si y solo si se cumple:*

   Para todo espacio topológico Y y para toda aplicación $g : Y \to X$ se tiene que g es continua si y sólo si $f_\lambda \circ g$ es continua $\forall \lambda \in \Lambda$.

Finalmente estudiemos el producto arbitrario de espacios topológicos. Considera X_λ con $\lambda \in \Lambda$ y tenemos el producto cartesiano $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ junto con las proyecciones cartesianas $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$. Tenemos definida entonces la topología inicial para esta familia de funciones, que denominaremos topología producto.

(3) *Define la base usual para la topología producto.*
(4) *Demuestra que las proyecciones coordenadas son abiertas.*
(5) *Demuestra que el producto de las clausuras es la clausura del producto.*
(6) *Demuestra que cada factor es homemorfo a un subespacio del producto.*

Ejercicios

Ejercicio 5.2.1 Demuestra que $\mathcal{B}_b$ es base de una topología, llamada *topología caja*.

Ejercicio 5.2.2 Demuestra que

$$\mathcal{B}_p := \left\{ U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times \left(\prod_{m=n+1}^{\infty} X_m \right) \;\middle|\; U_i \in \mathcal{T}_i, i = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es base de la topología producto.

Ejercicio 5.2.3 Demuestra que si $\#\{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{T}_n = \text{topología indiscreta} \,\}$ es finito, entonces las topologías producto y caja no coinciden.

Ejercicio 5.2.4 Sea $\{(X_n, \mathcal{T}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios topológicos seudometrizables, $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos una seudométrica d_n tal que $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}(d_n)$ y $\operatorname{diám} X_n < 1$ (Ejercicio 2.3.3). Demuestra que la aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

está bien definida y es seudométrica (o métrica si todas las d_n lo son). Además, $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}_p$.

Ejercicio 5.2.5 Sea $X = \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ donde $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ está dotado de la topología discreta. Demuestra que la aplicación $f : X \to [0, 1]$ dada por

$$f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{2^n}$$

es continua, sobreyectiva y no inyectiva.

Tema 5.3. Topologías finales: cociente

Una situación análoga a la del Tema 5.1 se plantea cuando ciertas operaciones de conjuntos (como el cociente por una relación de equivalencia) tienen asociadas aplicaciones de los conjuntos originales en el nuevo conjunto. Suponiendo ahora que los conjuntos de partida sean espacios topológicos el objetivo es construir una topología en el conjunto resultante que haga las aplicaciones naturales continuas. Obviamente, cuantos menos abiertos tenga el nuevo espacio topológico, más *fácil* es que las aplicaciones sean continuas. En el caso extremo, si elegimos la topología indiscreta las aplicaciones son automáticamente continuas (Ejercicio 2.1.5(1)). Por lo tanto se trata de encontrar la topología "más grande" que haga que tales aplicaciones son continuas, es decir, que cualquier otra que tenga más abiertos hace que alguna de las aplicaciones no sea continua. Para una única aplicación, ya vimos quién es el la topología que buscamos en el Ejemplo 2.1.3(ET10):

Construcción 5.3.1 (Topología imagen directa). Consideremos $f : X \to Y$ una aplicación entre conjuntos. Supongamos que $(X, \mathcal{T}_X)$ es un e.t. Toda topología $\mathcal{T}_Y$ que haga $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ continua tiene que cumplir que si $V \in \mathcal{T}_Y$, entonces $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$. Por tanto

$$f\mathcal{T}_X := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\} \supseteq \mathcal{T}_Y.$$

Como además $f\mathcal{T}_X$ es una topología en Y (Ejemplo 2.1.3(ET10)) entonces hemos probado que $f\mathcal{T}_X$ es *la mayor topología en Y que hace f una aplicación continua*. Esta topología es un ejemplo de topología final y se denomina **topología imagen directa** de f sobre Y.

La topología imagen directa tiene una propiedad universal similar en cierto sentido a la de los productos o las topologías iniciales.

Proposición 5.3.2. *Sea X un espacio topológico y sea $f : X \to Y$ una aplicación. Consideramos en Y la topología imagen directa por f. Sea Z un espacio topológico y sea $g : Y \to Z$ una aplicación. Entonces, g es continua si y solo si lo es $g \circ f$.*

Demostración. La situación es la siguiente

$$X \xrightarrow[f]{} Y \xrightarrow[g]{} Z \qquad \text{(con } g\circ f : X \to Z\text{)}$$

(⇒) Si g es continua, como f también lo es por construcción, entonces $g \circ f$ es continua.

($\Leftarrow$) Sea $U \in f\mathcal{T}_X$, veamos si $g^{-1}(U)$ es abierto en Y. Por definición, esto equivale a comprobar si $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}_X$, pero $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ que es abierto por ser $g \circ f$ continua. □

Observaciones 5.3.3.

1. Observa que la Proposición 5.3.2 no la cumplen en general las aplicaciones continuas. Por ejemplo, si tomamos la aplicación característica de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Esta aplicación no es continua, pero $\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \circ \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ es constante igual a 0.
2. Otra manera de entender la definición de $\mathcal{T}_f$ es que:

(5.1) *Un conjunto U es abierto en $Y \Leftrightarrow f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

   Esta condición es más fuerte que pedir que f sea continua, lo cual es pedir que se cumpla sólo la implicación "$\Rightarrow$" en 5.1. Por ejemplo, sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^2$. Observa que si $U := [-1, 2)$ se tiene que $g^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [-1, 2)\} = (-4, 4)$, por tanto $g^{-1}(U)$ es abierto y sin embargo U no lo es. Dado que g es continua, esto prueba que $\mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}_g$.

De hecho, esta propiedad caracteríza a la topología imágen directa:

Lema 5.3.4. *Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una aplicación entre espacios topológicos que cumple que para cualquier aplicación $g : Y \to Z$ a un espacio topológico, g es continua si y solo si $g \circ f$ lo es, entonces $\mathcal{T}_Y = f\mathcal{T}_X$.*

Demostración. Veremos que la topología $\mathcal{T}_Y$ hace que $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ sea continua y que es más fina o igual que $f\mathcal{T}_X$. Cómo $f\mathcal{T}_X$ es la más fina que hace f continua habrémos concluido.

Comencemos por la continuidad. Consideremos el diagrama conmutativo

$$X \xrightarrow[f]{} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow[1_Y]{} (Y, \mathcal{T}_Y), \qquad 1_Y \circ f = f$$

siendo 1_Y la aplicación identidad de Y. Como en este caso 1_Y es continua, f ha de serlo también, por la hipótesis.

Veamos ahora que $\mathcal{T}_Y$ contiene a $f\mathcal{T}_X$. Consideremos el mismo diagrama conmutativo, pero ahora con las topologías situadas como se muestra

$$X \xrightarrow[f]{} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow[1_Y]{} (Y, f\mathcal{T}_X), \qquad 1_Y \circ f = f$$

siendo 1_Y la aplicación identidad de Y.

El hecho de que $f : X \to (Y, f\mathcal{T}_X)$ sea continua implica que $1_Y : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Y, f\mathcal{T}_X)$ es continua y por lo tanto $f\mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}_Y$. □

La topología imagen directa también se caracteriza mediante cerrados.

PROPOSICIÓN 5.3.5. *Sean X, Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una aplicación. Entonces la topología sobre Y es la topología imagen directa por f si y solo si el conjunto de cerrados de Y es $\{C \subset Y \mid f^{-1}(C) \subset X$ es cerrado$\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta tener en cuenta que las operaciones de tomar imagen inversa y complementario conmutan (Propiedad A.2.5(7)). □

En el caso de tener una relación de equivalencia podemos definir el conjunto cociente de la manera habitual y dotarlo de una topología usando la construcción anterior. El resto del tema lo pasaremos estudiando las propiedades de este tipo de espacios.

CONSTRUCCIÓN 5.3.6 (Topología cociente). Consideremos $(X, \mathcal{T})$ un E.T. y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X (Definición A.3.4). El conjunto de clases de equivalencia se denota por $X/\mathcal{R}$. Podemos definir $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la aplicación que envía un elemento $x \in X$ a su clase de equivalencia $[x]$ en $X/\mathcal{R}$. Para que $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ sea continua, lo que tiene que pasar es que $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ para todo abierto de $X/\mathcal{R}$. Por tanto si definimos

$$\mathcal{T}_{\mathcal{R}} := \{U \subset X/\mathcal{R} \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$$

y probamos que $\mathcal{T}_{X/\mathcal{R}}$ es una topología se tiene automáticamente que $\pi : (X, \mathcal{T}_X) \to (X/\mathcal{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$ es continua: no sólo eso, sino que además, si $\mathcal{T}$ es otra topología de $X/\mathcal{R}$ que *tenga más abiertos que* $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$, es decir, que $\mathcal{T}_{\mathcal{R}} \subsetneq \mathcal{T}$ existe $U \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ y por tanto $\pi^{-1}(U) \notin \mathcal{T}_X$ (ya que $U \notin \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$). Así pues $\pi : (X, \mathcal{T}_X) \to (X/\mathcal{R}, \mathcal{T})$ no es continua. Por lo tanto hemos construido la topología *más grande* que hace π continua. A la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ se le denomina **topología cociente** de X por $\mathcal{R}$.

OBSERVACIÓN 5.3.7. Sea X un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia. Denotemos $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la aplicación cociente. Si $A \subset X$, llamamos **saturación de** A al conjunto $\mathrm{Sat}(A) := \pi^{-1}(\pi(A))$. Un subconjunto $A \subset X$ se dice **saturado** si $A = \mathrm{Sat}(A)$, es decir, si es unión de clases de equivalencia. Todas las preimagenes por π son subconjuntos saturados. Si X es espacio topológico, la topología cociente en $X/\mathcal{R}$ otorga una importancia a los abiertos saturados de X.

PROPIEDADES 5.3.8. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ E.T, $\mathcal{R}$ relación de equivalencia y $X/\mathcal{R}$ el espacio cociente. Entonces se tienen las siguientes propiedades:

1. La aplicación $\pi : (X, \mathcal{T}_X) \to (X/\mathcal{R}, \mathcal{T}_\mathcal{R})$ es continua.
2. $A \subset X/\mathcal{R}$ es cerrado si y sólo si $\pi^{-1}(A) \subset X$ es cerrado (saturado).
3. La aplicación π es abierta (resp. cerrada) si y sólo si $\mathrm{Sat}(A)$ es abierto (resp. cerrado) para todo $A \subset X$ abierto (resp. cerrado).
4. Si Y es un E.T. y $f : X/\mathcal{R} \to Y$ una aplicación, entonces f es continua si y sólo si $f \circ \pi : X \to Y$ es continua.

Demostración.

1. Sea $U \subset X/\mathcal{R}$, por definición, si $U \in \mathcal{T}_\mathcal{R}$ entonces $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$, por lo tanto π es continua.
2. $A \subset X/\mathcal{R}$ es cerrado si y sólo si $B := X \setminus A$ es abierto, lo cual es equivalente, por definición, a que $\pi^{-1}(B) \subset X$ sea abierto. Como $\pi^{-1}(B) = X \setminus \pi^{-1}(A)$ (Propiedad A.2.5(8)), entonces $\pi^{-1}(B)$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(A)$ es cerrado.
3. Por definición, π es abierta (resp. cerrada) si $\pi(A)$ es abierto (resp. cerrado) para todo $A \subset X/\mathcal{R}$ abierto (resp. cerrado), lo cual por definición (resp. aplicando el apartado 2) es equivalente a que $\pi^{-1}(\pi(A))$ sea abierto (resp. cerrado).
4. Basta aplicar la Proposición 5.3.2 a este caso. □

Ejemplo 5.3.9. Consideremos la recta real usual $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y el subconjunto $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ de los números enteros. La relación de equivalencia $x \overset{\mathcal{R}_\mathbb{S}}{\sim} y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Z}$ define un conjunto cociente $\mathbb{R}/\mathcal{R}_\mathbb{S}$ de clases de equivalencia que será denotado $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Sea $\pi_\mathbb{S} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la proyección y consideremos la topología cociente. Queremos *comprender* la forma de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Un *modelo razonable* del conjunto de clases de equivalencia, es decir, un sistema transversal (Ejemplo A.3.10) es el intervalo $[0, 1)$. Nos planteamos la siguiente pregunta: ¿es la aplicación $j : [0, 1) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $j(t) := \pi_\mathbb{S}(t)$ un homeomorfismo? Es claro que es biyectiva y es continua, ya que es la composición de la inclusión $[0, 1) \hookrightarrow \mathbb{R}$ con $\pi_\mathbb{S}$. Sin embargo, vamos a ver que j^{-1} no es continua; en efecto, consideremos la sucesión

$$\left\{x_n := \pi_\mathbb{S}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right) = \pi_\mathbb{S}\left(-\tfrac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Es claro que x_n converge a $\pi_\mathbb{S}(0)$, pero $j^{-1}(x_n) = 1 - \frac{1}{n}$; es decir, la sucesión imagen no es convergente. Por la Propiedad 4.4.9(5), j^{-1} no es continua.

Es fácil ver que $\pi_\mathbb{S}$ es una aplicación abierta; en efecto, si si $U \subset \mathbb{R}$ es abierto, es fácil ver que $\pi_\mathbb{S}^{-1}(\pi_\mathbb{S}(U)) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_n$, donde $U_n := \{x + n \mid x \in U\}$. Sea $\tau_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la aplicación traslación por n; observemos que τ_n es homeomorfismo y

que $U_n = \tau_n(U)$, por lo que $\pi_{\mathbb{S}}^{-1}(\pi_{\mathbb{S}}(U))$ es abierto en $\mathbb{R}$, es decir, $\pi_{\mathbb{S}}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

EJEMPLO 5.3.10. Consideremos en $[0,1]$, la relación de equivalencia dada por

$$x \sim y \iff \begin{cases} x = y & \text{o} \\ x, y \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Todas las clases de equivalencia son unipuntuales salvo $\{0,1\}$ que contiene dos elementos. Denotemos el conjunto cociente $[0,1]/_{\{0=1\}}$ y la aplicación cociente $\pi_{\{0=1\}} : [0,1] \to [0,1]/_{\{0=1\}}$.

A continuación estudiaremos qué relación existe entre las propiedades topológicas que posee X y las que posee su cociente $X/\mathcal{R}$.

PROPOSICIÓN 5.3.11. *Si X es separable, entonces $X/\mathcal{R}$ es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Ejercicio 5.3.11 la imagen de un conjunto denso es denso. Además como $\#\pi_{\mathcal{R}}(D) \leq \#D$, se tiene el resultado. □

En cambio el recíproco no es cierto en general, ni siquiera aunque $\pi_{\mathcal{R}}$ tenga fibras a lo sumo numerables (es decir, $\#\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(y) \leq \aleph_0 \ \forall y \in X/\mathcal{R}$) como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.3.12. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}$ generada por la siguiente subbase $\Sigma := \{[n, n+1) \subset \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \mathcal{P}([0,1))$. Consideremos $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ la relación de equivalencia del Ejemplo 5.3.9:

$$x \overset{\mathcal{R}_{\mathbb{S}}}{\sim} y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Z}.$$

Entonces $\mathbb{R}/\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ es un espacio indiscreto ya que los únicos abiertos en $\mathcal{T}$ saturados son el vacío y el total; por lo tanto es separable. Además $\pi_{\mathbb{S}}^{-1}(y) = \{y + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ que es un conjunto numerable. En cambio $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es separable, ya que si lo fuera, como $[0,1) \in \mathcal{T}$ entonces $([0,1), \mathcal{T}|_{[0,1)})$ también debería serlo, pero $\mathcal{T}|_{[0,1)}$ es la topología discreta y $\#[0,1) > \aleph_0$.

PROPOSICIÓN 5.3.13. *Si $X/\mathcal{R}$ es separable, $\pi_{\mathcal{R}}$ es abierta y $\#\pi^{-1}(y) \leq \aleph_0$ $\forall y \in X/\mathcal{R}$, entonces X es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tilde{D} \subset X/\mathcal{R}$ denso contable, entonces $D := \pi_{\mathcal{R}}^{-1}(\tilde{D}) = \bigcup_{y \in \tilde{D}} \pi_{\mathcal{R}}^{-1}(y)$ es una unión contable de conjuntos contables, y por tanto $\#D \leq \aleph_0$ (Propiedades A.5.18(3)). Veamos que $D \subset X$ es denso: para ello veamos que $D \cap U$ es no vacío para cualquier $U \in \mathcal{T}_X$ no vacío (Proposición 3.2.8). Sea $U \in \mathcal{T}_X$ no vacío; entonces $\pi_{\mathcal{R}}(U)$ es abierto (por ser $\pi_{\mathcal{R}}$ abierta) y por tanto $\pi_{\mathcal{R}}(U) \cap \tilde{D} \neq \emptyset$.

Sea $y \in \pi_{\mathcal{R}}(U) \cap \tilde{D}$; sea $x \in U$ tal que $y = \pi_{\mathcal{R}}(x)$. Como $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(y) \subset D$, $x \in D$, es decir, se tiene que $x \in D \cap U$. □

El Primer Axioma de Numerabilidad NO se conserva en espacios cociente. Veamos un ejemplo de topología cociente $X/\mathcal{R}$ no IAN que provenga de un espacio topológico X que sí sea IAN.

EJEMPLO 5.3.14. Tomemos $X = \mathbb{R}$ y la relación de equivalencia

$$x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vamos a demostrar que no existen bases de entornos numerables del punto $[0] = \mathbb{Z}$ (la clase del 0 es el conjunto de los números enteros, escribiremos $[0]$ cuando nos refiramos al punto de $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ y $\mathbb{Z}$ cuando nos refiramos a $[0]$ como subconjunto de $\mathbb{R}$). Supongamos que $\mathcal{B}_0$ es una base de entornos de $[0]$ de cardinal a lo sumo numerable. En tal caso, podemos ordenar sus elementos $\mathcal{B}_0 = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Como V_n es entorno de $[0]$ entonces $\mathbb{Z} = \pi_{\mathcal{R}}^{-1}([0]) \subset \tilde{V}_n = \pi_{\mathcal{R}}^{-1}(V_n)$. Obsérvese que $\tilde{V}_n$ es entorno de m para todo $m \in \mathbb{Z}$ (Ejercicio 5.3.3). Así pues, $\tilde{V}_n$ es entorno de n en $\mathbb{R}$, y por tanto existe $x_n \in \tilde{V}_n$ tal que $0 < d(n, x_n) < \frac{1}{2}$. Si tomamos $U = \mathbb{R} \setminus \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}_u$ tenemos que $V := \pi_{\mathcal{R}}(U)$ es abierto, ya que $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(V) = U$ y U es abierto. Como $x_n \in \tilde{V}_n \setminus U$, tenemos que $\tilde{V}_n \not\subseteq U$, es decir, $V_n \not\subseteq V$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto $\mathcal{B}_0$ no puede ser base de entornos.

En cambio, si $\pi_{\mathcal{R}}$ es abierta, el primer axioma de numerabilidad se conserva.

PROPOSICIÓN 5.3.15. *Si X es* IAN *y $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R}$ es abierta, entonces $X/\mathcal{R}$ es* IAN.

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in X/\mathcal{R}$, entonces $y = [x]$ para cierto $x \in X$. Queremos encontrar una base a lo sumo numerable de entornos de y y sabemos que existe una base $\mathcal{B}^x$ a lo sumo numerable de entornos de x. Por la Proposición 3.1.21, $f\mathcal{B}^x$ es una base de entornos de y. Además, $\#f\mathcal{B}^x \overset{\text{Ejer. A.5.3}}{\leq} \mathcal{B}^x \leq \#\aleph_0$. □

OBSERVACIÓN 5.3.16. El Ejemplo 5.3.14 también prueba que IIAN no se conserva por cocientes ya que $\mathbb{R}$ es IIAN (Propiedad 4.3.3(II4)) y $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ no es IAN (Ejemplo 5.3.14) y por tanto no es IIAN (Ejemplo 4.3.3(II2)).

En cambio, de nuevo si la proyección cociente $\pi_{\mathcal{R}}$ es abierta, el segundo Axioma de numerabilidad sí se conserva por cocientes.

PROPOSICIÓN 5.3.17. *Si X es* IIAN *y $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R}$ es abierta, entonces $X/\mathcal{R}$ es* IIAN.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que X es IIAN, existe una base $\mathcal{B}_X$ de X a lo sumo numerable. Así pues, por ser $\pi_{\mathcal{R}}$ abierta y sobreyectiva $\pi_{\mathcal{R}}\mathcal{B}_X$ es una base de abiertos de $X/\mathcal{R}$ (Ejercicio 2.6.8). Además $\pi_{\mathcal{R}}\mathcal{B}_X \overset{\text{Ejer. A.5.3}}{\leq} \mathcal{B}_X \leq \aleph_0$, es decir, $\pi_{\mathcal{R}}\mathcal{B}_X$ es una base a lo sumo numerable de abiertos de $X/\mathcal{R}$. □

En otras palabras, hemos visto que la siguiente tabla es cierta.

	Separable	IAN	IIAN
$X \Rightarrow X/\mathcal{R}$	✓	$\pi_{\mathcal{R}}$ abierta	$\pi_{\mathcal{R}}$ abierta

EJEMPLO 5.3.18. Por el Ejemplo 5.3.10 y los Ejercicios 5.3.9 y 5.3.10 sabemos que la condición *la proyección cociente es abierta* no es condición necesaria (aunque sí suficiente) para que los axiomas de numerabilidad pasen al cociente, ya que $\mathbb{S}^1$ es IAN y IIAN.

EJEMPLO 5.3.19. Las coordenadas polares suponen un ejemplo de uso de topología cociente. En $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$, definimos la relación de equivalencia

$$(t_1, \vartheta_1) \sim (t_2, \vartheta_2) \Longleftrightarrow t_1 = t_2 \text{ y } \vartheta_2 - \vartheta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Es fácil ver que $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

EJEMPLO 5.3.20. Consideremos el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ usual y en él definida la siguiente relación de equivalencia:

$$(x, y) \overset{\mathcal{R}_{\mathbb{T}}}{\sim} (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x - x' \in \mathbb{Z} \\ y - y' \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Obsérvese que $[0,1) \times [0,1) \subset \mathbb{R}^2$ es un sistema tranversal para $\pi_{\mathcal{R}_{\mathbb{T}}}$. Denotemos el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}_{\mathbb{T}}$ por $\mathbb{T}_1$. Por otra parte podemos definir $\mathbb{T}_2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ con la topología producto. Se demuestra fácilmente que $\mathbb{T}_1 \approx \mathbb{T}_2$. Este espacio (que podemos ver como cociente de $\mathbb{R}^2$ o como producto de espacios) recibe el nombre de toro y se denota por $\mathbb{T}$.

EJEMPLO 5.3.21. Consideremos el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ usual y en él definida la siguiente relación de equivalencia:

$$(x, y) \overset{\mathcal{R}_{\mathbb{M}}}{\sim} (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x - x' \in \mathbb{Z} \\ y = (-1)^{x-x'} y' \end{cases}.$$

Denotemos el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}_{\mathbb{M}}$ por $\mathbb{M}$. Este espacio recibe el nombre de banda de Möbius.

Ejemplo 5.3.22. Análogamente al ejercicio anterior definamos la siguiente relación de equivalencia:

$$(x,y) \overset{\mathcal{R}_{\mathbb{K}}}{\sim} (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x - x' \in \mathbb{Z} \\ y - (-1)^{x-x'} y' \in \mathbb{Z} \end{cases} .$$

Denotemos el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}_{\mathbb{K}}$ por $\mathbb{K}$. A este espacio se le conoce como la botella de Klein.

Hemos estudiado las propiedades de numerabilidad que se preservan por los cocientes y hemos visto que, en general, solo se preserva la separabilidad. Los axiomas de separación funcionan incluso peor (Ejercicio 5.3.12).

Aún así, es posible dar condiciones sencillas para preservar los axiomas T_1 y T_2

Lema 5.3.23. *Si X es un espacio topológico y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia. Entonces, $X/\mathcal{R}$ es T_1 si y solo si $\mathcal{R}[x] \subset X$ es cerrado $\forall x \in X$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{R}[x] \subset X$ es cerrado $\forall x \in X$. Entonces, $U = X \setminus \mathcal{R}[x]$ es un abierto saturado. Por lo tanto $\pi(U) \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$. El complementario de este abierto es $\{\mathcal{R}[x]\}$, con lo que concluimos que $X/\mathcal{R}$ es T_1.

Recíprocamente, si asumimos que $X/\mathcal{R}$ es T_1, sabemos que todos los puntos son cerrados y como la aplicación cociente π es continua concluimos que $\pi^{-1}(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}[x]$ es cerrado. □

En el caso del axioma T_2 tenemos dos resultados que nos dan la caracterización que buscamos:

Lema 5.3.24. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{R}$ una relación sobre él. Si $X/\mathcal{R}$ es de Hausdorff entonces $\mathcal{R} \subset X \times X$ es cerrado.*

Demostración. Para ver que $\mathcal{R} \subset X \times X$ es cerrado veamos que su complementario es entorno de todos sus puntos. Consideremos $(x,y) \notin \mathcal{R}$. Como el cociente es Hausdorff, existen $U, V \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ disjuntos tales que $[x] \in U$ y $[y] \in V$ (x e y no pueden estar relacionados). Definimos los abiertos de X $\tilde{U} := \pi^{-1}(U)$ y $\tilde{V} := \pi^{-1}(V)$. El abierto del producto $\tilde{U} \times \tilde{V}$ contiene al punto (x,y) y además es disjunto con $\mathcal{R}$, ya que si $(s,t) \in \tilde{U} \times \tilde{V} \cap \mathcal{R}$ tendríamos que $[s] = [t]$, $[s] \in U$ y $[t] \in V$, que es imposible. □

Lema 5.3.25. *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{R}$ una relación sobre él y supongamos que la aplicación cociente es abierta. Si $\mathcal{R} \subset X \times X$ es cerrado, entonces $X/\mathcal{R}$ es de Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos dos puntos distintos $[x], [y] \in X/\mathcal{R}$. Entonces tomamos el punto $(x, y) \in X \times X$ que pertenece a $\mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ es cerrado, existe un abierto de la forma $\tilde{U} \times \tilde{V}$ disjunto con $\mathcal{R}$ y con $(x, y) \in \tilde{U} \times \tilde{V}$. Si proyectamos cada uno de los abiertos tenemos $U := \pi(\tilde{U})$ y $V := \pi(\tilde{V})$, que también son abiertos ya que π es abierta, y contienen a $[x]$ e $[y]$ respectivamente.

Finalmente, son disjuntos ya que si no fuese así, tendríamos $[z] \in U \cap V$, lo que forzaría que existan $z_1, z_2 \in [z]$ con $z_1 \in \tilde{U}$ y $z_2 \in \tilde{V}$. Esto es imposible ya que $\tilde{U} \times \tilde{V} \cap \mathcal{R} = \emptyset$. □

Podríamos resumir ambos resultados en uno solo:

COROLARIO 5.3.26. *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{R}$ una relación sobre él y supongamos que la aplicación cociente es abierta. Entonces $X/\mathcal{R}$ es de Hausdorff si y solo si $\mathcal{R} \subset X \times X$ es cerrado.*

Ejercicios

Ejercicio 5.3.1 Describe $\mathcal{T}_g$ de la Observación 5.3.3 2.

Ejercicio 5.3.2 Demuestra que $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ de la construcción 5.3.6 es efectivamente una topología.

Ejercicio 5.3.3 Demuestra que si $V \subset X/\mathcal{R}$ es entorno de $y \in V$ entonces $\pi^{-1}(V)$ es entorno (saturado) de $x \in X$ para todo $x \in \pi^{-1}(y)$ (en cambio el recíproco no es cierto como se observa en el Ejercicio 5.3.4).

Ejercicio 5.3.4 Sea $X = \{0, 1, 2, 3\}$ y $\mathcal{T}_X := \{\emptyset, X, \{0, 1\}, \{2, 3\}\}$ una topología sobre X. Consideremos la relación de equivalencia de congruencia módulo 3, es decir, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = 3k$. Demuestra que:

1. $X/\mathcal{R} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ es un espacio indiscreto.
2. $V := \{\bar{0}, \bar{1}\}$ no es entorno de $\bar{1}$.
3. $\pi^{-1}(V) = \{0, 1, 3\}$ es entorno de $\pi^{-1}(\bar{1}) = \{1\}$.

Ejercicio 5.3.5 Encuentra ejemplos de cocientes para los cuales la proyección $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R}$ no sea abierta (resp. cerrada).

Ejercicio 5.3.6 En el Ejemplo 5.3.9, como j es biyectiva, podemos describir los abiertos de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como imágenes por j de subconjuntos de U. Da una descripción.

Ejercicio 5.3.7 La aplicación $\pi_{\mathbb{S}}$ del Ejemplo 5.3.9 no es cerrada.

Ejercicio 5.3.8 Sea $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, dada por $f(t) := (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$. Demuestra que existe una única aplicación $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ tal que $f = g \circ \pi_{\mathbb{S}}$ y que g es un homeomorfismo.

Ejercicio 5.3.9 Demuestra que la aplicación $\pi_{\{0=1\}}$ del Ejemplo 5.3.10 no es abierta.

Ejercicio 5.3.10 Demuestra que $[0, 1]/_{\{0=1\}}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. De manera general, demuestra que $\mathbb{D}^n/\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^n$, siendo $\mathbb{D}^n$ el disco cerrado centrado en el origen y la relación $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ identifica todos los puntos de la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

Ejercicio 5.3.11 Sea X E.T, $\mathcal{R}$ relación de equivalencia y $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R}$ proyección sobre el espacio topológico cociente $X/\mathcal{R}$. Encuentra ejemplos de cocientes para los cuales:

(1) $\overline{\pi_{\mathcal{R}}(A)} \neq \pi_{\mathcal{R}}(\overline{A})$,
(2) $\mathrm{Int}(\pi_{\mathcal{R}}(A)) \neq \pi_{\mathcal{R}}(\mathrm{Int}(A))$,
(3) $\mathrm{Fr}(\pi_{\mathcal{R}}(A)) \neq \pi_{\mathcal{R}}(\mathrm{Fr}(A))$,
(4) $\mathrm{Ext}(\pi_{\mathcal{R}}(A)) \neq \pi_{\mathcal{R}}(\mathrm{Ext}(A))$,
(5) $\mathrm{Ais}(\pi_{\mathcal{R}}(A)) \neq \pi_{\mathcal{R}}(\mathrm{Ais}(A))$,

En cambio, sea D conjunto denso en X, entonces $\pi_{\mathcal{R}}(D)$ es denso en $X/\mathcal{R}$.

Ejercicio 5.3.12 Demuestra que si X es T_0, T_1, T_2, normal o regular, sus cocientes no tienen porqué serlo

Ejercicio 5.3.13 Consideremos el espacio $(\mathbb{R}^{n+1})^* = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ usual y en él definida la siguiente relación de equivalencia: $x \overset{\mathcal{R}_{\mathbb{P}}}{\sim} y \Leftrightarrow x = \lambda y$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}^*$. El espacio cociente $(\mathbb{R}^{n+1})^*/\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$ con la topología cociente se conoce con el nombre de espacio proyectivo real de dimensión n y se denota por $\mathbb{RP}^n$; la aplicación cociente se denota $\pi_{\mathbb{P}}$. Demuestra que $\mathbb{RP}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Ejercicio 5.3.14 Dado un espacio psudométrico (X, d) y define la relación $x\mathcal{R}_d y \iff d(x, y) = 0$. Demuestra que en efecto $\mathcal{R}_d$ es una relación de equivalencia y que la topología cociente de $X/\mathcal{R}_d$ es metrizable (la distancia puedes definirla a partir de d).

Tema 5.4. Topologías finales: identificación y suma topológica

DEFINICIÓN 5.4.1. Diremos que una aplicación $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es una **identificación** si f es suprayectiva y $\mathcal{T}_Y$ es la topología imagen directa $f\mathcal{T}_X$.

Vamos a ver la relación que hay entre proyecciones en espacios cocientes e identificaciones.

PROPOSICIÓN 5.4.2. *Sea X E.T. y $\mathcal{R}$ relación de equivalencia en X, entonces la proyección $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R}$ es una identificación.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición, $\pi_{\mathcal{R}}$ es sobreyectiva y la topología de $X/\mathcal{R}$ es la topología imagen directa de la de X. □

Análogamente, se tiene una especie de recíproco de este resultado. Obsérvese que si $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es una identificación, entonces podemos definir la siguiente relación de equivalencia: si $x, y \in X$, entonces $x \overset{\mathcal{R}_f}{\sim} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. En tal caso tenemos el espacio cociente $X/\mathcal{R}_f$ y f factoriza por dicho espacio obteniéndose el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ & {\scriptstyle \pi_f} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle h} & \\ & X/\sim & \end{array} \tag{5.2}$$

donde $f = h \circ \pi_f$.

PROPOSICIÓN 5.4.3. *La aplicación $h : X/\mathcal{R}_f \to Y$ descrita en* (5.2) *es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese que h es continua por la propiedad universal de las topologías finales (Proposición 5.3.2) y sobreyectiva por serlo f. Supongamos que existen $[x]$ e $[y]$ dos clases elementos de $X/\mathcal{R}_f$ tales que $h([x]) = h([y])$. Tomando $x, y \in X$ representantes de $[x]$ e $[y]$ respectivamente tenemos que $f(x) = h([x]) = h([y]) = f(y)$, y por lo tanto $[x] = [y]$. Así pues h es una biyección. Tomemos ahora h^{-1}. De nuevo por la propiedad universal de las topologías finales (Proposición 5.3.2), se tiene que h^{-1} es continua, puesto que $h^{-1} \circ f = \pi_f$ es continua. Así pues, h es un homeomorfismo entre $(Y, \mathcal{T}_Y)$ y $X/\mathcal{R}_f$. □

Por tanto, toda identificación puede verse como la proyección sobre una topología cociente y toda proyección cociente es una identificación.

PROPIEDADES 5.4.4 (Identificaciones). Consideremos $f_1 : X \to Y$ y $f_2 : Y \to Z$ aplicaciones continuas:

(1) Si f_1 y f_2 son identificaciones, entonces $f_2 \circ f_1$ es una identificación.
(2) Si la composición $f_2 \circ f_1$ es una identificación, entonces f_2 es identificación.
(3) Si f_1 es una identificación entonces $f_2 \circ f_1$ es identificación si y sólo si f_2 es identificación.
(4) Una aplicación continua, sobreyectiva y abierta (o cerrada) es una identificación.
(5) Si f es una aplicación biyectiva, entonces es identificación si y sólo si es homeomorfismo.

Demostración.

(1) Recordemos que la composición de aplicaciones suprayectivas es una aplicación suprayectiva. Además si f_1 y f_2 son identificaciones, entonces cumplen la propiedad universal de topologías finales y por lo tanto $f : Z \to W$ es continua si y sólo si $f \circ f_2$ es continua, lo cual es cierto si y sólo si $f \circ (f_2 \circ f_1)$ lo es, y por tanto $f_2 \circ f_1$ cumple la propiedad universal de topologías finales (Proposición 5.3.2).
(2) Observamos en primer lugar que si $(f_2 \circ f_1)$ es suprayectiva, entonces f_2 también lo es. Por otro lado, vamos a probar la Propiedad Universal de Topologías Finales para f_2. Si $f : Z \to W$ es continua entonces, como f_2 es también continua, se tiene que $f \circ f_2$ es continua. Recíprocamente, si $f \circ f_2$ es continua, entonces, como f_1 es continua, se tiene que $f \circ (f_2 \circ f_1)$ es continua. Ahora, aplicando la Propiedad Universal de Topologías Finales para $(f_2 \circ f_1)$, se tiene que f es continua.
(3) Consecuencia inmediata de (1) y (2).
(4) Veamos que una aplicación $f : X \to Y$ continua, suprayectiva y abierta (cerrada), entonces cumple la propiedad universal para topologías finales. Sea $g : Y \to Z$ continua, entonces $g \circ f$ es obviamente continua. Recíprocamente, si $g \circ f$ es continua, entonces tomando $A \subset Z$ abierto (resp. cerrado) tenemos que $(g \circ f)^{-1}(U)$ es abierto (resp. cerrado) de X. Al ser f abierta (resp. cerrada) y suprayectiva se tiene que $f(A) = f(f^{-1}(g^{-1}(A))) = g^{-1}(A)$ es abierto (resp. cerrado) en Y, y por tanto g es continua. En el caso cerrado, hemos utilizado la Proposición 5.3.5.
(5) Supongamos que f es homeomorfismo, entonces f es continua, suprayectiva y abierta. Así pues, por ((4)) y la Propiedad 2.1.11(H4) se tiene que f es identificación. Recíprocamente, si f es identificación biyectiva, entonces $X/\mathcal{R}_f = X$ y $\pi_f = 1_X$ (ver diagrama (5.2)). Por la Proposición 5.4.3, $h = f$ es homeomorfismo. □

Terminamos este Tema con otro ejemplo importante de topología final.

CONSTRUCCIÓN 5.4.5. La **suma topológica** de una familia de espacios topológicos se define como sigue. Consideremos una familia $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ de E.T. y el conjunto suma $X := \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\{\lambda\} \times X_\lambda)$. Para todo $\lambda \in \Lambda$ tomemos la aplicación

$$j_\lambda : X_\lambda \to \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \qquad j_\lambda(x_\lambda) := (\lambda, x_\lambda). \tag{5.3}$$

La topología suma se define como

$$\mathcal{T} := \{U \subset X \mid j_\lambda^{-1}(U) \text{ abierto } \forall\lambda \in \Lambda\}.$$

Es fácil ver que se cumplen las condiciones (T(T1)-(T3)). Si todos los espacios X_λ son iguales a X, denotaremos esta suma $\sum_\Lambda X$.

PROPIEDADES 5.4.6. Sea $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ de E.T. y el conjunto suma $X := \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\{\lambda\} \times X_\lambda)$ con la topología suma. Sea $j_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow X$ la inclusión.

(1) $C \subset X$ es cerrado si y solo si $j_\lambda^{-1}(C)$ es cerrado en X_λ.
(2) j_λ es un homeomorfismo sobre la imagen y esta es a su vez abierta y cerrada en X.
(3) Sea $f : X \to Z$ aplicación, Z espacio topológico. Entonces f es continua si y solo si $j_\lambda \circ f$ es continua $\forall\lambda \in \Lambda$.

OBSERVACIÓN 5.4.7. Debido a la Propiedad 5.4.6(2), si no hay lugar a confusión identificaremos X_λ con su imagen; con esta identificación, se trata de un abierto-cerrado de X. Además, la Propiedad 5.4.6(3) se interpreta reemplazando $j_\lambda \circ f$ por $f_{|X_\lambda}$. Obsérvese que si $A \subset X = \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, entonces $A = \sum_{\lambda\in\Lambda} j_\lambda^{-1}(A)$. Por lo tanto, denotando $A_\lambda = j_\lambda^{-1}(A)$ podemos considerar que todo subconjunto de X es de la forma $\sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Observemos que las inclusiones (o las aplicaciones j_λ) son aplicaciones continuas cerradas y abiertas ya que la definición (o la Propiedad 5.4.6(1)) se traducen en que A es abierto (resp. cerrado) si y solo si A_λ lo es en X_λ.

DEMOSTRACIÓN DE LAS PROPIEDADES 5.4.6.

(1) Sea $C \subset X$ cerrado; es decir, $X \subset C$ es abierto en X lo que equivale a que $X_\lambda \setminus j_\lambda^{-1}(C) = j_\lambda^{-1}(X \setminus C)$ (Propiedad A.2.5(7)) es abierto en X_λ, $\forall\lambda \in \Lambda$. Es decir, $j_\lambda^{-1}(C))$ es cerrado en X_λ, $\forall\lambda \in \Lambda$.
(2) Que $j_\lambda(X_\lambda)$ es abierto y cerrado se deduce de la definición de topología suma y de (1). Es inmediato ver que j_λ es inyectiva, continua y abierta sobre la imagen (Proposición 2.6.4).
(3) Si f es continua, entonces lo es $j_\lambda \circ f$ es continua $\forall\lambda \in \Lambda$. Para ver la propiedad recíproca, supongamos que $j_\lambda \circ f$ es continua $\forall\lambda \in \Lambda$. Sea $U \subset X$

abierto; sabemos que $f^{-1}(j_\lambda^{-1}(U)) = (j_\lambda \circ f)^{-1}(U)$ es abierto $\forall \lambda \in \Lambda$; por la definición de suma topológica, $f^{-1}(U)$ es abierto en X. □

OBSERVACIÓN 5.4.8. Se pueden probar de manera análoga resultados similares para el interior, exterior, puntos aislados y conjunto derivado de A.

TAREA 14 (Topologías finales. Los detalles escabrosos). *Consideremos un conjunto X y $\mathcal{F} := \{(f_\lambda, (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda))\}_{\lambda\in\Lambda}$ conjuntos donde $\forall \lambda \in \Lambda$ el par $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ es un* E.T. *y $f_\lambda : X_\lambda \to X$ es una aplicación. Se llama **topología final** en X para la familia $\mathcal{F}$ al conjunto*

$$\mathcal{T}^{\mathcal{F}} := \{U \subset X \mid f_\lambda^{-1}(U) \in \mathcal{T}_\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

Estudiaremos en esta tarea las topologías finales en su generalidad.

(TF1) *Comprueba que $\mathcal{T}$ es en efecto una topología.*

(TF2) *Prueba que se podía haber definido la topología como aquella que tiene por cerrados los conjuntos $C \subset X$ tales que $f_\lambda^{-1}(C)$ es cerrado en X_λ para todo $\lambda \in \Lambda$.*

(TF3) *Demuestra que la topología final $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$ en X para la familia $\mathcal{F}$ cumple:*
a) *$f_\lambda : X_\lambda \to X$ es continua $\forall \lambda \in \Lambda$, y*
b) *toda topología que satisfaga lo anterior es menos fina que $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$.*

(TF4) *(Propiedad Universal de Topologías Finales) Sea $\mathcal{T}$ una topología sobre X, entonces demuestra que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\mathcal{F}}$ si y solo si para todo espacio topológico Y y para toda aplicación $g : X \to Y$ se tiene que g es continua si y solo si $g \circ f_\lambda$ es continua $\forall \lambda \in \Lambda$.*

(TF5) *Si X es un conjunto, describe las topología final para la familia $\mathcal{F} := \{(1_X^\lambda, (X, \mathcal{T}_\lambda)) \mid \lambda \in \Lambda\}$ donde 1_X^λ es la aplicación identidad de $(X, \mathcal{T}_\lambda)$ en X.*

*Vamos a estudiar otros ejemplos de topologías finales. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} := \{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de espacios topológicos tal que $X_\lambda \subset X \ \forall \lambda \in \Lambda$. Diremos que $\mathcal{A}$ **admite una topología coherente** $\mathcal{T}$ en X si:*

- *$\mathcal{T}_{X_\lambda} = \mathcal{T}_\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda$.*
- *$\mathcal{T}$ es la topología final en X para $\mathcal{A}$ con respecto a las inclusiones.*

Demuestra que:

(TF6) *Si en cada intersección $X_{\lambda\mu} = X_\lambda \cap X_\mu$ $(\lambda, \mu \in \Lambda)$ se tiene que:*
a) *$(\mathcal{T}_\lambda)_{X_{\lambda\mu}} = (\mathcal{T}_\mu)_{X_{\lambda\mu}}$; y*
b) *$X_{\lambda\mu} \in \mathcal{T}_\lambda \cap \mathcal{T}_\mu$;*
entonces la familia $\mathcal{A}$ admite una topología coherente.

Finalmente:

(TF7) *Sea* $\mathcal{A} := \{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de espacios topológicos* T_1. *Consideremos* $X := \sum X_\lambda$ *el espacio topológico suma. Sea* $p_\lambda \in X_\lambda$ *un punto de* X_λ. *Consideremos la relación de equivalencia engendrada por* $(\lambda, x_\lambda) \overset{\mathcal{R}}{\sim} (\mu, x_\mu)$ *si* $x_\lambda = p_\lambda$ *y* $x_\mu = p_\mu$. *Es decir, estamos identificando los puntos* $p_\lambda \in X_\lambda$ *entre sí. Al espacio cociente resultante* $X/\mathcal{R}$ *se le conoce como* ***bouquet*** *en* $\mathcal{A}$.

a) *Demuestra que si para todos dos puntos* $p_\lambda, p'_\lambda \in X_\lambda$ *existe un homeomorfismo* $h_{p_\lambda, p'_\lambda} : X_\lambda \to X_\lambda$ *tal que* $h_{p_\lambda, p'_\lambda}(p_\lambda) = p'_\lambda$, *entonces* $X/\mathcal{R}$ *no depende de la elección de los puntos* $p_\lambda \in X_\lambda$, *es decir, que si elegimos otros puntos* $p'_\lambda \in X_\lambda$, *entonces* $X/\mathcal{R} \approx X/\mathcal{R}'$.

b) *Demuestra que* $j_\lambda^{\mathcal{R}} : X_\lambda \to X/\mathcal{R}$ *definida por* $j_\lambda^{\mathcal{R}}(x) = \pi_{\mathcal{R}} \circ j_\lambda(x)$ *(ver* (5.3)*) es un homeomorfismo sobre la imagen, por lo que identificaremos* X_λ *y* $j_\lambda^{\mathcal{R}}(X_\lambda)$.

c) *Demuestra que la topología de* $X/\mathcal{R}$ *es una topología coherente para la familia* $\mathcal{A}^{\mathcal{R}} := \{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Ejercicios

Ejercicio 5.4.1 Sean X, Y E.T, $f : X \to Y$ identificación. Sean $B \subset Y$, $A := f^{-1}(B) \subset X$ y $\tilde{f} : A \to B$ la aplicación inducida por f. Demostrar que si B es abierto (resp. cerrado) entonces $\tilde{f}$ es identificación.

Ejercicio 5.4.2 Demuestra que si $A = \sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset X = \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ entonces $\overline{A} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \overline{A}_\lambda$.

Ejercicio 5.4.3 Considera $\mathcal{B}_\lambda$ base de abiertos de X_λ. Demuestra que

$$\mathcal{B}_\Sigma := \{\, \{\lambda\} \times B_\lambda \mid B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda \,\}$$

es una base de abiertos de $X = \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Ejercicio 5.4.4 Sea $x \in X_{\lambda_0}$ para cierto $\lambda_0 \in \Lambda$ y $\mathcal{B}^x$ base de entornos de x en X_{λ_0}. Demuestra que

$$\mathcal{B}^{(x,\lambda_0)} := \{\, \{\lambda_0\} \times B \mid B \in \mathcal{B}^x \,\}$$

es base de entornos para $(\lambda_0, x) \in X = \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Ejercicio 5.4.5 Dado un espacio topológico X, definimos la suspensión como el cociente

$$SX = X \times [-1, 1]/\mathcal{R}$$

con $\mathcal{R}$ la relación generada por $(x, -1)\mathcal{R}(y, -1)$ y $(x, 1)\mathcal{R}(y, 1)$ para cada $x, y \in X$.

Demuestra que $S\mathbb{S}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$. Compara la construcción del homeomorfismo con la de la Proposición 5.4.3.

Ejercicio 5.4.6 Supongamos que X es un E.T. y tiene estructura de grupo. Sea H un subgrupo de X. Entonces hay una relación de equivalencia obvia definida en X: $x \overset{\mathcal{R}_H}{\sim} y$ si y sólo si $xy^{-1} \in H$. Demuestra que si tenemos un homeomorfismo de X en sí mismo que envíe H a otro subgrupo H' de X, entonces X/H es homeomorfo a X/H'.

Ejercicio 5.4.7 Demuestra que si $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, f(\mathcal{T}_X))$ es inyectiva, entonces es abierta, y por tanto homeomorfismo sobre la imagen.

Ejercicio 5.4.8 Supongamos que X es un E.T. y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Supongamos que $h : X \to X$ es un homeomorfismo. Entonces, por ser en particular una aplicación biyectiva, define una nueva relación de equivalencia $\mathcal{R}_h$ del siguiente modo: $x \overset{\mathcal{R}_h}{\sim} y$ si y sólo si $h(x) \overset{\mathcal{R}}{\sim} h(y)$. Demuestra que $X/\mathcal{R} \approx X/\mathcal{R}_h$.

Capítulo 6

Axiomas de recubrimiento

Dedicaremos este capítulo a un nuevo tipo de propiedades topológicas: aquellas que se refieren a la posibilidad de extraer subrecubrimientos de cardinal finito o numerable de cualquier recubrimiento. Estudiaremos compacidad, espacios de Lindelöf, compacidad local. Para terminar describiremos el método de compactificación de Alexandroff.

Tema 6.1. Compacidad

Definición 6.1.1. Una familia $\mathcal{V}$ de subconjuntos de X se dice un **recubrimiento** de X si $\bigcup \mathcal{V} = X$. Si $\mathcal{V}$ es recubrimiento de X y existe $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ subfamilia de $\mathcal{V}$ que es también un recubrimiento de X diremos que $\mathcal{V}$ **posee un subrecubrimiento** $\mathcal{W}$ de X. Si el subrecubrimiento $\mathcal{W}$ cumple $\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{V}$ diremos que es un **subrecubrimiento propio**. Si además X es un espacio topológico y todo elemento de $\mathcal{V}$ es abierto, entonces diremos que $\mathcal{V}$ es un **recubrimiento abierto** de X.

Definición 6.1.2. Diremos que un recubrimiento $\mathcal{V}$ de X **posee un subrecubrimiento finito** (resp. numerable o contable) de X si existe un subrecubrimiento finito (numerable o contable) de $\mathcal{V}$. A esta propiedad del recubrimiento $\mathcal{V}$ nos referiremos diciendo que $\mathcal{V}$ **recubre finitamente** (resp. numerable o contablemente) a X.

Definición 6.1.3. Sea K un espacio topológico. Diremos que K es **compacto** si todo recubrimiento abierto de K posee un subrecubrimiento finito.

Si $K \subset X$ con $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, diremos que K es **compacto** si $(K, \mathcal{T}|_K)$ es compacto.

Observación 6.1.4. Dado que la definición de compacidad sólo hace referencia a propiedades que se conservan por homeomorfismos (recubrimientos abiertos, subrecubrimientos finitos) se deduce que la compacidad es una propiedad topológica.

En general, los recubrimientos están formados por abiertos generales. No obstante puede ser necesario restringirnos a abiertos, como en la demostración del Teorema de Tychonoff del final del tema:

Lema 6.1.5. *Dada una base para un espacio topológico, éste será compacto si y solo si todo cubrimiento por abiertos básicos tiene un subrecubrimiento finito.*

Demostración. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base para su topología. Si X es compacto es obvio que se cumple la tesis.

Recíprocamente, supongamos que todo cubrimiento por abiertos básicos tiene un subrecubrimiento finito y tomemos un cubrimiento X por abiertos arbitrarios $\mathcal{U}$. Cada abierto $U \in \mathcal{U}$ puede escribirse como la unión de una colección de abiertos básicos $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_U} \subset \mathcal{B}$. La unión de todas ellas

$$\mathcal{V} = \{\, B_\lambda \mid \lambda \in \textstyle\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \Lambda_U \,\}$$

es un cubrimiento de X por abiertos básicos. Por hipótesis tendrá un subrecubrimiento finito $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$. Cada B_1 está contenido en (al menos) un abierto $U_1 \in \mathcal{U}$, luego $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\} \subset \mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X. □

Por otro lado, el Ejercicio 6.1.2 será útil para trabajar con subespacios compactos de espacios topológicos. Veamos algunos ejemplos de compacidad:

Ejemplo 6.1.6. Los espacios topológicos finitos (o con un número finito de abiertos) son compactos.

Ejemplo 6.1.7. Un espacio topológico discreto es compacto si y sólo si es finito. Es obvio que si X es finito, entonces es compacto. Por otro lado, $\mathcal{V} := \bigcup_{x\in X}\{x\}$ es recubrimiento abierto que no admite subrecubrimiento propio. Por lo tanto, sólo si X es finito, será compacto.

Ejemplo 6.1.8. $\mathbb{R}$ no es compacto.

Solución: La familia $\mathcal{V} := \{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es recubrimiento abierto de X. Dado que cada número entero pertenece a un único elemento de $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ no posee subrecubrimientos propios. Como $\mathcal{V}$ no es finito, entonces $\mathbb{R}$ no es compacto. □

Ejemplo 6.1.9. $[0, 1]$ es compacto.

Solución: Sea $\mathcal{V}$ recubrimiento abierto de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ y consideremos

$$M_{\mathcal{V}} := \{t \in [0, 1] \mid \exists U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{V} \text{ tal que } [0, t] \subset \bigcup_{j=1}^{r} U_j\}.$$

Nuestro objetivo es probar que $1 \in M_{\mathcal{V}}$. Tenemos las siguientes propiedades:

a) $0 \in M_{\mathcal{V}}$. Es trivial.
b) Si $t \in M_{\mathcal{V}}$ y $t' \in [0, 1]$ cumple que $t' \leq t$ entonces $t' \in M_{\mathcal{V}}$. El motivo es que $[0, t'] \subset [0, t] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r$.
c) $t \in M_{\mathcal{V}}$ y $t < 1$, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $t + \varepsilon \in M_{\mathcal{V}}$. En efecto, sean $U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{V}$ tal que $[0, t] \subset \bigcup_{j=1}^{r} U_j$. Podemos suponer que $t \in U_r$. Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $t + \varepsilon \leq 1$ y $(t - 2\varepsilon, t + 2\varepsilon) \subset U_r$. Por tanto $t + \varepsilon \in M_{\mathcal{V}}$.
d) Si $t_n \in M_{\mathcal{V}}$ y $\lim t_n = t \in [0, 1]$, entonces $t \in M_{\mathcal{V}}$. Podemos suponer $t_n < t\ \forall n \in \mathbb{N}$, ya que si no el resultado es trivial (Propiedad b)). Por ser $\mathcal{V}$ recubrimiento de $[0, 1]$, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $t \in U$, y por ser U abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B := (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset U$. Por definición de límite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\forall\ n \geq n_0$ se tiene que $t_n \in B \subset U$; en particular $[t_{n_0}, t] \subset U$. Por otra parte, dado que $t_{n_0} \in M_{\mathcal{V}}$ existen $U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{V}$ tal que $[0, t_{n_0}] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r$. Por tanto $[0, t] = [0, t_{n_0}] \cup [t_{n_0}, t] \subset (U_1 \cup \cdots \cup U_r) \cup U$, lo que prueba que $t \in M_{\mathcal{V}}$.

Utilicemos ahora las Propiedades a)-d) para probar que $1 \in M_{\mathcal{V}}$. Por definición, y ya que $M_{\mathcal{V}}$ es no vacío (Propiedad a)), $M_{\mathcal{V}}$ está acotado superiormente por el 1. Por tanto $t := \sup M_{\mathcal{V}} \in [0,1]$, en particular existe una sucesión creciente $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M_{\mathcal{V}}$ convergente de límite t (Propiedad A.4.3). Así pues, por la Propiedad d) se tiene que $t \in M_{\mathcal{V}}$. Supongamos que $t < 1$, entonces utilizando la Propiedad c), tendríamos que $t + \varepsilon \in M_{\mathcal{V}}$ para cierto $\varepsilon > 0$ lo cual contradice que t sea supremo, así pues $t = 1 \in M_{\mathcal{V}}$. Por tanto $[0,1]$ es compacto. □

El siguiente resultado es muy útil a la hora de probar que ciertos subconjuntos de espacios compactos son compactos.

Proposición 6.1.10. *Si X es compacto y $K \subset X$ es cerrado, entonces K es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ recubrimiento abierto de K, es decir $\mathcal{V} := \{V_\lambda \cap K \mid \lambda \in \Lambda\}$ donde $V_\lambda \in \mathcal{T}_X \ \forall \lambda \in \Lambda$. Como K es cerrado, entonces $U_K := X \setminus K$ es abierto en X, y por tanto $\mathcal{V}' := \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \cup \{U_K\}$ es recubrimiento abierto de X. Ahora bien, como X es compacto, existe un subrecubrimiento finito de X. Por lo tanto $\exists F \subset \Lambda$ subconjunto finito de Λ de modo que $\mathcal{W}' := \{V_\lambda \mid \lambda \in F\} \cup \{U_K\}$ es recubrimiento de X. Veamos que, en estas condiciones, $\mathcal{W} := \{V_\lambda \cap K \mid \lambda \in F\} \subset \mathcal{V}$ es subrecubrimiento finito de K. Dado que $\bigcup \mathcal{W}' = X$, entonces $K \subset \bigcup\{V_\lambda \mid \lambda \in F\}$, y por tanto $K = \bigcup\{V_\lambda \mid \lambda \in F\} \cap K = \bigcup \mathcal{W}$. □

Proposición 6.1.11. *Si X es Hausdorff y $K \subset X$ es compacto entonces se puede separar K y x, $\forall x \in X \setminus K$. En particular, K es cerrado.*

Demostración. Si se puede separar K de cualquier punto de $x \notin K$, en particular $X \setminus K$ es entorno de todos sus puntos, por lo que es abierto de X y K es cerrado.

Consideremos $x \in X \setminus K$. Como X es Hausdorff, para cualquier $y \in K$ existen abiertos U_y^x y U^y disjuntos de modo que $x \in U_y^x$ e $y \in U^y$. La familia $\{U^y \mid y \in K\}$ es un recubrimiento abierto de K, y por ser K compacto, entonces existe un conjunto finito $F \subset K$ de puntos de K tal que $\{U^y \mid y \in F\}$ sea recubrimiento de K, es decir $V := \bigcup_{y\in F} U^y$ es un abierto que contiene a K. Considera el abierto $U := \bigcap\{U_y^x \mid y \in F\}$ (por ser intersección finita de abiertos) y es obvio que $x \in U$.

Finalemente $U \cap V = \emptyset$, es decir podemos separar K y x. □

Ejemplo 6.1.12. Como ejemplo de esta caracterización observa que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ no es compacto ya que no es cerrado (Ejercicio 3.2.6).

Observación 6.1.13. Observa que si $(X, \mathcal{T})$ es compacto y T_2, entonces el conjunto de cerrados $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ de X coincide con el de subconjuntos compactos de X.

EJEMPLO 6.1.14. Obsérvese que la condición de separación T_2 en la Proposición 6.1.11 es necesaria. Por ejemplo, consideremos el espacio de Sierpinski (Ejemplo 2.1.3(ET7)). El subconjunto $\{0\}$ es compacto por ser finito (Ejemplo 6.1.6), pero no es cerrado ya que $\{0\}^c = \{1\}$ no es abierto.

COROLARIO 6.1.15. *Sea X Hausdorff. Sea $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia no vacía de compactos de X. Entonces $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lambda_0 \in \Lambda$. Como X es Hausdorff, todos sus compactos son cerrados, por lo que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ es cerrado. Como está contenido en K_{λ_0} que es compacto, entonces es compacto. □

PROPOSICIÓN 6.1.16. *Todo subconjunto infinito de un conjunto compacto posee algún punto de acumulación, es decir, si $A \subset K$ es un subconjunto infinito de un conjunto K compacto, entonces $A' \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea K compacto y $A \subset K$ subconjunto infinito de K. Si $A' = \emptyset$, entonces A es cerrado y todos sus puntos aislados, es decir, $A = \overline{A} = \mathrm{Ais}(A)$ (Ejercicio 3.3.10). Por ser A un cerrado en un compacto, entonces es compacto (Proposición 6.1.10). Por ser todo punto de A aislado se tiene que, $\forall x \in A$ existe un abierto $U^x \subset K$ de modo que $U^x \cap A = \{x\}$. En tal caso la familia de estos abiertos, $\mathcal{U} := \{U^x \mid x \in A\}$ es un recubrimiento abierto de A que no admite subrecubrimiento propio. Por ser $\mathcal{U}$ infinito, entonces A no es compacto, lo que contradice la Proposición 6.1.10. □

TEOREMA 6.1.17 (Heine-Borel). *En $\mathbb{R}^n$ las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(1) *$K \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado.*
(2) *$K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto.*
(3) *Todo subconjunto infinito de K posee algún punto de acumulación en K.*

Empezamos con la demostración para $n = 1$.

DEMOSTRACIÓN PARA $n = 1$.

(1)⇒(2) Si K es acotado, entonces está contenido en algún intervalo de la forma $I_{a,b} := [a, b]$. Dado que $I_{a,b}$ es homeomorfo a $I_{0,1}$, entonces $I_{a,b}$ es compacto. Por la Proposición 6.1.10 se tiene el resultado.

(2)⇒(3) Caso particular de la Proposición 6.1.16.

(3)⇒(1) Si K no fuera acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$ habría $x_n \in K$ de modo que $|x_n| > n$. De este modo se obtiene un conjunto infinito $S := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple que todo conjunto acotado sólo puede contener un número finito de términos de

S. Veamos que S no puede tener puntos de acumulación. Supongamos que $x \in \mathbb{R}$ fuera un punto de acumulación. Consideremos $U^x := (x-1, x+1)$ entorno de x. Por la propiedad de S, existen sólo un número finito de términos de S en U^x, es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $x_n \notin S$ para cualquier $n \geq n_0$. Por lo tanto x no cumple la propiedad de ser punto de acumulación. Para ver que K es cerrado basta comprobar que si no lo fuera habría una sucesión en K cuyo límite no estaría en K (Ejercicio 4.4.11), lo cual contradiría la hipótesis (3). □

Ejemplo 6.1.18. Como ejemplo de esta caracterización (para $\mathbb{R}$) observa que el grafo $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$ de una aplicación continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no puede ser compacto ya que $\Gamma_f \overset{\text{Ejer.5.1.7}}{\approx} \mathbb{R}$ que no es compacto. Este resultado concuerda con la versión para $\mathbb{R}^2$ del Teorema de Heine Borel 6.1.17 ya que aunque Γ_f es cerrado (Ejercicio 2.4.5), no es acotado.

Observaciones 6.1.19.

(1) Este resultado no es cierto en $\mathbb{R}$ con otras topologías distintas de la usual, por ejemplo, ya hemos visto en el Ejercicio 6.1.4 que $[0, 1]$ no es compacto en la recta de Sorgenfrey (a pesar de ser cerrado).
(2) Si uno se fija en la demostración, el resultado es cierto para cualquier espacio métrico en el que las bolas cerradas sean compactas.

Proposición 6.1.20. *Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos cerrados encajados ($K_n \subset K_m$ si $n \geq m$) no vacíos de un conjunto compacto X, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es un conjunto compacto no vacío.*

Demostración. Supongamos que $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$. Denotemos por $U_n := X \setminus K_n$ abierto de X. Entonces $X = X \setminus K = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus K_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Por lo tanto $\mathcal{U} := \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de X. Por ser X compacto, existe un $m \in \mathbb{N}$ de modo que $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m = X$, pero, en tal caso $X \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m) = K_1 \cap \cdots \cap K_m = K_m = \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis de que K_n es no vacío para todo $n \in \mathbb{N}$. Por último obsérvese que K es cerrado, por ser intersección de cerrados. Además está contenido en el compacto X. Por la Proposición 6.1.10 se tiene el resultado. □

De hecho, en el fondo, este hecho caracteríza a los conjuntos compactos. Para verlo debemos introducir una nueva noción:

Definición 6.1.21. Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de otro conjunto X tiene la **propiedad de intersección finita (p.i.f.)** si para cualquier colección finita $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subset \mathcal{F}$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$.

TEOREMA 6.1.22. *Un espacio topológico es compacto si y solo si cualquier familia de cerrados con la p.i.f. tiene intersección no vacía.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración únicamente utiliza el hecho de que un cubrimiento abierto corresponde con una familia de cerrados de intersección vacía[1].

$\Rightarrow$) Sea X un espacio topológico compacto y sea $\mathcal{F}$ una familia de cerrados tal que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Definamos entonces la familia de abiertos $\mathcal{V} = \{ X \setminus F \mid F \in \mathcal{F} \}$, que obviamente es un cubrimiento. Cómo X es compacto puedo tomar un subrecubrimiento finito, que estará formado por el complementario de una familia finita de cerrados $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, que de nuevo tienen que tener intersección vacía.

$\Leftarrow$) En este caso el razonamiento es muy similar al caso anterior. Consideremos un recubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X. Como antes, la familia de cerrados $\mathcal{F} = \{ X \setminus V \mid V \in \mathcal{V} \}$ tiene intersección vacía, y por lo tanto no puede cumplir la p.i.f., luego existe una familia finita de elementos de $\mathcal{F}$ que tienen intersección vacía. Los complementarios de estos cerrados formarán un subcubrimiento abierto de $\mathcal{V}$. $\square$

Es importante observar que no todos los compactos infinitos de $\mathbb{R}$ son intervalos cerrados y acotados o uniones finitas de ellos. A continuación construiremos un compacto infinito de $\mathbb{R}$ que no sólo no es un intervalo, sino que ni siquiera contiene ningún intervalo. Este conjunto se denomina conjunto de **Cantor** y lo obtendremos del siguiente modo:

EJEMPLO 6.1.23 (Cantor). Consideremos

$$\begin{aligned} E_0 &:= [0,1], \qquad E_1 := E_0 \setminus \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \\ E_2 &:= E_1 \setminus \left(\left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right) \cup \left(\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right) \right), \qquad \ldots \\ E_n &:= E_{n-1} \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\tfrac{3k+1}{3^n}, \tfrac{3k+2}{3^n}\right) \right). \end{aligned}$$

Para simplificar consideremos las siguientes notaciones:

$$I_{k,n} := \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right), \quad I_n := \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} I_{k,n}.$$

[1]Si $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados con $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, las leyes de De Morgan nos dicen que

$$X = X \setminus \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} X \setminus F = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V,$$

donde obviamente $V \in \mathcal{V}$ es abierto.

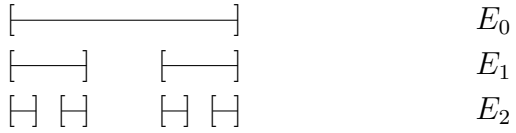


FIGURA 6.1. Primeros pasos de la construcción del conjunto de Cantor.

y así

$$E_n = E_{n-1} \setminus I_n = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{n} I_m \right).$$

Obsérvese lo siguiente:

($\mathcal{C}1$) $E_{n+1} \subset E_n$ (en general, $E_n \subset E_m$ si $m \leq n$).

($\mathcal{C}2$) $E_n \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ya que $\frac{1}{3^n} \in E_n$. Esto es fácil de comprobar ya que $\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{3^m}$ si $m \leq n$ y por tanto $\frac{1}{3^n} \notin I_m$ si $m \leq n$. Así pues, $\frac{1}{3^n} \notin \bigcup_{m=1}^{n} I_m$ y por tanto $\frac{1}{3^n} \in [0,1] \setminus (\bigcup_{m=1}^{n} I_m) = E_n$.

($\mathcal{C}3$) E_n es cerrado $\forall n \in \mathbb{N}$ por inducción ya que E_0 es cerrado y si E_n es cerrado, como I_n es abierto (por ser unión de intervalos abiertos), entonces $E_n \setminus I_n = E_n \cap I_n^c$ es abierto (por ser intersección de dos cerrados).

Se define

$$\mathcal{C} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Probemos algunas propiedades de $\mathcal{C}$.

PROPIEDADES 6.1.24 (Cantor).

($\mathcal{C}4$) $\mathcal{C}$ es un conjunto compacto no vacío.

($\mathcal{C}5$) $\mathcal{C}$ no contiene ningún intervalo (no unipuntual).

($\mathcal{C}6$) $\mathcal{C}$ no tiene puntos aislados (y por lo tanto es infinito).

DEMOSTRACIÓN.

($\mathcal{C}4$) Es consecuencia inmediata de la Proposición 6.1.20, ya que $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión encajada ($\mathcal{C}1$) de cerrados ($\mathcal{C}3$) no vacíos ($\mathcal{C}2$) y contenidos en el compacto E_0 (Ejemplo 6.1.9).

($\mathcal{C}5$) Supongamos que $\mathcal{C}$ contiene algún intervalo de longitud positiva, que será mayor que $\frac{1}{3^n}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Dicho intervalo estaría contenido en E_n que contiene intervalos de longitud a lo más $\frac{1}{3^n}$, lo que nos lleva a contradicción.

($\mathcal{C}6$) Supongamos que $x \in \mathcal{C}$ fuera un punto aislado, entonces habría un intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ de modo que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathcal{C} = \{x\}$. Esto significa que $(x, x+\varepsilon) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ y por tanto $\exists n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $(x, x+\varepsilon) \subset I_{k_0,n_0}$. De

modo análogo $\exists n_1, k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $(x-\varepsilon, x) \subset I_{k_1,n_1}$. Como $x \in \mathcal{C}$, entonces $x = \frac{3k_0+1}{3^{n_0}} = \frac{3k_1+2}{3^{n_1}}$ lo cual es imposible ya que ambas fracciones son irreducibles y $3k_0 + 1 \neq 3k_1 + 2$ para cualquier $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$. □

Observación 6.1.25. Si se define la medida de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ como $\mu([a, b]) = b - a$, se dice que la medida de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es M si para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un recubrimiento de A por intervalos $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ de modo que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu([a_n, b_n])$ sea convergente y $|M - \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu([a_n, b_n])\right)| < \varepsilon$. En particular, si un conjunto tiene medida (de la definición no se deduce que todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ tengan que tener medida) y contiene un intervalo, su medida ha de ser positiva. Con esta definición, observa que E_n es una unión finita de intervalos cerrados y acotados, que $\mathcal{C} \subset E_n$ y que $\mu(E_n) = \frac{2^n}{3^n}$. Por lo tanto $\mu(\mathcal{C}) = 0$. Es decir, el conjunto de Cantor es un compacto infinito de $\mathbb{R}$ de medida cero sin puntos aislados.

La primera vez que se introdujo el conjunto triádico de Cantor se mencionó que tenía el cardinal de la recta real. Es posible demostrar que este hecho es general para los compactos Hausdorff sin puntos aislados:

Proposición 6.1.26. *Sea X un espacio topológico (no vacío) compacto T_2 sin puntos aislados. Entonces X no es contable.*

Demostración. Comencemos probando un pequeño resultado previo:

> *Si X es un espacio de Hausdorff sin puntos aislados, U es un abierto de X y $x \in X$ (que puede estar contenido en U o no), entonces existe $V \subset U$ un abierto tal que $x \notin \overline{V}$.*

Comencemos demostrando este hecho. Como en X no hay puntos aislados, cualquier abierto contiene más de un punto. Sea $y \in U$ distinto de x, que existe por el comentario anterior. Dado que X es T_2 podemos encontrar dos abiertos disjuntos W^y y W^x que entornos de y y x respectivamente. Definimos $V := W^y \cap U$. Entonces, x pertenece al exterior de V (de hecho es exterior a W^y), luego $x \notin \overline{V}$. Esto prueba el resultado

Supongamos ahora que tenemos una aplicación inyectiva $f : \mathbb{N} \to X$. Ahora aplicaremos este resultado para construir un punto que no está en su imagen, demostrando así que ninguna inyección de $\mathbb{N}$ en X puede ser sobreyectiva. Definimos $x_i := f(i)$. Entonces, para el abierto $U_1 := X$ y el punto x_1 es posible encontrar un abierto $U_2 \subset U_1$ tal que $x_1 \notin \overline{U_2}$. Podemos aplicar de nuevo el resultado previo al abierto U_2 y el punto x_2, con lo que encontramos un abierto U_3 tal que $x_2 \notin \overline{U_3}$.

Continuando de esta manera obtenemos una familia de cerrados encajados

$$\overline{U_1} \supset \overline{U_2} \supset \overline{U_3} \supset \cdots$$

de manera que $x_i \notin \overline{U_n}$ para cada $i < n$. Evidentemente estos conjuntos son todos compactos por ser cerrados en un compacto y cumplen la p.i.f, luego su intersección es no vacía y además, no puede contener ninguno de los puntos x_i. □

Probaremos los siguientes resultados, que relacionan compacidad y separación.

PROPOSICIÓN 6.1.27. *Todo espacio topológico T_2 separa compactos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X E.T. Hausdorff y sean K_1 y K_2 subconjuntos compactos y disjuntos de X. Fijemos $x \in K_1$, es decir, $x \notin K_s$. Por la Proposición 6.1.11, $\exists U_x, V_x$ abiertos tales que $x \in U_x$, $K_2 \subset V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$. Como K_2 es compacto, $\exists x_1, \ldots, x_n \in K_1$ tales que $K_1 \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} =: U$ (abierto de X). Sea $V := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n} \supset K_2$, abierto de X. Es fácil ver que $U \cap V = \emptyset$. □

COROLARIO 6.1.28. *Un espacio topológico compacto y Hausdorff es T_4.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Propiedad 4.5.6(5), basta probar que si X es compacto y T_2, entonces es normal. Como todo cerrado en un compacto es compacto (Proposición 6.1.10) entonces, X separa cerrados si y sólo si separa compactos, lo cual es cierto por la Proposición 6.1.27. □

A continuación mostraremos que los conjuntos compactos se preservan por aplicaciones continuas,

PROPOSICIÓN 6.1.29. *Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$* E.T, *supongamos que $K \subset X$ es compacto y $f : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces $f(K)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Utilizaremos es Ejercicio 6.1.2. Sea $\mathcal{V} := \{V_\lambda \in \mathcal{T}_X \mid \lambda \in \Lambda\}$ un recubrimiento abierto de $f(K)$ en Y ($f(K) \subset \bigcup \mathcal{V}$). Consideremos $f^{-1}\mathcal{V} := \{f^{-1}(V_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$. Obsérvese que

$$\bigcup f^{-1}\mathcal{V} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(V_\lambda) \overset{\text{Prop. A.3.3(h)}}{=} f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda\right) \overset{\text{Ejer. A.2.1(2)}}{\supset} f^{-1}(f(K)) \overset{\text{Prop. A.2.5(6)}}{\supset} K,$$

luego $f^{-1}\mathcal{V}$ es un recubrimiento de K en X. Además, por ser f continua, $f^{-1}(V_\lambda) \in \mathcal{T}_X$, $\forall \lambda \in \Lambda$, luego, $f^{-1}\mathcal{V}$ es un recubrimiento abierto de K en X. Por ser K compacto, existe un conjunto finito $F \subset \Lambda$ de modo que $\{f^{-1}(V_\lambda) \mid \lambda \in F\}$ recubre K en X. Consideremos ahora $\{V_\lambda \mid \lambda \in F\} \subset \mathcal{V}$. Como $K \subset \cup_{\lambda\in F} f^{-1}(V_\lambda)$, entonces

$$f(K) \overset{\text{Ejer. A.2.1(1)}}{\subset} f\left(\bigcup_{\lambda\in F} f^{-1}(V_\lambda)\right) \overset{\text{Prop. A.3.3(f)}}{=} \bigcup_{\lambda\in F} f(f^{-1}(V_\lambda)) \overset{\text{Prop. A.2.5(5)}}{\subset} \bigcup_{\lambda\in F} V_\lambda.$$

Por lo tanto $\{V_\lambda \mid \lambda \in F\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{V}$. □

Observación 6.1.30. En particular, toda función continua de un cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ admite máximos y mínimos absolutos.

Ejemplo 6.1.31. Como aplicación de este resultado probaremos que la circunferencia $\mathbb{S}^1$ es compacta sin usar Heine-Borel. Basta ver que la aplicación $f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $f_1(t) := (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$ es continua y $[0,1]$ es compacto, así pues $f_1([0,1]) = \mathbb{S}^1$ es compacto.

Por otro lado, el hecho de que la continuidad se mantenga por aplicaciones continuas nos permite concluir fácilmente que:

Proposición 6.1.32. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico compacto y $\mathcal{R}$ relación de equivalencia en X, entonces $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ es compacto.*

Demostración. Como una aplicación cociente es continua y sobreyectiva el resultado se deduce inmediatamente de la Proposición 6.1.29. □

Finalmente, veamos que el carácter compacto se preserva por productos finitos.

Teorema 6.1.33 (Tychonoff para productos finitos). *Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$* e.t. *no vacíos, entonces $X \times Y$ es compacto si y sólo si X e Y lo son.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Como las proyecciones $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ y $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$ son continuas y sobreyectivas (Propiedad 5.1.4(1)), entonces tanto $\mathrm{pr}_1(X \times Y) = X$ como $\mathrm{pr}_2(X \times Y) = Y$ son compactos por ser imagen de un compacto (Proposición 6.1.29).

($\Leftarrow$) Supongamos que tenemos dos espacios topológicos no vacíos X, Y. Utilizando el Lema 6.1.5 vamos a considerar la base de abiertos $\mathcal{B}_p$ del producto (Ejercicio 5.1.1) y $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}_p$ recubrimiento de abiertos básicos de $X \times Y$, es decir, $\mathcal{U} := \{U_\lambda \times V_\lambda \mid U_\lambda \in \mathcal{T}_X, V_\lambda \in \mathcal{T}_Y, \lambda \in \Lambda\}$. Fijemos $x \in X$; como $\{x\} \times Y$ es homeomorfo a Y (Ejercicio 5.1.5(4)) e Y es compacto, entonces $\{x\} \times Y$ es compacto (Observación 6.1.4). Por tanto existe $F_x \subset \Lambda$ finito tal que $\bigcup_{\lambda \in F_x} U_\lambda \times V_\lambda \supset \{x\} \times Y$. Denotemos $U^x := \bigcap_{\lambda \in F_x} U_\lambda$. Obsérvese que U^x cumple la siguiente propiedad:

$$\forall z \in U^x \text{ y } \forall y \in Y \text{ se tiene que } (z, y) \in \bigcup_{\lambda \in F_x} U_\lambda \times V_\lambda. \tag{6.1}$$

Por ser U^x una intersección finita de entornos abiertos de x, entonces U^x es un entorno abierto de x (Observación 3.1.8 y (T3b)). Por tanto $\{U_x\}_{x \in X}$ es un recubrimiento abierto de X. Como X es compacto existen $x_1, \ldots, x_r \subset X$ tal que $X = U^{x_1} \cup \cdots \cup U^{x_r}$. Definamos $F := F_{x_1} \cup \cdots \cup F_{x_r}$ y consideremos la familia

$\tilde{\mathcal{U}} := \{U_\lambda \times V_\lambda\}_{\lambda\in F} \subset \mathcal{U}$, que es una subfamilia finita de $\mathcal{U}$. Veamos que $\tilde{\mathcal{U}}$ es de hecho un recubrimiento de X y para ello basta probar que $X \times Y \subset \bigcup\tilde{\mathcal{U}}$. Sea $(x, y) \in X \times Y$. Dado que $X = U^{x_1} \cup \cdots \cup U^{x_r}$, entonces $x \in U^{x_i}$ para cierto $x_i \in \{x_1, \ldots, x_r\}$. En tal caso, $(x, y) \overset{(6.1)}{\in} \bigcup_{\lambda\in F_{x_i}} U_\lambda \times V_\lambda \subset \bigcup\tilde{\mathcal{U}}$. □

Ahora podemos terminar la demostración del Teorema 6.1.17.

Demostración del Teorema 6.1.17.

(1)⇒(2) Del Teorema de Tychonoff 6.1.33 deducimos que $[-R, R]^n$ es compacto $\forall R \in \mathbb{R}_{>0}$. Por tanto, si $K \subset \mathbb{R}^n$ es acotado, entonces $K \subset [-R, R]^n$ para cierto $R \in \mathbb{R}_{>0}$, por tanto K es un conjunto cerrado contenido en un conjunto compacto, y por tanto K es compacto (Proposición 6.1.10).

(2)⇒(3) Sirve la demostración para $n = 1$.

(3)⇒(1) Sirve la demostración para $n = 1$. □

El Teorema de Tychonoff es realmente válido para cualquier cantidad de espacios:

Teorema 6.1.34 (Tychonoff). *Sea $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos, entonces $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es compacto si y sólo si X_λ es compacto $\forall\lambda \in \Lambda$.*

Tarea 15. *Vamos a probar un resultado sorprendente sobre el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$:*

(1) *Sea $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ con la topología discreta en cada factor. Definimos dos aplicaciones $f : X \to \mathcal{C}$, $g : X \to [0, 1]$ de manera que si $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ entonces:*

$$f(\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{3^n}, \qquad g(\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}.$$

Demuesta que

(a) *X es compacto.*

(b) *f está bien definida y es un homeomorfismo.*

(c) *g está bien definida y sobreyectiva.*

(d) *$\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$.*

(e) *$\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$.*

(f) *Existe una aplicación continua y sobreyectiva de $\mathcal{C}$ en $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.*

(2) *Con estas propiedades podemos probar el Teorema de Hausdorff-Alexandroff:* Todo espacio métrico compacto es imagen continua de $\mathcal{C}$.

(a) *Demuestra que todo espacio métrico* (M, d) *es homeomorfo a un subespacio de* $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *(asume que la métrica* d *está acotada por* 1*).*
(b) *Demuestra que cualquier subespacio cerrado* $K \subseteq \mathcal{C}$ *es imagen continua del Cantor. Para ello:*
- *Demuestra que* $\mathcal{C}$ *es homeomorfo al conjunto de Cantor* $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ *formado por los números reales* $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i/6^i$ *con* $\varepsilon_i \in \{0, 5\}$*. (Piensa en ellos como sucesiones de símbolos).*
- *Demuestra que cualquier* $K \subseteq \mathcal{C}'$ *es imagen continua del Cantor (Ayuda: el punto medio entre cuales quiera dos puntos de* $\mathcal{C}'$ *no está en* $\mathcal{C}$*, ¿cuántos puntos de* K' *están a distancia mínima de* $x \in \mathcal{C}'$*?).*

(c) *Concluye el resultado.*

TAREA 16 (Teorema de Tychonoff contable). *En esta tarea probaremos una versión* contable *del teorema de Tychonoff para productos contables:* $\emptyset \neq \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es numerablemente compacto si y solo si X_n es numerablemente compacto $\forall n \in \mathbb{N}$. *Es conveniente usar la caracterización de numerablemente compacto que aparece en la Tarea* 18(L2).

(1) *Demuesta que* X *es numerablemente compacto si y solo si* $\forall\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *familia de cerrados no vacíos tales que* $C_n \supseteq C_{n+1}$ *si* $n \in \mathbb{N}$.
(2) *Demuestra que si* $f : X \to Y$ *es continua y sobreyectiva y* X *es numerablemente compacto, entonces* Y *es numerablemente compacto.*
(3) *Prueba que si el producto es numerablemente compacto y no vacío, entonces los factores también lo son.*
(4) *Demuestra la propiedad recíproca.*
(5) *Usa argumentos diagonales para probar que* $\emptyset \neq \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es secuencialmente compacto si y solo si X_n es secuencialmente compacto $\forall n \in \mathbb{N}$

TAREA 17 (Teorema de Tychonoff y el lema de Zorn). *Probemos el teorema de Tychonoff en toda su generalidad. Para ello caracterizaremos la compacidad en términos de subbases y luego aplicaremos ese conocimiento en la demostración del teorema.*

(1) *Demuestra que un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *es compacto si y solo si existe una subbase* Σ *de él tal que todo cubrimiento* $\mathcal{U} \subseteq \Sigma$ *tiene un subrecubrimiento finito. [De hecho, ocurre para todas las subbases]*
(1a) *Para realizar esta demostración debemos recordar el lema de Zorn. ¿Cuál es su enunciado?*
(1b) *Dado un cubrimiento. Considera el conjunto de todos los superrecubrimientos de uno dado que no recubren finitamente* X*. ¿Qué ocurriría si*

este conjunto fuese vacío? Supón que no lo es y demuestra que puedes aplicar el lema de Zorn para obtener un elemento maximal $\widetilde{\mathcal{U}}$.

Ahora que tenemos este cubrimiento maximal demuestra que cumple lo siguiente:

(1c) *Sea* $U \in \mathcal{T}$, *entonces*

$$U \notin \tilde{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \exists U_1, \ldots, U_r \in \tilde{\mathcal{U}} \text{ tal que } U \cup U_1 \cup \cdots \cup U_r = X.$$

(1d) *Si* $U_1, \ldots, U_m \notin \tilde{\mathcal{U}} \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_m \notin \tilde{\mathcal{U}}$. *(R)*

(1e) *Si* $U \notin \tilde{\mathcal{U}}$ *y* $V \supset U \Rightarrow V \notin \tilde{\mathcal{U}}$, *es decir, si* V *es un abierto de* $\tilde{\mathcal{U}}$ *todo subconjunto suyo abierto* $U \subset V$ *tiene que estar en* $\tilde{\mathcal{U}}$.

(1f) *Sea* Σ *una subbase tal que* $\bigcup \Sigma = X$ *y sea* $\tilde{\mathcal{U}}_\Sigma := \tilde{\mathcal{U}} \cap \Sigma$. *Entonces* $\bigcup \tilde{\mathcal{U}}_\Sigma = \bigcup \tilde{\mathcal{U}}$.

Termina la demostración del resultado: toma una subbase como en el enunciado y encuentra una contradicción.

(2) *Consideremos entonces una familia de espacios topológicos no vacíos* $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. *Demuestra que* $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *es compacto si y solo si cada factor* X_λ *lo es. La topología producto está generada por la subbase*

$$\Sigma_p = \{\, \pi_\lambda^{-1}(U) \mid \lambda \in \Lambda \wedge U \in \mathcal{T}_\lambda \}.$$

La implicación '$\Rightarrow$*' es sencilla. El recíproco es menos simple. Aplicaremos el punto anterior:*

- *Considera un cubrimiento abierto de abiertos básicos y escríbelo como una unión disjunta de familias* $\mathcal{U}_\lambda$ *perteneces a las imágenes inversas por las proyecciones de las topologías* $\mathcal{T}_\lambda$.
- *Distingue los siguientes 2 casos y concluye:*
  a) *Que existe* λ *tal que* $\pi_\lambda \mathcal{U}_\lambda$ *es cubrimiento de* X_λ.
  b) *No existe ese* λ.

Ejercicios

Ejercicio 6.1.1 Sea $\mathcal{V}_1$ un recubrimiento de X y $\mathcal{V}_2$ una familia de subconjuntos de X de modo que para cualquier $V_1 \in \mathcal{V}_1$ existe un $V_2 \in \mathcal{V}_2$ con $V_1 \subset V_2$. Demuestra que $\mathcal{V}_2$ recubre X y que si $\mathcal{V}_1$ recubre finitamente (resp. numerable o contablemente) a X entonces también $\mathcal{V}_2$ recubre finitamente (resp. numerable o contablemente) a X.

Ejercicio 6.1.2 Demuestra que $A \subset X$ es compacto si y sólo si $\forall\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, familia de abiertos de X tal que $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, existe un subconjunto finito $F \subset \Lambda$ tal que $A \subset \bigcup_{\lambda\in F} U_\lambda$. Una familia $\forall\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de abiertos de X que cumpla $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, diremos que es un **recubrimiento abierto de** A en X.

Ejercicio 6.1.3 Demuestra que la unión finita de compactos es un compacto, es decir, si $K_1, \ldots, K_n \subset X$ son subconjuntos compactos de X, entonces $K_1 \cup \cdots \cup K_n \subset X$ es un subconjunto compacto de X.

Ejercicio 6.1.4 Demuestra que el intervalo $[0, 1]$ no es compacto en la recta de Sorgenfrey.

Ejercicio 6.1.5 Demuestra que si $f : X \to Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos, X es compacto e Y es T_2, entonces f es cerrada. Si además f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 6.1.6 Sean A y B subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ con $0 \notin B$. Demuéstra que $A \cdot B = \{\, x\,y \mid x \in A \text{ y } y \in B \,\}$ y $A/B = \{\, \frac{x}{y} \mid x \in A \text{ y } y \in B \,\}$ son compactos.

Ejercicio 6.1.7 Consideremos el conjunto $X := [0, 1] \times [0, 1]$, y sea Δ la diagonal del cuadrado X. Dotaremos a X de una topología dando una base. Si $(x, y) \notin \Delta$ los conjuntos

$$A_\varepsilon(x, y) = \{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon),$$

serán los abiertos básicos siempre que ε sea tan pequeño como para garantizar que $A_\varepsilon(x, y) \cap \Delta = \emptyset$. Si $(x, x) \in \Delta$ los abiertos básicos que lo contienen serán

$$B_{\varepsilon,x_1,x_2,\ldots,x_k}(x, x) = \{\, (x', y') \mid x' \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \wedge y' \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \,\},$$

es decir, una banda abierta horizontal que contiene al punto, a la que hemos eliminado alguna cantidad finita de lineas verticales. Demuestra que X es T_2 y compacto y por lo tanto T_4.

Observa que si permitimos que los abiertos básicos $A_\varepsilon(x,y)$ tocasen la diagonal el espacio no sería compacto. ¿Puedes encontrar un recubrimiento que no cubra finitamente X?

Ejercicio 6.1.8 Estudie la compacidad de los siguientes subespacios euclideos

(1) $\{\frac{k}{2^n} \mid 0 \leq k \leq 2^n, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$;
(2) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
(3) $\{n + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$;
(4) $\{n + \frac{1}{m} \mid n \leq 100 \wedge m \in \mathbb{N}\}$; y
(5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\}$.

Ejercicio 6.1.9 Demuestra que el toro $\mathbb{T}$ (Ejemplo 5.3.20) es compacto.

Ejercicio 6.1.10 Consideremos $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices $n \times n$ con coeficientes reales al que identificaremos con $\mathbb{R}^{n^2}$. De esta manera dotaremos a $M_n(\mathbb{R})$ de estructura de espacio métrico. Definamos el grupo ortogonal

$$O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = 1_n\}$$

(donde 1_n es la matriz identidad en $M_n(\mathbb{R})$). Demuestra que $O(n)$ es compacto.

Ejercicio 6.1.11 Consideremos el conjunto $GL(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ de las matrices inversibles con la topología inducidada como en el ejercicio anterior. Demuestra que no es compacto.

Ejercicio 6.1.12 Sean X e Y espacios topológicos. Probar que si X es compacto entonces la proyección coordenada $\pi_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada.

Ejercicio 6.1.13 Sea X un E.T. IAN. Demuestra que X es de Hausdorff si y solo si todo subconjunto compacto de X es cerrado.

Ejercicio 6.1.14 Sean X e Y espacios topológicos con el primero de ellos compacto. Consideremos una función continua $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ con las topologías evidentes. Definimos la aplicación $F : Y \to \mathbb{R}$ como

$$F(y) := \sup\{\, f(x,y) \mid x \in X \,\}.$$

Demuestra que F es continua.

Tema 6.2. Compacidad, sucesiones y espacios métricos

Ya hemos explorado la noción de compacidad con cierto detalle. Veamos ahora como se relaciona la convergencia de sucesiones en espacios métricos y la compacidad. El objetivo es dar una descripción en términos de sucesiones de la compacidad en el caso de los espacios pseudométricos.

Para ello debemos introducir algunos conceptos (seguramente ya conocidos en otras asignaturas):

DEFINICIÓN 6.2.1. Sea (X, d) un espacio pseudométrico. Una **sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0$ existe N tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para cualesquiera $n, m > N$.

Si toda sucesión de Cauchy es convergente, diremos que el espacio métrico es **completo**.

EJEMPLO 6.2.2. Los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ son completos. El intervalo $[0, 1]$ es también completo, en cambio $(0, 1)$ no lo es, ya que $\frac{1}{n}$ es de Cauchy pero no tiene límite en $(0, 1)$. También es fácil ver que $\mathbb{Q}$ no es completo ni $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

DEFINICIÓN 6.2.3. Un espacio pseudométrico X es **totalmente acotado** si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento finito de X formado por bolas de radio ε.

Finalmente, existe otra noción de compacidad relacionada con las sucesiones.

DEFINICIÓN 6.2.4. Un espacio topológico es **secuencialmente compacto** si cualquier sucesión del espacio tiene una subsucesión convergente.

La relación de todas estas nociones, en el caso de los pseudométricos, nos la proporciona el siguiente teorema:

TEOREMA 6.2.5. *Sea (X, d) un espacio pseudométrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *X es compacto;*
(2) *X es secuencialmente compacto; y*
(3) *X es completo y totalmente acotado.*

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2)$ Razonaremos por reducción al absurdo, i.e., existe una sucesión S tal que ninguna de sus subsucesiones converge. Por la Proposición 4.4.11 sabemos que esto es lo mismo que decir que la aglomeración de S es vacía.

Por lo tanto, cada punto $x \in X$ no es de aglomeración de $S = \{s_i\}$, y por lo tanto existe U^x, un entorno abierto del punto, tal que $\{\, i \in \mathbb{N} \mid s_i \in U^x\}$ es

finito. Los abiertos U^x forman un cubrimiento abierto, y dado que X es compacto, existen un subcubrimiento finito $\{U^{x_i}\}_{i=1}^n$. Pero dado que cada uno de esos abiertos solo puede contener un número finito de elementos de la sucesión[2], X solo podría contener un número finito de elementos de la sucesión, lo que es absurdo.

$2 \Rightarrow 3$) Sea S una sucesión de Cauchy en X. Como X es secuencialmente compacto, tenemos que S posee una subsucesión convergente, y por lo tanto (Ejercicio 2), S también converge. Por lo que X es completo.

Para probar que es totalmente acotado probaremos el contrarecíproco: Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que X no puede cubrirse por un número finito de bolas de radio ε.

Entonces tomamos un punto cualquiera $x_1 \in X$. Por la hipótesis, debe existir $x_2 \in X \setminus \mathbb{B}(x_1; \varepsilon)$. Ahora existe $x_3 \in X \setminus (\mathbb{B}(x_1; \varepsilon) \cup \mathbb{B}(x_2; \varepsilon))$, ya que ninguna familia finita de bolas de radio ε cubre X. De esa manera tenemos una familia de puntos $\{x_i\}$ tal que

$$x_{k-1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathbb{B}(x_i; \varepsilon).$$

Por construcción $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ para cara par de índices i y j distintos. Ahora, la sucesión $\{x_k\}$ no puede tener aglomeración: dado $x \in X$, dentro de la bola $\mathbb{B}(x; \frac{\varepsilon}{2})$ solo puede haber, como áximo, un elemento de la sucesión, luego ningún punto de X no puede ser de acumulación.

Luego el espacio no es secuencialmente compacto, lo que completa la prueba.

$3 \Rightarrow 1$) Razonaremos por reducción al absurdo. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto que no cubre finitamente X. Dado que X es totalmente acotado, podemos cubrirlo por una cantidad finita $C_1^1, C_2^1, \ldots, C_{n_1}^1$ de conjuntos[3] de diámetro 1. Como $\mathcal{U}$ no cubre finitamente X no debe cubrir finitamente alguno de los conjuntos anteriores. Llamémosle C^1. Ahora, C^1 de puede cubrir por un número finito de subconjuntos[4] (de C^1) de diámetro $\frac{1}{2}$. De manera similar al caso anterior, uno de ellos no puede ser cubierto finitamente por $\mathcal{U}$. Llamémosle C^2. De esta manera obtenemos una familia de conjuntos encajados $C^1 \supset C^2 \supset \cdots$, siendo $\frac{1}{k}$ el diámetro de C^k. Tomemos un punto $x_k \in C^k$ para cada k. La sucesión $\{x_k\}$ es de Cauchy (por la condición sobre los diámetros), luego tiene un límite en X (por ser el espacio completo). Sea x el límite de la sucesión. Ahora bien, como $\mathcal{U}$ es un cubrimiento, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$.

---

[2]Formalmente, existe un número finito de índices tal que los elementos correspondientes de la sucesión pertenecen a cada uno de esos abiertos.

[3]Basta tomar bolas de radio $\frac{1}{2}$.

[4]Basta intersecar C^1 con un cubrimiento finito por bolas adecuado.

Como U es abierto existe un radio ε tal que $\mathbb{B}(x;\varepsilon) \subset U$. Tomando k suficientemente grande podemos concluir que $C_k \subset \mathbb{B}(x;\varepsilon) \subset U$, lo que contradice la hipótesis de construcción de los conjuntos C^k. □

TAREA 18. *En esta tarea estudiaremos los espacios de Lindelöf.*

(L1) *Comienza haciendo el Ejercicio* 6.2.3.

(L2) *Demuestra que un espacio topológico es numerablemente compacto si y solo si todo recubrimiento abierto numerable admite un subrecubrimiento finito. (Ayuda: para* $\Leftarrow$ *mira Proposición* 6.1.20*; para* $\Rightarrow$ *usa el contrarrecíproco y construye una familia de abiertos encajados cada vez mayores)*

Ahora, decimos que un espacio topológico X es ***Lindelöf*** *si todo recubrimiento abierto de X posee un subrecubrimiento finito o numerable.*

Asumamos para los siguientes puntos que X es de Lindelöf, demuestra que:

(L3) *Si $A \subset X$ es cerrado, entonces A es Lindelöf.*

(L4) *Si Y otro espacio topológico y $f : X \to Y$ una aplicación continua y sobreyectiva. Entonces Y es Lindelöf.*

(L5) *Usa el punto* (L2) *para concluir que X es compacto si y solo si es numerablemente compacto.*

Finalmente demuesta el Teorema de Lindelöf:

(L6) *Si X es un* E.T. IIAN *, entonces es de Lindelöf. (Ayuda: Toma un recubrimiento abierto y una base contable. Considera los elemenos de la base que están en cada uno de los abiertos de recubrimiento).*

(L7) *Para ver que el teorema es ajustado, comprueba que $\mathbb{R}$ con la topología conumerable es Lindelöf pero no segundo numerable.*

Ejercicios

Ejercicio 6.2.1 Sea X un espacio métrico. Entonces X es compacto si y sólo si no existe $D \subset X$ cerrado infinito y discreto.

Ejercicio 6.2.2 Sea X un espacio seudométrico.

1. Toda sucesión convergente es de Cauchy.
2. Si una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente a un punto $x \in X$ entonces la propia sucesión converge a x.

Ejercicio 6.2.3 Un espacio topológico X es **numerablemente compacto** si toda sucesión en X tiene un punto de aglomeración en X. Demuestra que:

1. Si X es un E.T. compacto, entonces es numerablemente compacto.
2. Sean X e Y E.T. no vacíos. Si $X \times Y$ es numerablemente compacto, entonces X e Y lo son.
3. Si X es secuencialmente compacto, entonces es numerablemente compacto.

Ejercicio 6.2.4 Demuestra que si X es compacto y primero numerable, entonces X es secuencialmente compacto.

Ejercicio 6.2.5 Demostrar que si $X := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ entonces $\{0,1\}^X$ es compacto pero no secuencialmente compacto.

Ejercicio 6.2.6 Sea X un espacio seudométrico y sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X. Diremos que $\varepsilon > 0$ es un número de Lebesgue del recubrimiento si toda bola de radio ε está contenida en un abierto de $\mathcal{U}$. Demuestra que si X es secuencialmente compacto, entonces, todo recubrimiento abierto posee un número de Lebesgue.

Tema 6.3. Espacios localmente compactos

DEFINICIÓN 6.3.1. Un espacio topológico es **localmente compacto** si todo punto admite una base de entornos compactos.

EJEMPLO 6.3.2. Recordemos que las bolas cerradas euclídeas centradas en un punto de $\mathbb{R}^n$ son cerrados y acotados, luego compactos. Por tanto, $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto. El mismo razonamiento se aplica a los intervalos de $\mathbb{R}$. Los espacios discretos son claramente localmente compactos.

Sin embargo, $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto. En efecto, sea K un compacto de $\mathbb{Q}$. Sea $x \in \operatorname{Int}_{\mathbb{Q}} K$. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset K$. Tomando clausuras en $\mathbb{R}$ y teniendo en cuenta que K es cerrado en $\mathbb{R}$ obtenemos $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset K \subset \mathbb{Q}$, contradicción. Como todos los compactos de $\mathbb{Q}$ son de interior vacío, no puede ser localmente compacto.

PROPOSICIÓN 6.3.3. *Sea X un espacio topológico Hausdorff se cumple que:*

(1) *Si X es localmente compacto, entonces X es T_3.*
(2) *Si todo punto admite un entorno compacto, entonces X es localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Para el primer apartado, observemos que las bases de entornos compactos son bases de entornos cerrados.

Veamos el segundo apartado. Sea $x \in X$ y sea K un entorno compacto de X. Sea U abierto tal que $x \in U \subset K$. Sabemos que K es Hausdorff y compacto, por lo que es T_4 y en particular T_3. Sea $\mathcal{B}$ una base de entornos cerrados de x en K. Es fácil ver que $\mathcal{B}$ es base de entornos cerrados en X; como están en K, son compactos. □

La compacidad local se conserva por aplicaciones abiertas:

PROPOSICIÓN 6.3.4. *Sea X un espacio topológico localmente compacto, Y otro espacio topológico y $f : X \to Y$ una aplicación continua y abierta sobre su imagen. Entonces, $f(X)$ es localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Por simplificar, supongamos que f es sobreyectiva. Sea $y \in Y$ y sea $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Sea V un entorno de y en Y. Por continuidad, existe C entorno de x tal que $f(C) \subset V$. Como X es localmente compacto, podemos suponer C compacto (luego también $f(C)$). Como f es abierta, $f(C)$ es entorno de y. □

Observaremos que compacidad local no es una propiedad hereditaria, pero para el caso de espacios Hausdorff probaremos una caracterización de compacidad local.

TEOREMA 6.3.5. *Sea Y un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto y sea $X \subset Y$, entonces, X es localmente compacto si y sólo si es intersección de un abierto y un cerrado.*

Para demostrar este resultado usaremos los siguientes lemas.

LEMA 6.3.6. *Sea Z un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto y sea $X \subset Z$ denso y localmente compacto. Entonces, X es abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in X$. Consideremos un X-entorno compacto de x. Sabemos que existe un Z-abierto U tal que $x \in U \cap X \subset K$. Como K es compacto, K es cerrado en Z. Por tanto:

$$X \supseteq K = \overline{K}^Z \supseteq \overline{U \cap X}^Z.$$

Ahora bien, como X es denso en Z tenemos[5] que $\overline{U \cap X}^Z = \overline{U}^Z$. Con lo anterior tenemos

$$U \subseteq \overline{U}^Z \subseteq \overline{K}^Z = K.$$

Con lo que X es entorno de todos sus puntos. □

LEMA 6.3.7. *Sea $(X, \mathcal{T})$* E.T. *localmente compacto, sea $U \in \mathcal{T}$ abierto y $C \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$ cerrado en X. Entonces $(U \cap C, \mathcal{T}|_{U\cap C})$ es localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in U \cap C \subset X$, entonces existe $\mathcal{B}^x$ base de entornos compactos de x en X. En tal caso, $\mathcal{B}^x_U := \{B \in \mathcal{B}^x \mid B \subset U\}$ sigue siendo base de entornos de x en X (ver Ejercicio 3.1.6). Por lo tanto $\mathcal{B}_U(U \cap C)^x := \{B \cap C \mid B \in \mathcal{B}^x_U\}$ es base de entornos de x en $U \cap C$ (ver Ejercicio 3.1.7). Además se cumple que si $B \cap C \in \mathcal{B}_U(U \cap C)^x$, entonces $B \cap C$ es un cerrado en el compacto B y por tanto compacto. □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6.3.5.

($\Leftarrow$) Es consecuencia inmediata del Lema 6.3.7 (esta implicación no utiliza que Y sea Hausdorff).

($\Rightarrow$) Observemos que un subconjunto X de Y es intersección de abierto y cerrado si y solo si X es C-abierto, donde $C = \overline{X}^Y$. Por la implicación anterior, si Y es localmente compacto, también lo es C.

Observemos que $\overline{X}^C = \overline{X}^Y \cap C = C$. Aplicando el Lema 6.3.6, obtenemos que X es abierto en C. □

[5]En general $\overline{U \cap D} \subseteq \overline{U}$ para subconjuntos cualesquiera en un espacio topológico, pero si D es denso y U es abierto tenemos el otro contenido: sea $x \in \overline{U}$, entonces $\forall V \in \mathcal{T}$ con $x \in V$ tenemos que $U \cap V \neq \emptyset$. Pero $U \cap V$ es abierto y D denso, luego $U \cap V \cap D \neq \emptyset$ con lo que $x \in \overline{U}$.

Por último estudiaremos el comportamiento de la compacidad local para productos de espacios topológicos.

PROPOSICIÓN 6.3.8. *Un espacio topológico producto* $X := \prod_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ *es localmente compacto si y sólo si*

(i) $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ *es localmente compacto* $\forall\lambda \in \Lambda$ *y*

(ii) $\exists F \subset \Lambda$ *finito tal que* $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ *es compacto* $\forall\lambda \in \Lambda \setminus F$.

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Como las proyecciones son abiertas, todos los factores son localmente compactos. Sea K un entorno compacto de un elemento del producto. Es fácil ver que salvo para un número finito de factores, las proyecciones de K son el conjunto total, por lo que se tiene la segunda afirmación.

($\Leftarrow$) Descomponemos X en el producto de dos factores: los que son únicamente localmente compactos pero no compactos, y luego el resto. Podemos suponer entonces que X es

$$X = X_1 \times \cdots \times X_n \times \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

donde X_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$ no es compacto. Tomemos $x = (x_1, \ldots, x_n, x_\lambda) \in X$. Como todos son localmente compactos tenemos una base de entornos compactos para cada factor del producto. Las denotaremos por $\mathcal{B}^z$ para $z \in \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Considera entonces la siguiente familia

$$\mathcal{B}^x = \left\{ B_1 \times \cdots \times B_n \times \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{l} B_i \in \mathcal{B}^{x_i} \text{ para } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ y} \\ B_\lambda = X_\lambda \text{ para todo } \lambda \text{ salvo un número} \\ \text{finito de ellos que cumplen } B_\lambda \in \mathcal{B}^{x_\lambda} \end{array} \right\}$$

Es fácil ver que en efecto es una base de entornos (compactos) para x. □

Tema 6.4. Compactificación de Alexandroff

En este tema X será un espacio topológico localmente compacto, T_2 y no compacto.

Definición 6.4.1. Una **compactificación** de X es un par (Y, i) donde Y es un espacio topológico T_2 compacto e $i : X \to Y$ es un homeomorfismo sobre la imagen tal que $i(X)$ es un abierto denso de Y.

Vamos a construir una compactificación de X. Definimos un conjunto $X^* := X \cup \{\omega\}$ donde ω es un elemento que no está en X. Consideremos la siguiente familia de $\mathcal{P}(X^*)$:

$$\mathcal{T}^* := \mathcal{T} \cup \{(X \setminus K)^* \mid K \subset X \text{ compacto}\},$$

donde si $A \subset X$, $A^* := A \cup \{\omega\}$. Consideremos la inclusión $i : X \hookrightarrow X^*$. Entonces:

Teorema 6.4.2 (Teorema de Alexandroff). *$\mathcal{T}^*$ es una topología de forma que (X^*, i) es una compactificación de X (llamada **compactificación de Alexandroff**).*

Demostración. En primer lugar se comprueba que $\mathcal{T}^*$ es una topología.

- Como $\emptyset \in \mathcal{T}$, tenemos $\emptyset \in \mathcal{T}^*$. Como $\emptyset$ es compacto, $X^* = (X \setminus \emptyset)^* \in \mathcal{T}^*$.
- Consideremos una familia de elementos de $\mathcal{T}^*$. La unión de los que están en $\mathcal{T}$ es de la forma $U \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$. Si no hay elementos fuera de $\mathcal{T}$ ya está. En caso contrario, si los demás son $(X \setminus K_\lambda)^*$, $\lambda \in \Lambda$, entonces:

  $$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus K_\lambda)^* = \{\omega\} \cup X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda = (X \setminus K)^*, \quad K := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda.$$

  Observemos que K es compacto por el Corolario 6.1.15. Tenemos

  $$U \cup (X \setminus K)^* = (X \setminus (K \cap C))^*, \quad C := X \setminus U.$$

  Como $K \cap C$ es cerrado en K también es compacto y $U \cup (X \setminus K)^* \in \mathcal{T}^*$.
- Tenemos tres casos posibles:
  - $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.
  - $U \in \mathcal{T}$, $K \subset X$ compacto. Entonces:

    $$U \cap (X \setminus K)^* = U \cap (X \setminus K) \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$$

    ya que como K es cerrado en X, $X \setminus K \in \mathcal{T}$.
  - $K, L \subset X$ compactos. Entonces:

    $$(X \setminus K)^* \cap (X \setminus L)^* = (X \setminus (K \cup L)) \in \mathcal{T}^*$$

    ya que $K \cup L$ es compacto.

Como los abiertos de X son abiertos de $\mathcal{T}^*$ y la intersección de los elementos de $\mathcal{T}^*$ con X son abiertos de X, entonces se tiene que $i : X \hookrightarrow X^*$ es homeomorfismo sobre la imagen y que X es abierto en X^*.

Veamos que X^* es compacto. Consideremos un recubrimiento abierto de X. El elemento ω está en algún abierto de la forma $(X \setminus K)^*$, $K \subset X$ compacto. Como la intersección de los elementos de $\mathcal{T}^*$ con X son abiertos de X, la compacidad de K implica que un número finito de ellos bastan para recubrir K con lo que obtenemos el resultado.

Veamos que X^* es T_2. Distinguimos dos casos:

- Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Sean U, V abiertos de X que los separan. Basta recordar que también son abiertos de X^*.
- Sean $x \in X$ y ω. Como X es localmente compacto, elegimos un X-entorno compacto K de x. Sea U un X-abierto tal que $x \in U \subset K$. Es inmediato U y $(X \setminus K)^*$ separan x y ω.

Solo queda por demostrar que X es denso en X^*. Basta ver que $\omega \in \overline{X}$. Consideremos un abierto que contenga a ω. Es de la forma $(X \setminus K)^*$ con $K \subset X$ compacto. Como X no es compacto, $X \cap X(X \setminus K)^* = \setminus K \neq \emptyset$. □

La compactificación de Alexandroff está bien definida salvo homeomorfismo. Esto es lo que afirma la siguiente sencilla proposición.

PROPOSICIÓN 6.4.3. *Es decir, si X e Y son dos espacios topológicos no compactos, T_2, localmente compactos y homeomorfos, entonces sus compactificaciones de Alexandroff son homeomorfas.*

El siguiente resultado es una fuente de ejemplos:

PROPOSICIÓN 6.4.4. *Sea Y un espacio topológico compacto y Hausdorff y sea $y \in Y$ no aislado. Denotaremos $X := Y \setminus \{y\}$. Entonces, Y es homeomorfo a la compactificación de Alexandroff de X.*

DEMOSTRACIÓN. Como Y es Hausdorff y compacto, entonces es localmente compacto. Como X es abierto de Y, ya que $\{y\}$ es cerrado, tenemos que X es localmente compacto y Hausdorff. Como $\{y\}$ no es aislado, entonces no es abierto, por lo que como X no es cerrado, entonces tampoco es compacto. Definimos la siguiente biyección $f : X^* \to Y$: si $x \in X$, $f(x) = x$ y $f(\omega) = y$.

Por el Ejercicio 6.1.5, para ver que f es un homeomorfismo, basta ver que es continua. Consideremos $U \subset Y$ abierto. Distinguimos dos casos:

- $y \notin U$. Entonces $f^{-1}(U) = U$. Como $U \subset X$, entonces U es X-abierto, luego es es abierto en X^*.

- $y \in U$. Entonces $f^{-1}(U) = (U \setminus \{y\}) \cup \{\omega\}$. Como $K := Y \setminus U$ es cerrado, entonces, es compacto. Como $y \in U$, entonces $K \subset X$. Es fácil ver que $U \setminus \{y\} = X \setminus K$, por lo que $f^{-1}(U) = (X \setminus K)^*$. □

Ejemplo 6.4.5. Consideremos una aplicación entre $\mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ y $\mathbb{R}^n$ ($P = (0, \ldots, 0, 1)$) que consiste en enviar un punto $Q \in \mathbb{S}^n \setminus \{P\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ al punto de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ intersección de la recta PQ y el hiperplano $\mathbb{R}^n$. Esta aplicación se denomina proyección estereográfica y puede escribirse numéricamente del siguiente modo

$$\begin{array}{rccl} \pi: & \mathbb{S}^n \setminus \{P\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right). \end{array}$$

Es fácil comprobar que π^{-1} tiene la siguiente expresión analítica

$$\begin{array}{rccl} \pi^{-1}: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{S}^n \setminus \{P\} \\ & (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \mapsto & \left(\frac{2\alpha_1}{\overline{\alpha}^2+1}, \ldots, \frac{2\alpha_n}{\overline{\alpha}^2+1}, \frac{\overline{\alpha}^2-1}{\overline{\alpha}^2+1}\right) \end{array}$$

donde $\overline{\alpha}^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$. Se trata de un homeomorfismo. Deducimos que la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^n$, ya que como es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^{n+1}$, es compacto.

Ejemplo 6.4.6. Sea X un espacio topológico de manera que podemos realizar un homeomorfismo sobre la imagen $j : X \to \mathbb{R}^n$ tal que $\#\overline{j(X)} \setminus j(X) = 1$. Observemos que en tal caso X es localmente compacto, Hausdorff y no compacto, y que su compactificación de Alexandroff es homeomorfa a $\overline{j(X)}$.

Consideremos los conjuntos $X_1 := (0, 1)$, $X_2 := [0, 1)$ y $X_3 := [0, 1) \cup (1, 2]$. De los argumentos anteriores obtenemos que sus compactificaciones de Alexandroff son homeomorfas a $\mathbb{S}^1$ para X_1 y $[0, 1]$ para X_2 y X_3.

Ejercicios

Ejercicio 6.4.1 Describe las compactificaciones de Alexandroff de los siguientes espacios:

(1) $\mathbb{B}_{d_2^2}((0,0);1) \cap \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\,\}$
(2) $[0,1)$
(3) $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$
(4) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\,\}$
(5) $\mathbb{N}$
(6) $\mathbb{Z}$
(7) $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ para $p \in \mathbb{R}^n$
(8) $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$
(9) $\mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$, pensando que la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ es el ecuador de $\mathbb{S}^n$.

Ejercicio 6.4.2 Obviemos momentaneamente que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto. Si realizamos la construcción de Alexandroff con $\mathbb{Q}$, ¿cómo es el espacio resultante? ¿Es compacto, T_2 o localmente compacto?

Ejercicio 6.4.3 Sean X e Y dos espacios topológicos Haussdorf y localmente compactos. Una aplicación $f : X \to Y$ es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto para todo compacto $K \subset Y$. Demuestra que existe una aplicacion continua entre las compactificaciones de Alexandroff $F : X^* \to Y^*$ tal que $F|_X = f$ y $F(\omega) = \omega$ si y solo si f es propia.

Ejercicio 6.4.4 Sea X un espacio T_2 localmente compacto y $f : X \to Y$ una aplicación continua sobre otro espacio topológico Y Hausdorff. Decimos que f es continua en el infinito si existe $f^* : X^* \to Y$ continua tal que $f^*|_X = f$.

Demuestra que que f sea continua en el infinito es equivalente a que exista $y \in Y$ tal que $f(X) \cup \{y\}$ es compacto y $f|_{X \setminus f^{-1}(y)} : X \setminus f^{-1}(y) \to Y \setminus \{y\}$ es propia (en el sentido del ejercicio anterior).

Capítulo 7

Espacios conexos

Tema 7.1. Definición y primeros ejemplos

DEFINICIÓN 7.1.1. Diremos que un E.T. $(X, \mathcal{T})$ es **conexo** si no existen abiertos no vacíos $A, B \in \mathcal{T}$ tales que $A, B \neq \emptyset$, $A \overset{\emptyset}{\cup} B = X$. Diremos que $K \subset X$ es **conexo** si $(K, \mathcal{T}_K)$ es conexo.

OBSERVACIONES 7.1.2.

(1) Utilizando la terminología de recubrimientos podríamos decir que un espacio topológico es conexo si no se puede recubrir por abiertos propios disjuntos.
(2) Dado que la definición de conexión sólo involucra los conceptos de recubrimiento, de abierto y de conjuntos disjuntos, que obviamente se preservan por homeomorfismo, se comprueba que la propiedad de conexión es una propiedad topológica (ver Proposición 7.1.5).

PROPOSICIÓN 7.1.3. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un* E.T. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *X es conexo.*
(2) *No existen cerrados no vacíos $A, B \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$ tales que $A, B \neq \emptyset$, $A \overset{\emptyset}{\cup} B = X$.*
(3) *$\mathcal{T} \cap \mathcal{C}_\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.*
(4) *$\forall M \subset X$ propio, se tiene que $\mathrm{Fr}(M) \neq \emptyset$.*
(5) *No existe ninguna aplicación continua y suprayectiva entre los espacios $(X, \mathcal{T})$ y $(\{0,1\}, \mathcal{T}_d)$, donde $\mathcal{T}_d$ es la topología discreta.*

DEMOSTRACIÓN.

(1)⇒(2) Supongamos que existen $A, B \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$ tal que $A, B \neq \emptyset$, $A \overset{\emptyset}{\cup} B = X$. En tal caso, como $A \overset{\text{Ejer. A.1.2(6)}}{=} (A \overset{\emptyset}{\cup} B) \setminus B = X \setminus B$ y, análogamente, $B = X \setminus A$, entonces $A, B \in \mathcal{T}$, y por lo tanto tendríamos dos abiertos no vacíos disjuntos que recubren X, con lo que X no sería conexo.

(2)⇒(3) Supongamos que existe $M \in \mathcal{T} \cap \mathcal{C}_\mathcal{T}$ subconjunto propio de X. Tomando $N := X \setminus M$ se tiene que $M \overset{\emptyset}{\cup} N \overset{\text{Prop. A.1.3(c)}}{=} X$, además, como $M \in \mathcal{T}$, entonces $N \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$ y por tanto esto contradice la hipótesis.

(3)⇒(4) Supongamos que M es un subconjunto propio de X tal que $\mathrm{Fr}(M) = \emptyset$; en tal caso, $\mathrm{Int}(M) \overset{\text{Exer. 3.3.7(1)}}{=} M$ y $\overline{M} \overset{\text{Exer. 3.3.7(2)}}{=} M$. con lo que $M \in \mathcal{T} \cap \mathcal{C}_\mathcal{T}$ lo que contradice la hipótesis, ya que M es propio.

(4)⇒(5) Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_d)$ continua y sobreyectiva. Sea $M := f^{-1}(0)$; observemos que $X \setminus M = f^{-1}(1)$. Por ser f sobreyectiva, ni M ni $X \setminus M$ son vacíos, y por tanto M es subconjunto propio de X. Por ser $\{0\}$ cerrado y abierto, y f continua, entonces, tanto M como $X \setminus M$ son cerrados. Así pues,

$\mathrm{Fr}(M) \overset{\text{Prop. 3.3.9(3)}}{=} \overline{M} \cap (\overline{X \setminus M}) \overset{\text{Prop. 3.2.3(5)}}{=} M \cap (X \setminus M) \overset{\text{Prop. A.1.3(b)}}{=} \emptyset$, lo que contradice el apartado (4).

(5)⇒(1) Supongamos que X no es conexo. En tal caso, consideremos dos abiertos no vacíos disjuntos A y B que recubran X. La función característica de A (en notación χ_A, ver (A.6)) es continua (Ejercicio 2.1.8) y sobreyectiva (Ejercicio A.2.12), lo que contradice el apartado (5). □

Ejemplos 7.1.4. Los espacios

(1) $X_1 = (0,1) \cup (2,3)$,
(2) $X_2 = (0,t) \cup (t,1)$,
(3) $X_3 = [0,1) \cup (2,3]$,
(4) $X_4 = [0,t) \cup (t,1]$, y
(5) $X_5 = [0,1] \cup [2,3]$

no son conexos, mientras que $\mathbb{R}$ sí es conexo. En particular, la conexión no es propiedad hereditaria.

Demostración. Observemos en primer lugar que

$$I_1 := (0,1) = X_1 \cap (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) = X_1 \cap [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}],$$

por lo que I_1 es a la vez abierto y cerrado. Análogamente $I_2 := (0,t) = X_2 \cap (0,t) = X_2 \cap [0,t]$, $I_3 := [0,1) = X_3 \cap (-\frac{1}{2}, 1) = X_3 \cap [0,1]$, e $I_4 := [0,t) = X_4 \cap (-\frac{1}{2}, t) = X_4 \cap [0,t]$, $I_5 := [0,1] = X_5 \cap (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = X_5 \cap [0,1]$, por lo tanto I_i es abierto y cerrado propio en X_i, para $i = 2, \ldots, 5$. Con esto hemos probado que X_i no es conexo ($i = 1, \ldots, 5$). Veamos ahora qué ocurre con $\mathbb{R}$. Por la Tarea 4($\mathcal{C}$7a) sabemos que no hay subconjuntos propios de $\mathbb{R}$ que sean a la vez abiertos y cerrados. Por la Proposición 7.1.3(3), $\mathbb{R}$ tiene que ser conexo. □

Proposición 7.1.5. *Sean X e Y espacios topológicos. Sea K conexo y $f : X \to Y$ una aplicación continua, entonces $f(K) \subset Y$ es conexo. En particular, la conexión es una propiedad topológica.*

Demostración. Queremos probar que $f(K) \subset Y$ es conexo, es decir, que $(f(K), \mathcal{T}_Y|_{f(K)})$ es conexo. Cambiando $f : X \to Y$ por $\bar{f}|_K : K \to f(K)$ (aplicación sobreyectiva por el Ejercicio A.2.11(2)) basta probar el siguiente resultado: si X es conexo y $f : X \to Y$ es sobreyectiva, entonces Y es conexo. Para ello utilizaremos la Proposición 7.1.3(3). Supongamos que Y no fuera conexo, entonces existiría $A \subset Y$ abierto-cerrado propio. Por ser f continua, $f^{-1}(A)$ es abierto-cerrado (Proposición 2.4.5) y propio (Ejercicio A.2.3), por lo tanto X no es conexo, lo que contradice la hipótesis. □

EJEMPLOS 7.1.6.

(1) $X = (0,1)$ es conexo (en particular, todo intervalo abierto es conexo).
(2) La circunferencia es conexa.
(3) $(0,1)$ no es homeomorfo a $(0,1) \cup (2,3)$.
(4) $[0,1)$ no es homeomorfo a $(0,1)$.
(5) $[0,1]$ no es homeomorfo a la circunferencia.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Ya que es homeomorfo a $\mathbb{R}$ (Ejercicio 2.1.10).
(2) Ya que es imagen del conexo $\mathbb{R}$ por una aplicación continua (Ejemplo 5.3.9).
(3) El primero es conexo (1) y el segundo no (Ejemplo 7.1.4(1)).
(4) Supongamos que existe $f : [0,1) \to (0,1)$ homeomorfismo. Sea $t := f(0)$; entonces $[0,1) \setminus \{0\} = (0,1)$ es homeomorfo a $f(0,1) = (0,1) \setminus \{t\} = (0,t) \cup (t,1)$, lo cual es imposible ya que $(0,1)$ es conexo (1), pero no $(0,t) \cup (t,1)$ (Ejemplo 7.1.4(2)).
(5) Procediendo como en el apartado anterior, tomando $t \in (0,1)$ se tendría que $[0,t) \cup (t,1]$ (no conexo por el Ejemplo 7.1.4(4)) es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \setminus \{f(t)\}$ (la circunferencia menos un punto). Tomando una proyección estereográfica, este espacio es homeomorfo a $\mathbb{R}$ (que es conexo por el Ejemplo 7.1.4). □

PROPOSICIÓN 7.1.7. *Sea $A \subset X$ un subconjunto conexo de un espacio topológico y sea $E \subset X$ tal que $A \subset E \subset \overline{A}$. Entonces E es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar obsérvese que

$$\text{si } A \subset S \subset \overline{A}, \text{ entonces } \overline{S} = \overline{A} \text{ (Propiedades 3.2.3(1) y (2)).} \tag{7.1}$$

Sea $V \subset E$ un abierto-cerrado no vacío de E, entonces $V \cap A$ es un abierto-cerrado de A, por lo tanto, como A es conexo, $V \cap A = A$. Así pues $A \subset V \subset E \subset \overline{A}$, y por (7.1) se tiene que:

$$\overline{V} = \overline{E} = \overline{A}. \tag{7.2}$$

Por ser V cerrado en E, se tiene que $V = C \cap E$ para cierto C cerrado en X. Así pues,

$$\overline{E} \overset{(7.2)}{=} \overline{V} = \overline{C \cap E} \overset{\text{Prop. 3.2.3(9)}}{\subset} \overline{C} \cap \overline{E} \overset{\text{Prop. 3.2.3(5)}}{=} C \cap \overline{E} \subset \overline{E},$$

luego $C \cap \overline{E} = \overline{E}$, es decir, $\overline{E} \subset C$ y por tanto $E = \overline{E} \cap E \subset C \cap E = V \subset E$, lo que prueba que $V = E$, es decir, que E es conexo. □

EJEMPLOS 7.1.8. Mostraremos más ejemplos de conexión:

(1) $A \subset \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo (por ejemplo, $\mathbb{Q}$ no es conexo).
(2) $X \neq \emptyset$ discreto es conexo si y sólo si $\#X = 1$.

(3) Si X es indiscreto, entonces es conexo.
(4) Si X es infinito cofinito, entonces es conexo.

DEMOSTRACIÓN.

(1)($\Leftarrow$) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, entonces obsérvese que $\mathrm{Int}(I)$ es un intervalo abierto (misma idea que en Ejercicio 3.3.1) y que este es denso en I. Así, por el Ejemplo 7.1.6(1) y la Proposición 7.1.7, se tiene que todo intervalo es conexo.

($\Rightarrow$) Supongamos ahora que $A \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo, entonces existen $x, y \in A$, $x < y$, y existe $z \notin A$ tal que $x < z < y$. Por tanto $A \cap (-\infty, z) = A \cap (-\infty, z]$ es un abierto-cerrado propio, por lo que A no es conexo.

(2) Es consecuencia del hecho de que en un espacio discreto los subconjuntos unipuntuales son abiertos y cerrados (Ejercicios 2.1.3 y 2.4.1).
(3) Se sigue inmediatamente de la Proposición 7.1.3(3).
(4) Los cerrados distintos del total son finitos y, como X es infinito, sus complementarios son infinitos (Ejercicio A.5.4), luego ningún subconjunto propio puede ser a la vez abierto y cerrado. □

OBSERVACIÓN 7.1.9. Si $A \subset X$ es un subconjunto conexo de X, y U es un abierto-cerrado de X: si $A \cap U \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$. El motivo es que si $A \not\subset U$, entonces $\emptyset \neq A \cap U \subsetneq A$ es un abierto-cerrado propio de A, lo cual contradice que A es conexo.

Veremos cómo se comporta la conexión con respecto a la unión, producto y suma de espacios topológicos.

PROPOSICIÓN 7.1.10. *Sean X e Y E.T's (no vacíos), entonces:*

(1) *Si $X_\lambda \subset X$ ($\lambda \in \Lambda \neq \emptyset$) es una familia de subconjuntos conexos no vacíos de X, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \subset X$ es conexo si se cumple una de las propiedades siguientes:*
   (a) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.
   (b) $\Lambda = \mathbb{N}$ *y* $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (c) $\Lambda = \{0, 1, \ldots, k\}$ *y* $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$, $\forall n \in \Lambda \setminus \{k\}$.
(2) *$X \times Y$ es conexo si y sólo si X e Y lo son.*
(3) *Sea $f : X \to Y$ una identificación. Si Y es conexo y además $f^{-1}(y)$ es conexo $\forall y \in Y$, se tiene que X es conexo.*

DEMOSTRACIÓN.

(1) Demostramos cada uno de los casos.

(1a) Sea U un abierto-cerrado propio de $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ y sea $x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Obsérvese que $\tilde{U} := (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) \setminus U$ es también abierto-cerrado propio de $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Así pues, reemplazando eventualmente U con $\tilde{U}$, podemos suponer que $x \in U$. Por tanto, $U \cap X_\lambda \neq \emptyset$ y X_λ es conexo, así pues $X_\lambda \subset U$ (Observación 7.1.9) $\forall \lambda \in \Lambda$. Por tanto, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \subset U \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, es decir, $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, lo que contradice que U sea subconjunto propio de $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

(1b) Denotemos $Y_n := \bigcup_{j=1}^{n} X_n$. Aplicando inducción y el caso anterior, podemos demostrar que son conexos. Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$, obtenemos el resultado aplicando otra vez el caso anterior.

(1c) Es consecuencia del apartado anterior si tomamos la nueva familia $\{Y_n\}_{\mathbb{N}}$ donde $Y_n := X_n$ si $n \leq k$ e $Y_n := X_k$ si $n \geq k$.

(2)($\Rightarrow$) Las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ son continuas y sobreyectivas (Propiedad 5.1.4(1)), por lo tanto, si el producto es conexo, lo son los factores (Proposición 7.1.5).

($\Leftarrow$) Tomemos $y_0 \in Y$, y definamos $T_{x,y_0} := (X \times \{y_0\}) \cup (\{x\} \times Y)$. Dado que $X \times \{y_0\} \approx X$ y $\{x\} \times Y \approx Y$ (Ejercicio 5.1.6(4)) ambos son conexos (Proposición 7.1.5). Además $(X \times \{y_0\}) \cap (\{x\} \times Y) = \{(x, y_0)\}$. Así pues, por el apartado (1a), T_{x,y_0} es conexo $\forall x \in X$. Además $\bigcap_{x\in X} T_{x,y_0} = X \times \{y_0\} \neq \emptyset$, por lo tanto, aplicando de nuevo el apartado (1a) se tiene que $\bigcup_{x\in X} T_{x,y_0} = X \times Y$ es conexo.

(3) Sea U un abierto-cerrado no vacío de X. Observemos que, por ser $f^{-1}(y)$ conexo, si $U \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ entonces $f^{-1}(y) \subset U$ (Observación 7.1.9). Por lo tanto $U = f^{-1}(f(U))$ (Ejercicio A.2.7(2)). Por ser f identificación, $f(U)$ es abierto-cerrado de Y (ya que $f^{-1}(f(U))$ es abierto-cerrado) no vacío (Ejercicio A.2.3(1), ya que $U \neq \emptyset$). Dado que Y es conexo, $f(U) = Y$ y así pues $U = X$ (Ejercicio A.2.3(2)). □

Ejemplo 7.1.11. Por la Proposición 7.1.10(2), sabemos que $\mathbb{R}^n$ es conexo. Ahora, como $\mathbb{S}^n$ es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ (ver Ejemplo 6.4.5) entonces, por el Ejemplo 7.1.1, se tiene que $\mathbb{S}^n$ es conexo.

Siguiendo con el razonamiento utilizado en el Ejemplo 7.1.6(3) parece natural preguntarse si $A_3 := (0,1) \cup (2,3) \cup (4,5)$ es o no homeomorfo a $A_2 := (0,1) \cup (2,3)$. La respuesta parece intuitivamente negativa a pesar de que ambos conjuntos son no conexos. El motivo: A_2 es unión disjunta de dos intervalos (espacios conexos) mientras que A_3 es unión disjunta de tres intervalos, claro que $A_1 := (0,1) = (0, \frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, 1)$ también es unión disjunta de dos intervalos, y en cambio no es homeomorfo a A_2. En lo que sigue refinaremos esa idea de descomponer un conjunto

en "trozos" disjuntos y conexos de manera adecuada. . Sea X un espacio topológico. Consideremos en X la siguiente relación:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists K \subset X \text{ conexo tal que } \ x, y \in K.$$

LEMA 7.1.12. *Sea K una clase de equivalencia de la relación "$\sim$". Entonces,*

(1) *Si B es conexo y $K \cap B \neq \emptyset$, entonces $B \subset K$ (Observación 7.1.9).*
(2) *K es conexo.*

DEMOSTRACIÓN.

(1) Sea $x \in K \cap B$, entonces $\forall y \in B$ se tiene que existe un conexo (el propio B) que contiene a x y a y. Por lo tanto, $x \sim y \ \forall y \in B$, y así $B \subset K$.
(2) Sea $x \in K$, sabemos que $\forall y \in K \ \exists K_y \subset X$ conexo de modo que $x, y \in K_y$. Veamos que $K = \cup\{K_y \mid y \in K\}$:
   ($\subseteq$) Sea $y \in K$, entonces $y \in K_y$ por definición de K_y.
   ($\supseteq$) Como K_y es conexo $\forall y \in K$, y como $y \in K_y \cap K$, entonces, por el apartado anterior, se tiene que $K_y \subset K$.
   Así pues K es unión de conexos y $x \in \cap_{y \in K} K_y$. Así pues, por la Proposición 7.1.10(1a) se tiene que K es conexo. □

DEFINICIÓN 7.1.13. Las **componentes conexas** de X son las clases de equivalencia de esta relación.

EJEMPLO 7.1.14. Por el Ejemplo 7.1.8(1), se tiene que las componentes conexas de $(0,1) \cup (2,3)$ son los intervalos $(0,1)$ y $(2,3)$. Es más, veamos que dos puntos x, y de $X \subset \mathbb{R}$ están en la misma componente conexa de X si y sólo si $[x,y] \subset X$ (suponemos que $x < y$).

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Si x e y están en la misma componente conexa, entonces existe un conexo $A \subset X$ tal que $x, y \in A$. Por el Ejemplo 7.1.8(1), $A \subset \mathbb{R}$ tiene que ser un intervalo con $x, y \in A$, y por lo tanto $[x,y] \subset A \subset X$.
($\Leftarrow$) Si $[x,y] \subset X$, entonces, dado que $[x,y]$ es conexo (Ejemplo 7.1.8(1)), se tiene que x, y están en la misma componente conexa, por definición. □

PROPIEDADES 7.1.15 (Componentes conexas). Sea $(X, \mathcal{T})$ E.T, entonces se tiene que

(1) X es unión disjunta de sus componentes conexas.
(2) Sea $x \in X$ y sea K_x la componente conexa que contiene a x, entonces K_x es el mayor conexo que contiene a x (por la relación de orden $\subset$)[1].

[1]Es decir, si $A \subset X$ es conexo y contiene a x, entonces $A \subset K_x$.

(3) Si $A \subset X$ es un conexo no vacío, entonces existe una única componente conexa K tal que $A \subset K$.
(4) Las componentes conexas son cerrados.
(5) Sea $\mathcal{K}_X$ el espacio cociente de X por la relación "$\sim$". Entonces $\mathcal{K}_X$ admite una estructura de E.T. cociente y cumple que si $X \approx Y$ entonces $\mathcal{K}_X \approx \mathcal{K}_Y$. En particular, el cardinal de $\mathcal{K}_X$ es un invariante de X por homeomorfismo.
(6) X es conexo si y sólo si posee una sola componente conexa.
(7) Si $\emptyset \neq A \subset X$ es un abierto-cerrado conexo, entonces A es una componente conexa.
(8) Si $\emptyset \neq A \subset X$ es un abierto-cerrado, entonces A es unión de componentes conexas de X.

Demostración.

(1) Es consecuencia inmediata del hecho de que cada componente conexa es la clase de una relación de equivalencia.
(2) En primer lugar K_x es conexo por el Lema 7.1.12(2). Además, sea K un conexo cualquiera que contenga a x, entonces $x \in K \cap K_x$ y por el Lema 7.1.12(1) se tiene que $K \subset K_x$. Por lo tanto se tiene el resultado.
(3) Es claro que si $x, y \in A$ son dos puntos de A, entonces $x \sim y$ ya que A es conexo. Por lo tanto, $A \subset K_x = K_y = K$ (por Lema 7.1.12(1)). El hecho de que K sea única es consecuencia de que $K_x = K \ \forall x \in K$.
(4) Si K es componente conexa, entonces $\overline{K}$ es un conexo (Proposición 7.1.7) que contiene a K, y por el apartado (3) se tiene que $\overline{K} = K$.
(5) Es consecuencia del Ejercicio 5.4.8.
(6) Es consecuencia inmediata del apartado (2).
(7) Por el apartado (2) existe una única componente conexa K que contenga a A. Como A es abierto-cerrado no vacío en X y $A \subset K$, entonces A es un abierto-cerrado no vacío en K. Por último, como K es conexo, entonces $A = K$ (ver Proposición 7.1.3(3)).
(8) Como $X = \coprod_{K \in \mathcal{K}_X} K$ (unión disjunta por el apartado (1)), entonces $A = \coprod_{K \in \mathcal{K}_X} (K \cap A)$. Basta ver que si $K \cap A \neq \emptyset$, entonces $K \cap A = K$. Para ello, observemos que si $K \cap A \neq \emptyset$, entonces $K \cap A$ es abierto-cerrado no vacío de K. Como K es conexo, entonces $K \cap A = K$ (ver Proposición 7.1.3(3)). □

Definición 7.1.16. Diremos que un espacio $(X, \mathcal{T})$ es **totalmente desconectado** si cada punto de X constituye una componente conexa.

Ejemplo 7.1.17. Un ejemplo sencillo de espacio totalmente desconectado es el de los espacios topológicos discretos. En $(X, \mathcal{T}_d)$ todo punto es abierto-cerrado y conexo, y por lo tanto (Propiedad 7.1.15(7)) componente conexa. Así pues, $(X, \mathcal{T}_d)$ es totalmente desconectado.

Ejemplo 7.1.18. Otros ejemplos de espacios totalmente desconectados son $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{Q}})$ y el discontinuo de Cantor, $\mathcal{C}$. En ambos casos, utilizando el Ejemplo 7.1.14 y el hecho de que ningún intervalo no unipuntual está contenido ni en $\mathbb{Q}$ ni en $\mathcal{C}$ (Ejercicio 3.3.4 y Propiedad 6.1.24($\mathcal{C}5$)) obtenemos que únicamente los puntos son conexos, y por tanto componentes conexas.

Ejemplo 7.1.19. Sea $X := \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ como subespacio de $\mathbb{R}$. Como X hereda la topología discreta (Ejercicio 2.3.2), entonces el Ejemplo 7.1.17 implica que X es totalmente desconectado.

Ahora, consideremos $Y := X \cup \{0\}$ de nuevo como subespacio de $\mathbb{R}$. De nuevo, cada punto de X es abierto-cerrado y conexo en Y, así pues, cada $\{\frac{1}{n}\} \subset X$ es una componente conexa de Y (Propiedad 7.1.15(7)). Por tanto, $\{0\}$ es también componente conexa por la Propiedad 7.1.15(1). Por lo tanto Y también es totalmente desconectado. Por otra parte obsérvese que el punto $0 \in Y$ no es aislado, y por tanto $\{0\}$ no es abierto en Y, así pues Y no es un espacio discreto.

Ejemplo 7.1.20. Por los razonamientos utilizados en los ejemplos anteriores es inmediato probar que $X \subset \mathbb{R}$ es totamente desconectado si y sólo si X no contiene ningún intervalo (no unipuntual).

Ejercicios

Ejercicio 7.1.1 Consideremos X espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y no compacto. Consideremos X^* su compactificación de Alexandroff (ver Teorema 6.4.2). Demuestra que si X es conexo entonces X^* es conexo. Comprueba con un ejemplo que el recíproco no es cierto.

Ejercicio 7.1.2 Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y sea X E.T. conexo. Demuestra que el grafo de f, es decir, el conjunto $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$, es conexo.

Ejercicio 7.1.3 Demuestra que "$\sim$" es una relación de equivalencia.

Ejercicio 7.1.4 Demostremos el Teorema del valor intermedio: *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua con X conexo e Y un conjunto totalmente ordenado dotado de la topología del orden*[2]*. Si $a, b \in X$ y $r \in Y$ es tal que $f(a) \leq r \leq f(b)$, entonces existe $c \in X$ tal que $f(c) = r$.*

Ejercicio 7.1.5 Demuestra que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$ no son homeomorfos.

Ejercicio 7.1.6 Demuestra que la compactación de un conexo es conexa. Concluye que $\mathbb{S}^1$ no es homeomorfo a $\mathbb{S}^n$ si $n > 1$.

Ejercicio 7.1.7 Demuestra que una aplicación continua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tiene un punto fijo, i.e., existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$. ¿Qué ocurre en el caso de los espacios $(0, 1)$ y $[0, 1)$?

Ejercicio 7.1.8 Probar que la recta de Sorgenfrey es totalmente disconexa.

Ejercicio 7.1.9 Sea C un subespacio conexo de un espacio topológico X y $A \subset X$ tal que $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap (X - A) \neq \emptyset$. Demostrar que $C \cap \partial A \neq \emptyset$.

Ejercicio 7.1.10 Demostrar que dos cerrados tales que su unión y su intersección son conexas han de ser conexos. Dar un ejemplo que pruebe que es necesario que ambos sean cerrados.

Ejercicio 7.1.11 ¿Es $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ conexo? ¿Y $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$? Considera ahora $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ ¿es conexo? ¿Y el conjunto de elementos de $\mathbb{R}^2$ que tienen al menos una coordenada racional?

---

[2]Recordemos que un conjunto es totalmente ordenador si tiene una relación de orden $\prec$ en la que todos los elementos pueden compararse. Dado un orden $\prec$ en un conjunto X, es posible topologizar el conjunto con la subbase $\{L(x)\}_{x \in X} \cup \{R(x)\}_{x \in X}$, siendo $L(x) = \{y \in X \mid y \prec x\}$ y $R(x) = \{y \in X \mid x \prec y\}$

Ejercicio 7.1.12 Un punto x de un espacio conexo X es de corte si $X \setminus \{x\}$ es no conexo. Prueba que ser un punto de corte se preserva por homeomorfismo. Usa este hecho para clasificar las letras mayúsculas salvo homeomorfismo

A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T

considerándolas realizas por curvas.

Ejercicio 7.1.13 Si $A \subset X$ es un subconjunto conexo, ¿podemos afirmar que $\mathrm{Int}(A)$ o $\mathrm{Fr}(A)$ lo son? ¿Y el recíproco es cierto?

Tema 7.2. Conexión local

DEFINICIÓN 7.2.1. Diremos que un espacio topológico X es **localmente conexo** si todo punto posee una base de entornos conexos.

OBSERVACIÓN 7.2.2. Veamos que X es localmente conexo si y sólo si los entornos conexos de un punto forman una base de entornos. Para ello, denotemos por $\mathcal{E}_{\text{con}}(x) := \{V^x \subset X \mid V^x \text{ es entorno conexo de } x\}$. Supongamos que X es localmente conexo y consideremos $x \in X$ un punto cualquiera de X, entonces existe $\mathcal{B}^x$ base de entornos conexos de x. Así pues $\mathcal{B}^x \subseteq \mathcal{E}_{\text{con}}(x)$ y por tanto $\mathcal{E}_{\text{con}}(x)$ es también base de entornos de x (Observación 3.1.17). Recíprocamente, si $\mathcal{E}_{\text{con}}(x)$ es base de entornos de x, entonces $\mathcal{E}_{\text{con}}(x)$ es base de entornos conexos de x, luego X es localmente conexo.

EJEMPLOS 7.2.3.

(1) Si X es discreto y $x \in X$, entonces $\mathbb{B}^x := \{\{x\}\}$ es base de entornos (Ejemplo 3.1.14(4)) y por tanto X es localmente conexo.
(2) Todos los intervalos son también localmente conexos ya que tienen bases de entornos formadas por intervalos.
(3) Consideremos ahora $\mathbb{R}^n$ con la topología usual $\mathcal{T}_u$. Dado que $\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_{d_\infty}$, para demostrar que $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo, basta utilizar una base de entornos formada por bolas para la métrica d_∞. Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sabemos que $\mathcal{B}^x := \{\mathbb{B}^n_{d_\infty}(x; \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ forman una base de entornos de x en $\mathbb{R}^n$ (Ejemplo 3.1.14(i)). Ahora bien, $\mathbb{B}^n_{d_\infty}(x; \varepsilon) = \mathbb{B}^1_{d_2}(x_1; \varepsilon) \times \cdots \times \mathbb{B}^1_{d_2}(x_n; \varepsilon)$. Como $\mathbb{B}^1_{d_2}(x_i; \varepsilon) = (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ es conexo por el apartado anterior, enonces $\mathbb{B}^n_{d_\infty}(x; \varepsilon)$ es conexo (Proposición 7.1.10(2)).
(4) Por ser espacios totalmente desconectados pero no discretos, ni $\mathbb{Q}$ ni el discontinuo de Cantor pueden ser localmente conexos. El motivo es el siguiente: si X fuera localmente conexo, por la Observación 7.2.2 la familia $\mathcal{E}_{\text{con}}(x)$ debería ser base de entornos de x $\forall x \in X$, pero por ser X totalmente desconectado, el único conexo que contiene a x es el propio $\{x\}$, que no es base de entornos de x a no ser que $\{x\}$ sea abierto y por tanto X se trate de la topología discreta (Ejemplo 3.1.14(4)).

Daremos la siguiente caracterización de conexión local.

PROPOSICIÓN 7.2.4. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *$(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo.*
(2) *$\forall U \subset \mathcal{T}$ toda componente conexa de $(U, \mathcal{T}|_U)$ es abierta.*

(3) *Existe base de $\mathcal{T}$ formada por conjuntos conexos.*

DEMOSTRACIÓN.

(1)⇒(2) Sea U abierto de X y sea K una componente conexa de U. Sea $x \in K \subset U$; como X es localmente conexo, existe V X-entorno conexo de x tal que $V \subset K$. Como K es X-entorno conexo de todos sus puntos, K es X-abierto.

(2)⇒(3) Sea $\mathbb{B}$ la familia de todos los abiertos conexos. Sea U un abierto y sea $x \in U$. Sea K la componente conexa de U que contiene x. Tenemos $K \in \mathbb{B}$ y $x \in K \subset U$.

(3)⇒(1) Basta recordar que a partir de una base de abiertos obtenemos bases de entornos de cada punto. □

COROLARIO 7.2.5. *Sea X un espacio topológico localmente conexo, entonces:*

(1) *Si $U \subset X$ es abierto, entonces U es localmente conexo.*

(2) *Sus componentes conexas son abiertas y cerradas.*

EJEMPLO 7.2.6. Existen espacios localmente conexos no conexos, por ejemplo, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

EJEMPLO 7.2.7. Sea $X := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ considerado como subespacio topológico de $\mathbb{R}$. Como la topología que hereda X de $\mathbb{R}$ es la discreta (Ejercicio 2.5.2), entonces X es localmente conexo (Ejemplo 7.2.3(1)).

Consideremos ahora $Y := X \cup \{0\}$. Como 0 no es punto aislado de Y, entonces $\{0\}$ no es abierto en Y. Así pues, como $\{0\}$ es componente conexa de Y, aplicando el Corolario 7.2.5(2) tenemos que Y no es localmente conexo.

PROPOSICIÓN 7.2.8. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua sobreyectiva y abierta. Si X es localmente conexo, también lo es Y.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in Y$. Por ser f sobreyectiva existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Sea $\mathcal{B}^x$ es una base de entornos conexos de x en X, entonces, $f\mathcal{B}^x$ es una base de entornos de y (ver Proposición 3.1.21) conexos (ver Proposición 7.1.5). □

PROPOSICIÓN 7.2.9. *Sean X, Y E.T. y $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ con $X_\lambda \subset X$ una familia no vacía de espacios topológicos, entonces:*

(1) *Si $X_\lambda \subset X$ son subespacios abiertos localmente conexos de X, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es localmente conexo.*

(2) *$X \times Y$ es localmente conexo si y sólo si X e Y son localmente conexos.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea $x \in X_\lambda$ y $\mathcal{B}^x$ una base de entornos conexos de x en X_λ. Por ser X_λ abierto en X, $\mathcal{B}^x$ es base de entornos de x en X (Ejercicio 3.1.8). Por lo tanto $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es localmente conexo.

(2)($\Rightarrow$) Como las proyecciones son continuas, abiertas y suprayectivas, todos los factores son localmente conexos (Proposición 7.2.8).

($\Leftarrow$) Sea $X \times Y$ un producto de espacios localmente conexos Consideremos $(x, y) \in X \times Y$ un punto del producto y tomemos $\mathcal{B}^x$ y $\mathcal{B}^y$ bases de entornos conexos de x e y en X e Y respectivamente. Entonces $\mathcal{B} := \{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}^x \text{ y } B_2 \in \mathcal{B}_y\}$ es base de entornos de (x, y) (Ejercicio 5.1.1) conexos (Proposición 7.1.10(2)). □

EJEMPLO 7.2.10. Utilizando proyecciones estereográficas desde el polo norte y el polo sur, se tiene que $U_1 := \mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ y $U_2 := \mathbb{S}^n \setminus \{Q\}$ son abiertos locamente conexos que recubren $\mathbb{S}^n$. Así pues, usando la Proposición 7.2.9(1), se obtiene que $\mathbb{S}^n$ es localmente conexo.

EJEMPLOS 7.2.11. Consideremos $L_{x_0} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_0\}$ la recta vertical en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el punto $(x_0, 0)$. Así podemos definir el espacio $X := \bigcup_{n=1}^{\infty} L_{\frac{1}{n}} \subset \mathbb{R}^2$ considerado como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$. Obsérvese que $X = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$. Por el Ejercicio 7.2.7, X es el producto de dos espacios localmente conexos, así pues localmente conexo (Proposición 7.2.9(2)).

Sea ahora $Y := X \overset{\emptyset}{\cup} L_0$ de nuevo considerado como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$. Obsérvese que $Y = \left(\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}\right) \times \mathbb{R}$. Por el Ejercicio 7.2.7, el primer factor de Y no es localmente conexo, y por tanto Y no es locamente conexo como consecuencia de la Proposición 7.2.9(2). Las componentes conexas de Y son de la forma $L_{\frac{1}{n}} \times \mathbb{R}$ y $\{0\} \times \mathbb{R}$. Esta última es la única que no es abierta en Y.

EJEMPLO 7.2.12. Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$X_1 := \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \;\middle|\; x \in (0, 1]\right\}, \quad X_2 := \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}.$$

El espacio $X := X_1 \cup X_2$ considerado como subespacio de $\mathbb{R}^2$ se denomina el **seno del topólogo**.

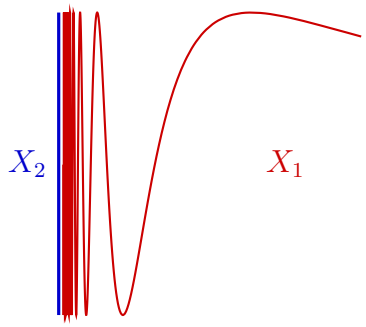


FIGURA 7.1. Seno del topólogo

Como X_1 es el grafo de la aplicación continua $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ donde $(0, 1]$ es conexo se tiene que X_1 es conexo (Ejercicio 7.1.2). Como $X = \overline{X_1}$,

tenemos que X es conexo. Sin embargo X no es localmente conexo. En efecto, Sea $U = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < 1)$ una bola cualquiera para d_∞ centrada en $(0,0) \in X_2$. Es fácil ver que $U \cap X_2$ es una componente conexa no abierta de $U \cap X$.

Ejercicios

Ejercicio 7.2.1 Demostrar que si X es compacto y localmente conexo, entonces tiene un número finito de componentes conexas.

Ejercicio 7.2.2 Sea X un espacio compacto y T_2. Demuestra que es localmente conexo si y solo si todo recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento[3] finito formado por abiertos conexos.

Ejercicio 7.2.3 Sea $X = [-1, 1]$ con la topología cuyos abiertos U cumplen que o $0 \notin U$ o $(-1, 1) \subset U$. Estudiar la conexión y la conexión local de este espacio, hayando sus componentes conexas.

Ejercicio 7.2.4 Sea $f : X \to Y$ una identificación. Demuestra que si X es localmente conexo, entonces Y también lo es.

[3]Dado un cubrimiento $\mathcal{U}$, un refinamiento es otro cubrimiento $\mathcal{V}$ tal que para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$.

Tema 7.3. Conexión por caminos

DEFINICIONES 7.3.1. Sea X un espacio topológico.

- Un **camino** en X es una aplicación continua $\alpha : [0,1] \to X$ (donde $[0,1]$ se considera como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual).
- Diremos que $\alpha(0)$ es el **origen de** α y que $\alpha(1)$ es su **final** (de ambos diremos que son los **extremos** de α).
- Generalmente diremos que α **va del origen al final**, o que los **une**.
- El camino se dirá **constante** si $\alpha(t) = x_0 \ \forall t \in [0,1]$ para cierto $x_0 \in X$, y **cerrado** si $\alpha(0) = \alpha(1)$.
- Sean $x, y \in X$, denotaremos por $\Gamma(X, x, y)$ el conjunto de caminos en X con origen en x y final en y.
- Supongamos que $(\alpha : [0,1] \to X) \in \Gamma(X, x, y)$ y que $(\beta : [0,1] \to X) \in \Gamma(X, y, z)$ con $\alpha(1) = \beta(0)$, entonces definimos la **suma de caminos** como el camino $(\alpha * \beta : [0,1] \to X) \in \Gamma(X, x, z)$ tal que

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

- Definimos el **camino inverso** de α como el camino $(\alpha^- : [0,1] \to X) \in \Gamma(X, z, x)$ tal que $\alpha^-(t) := \alpha(1-t)$.
- Diremos que β es una **reparametrización** de α si existe un homeomorfismo creciente $h : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\beta = \alpha \circ h$.

OBSERVACIONES 7.3.2.

(1) Si $\alpha : [0,1] \to X$ es un camino, entonces el camino $\alpha * \alpha^-$ es un camino cerrado.

(2) Si $Y \subset X$ es un subespacio, entonces $\Gamma(Y, x, y) \subset \Gamma(X, x, y)$.

(3) En ocasiones nos puede interesar extender la definición de camino como aplicaciones continuas de un intervalo cerrado cualquiera, es decir, $\alpha : [a,b] \to X$. Si $\alpha : [a,b] \to X$ es continua, entonces considerando $f : [0,1] \to [a,b]$ definida por $f(x) := a + x(b-a)$ se tiene que $\alpha \circ f$ es un camino que une $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$, y viceversa, si $\alpha : [0,1] \to X$ es continua y tomamos $g : [a,b] \to [0,1]$ definida por $g(x) := \frac{x-a}{b-a}$ se tiene que $\tilde{\alpha} := \alpha \circ g : [a,b] \to X$ cumpliendo que $\tilde{\alpha}(a) = \alpha(0)$ y $\tilde{\alpha}(b) = \alpha(1)$.

(4) Dado que $[0,1]$ es conexo y compacto, si $\alpha : [0,1] \to X$ es un camino, entonces $\mathrm{im}(\alpha) = \alpha([0,1]) \subset X$ es conexo y compacto en X.

Consideremos en X la siguiente relación de equivalencia:

$$x \overset{c_X}{\sim} y \Leftrightarrow \Gamma(X, x, y) \neq \emptyset$$

DEFINICIÓN 7.3.3. A cada clase de equivalencia de la relación $\overset{c,X}{\sim}$ le denominamos **componente conexa por caminos** de X.

Un espacio topológico se denomina **conexo por caminos** si $\overset{c,X}{\sim}$ sólo tiene una clase de equivalencia, es decir, si $\forall x, y \in X$, se tiene que $\Gamma(X, x, y) \neq \emptyset$.

OBSERVACIÓN 7.3.4. Obsérvese que si $f : X \to Y$ es aplicación continua, entonces $\Gamma(X, x_1, x_2) \neq \emptyset$ implica que $\Gamma(Y, f(x_1), f(x_2)) \neq \emptyset$. El motivo es el siguiente: si $\alpha \in \Gamma(X, x_1, x_2)$, entonces tomando $f \circ \alpha : [0, 1] \to Y$ se tiene un camino cuyo origen es $(f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(x_1)$ y cuyo final es $(f \circ \alpha)(1) = f(\alpha(1)) = f(x_2)$, es decir, tal que $f \circ \alpha \in \Gamma(Y, f(x_1), f(x_2))$. En otras palabras,

$$x_1 \overset{c,X}{\sim} x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{c,Y}{\sim} f(x_2).$$

Por lo tanto, si $f : X \to Y$ es homeomorfismo, $\Gamma(X, x_1, x_2) \neq \emptyset$ es equivalente a que $\Gamma(Y, y_1, y_2) \neq \emptyset$, donde $f(x_i) = y_i$. Así pues, el número de componentes conexas por caminos de un espacio topológico es una propiedad topológica, en particular, "ser conexo por caminos" es propiedad topológica.

OBSERVACIÓN 7.3.5. Si $X \neq \emptyset$, observa que X es conexo por caminos si y sólo si existe $x_0 \in X$ de forma que $\Gamma(X, x_0, x) \neq \emptyset$ para cualquier $x \in X$. El motivo es que $\overset{c,X}{\sim}$ tiene una clase de equivalencia si y sólo si todo punto $x \in X$ es equivalente a uno dado x_0, o bien si cualquiera dos puntos $x, y \in X$ son equivalentes.

EJEMPLOS 7.3.6.

(1) Recordemos que un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si cumple la siguiente propiedad: $\forall x, y \in I$ son dos puntos de I, (supongamos que $x < y$) entonces $[x, y] \subset I$, es decir, si $\forall x \leq z \leq y$ se tiene que $z \in I$. Esto es equivalente a que $x + t(y - x) \in I$ para cualquier $t \in [0, 1]$. Así pues, la aplicación $\alpha : [0, 1] \to I$ definida por $\alpha(t) = x + t(y - x)$ es un camino que une x con y, y por tanto I es conexo por caminos (de hecho la Proposición 7.3.8 y el Ejemplo 7.1.8(1) probarán que este resultado es un si y sólo si).
(2) Sea $x_0 = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. La aplicación $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ $\alpha(t) = x_0 + tx$ es claramente un camino de x_0 a x. Por lo tanto $\mathbb{R}^n$ es conexo por caminos.
(3) Como la conexión por caminos es una propiedad topológica (Observación 7.3.4), sabemos que $\mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ ($\approx \mathbb{R}^n$ por el Ejemplo 6.4.5) es conexo por caminos (ya que $\mathbb{R}^n$ lo es por el apartado (2)), es decir, que $\Gamma(\mathbb{S}^n \setminus \{P\}, x, y) \neq \emptyset$. Ahora bien, tomando $Q = (0, 0, \ldots, -1)$ el polo sur de $\mathbb{S}^n$, obtenemos que $\mathbb{S}^n \setminus \{Q\}$ ($\approx \mathbb{R}^n$) es conexo por caminos, y por tanto $\Gamma(\mathbb{S}^n \setminus \{Q\}, x, y) \neq \emptyset$. Fijemos $x_0 \in \mathbb{S}^n \setminus \{P, Q\}$, como consecuencia de la

Observación 7.3.2(2) sabemos que $\emptyset \neq \Gamma(\mathbb{S}^n \setminus \{P\}, x_0, y_1) \subset \Gamma(\mathbb{S}^n, x_0, y)$ (si $y_1 \in \mathbb{S}^n \setminus \{P\}$) y que $\emptyset \neq \Gamma(\mathbb{S}^n \setminus \{Q\}, x_0, y_2) \subset \Gamma(\mathbb{S}^n, x_0, y)$ (si $y_2 \in \mathbb{S}^n \setminus \{Q\}$). Por tanto, $\Gamma(\mathbb{S}^n, x_0, y) \neq \emptyset$ para cualquier $y \in (\mathbb{S}^n \setminus \{P\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{Q\}) = \mathbb{S}^n$.

(4) Este razonamiento se puede generalizar de manera análoga para obtener el siguiente resultado: Sea X E.T. y sean $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subespacios de X de manera que:
   a) X_λ es conexo por caminos,
   b) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = X$, y
   c) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$,

   entonces X es conexo por caminos.

A continuación recogemos este y otros resultados análogos a los de conexión.

PROPIEDADES 7.3.7 (Conexión por caminos). Sean X e Y E.T, y entonces se tienen las siguientes propiedades:

(1) Si $K \subset X$ conexo por caminos y $f : X \to Y$ continua, entonces $f(K) \subset Y$ es conexo por caminos.
(2) Sea $\{X_\lambda\}$ una familia no vacía de subespacios conexos por caminos de X, se tiene que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \subset X$ es conexo por caminos si se cumple una de las propiedades siguientes:
   (a) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$
   (b) $\Lambda = \mathbb{N}$ y $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (c) $\Lambda = \{0, 1, \ldots, k\}$ y $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{k\}$.
(3) $X \times Y$ es conexo por caminos si y sólo si X e Y son conexos por caminos.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Consecuencia inmediata de la Observación 7.3.4 aplicada a $f|_K : K \to Y$.
(2) (a) Ver Ejemplo 7.3.6(4).
   (b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ elijamos $x_n \in X_n \cap X_{n+1}$, (que es conjunto no vacío por hipótesis). Por ser además X_{n+1} conexo por caminos, podemos tomar α_n un camino que una x_n con x_{n+1} en X_{n+1}. Sea $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, entonces supongamos $y \in X_{n_0}$. Como X_{n_0} es conexo por caminos existe α camino que una x_{n_0} con y. En tal caso, el camino $\alpha_0 * \alpha_1 * \cdots * \alpha_{n_0-1} * \alpha$ es un camino que une x_0 con y. Por lo tanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es conexo por caminos.
   (c) Basta tomar la familia $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$Y_n := \begin{cases} X_n & \text{si } n \leq k \\ X_k & \text{si } n \geq k \end{cases}$$

   y aplicar el apartado anterior.

(3)($\Rightarrow$) Dado que las proyecciones son continuas y sobreyectivas (ver Propiedad 5.1.4(1)), entonces por el apartado (1), cada factor debe ser conexo por caminos.

($\Leftarrow$) Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ dos puntos en el producto. Por ser X conexo por caminos existe $\alpha_1 : [0,1] \to X$ que une x_1 con x_2. Análogamente, existe $\alpha_2 : [0,1] \to Y$ que une y_1 con y_2. Así pues, la aplicación $\alpha : [0,1] \to X \times Y$ definida por $\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ es continua y une (x_1, y_1) con (x_2, y_2). □

PROPOSICIÓN 7.3.8. *Todo espacio conexo por caminos es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Como X es conexo por caminos y no vacío, sea $x \in X$. Entonces si C_x es la componente conexa por caminos que contiene a x, $C_x = X$. Ahora bien, $[0,1]$ es conexo y conexo por caminos, luego la imagen de un camino γ es conexa y conexa por caminos. Como $\gamma([0,1])$ es conexa, la imagen de cualquier camino ha de estar contenida en la componente conexa que contiene al punto inicial. Por lo tanto, para cada $y \in C_x$ existe un camino γ_y que une x con y y cuya imagen $A_y := \gamma_y([0,1]) \subset K_x$. Por lo tanto

$$X = C_x = \bigcup_{y \in C_x} A_y \subset K_x.$$

Luego la componente conexa que contiene a x es X, es decir, X es conexo. □

EJEMPLOS 7.3.9.

(1) Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo por caminos si y sólo si es un intervalo. Por el Ejemplo 7.3.6(1) sabemos que todo intervalo es conexo por caminos. Recíprocamente, si un subconjunto de $I \subset \mathbb{R}$ es conexo por caminos, entonces por la Proposición 7.3.8, es conexo y esto implica (Ejemplo 7.1.8(1)) que I es un intervalo.

(2) El recíproco de la Proposición 7.3.8 no es cierto. Para probarlo, utilizaremos el seno del topólogo, definido en el Ejemplo 7.2.12. Consideremos un camino $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = (0, y_0) \in X_2$. Sea $A := \gamma^{-1}(X_2) \subset [0,1]$. Sabemos que A es no vacío ya que $0 \in A$; además es cerrado ya que X_2 es cerrado y γ es continua.

Veamos que A es además abierto. Para ello, sea $t \in A$. Fijemos un entorno abierto de $\gamma(t) = (x, y)$ de la forma $U := (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ (ε suficientemente pequeño como en el Ejemplo 7.2.12) y V un entorno de t de la forma $V := (t-\delta, t+\delta)$ en $[0,1]$ tal que $\gamma(V) \subset U$. Por tanto, $\gamma(V)$ es conexo y está contenido en la componente conexa de $U \cap X$ que contiene

a $\gamma(t) \in X_2$, es decir en $U \cap X_2$. Así pues, $V \subset A$, y por tanto A es abierto. Como $[0,1]$ es conexo, $A = [0,1]$.

Por lo tanto el punto $(0, y_0)$ no puede unirse por ningún camino a un punto de X_1, y por tanto X no es conexa por caminos.

A continuación estudiaremos las propiedades de la descomposición de X en componentes conexas:

LEMA 7.3.10. *Sea A una clase de equivalencia de la relación "$\overset{c,X}{\sim}$". Entonces,*

(1) *Si B es conexo por caminos y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $B \subset A$.*
(2) *A es conexo por caminos.*

DEMOSTRACIÓN.

(1) Sea $x_0 \in A \cap B$, e $y \in B$. Como B es conexo por caminos, entonces $\Gamma(B, x_0, y) \neq \emptyset$. Por la Observación 7.3.2(2), $\Gamma(B, x_0, y) \subset \Gamma(X, x_0, y)$ y por tanto $\Gamma(X, x_0, y) \neq \emptyset$, y así $y \overset{c,X}{\sim} x_0$ con lo que $y \in A$.
(2) Obsérvese que este apartado no es trivial ya que sabemos que si $x, y \in A$, entonces $x \overset{c,X}{\sim} y$, pero queremos probar que A es conexo por caminos, es decir, que $x \overset{c,A}{\sim} y$.

Sea $x_0 \in X$ de modo que A es su clase de equivalencia. En tal caso, $\forall y \in A$ se tiene que $\Gamma(X, x_0, y) \neq \emptyset$. Así pues existe un camino $\alpha_y : [a,b] \to X$ que une x_0 e y. Como $\operatorname{im}(\alpha_y) = \alpha_y([a,b]) \subset X$ es imagen de un conexo por caminos por una aplicación continua, entonces es conexo por caminos. Por el apartado anterior $\operatorname{im}(\alpha_y) \subset A$ y así pues $\cup_{y \in A} \operatorname{im}(\alpha_y) = A$ es conexo por caminos (Propiedad 7.3.7(2)(a)) dado que $x_0 \in \cap_{y \in A} \operatorname{im}(\alpha_y)$. □

PROPIEDADES 7.3.11 (Componentes conexas por caminos). Sea $(X, \mathcal{T})$ E.T, entonces se tiene que

(1) X es unión disjunta de sus componentes conexas por caminos.
(2) Sea $x \in X$ y sea C_x la componente conexa por caminos que contiene a x, entonces C_x es el mayor conexo por caminos que contiene a x (por la relación de orden $\subset$).
(3) Si $A \subset X$ es un conexo por caminos no vacío, entonces existe una única componente conexa por caminos C tal que $A \subset C$.
(4) Si $X \approx Y$ entonces $X/\overset{c,X}{\sim} \approx Y/\overset{c,Y}{\sim}$. En particular, el cardinal del conjunto de componentes conexas por caminos es un invariante topológico.
(5) X es conexo por caminos si y sólo si posee una sola componente conexa por caminos.
(6) Toda componente conexa por caminos de X está contenida en una única componente conexa de X.

(7) Toda componente conexa de X es unión disjunta de componentes conexas por caminos de X.

Demostración.

(1) Es consecuencia de que " $\overset{c,X}{\sim}$ " es una relación de equivalencia.
(2) Por el Lema 7.3.10(2) sabemos que C_x es conexo por caminos. Además, sea A conexo por caminos de modo que $x \in A$, en tal caso $A \cap C_x \neq \emptyset$ y, por el Lema 7.3.10(1), $A \subset C_x$.
(3) Sea $x \in A$. Consideremos C_x la componente conexa que contiene a x. Como $x \in A \cap C_x$, se tiene que $A \subset C_x$ (Lema 7.3.10(1)). El hecho de que esta componente sea única viene dado como consecuencia de que X es unión disjunta de componentes conexas por caminos (apartado (1)).
(4) Es consecuencia inmediata del Ejercicio 5.4.8.
(5) Si X es conexo por caminos, entonces por el apartado (2), X es una componente conexa por caminos. Recíprocamente, si X es una componente conexa por canimos, por Lema 7.3.10(2), X es conexo por caminos.
(6) Sea C una componente conexa por caminos de X. Por la Proposición 7.3.8 C es conexo, y por tanto (Propiedad 7.1.15) C está contenido en una única componente conexa de X.
(7) Por el apartado anterior, si C es una componente conexa por caminos de X y K es una componente conexa de X de manera que $C \cap K \neq \emptyset$, entonces $C \subset K$. Por lo tanto, al ser " $\overset{c,X}{\sim}$ " relación de equivalencia, se tiene el resultado. □

Ejemplo 7.3.12. La demostración de que el seno del topólogo no es conexo por caminos (Ejemplo 7.3.9) demuestra precisamente que X_2 es componente conexa por caminos de X. Por otra parte, X_1 es el grafo de la aplicación continua $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. Como $(0, 1]$ es conexo por caminos (Ejemplo 7.3.6(1)), entonces X_1 también es conexo por caminos (Ejercicio 7.3.3). Por lo tanto X tiene exactamente dos componentes conexas por caminos: X_1 y X_2, mientras que sólo una componente conexa (Ejemplo 7.2.12). Obsérvese además que X_1 es componente conexa por caminos, pero no es cerrado en X.

Ejercicios

Ejercicio 7.3.1 Demuestra que " $\overset{c.X}{\sim}$ " es una relación de equivalencia.

Ejercicio 7.3.2 Demuestra que $\alpha * \beta$ es efectivamente un camino, es decir, que es una aplicación continua.

Ejercicio 7.3.3 Sea $f : X \to Y$ aplicación continua y X E.T. conexo por caminos. Demuestra que $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ es conexo por caminos.

Ejercicio 7.3.4 ¿Es $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ conexo por caminos? ¿Y $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$? Considera ahora $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ ¿es conexo por caminos? ¿Y el conjunto de elementos de $\mathbb{R}^2$ que tienen al menos una coordenada racional?

Ejercicio 7.3.5 Considera $\mathbb{R}$ con la topología conumerable. Estudia la conexión, conexión local y conexión por caminos de este espacio.

Ejercicio 7.3.6 Sean X e Y dos espacios topológicos. Consideremos el espacio topológico

$$X \sqcup Y \sqcup (X \times Y \times [0, 1])$$

donde $\sqcup$ representa la suma topológica. Definamos entonces la relación de equivalencia que identifica

$$(x, y, 0) \sim x \qquad (x, y, 1) \sim y$$

El **join de** X **e** Y es el espacio cociente

$$X \star Y = (X \sqcup Y \sqcup (X \times Y \times [0, 1]))/\sim$$

Demuestra que $X \star Y$ es siempre conexo por caminos.

Tema 7.4. Conexión local por caminos

DEFINICIÓN 7.4.1. Un espacio topológico X se dice **localmente conexo por caminos** si todo punto posee una base de entornos conexos por caminos.

EJEMPLOS 7.4.2. (1) Los razonamientos utilizados en el Ejemplo 7.2.3 prueban que los espacios discretos, intervalos y $\mathbb{R}^n$ son localmente conexos. Análogamente, dado que ni $\mathbb{Q}$, ni el discontinuo de Cantor ni contienen intervalos ni poseen la topología discreta, entonces no pueden ser locamente conexos por caminos.

(2) Sea $F : U \to V$ una aplicación diferenciable, $U \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in V \subset \mathbb{R}^m$, abiertos tal que $\forall x \in X := F^{-1}(0)$ se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita. Entonces X es localmente conexo.

EJEMPLO 7.4.3. Utilizando proyecciones estereográficas desde el polo norte y el polo sur, análogamente al Ejemplo 7.2.10 se tiene que $U_1 := \mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ y $U_2 := \mathbb{S}^n \setminus \{Q\}$ son abiertos locamente conexos por caminos que recubren $\mathbb{S}^n$. Así pues, usando la Proposición 7.4.91, se obtiene que $\mathbb{S}^n$ es localmente conexo por caminos.

PROPOSICIÓN 7.4.4. *Si X es localmente conexo por caminos, entonces es localmente conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Las bases de entornos conexos por caminos son de hecho bases de entornos conexos como consecuencia de la Proposición 7.3.8. □

LEMA 7.4.5. *Si X es localmente conexo por caminos, sus componentes conexas por caminos son abiertos.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que la componente conexa por caminos que contiene a $x \in X$ arbitrario es un entorno de x. Pero dado que X es localmente conexo por caminos, tenemos un entorno U de x que es conexo por caminos. Por la Proposición 7.3.10(1) tenemos que $x \in U \subset C_x$, siendo C_x la componente conexa que contiene a x. □

Este resultado nos permite probar que la conexión y la conexión por caminos coinciden en espacios localmente conexos por caminos:

PROPOSICIÓN 7.4.6. *Un espacio topológico conexo y localmente conexo por caminos es conexo por caminos.*

DEMOSTRACIÓN. Por el sabemos que las componentes conexas por caminos son conjuntos abiertos. Como X es unión disjunta de sus componentes conexas,

cualquiera de ellas será también cerrada, ya que es el complementario de el resto de componentes conexas por caminos. En símbolos, si $x \in X$

$$C_x = \bigcup_{y \in X \setminus C_x} C_y$$

siendo C_z la componente conexa por caminos que contiene al punto z que son abiertos.

Pero como X es conexo no existes abiertos cerrados no vacios y propios, $C_x = X$, i.e., X es conexo por caminos. □

Recordando que las componentes conexas por caminos son subconjuntos de las componentes conexas y aplicando un razonamiento análogo al caso anterior, se prueba que:

PROPOSICIÓN 7.4.7. *Si X es localmente conexo por caminos, las componentes conexas por caminos coinciden con las componentes conexas.*

EJEMPLO 7.4.8. Consideremos el **círculo de Varsovia**, es decir, el siguiente conjunto. Dicho círculo nos da un ejemplo de espacio conexo por caminos que no es localmente conexo por caminos.

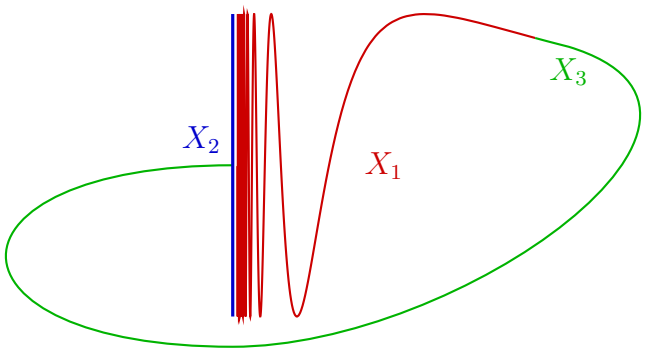


FIGURA 7.2. Círculo de Varsovia

TAREA 19. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Consideremos un isomorfismo lineal $\Phi : V \to \mathbb{R}^n$.*

(ℙ1) *Sea $\mathcal{T}$ la única topología para la que Φ es un homeomorfismo. Sea $\Psi : V \to \mathbb{R}^n$ otro isomorfismo; demuestra que también es homeomorfismo.*

Fijamos a partir de ahora esta topología. Consideramos la siguiente relación $\mathcal{R}$ en $V \setminus \{0\}$. Sean $v, w \in V \setminus \{0\}$:

$$v \mathcal{R} w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tal que } w = \lambda v.$$

(ℙ2) *Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.*

Denotamos $\mathbb{P}(V) := (V \setminus \{0\})/\mathcal{R}$ *y* $\pi_V : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ *la aplicación cociente.*

(ℙ3) *Demuestra que si* V, W *son* $\mathbb{R}$*-espacios vectoriales de dimensión* n*, entonces* $\mathbb{P}(V)$ *y* $\mathbb{P}(W)$ *son homeomorfos.*

Denotaremos $\mathbb{RP}^{n-1} := \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ *y* $\pi_{n-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ *la aplicación cociente.*

(ℙ4) *Demuestra que* π_V *es abierta.*

(ℙ5) *Demuestra que* $\mathbb{P}(V)$ *es Hausdorff.*

(ℙ6) *Demuestra que la restricción de* π_{n-1} *a* $\mathbb{S}^{n-1}$ *es una identificación.*

(ℙ7) *Demuestra que* $\mathbb{P}(V)$ *es compacto.*

A la clase de equivalencia de $(x_1, \ldots, x_n)$ *en* $\mathbb{RP}^{n-1}$ *se le denota* $[x_1 : \cdots : x_n]$*, es decir,*

$$[x_1 : \cdots : x_n] = [tx_1 : \cdots : tx_n], \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$*, denotemos*

$$U_i := \{[x_1 : \cdots : x_n] \mid x_i \neq 0\}.$$

(ℙ8) *Demuestra que* U_i *es abierto en* $\mathbb{RP}^{n-1}$ *y es homeomorfo a* $\mathbb{R}^{n-1}$*.*

(ℙ9) *Demuestra que* $\overline{U_j} = \mathbb{RP}^{n-1}$*.*

(ℙ10) *Demuestra que* $\mathbb{RP}^{n-1}$ *es conexo por caminos y localmente conexo por caminos.*

(ℙ11) *Demuestra que* $\mathbb{RP}^{n-1}$ *es* IIAN *y por tanto* IAN *.*

(ℙ12) *Demuestra que* $\mathbb{P}^1$ *es homeomorfo a* $\mathbb{S}^1$*.*

TAREA 20. *Responde a las preguntas de la Tarea* 19 *cambiando* $\mathbb{R}$ *por* $\mathbb{C}$ *.*

TAREA 21. *Sea*

$$\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) := \{P \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \mid \det P \neq 0\}.$$

(1) *Demuestra que* $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ *es abierto de* $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$*.*

(2) *Usa la aplicación* det *para demostrar que* $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ *no es conexo.*

Denotemos $\mathrm{GL}^+(n;\mathbb{R})$ *el subgrupo de matrices de* $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ *de determinante positivo.*

(3) *Demuestra que* $\mathrm{GL}^+(1;\mathbb{R})$ *es conexo por caminos.*

(4) *Deduce por inducción que* $\mathrm{GL}^+(n;\mathbb{R})$ *es conexo por caminos.*

(5) *Finalmente calcúla las componentes conexas por caminos de* $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$*.*

Ejercicios

Ejercicio 7.4.1 Las demostraciones de las Proposiciones 7.2.8 y 7.1.10 cambiando la palabra "conexo" por "conexo por caminos" permiten demostrar los análogos para conexión por caminos. Demuestra:

PROPOSICIÓN 7.4.9. *Sean X e Y* E.T*, entonces:*

1. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua sobreyectiva y abierta, y X es localmente conexo por caminos, entonces Y también es localmente conexo por caminos.*
2. *Si $X_\lambda \subset X$ son subespacios abiertos localmente conexos por caminos de X, entonces $\cup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es localmente conexo por caminos.*
3. *$X \times Y$ es localmente conexo por caminos si y sólo si X e Y son localmente conexos por caminos.*

Ejercicio 7.4.2 Estudia todas las propiedades de conexión del espacio topológico de Sierpinski. Recuerda que en ese espacio $X = \{0, 1\}$ y su topología tiene como único abierto propio a $\{0\}$.

Ejercicio 7.4.3 Sea X un conjunto cualquiera no vacío y sea τ la topología del punto incluido para cierto $p \in X$. Estudia todas las propiedades de conexión de este espacio. Haz lo mismo con la topología del punto excluído.

Ejercicio 7.4.4 Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si lo dotamos de la topología uniforme, definida por la métrica

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{máx}\{|x_i - y_i|\}_{i\in\mathbb{N}},$$

demuestra $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que están en la misma componente conexa si $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ está acotada. Observa que es suficiente considerar el caso $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. ¿Qué ocurre con el resto de propiedades de conexión?

Considera ahora que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ está dotado de la topología caja. Demuestra que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que están en la misma componente conexa si coinciden a partir de cierto índice. Para probarlo puedes probar que si no coinciden a partir de cierto momento, existe un homeomorfismo de manera que una está acotada y la otra no (y compara esta topología con la anterior)

Ejercicio 7.4.5 Sea X un espacio localmente conexo por caminos. Demuestra que todo abierto de X conexo es conexo por caminos.

Apéndice A

Generalidades de teoría de conjuntos

No definiremos explícitamente el concepto de conjunto. Pensaremos en ellos como *colecciones de objetos*.

Tema A.1. Conceptos básicos

Repasaremos las definiciones más básicas de teoría de conjuntos:

DEFINICIONES A.1.1. Sean A, B y X conjuntos.

(Set1) *Subconjunto*: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \in B)$.

(Set2) *Conjunto de las partes de un conjunto*: $\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$.

(Set3) *Igualdad de conjuntos*: $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$.

(Set4) *Conjunto vacío*: $\emptyset$ es el único conjunto que cumple la propiedad de que no contiene ningún elemento.

(Set5) *Unión de conjuntos*: $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\})$.

(Set6) *Intersección*: $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\})$.

(Set7) *Conjuntos disjuntos*: A y B son disjuntos si $A \cap B = \emptyset$. En ocasiones, si A y B son disjuntos, para escribir $A \cup B$ resaltando este hecho, escribiremos $A \overset{\emptyset}{\cup} B$.

(Set8) *Unión disjunta de conjuntos*:

$$A \coprod B := \{(a,1) \mid a \in A\} \cup \{(b,2) \mid b \in B\}.$$

(Set9) *Complementario de A en X*: $A^c := \{x \in X \mid x \notin A\}$.

(Set10) *Diferencia de dos conjuntos*: $A \setminus B := A \cap B^c$; el complementario de A en X es $A^c = X \setminus A$.

(Set11) *Producto cartesiano*: $A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Ejercicio A.1.1 Sean $A, B, C \subset X$ todos ellos conjuntos; las siguientes son sencillas consecuencias de las definiciones anteriores.

(1) Si $A \subset B$, entonces
   (a) $A \cup B = B$,
   (b) $A \cap B = A$.

(2) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

(3) Si $A \subset B$ y $A \subset C$, entonces $A \subset B \cap C$.

(4) Si $A \subset C$ y $B \subset C$, entonces $A \cup B \subset C$.

(5) Si $A \subset B$, entonces
   (a) $A \subset A \cup C \subset B \cup C$,
   (b) $A \cap C \subset B \cap C \subset B$.

(6) Si $x \in A \cup B$ y $x \notin A$, entonces $x \in B$ (es decir, $(A \cup B) \cap A^c \subset B$).

(7) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$.

DEFINICIÓN A.1.2. A la cuaterna $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, {}^c)$ se le denomina *álgebra de Boole* de X.

PROPIEDADES A.1.3 (Álgebra de Boole). Sean $A, B, C \subseteq X$ conjuntos.

(Bl1) **Propiedad conmutativa de la unión**: $A \cup B = B \cup A$.

(Bl2) **Propiedad conmutativa de la intersección**: $A \cap B = B \cap A$.

(Bl3) **Propiedad asociativa de la unión**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(Bl4) **Propiedad asociativa de la intersección**: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(Bl5) **Propiedad cancelativa de la unión respecto de la intersección**:

$$A \cup (B \cap A) = A.$$

(Bl6) **Propiedad cancelativa de la intersección respecto de la unión**:

$$A \cap (B \cup A) = A.$$

(Bl7) **Propiedades del complementario**:

(a) $(A^c)^c = A$,

(b) $A \cap A^c = \emptyset$,

(c) $A \overset{\emptyset}{\cup} A^c = X$,

(d) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$ (por tanto $A = B \Leftrightarrow A^c = B^c$).

(Bl8) **Leyes de Morgan**:

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(Bl9) **Propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(Bl10) **Propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

DEMOSTRACIÓN.

(Bl1) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$.

(Bl2) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$.

(Bl3) $x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$.

(Bl4) $x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$.

(Bl5) ($\subseteq$) Dado que $A \subset A$ y $A \cap B \subset A$, entonces $A \cup (A \cap B) \subset A$ (Ejercicio A.1.1(4)).

($\supseteq$) Dado que $A \subset A$, entonces $A \subset A \cup (A \cap B)$ (Ejercicio A.1.1(a)).

(Bl6) ($\subseteq$) Dado que $A \subset A$, entonces $A \cap (A \cup B) \subset A$ (Ejercicio A.1.1(b)).

($\supseteq$) Dado que $A \subset A$ y $A \subset A \cup B$, entonces $A \subset A \cap (A \cup B)$ (Ejercicio A.1.1(3)).

(Bl7) (a) $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$.

(b) Supongamos $x \in A \cap A^c \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A$, lo que da lugar a contradicción. Por lo tanto $A \cap A^c$ no tiene elementos, es decir, $A \cap A^c = \emptyset$.

(c) Para probar $X = A \cup A^c$, basta demostrar $X \subset A \cup A^c$. Sea $x \in X$, entonces $x \in A \vee x \notin A$, por lo tanto $x \in A \cup A^c$. Además la unión es disjunta por el apartado anterior.

(d)($\Rightarrow$) $x \in B^c \Rightarrow x \notin B$. Por lo tanto $x \notin A$ (ya que si $x \in A$ se tendría que $x \in B$ lo cual es contradictorio).

($\Leftarrow$) $B^c \subset A^c \Rightarrow (A^c)^c \subset (B^c)^c$ por el caso anterior. Utilizando el apartado (a), se tiene que $A \subset B$.

(Bl8) (a) ($\subseteq$) $(A \cup B)^c \subset A^c$ por (d), ya que $A \subset A \cup B$. Análogamente $(A \cup B)^c \subset B^c$. Por lo tanto $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ (Ejercicio A.1.1(3)).

($\supseteq$) Supongamos que $x \in A^c \cap B^c$, entonces $x \notin A \wedge x \notin B$, luego $x \notin A \cup B$, y así $x \in (A \cup B)^c$.

(b) Por (a), $(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c$. Así pues, utilizando (a) y (d), se tiene que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(Bl9) ($\subseteq$) Sea $x \in A \cup (B \cap C)$. Si $x \in A$, entonces $(x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$, es decir, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Si $x \notin A$, entonces $x \in B \cap C$ (Ejercicio A.1.1(6)), por lo tanto $(x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$, es decir, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

($\supseteq$) Supongamos que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup (B \cap C)$. Si $x \notin A$, como $x \in A \cup B$, entonces $x \in B$ (Ejercicio A.1.1(6)). Del mismo modo, como $x \in A \cup C$, entonces $x \in C$. Por lo tanto $x \in B \cap C$.

(Bl10) Utilizando las Leyes de Morgan se tiene:

$$\begin{aligned}\big(A \cap (B \cup C)\big)^c &= A^c \cup (B^c \cap C^c) = (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \\ &= (A \cap B)^c \cap (A \cap C)^c = \big((A \cap B) \cup (A \cup C)\big)^c.\end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando (d), se tiene el resultado.

□

Ejercicio A.1.2 Demuestra las siguientes fórmulas:

(1) $(B \cap A) \setminus (C \cap A) = (B \setminus C) \cap A$.

(2) Si $A \subset B$ entonces $A \setminus C \subset B \setminus C$. Deduce de esto que

$$A = B \Rightarrow A \setminus C = B \setminus C.$$

(3) $A \cap B = \emptyset$ si y solo si $A \subset B^c$. Deduce entonces que

$$A \cap B = C \Leftrightarrow (A \subset B^c \cup C) \wedge (C \subset A \cap B).$$

(4) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

(5) Si $A_1 \subset A_2$ y $B_1 \subset B_2$, entonces $A_1 \cap B_1 \subset A_2 \cap B_2$.

(6) $(A \overset{\emptyset}{\cup} B) \setminus B = A$. Deduce de esto que

$$A_1 \overset{\emptyset}{\cup} B = A_2 \overset{\emptyset}{\cup} B \Rightarrow A_1 = A_2.$$

(7) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

(8) (a) $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$.

(b) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$. Deduce de esto:

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \emptyset \Leftrightarrow (A_1 \cap A_2 = \emptyset) \vee (B_1 \cap B_2 = \emptyset).$$

(9) $(A \times B)^c = (A \times B^c) \overset{\emptyset}{\cup} (A^c \times B) \overset{\emptyset}{\cup} (A^c \times B^c)$.

Observación A.1.4. Obsérvese que el recíproco del Ejercicio A.1.2(2) no es cierto. Por ejemplo, si $C \setminus B \neq \emptyset$, y definimos $A = B \cup C$, entonces se tiene que $A \setminus C \subset B \setminus C$, mientras que $A \not\subset B$.

Tema A.2. Aplicaciones

DEFINICIÓN A.2.1. Una *correspondencia* entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Una *aplicación* f entre dos conjuntos A y B es una correspondencia que cumple que $\forall a \in A$, $\exists! b \in B$ tal que $(a, b) \in f$; es decir, a cada $a \in A$ se le asocia el único elemento $b := f(a) \in B$ que cumple $(a, b) \in f$.

DEFINICIÓN A.2.2. Sea f una aplicación entre los conjuntos A y B (en adelante a esta situación la denotaremos por $f : A \to B$). El conjunto A se denomina *conjunto de partida* (o *dominio*) y el conjunto B se denomina *conjunto de llegada* (o *conjunto final*). En el caso en que el espacio de llegada de una aplicación sea un conjunto de números se habla de *función*.

DEFINICIÓN A.2.3. Sea $f : A \to B$ aplicación, $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B$, entonces definimos

(Im1) *Conjunto imagen* de A_1: $f(A_1) := \{b \in B \mid \exists a \in A_1 \text{ t.q. } f(a) = b\}$.
(Im2) *Conjunto imagen inversa* de B_1: $f^{-1}(B_1) := \{a \in A \mid f(a) \in B_1\}$.

OBSERVACIÓN A.2.4. Pensándolo de manera más conceptual, la definición de conjunto imagen directa produce, para cada subconjunto A_1 de A, un (y solo uno) subconjunto $f(A_1)$ de B. Es decir, define una aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &\xrightarrow{\mathcal{P}(f)} \mathcal{P}(B) \\ A_1 &\longmapsto \mathcal{P}(f)(A_1) := f(A_1). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Del mismo modo, la definición de conjunto imagen inversa produce, para cada subconjunto B_1 de B, un subconjunto (y solo uno) $f^{-1}(B_1)$ de A. Es decir, define una aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B) &\xrightarrow{\bar{\mathcal{P}}(f)} \mathcal{P}(A) \\ B_1 &\longmapsto \bar{\mathcal{P}}(f)(B_1) := f^{-1}(B_1). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Ejercicio A.2.1 Sea $f : A \to B$ aplicación. Demuestra las siguientes consecuencias de las definiciones de conjunto imagen directa e imagen inversa.

(1) Si $A_1 \subset A_2 \subset A$, entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$.
(2) Si $B_1 \subset B_2 \subset B$, entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
(3) $f(\emptyset) = \emptyset$.
(4) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
(5) $f^{-1}(B) = A$.

(6) Si $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B$, entonces $f(A_1) \subset B_1 \Leftrightarrow A_1 \subset f^{-1}(B_1)$.

PROPIEDADES A.2.5 (Aplicaciones). Sea $f: A \to B$ una aplicación, $A_1, A_2 \subseteq A$ y $B_1, B_2 \subseteq B$ entonces:

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
(2) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.
(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
(4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
(5) $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$.
(6) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$.
(7) $f^{-1}(B_1^c) = (f^{-1}(B_1))^c$.
(8) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

DEMOSTRACIÓN.

(1) ($\subseteq$) Sea $b \in f(A_1 \cup A_2)$, entonces existe $a \in A_1 \cup A_2$ de modo que $f(a) = b$. Así pues, si $a \in A_1$, entonces $b = f(a) \in f(A_1)$ (y si $a \in A_2$, entonces $b = f(a) \in f(A_2)$). Por tanto $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
($\supseteq$) Dado que $A_1 \subset A_1 \cup A_2$, entonces $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$ por el Ejercicio A.2.1(1). Análogamente $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. Así pues $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ por el Ejercicio A.1.1(4)).

(2) Como $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, se tiene que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$ (Ejercicio A.2.1(1)). Análogamente $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$, y así pues $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ (Ejercicio A.1.1(3)).

(3) ($\subseteq$) Sea $a \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$, entonces por definición $f(a) \in B_1 \cup B_2$. Si $f(a) \in B_1$, entonces $a \in f^{-1}(B_1)$, mientras que si $f(a) \in B_2$, entonces $a \in f^{-1}(B_2)$. Por lo tanto $a \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
($\supseteq$) Como $B_1 \subset B_1 \cup B_2$, entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ (Ejercicio A.2.1(2)). Análogamente $f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. Por lo tanto $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ (Ejercicio A.1.1(4)).

(4) ($\subseteq$) Dado que $B_1 \cap B_2 \subset B_1$ y $B_1 \cap B_2 \subset B_2$, entonces, como anteriormente se tiene que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1)$, que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_2)$ y, por tanto, que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
($\supseteq$) Sea $a \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, entonces $f(a) \in B_1$ y $f(a) \in B_2$, es decir, $f(a) \in B_1 \cap B_2$. Por lo tanto $a \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

(5) Sea $b \in f(f^{-1}(B_1))$, entonces por definición, existe $a \in f^{-1}(B_1)$ de modo que $f(a) = b$. Como $a \in f^{-1}(B_1)$, entonces, por definición $f(a) \in B_1$. Por lo tanto, $b = f(a) \in B_1$.

(6) Sea $a \in A_1$, entonces $f(a) \in f(A_1)$ y por tanto $a \in f^{-1}(f(A_1))$.

(7) Obsérvese que $x \in f^{-1}(B_1^c)$ si y solo si $f(x) \in B_1^c$, es decir, $f(x) \notin B_1$. Esto es equivalente a que $x \notin f^{-1}(B_1)$, es decir, $x \in (f^{-1}(B_1))^c$.
(8) Por definición $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2^c)$, ahora bien, por las propiedades (4) y (7) se tiene que $f^{-1}(B_1 \cap B_2^c) = f^{-1}(B_1) \cap (f^{-1}(B_2))^c = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$. □

Ejercicio A.2.2 Encuentra ejemplos de aplicaciones (es decir, describe el conjunto inicial, el final y la aplicación) que cumplan las inclusiones de los apartados (2), (5) y (6) de las Propiedades A.2.5 de manera estricta (es decir, que no se dé la igualdad).

Definición A.2.6. Diremos que una aplicación $f : A \to B$ es *inyectiva* si $\forall a, a' \in A$ $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$. Diremos que una aplicación $f : A \to B$ es *sobreyectiva* (*suprayectiva* o simplemente *sobre*) si $f(A) = B$. Diremos que una aplicación $f : A \to B$ es *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva.

Observación A.2.7. Existen aplicaciones que no son ni inyectivas ni sobreyectivas, por ejemplo si $A = \{0, -1, 1\}$ y $f : A \to A$ cumple que $f(x) = x^2$.

Ejercicio A.2.3 Demuestra que si $f : A \to B$ es sobreyectiva, entonces:

(1) $f^{-1}(B_1) = \emptyset \Leftrightarrow B_1 = \emptyset$.
(2) $f^{-1}(B_1) = A \Leftrightarrow B_1 = B$.

(Compara con el Ejercicio A.2.1 (4) y (5)). Otra manera de ver este resultado es el siguiente. Un subconjunto $A_1 \subset A$ se dice *propio* si $\emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq A$. Por lo tanto, se deduce que si $f : A \to B$ es suprayectiva, entonces $B_1 \subset B$ es propio si y sólo si $f^{-1}(B_1) \subset A$ es propio.

Definición A.2.8. Se define la *aplicación identidad* de A como aquella aplicación $\mathbf{1}_A : A \to A$ que verifica $\mathbf{1}_A(a) = a$ $\forall a \in A$.

Definición A.2.9. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son aplicaciones, se puede definir una tercera aplicación $(g \circ f) : A \to C$ del siguiente modo $(g \circ f)(a) := g(f(a))$. Dicha aplicación $(g \circ f)$ se denomina f *compuesto con* g y también *composición de* f *y* g.

Definición A.2.10. Si $C \subseteq A$ entonces definimos la *inclusión* de C en A como la aplicación $i := \mathbf{i}_{A,C} : C \hookrightarrow A$, tal que $i(c) := c$, $\forall c \in C$. Si $f : A \to B$ definimos la *restricción* de f a C como la aplicación $f|_C : C \to B$ que cumple $f|_C(c) = f(c)$ $\forall c \in C$, es decir $f|_C := f \circ i$.

PROPIEDADES A.2.11. Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ aplicaciones. Demuestra que:

(i) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
(ii) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
(iii) Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.
(iv) $\mathbf{1}_A$ es biyectiva.
(v) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.
(vi) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

DEMOSTRACIÓN.

(i) Sea $c \in C$; por ser g sobreyectiva, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Análogamente, por ser f sobreyectiva, existe $a \in A$ de modo que $f(a) = b$. Por lo tanto $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.
(ii) Sean $a, a' \in A$ de modo que $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. Por lo tanto $g(b) = g(b')$, donde $f(a) = b$ y $f(a') = b'$. Como g es inyectiva, entonces $b = b'$, es decir, $f(a) = f(a')$. Ahora, como f es inyectiva, se tiene que $a = a'$.
(iii) Es consecuencia de (i) y (ii).
(iv) Veamos que $\mathbf{1}_A$ es inyectiva. Para ello, si $a, a' \in A$ y $\mathbf{1}_A(a) = \mathbf{1}_A(a')$, entonces, por definición $a = \mathbf{1}_A(a) = \mathbf{1}_A(a') = a'$. La aplicación $\mathbf{1}_A$ es trivialmente sobreyectiva, ya que $\mathbf{1}_A(a) = a \ \forall a \in A$.
(v) Si g no fuera sobreyectiva, entonces $g(B) \subsetneqq A$, por lo tanto $g(f(A)) \subset g(B) \subsetneqq A$, por lo tanto $g \circ f$ no sería sobreyectiva.
(vi) Si f no fuera inyectiva, entonces existirían $a, a' \in A$ con $a \neq a'$ y $f(a) = f(a')$, por lo tanto $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a'))(g \circ f)(a')$, es decir, $g \circ f$ no sería inyectiva. □

Ejercicio A.2.4 Sea $f: A \to B$ una aplicación. Prueba las siguientes propiedades:

(a) Si f es inyectiva y $A_1 \subset A$, entonces $f(A_1^c) = f(A) \setminus f(A_1)$.
(b) Si f es inyectiva y $A_1, A_2 \subset A$, entonces $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
(c) Si f es biyectiva y $A_1 \subset A$, entonces $f(A_1^c) = f(A_1)^c$.
(d) Sea $\mathcal{A} := \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ familia de subconjuntos de A tal que $\cup \mathcal{A} = A$, $f(A_{\lambda_1}) \cap f(A_{\lambda_2}) = \emptyset$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ y $f|_{A_\lambda}$ es inyectiva $\forall \lambda \in \Lambda$, entonces f es inyectiva.

Ejercicio A.2.5 Sea $f: A \to B$ una aplicación biyectiva. Consideremos la siguiente correspondencia $g \subset B \times A$ definida por $(b, a) \in g \Leftrightarrow f(a) = b$. Demuestra que g es una aplicación.

DEFINICIÓN A.2.12. La aplicación descrita en el Ejercicio A.2.5 se denotará por $f^{-1}: B \to A$ y se denomina *aplicación inversa* de $f: A \to B$.

Ejercicio A.2.6 Sean $f: A \to B$, $g: B \to C$ aplicaciones biyectivas. Demuestra que:

(1) $f^{-1}: B \to A$ es una aplicación biyectiva,
(2) $(f^{-1})^{-1} = f$,
(3) $\mathbf{1}_A^{-1} = \mathbf{1}_A$,
(4) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$,
(5) (a) $(f^{-1} \circ f) = \mathbf{1}_A$,
    (b) $(f \circ f^{-1}) = \mathbf{1}_B$.
(6) Si $C = A$, f es biyectiva y $f \circ g = \mathbf{1}_B$, entonces $g = f^{-1}$.
(7) Si $C = A$, $f \circ g = \mathbf{1}_B$ y $g \circ f = \mathbf{1}_A$, entonces f es una biyección y $g = f^{-1}$

Ejercicio A.2.7 Completa los apartados (5) y (6) de las Propiedades A.2.5 del siguiente modo.

(1) $f(f^{-1}(B_1)) = B_1 \Leftrightarrow B_1 \subset f(A)$. Deduce que si f sobre $\Rightarrow (f^{-1}(B_1)) = B_1$.
(2) Si $f^{-1}(b) \subset A_1 \subset A$ siempre que $f^{-1}(b) \cap A_1 \neq \emptyset$, $\Rightarrow A_1 = f^{-1}(f(A_1))$.
(3) Si $f|_{f^{-1}(f(A_1))}$ es inyectiva, entonces $A_1 = f^{-1}(f(A_1))$.
(4) f es inyectiva $\Leftrightarrow A_1 = f^{-1}(f(A_1))$ $\forall A_1 \subset A$.
(5) Si f es biyectiva $f^{-1}(f(A_1)) = A_1$, $\forall A_1 \subset A$ y $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$, $\forall B_1 \subset B$.

Ejercicio A.2.8 Demuestra las siguientes propiedades:

(1) Si $f: A \to B$, $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B$, entonces $f|_{A_1}^{-1}(B_1) = A_1 \cap f^{-1}(B_1)$.
(2) Si $f: A \to B$, $g: B \to C$ y $C_1 \subset C$, entonces $(g \circ f)^{-1}(C_1) = f^{-1}(g^{-1}(C_1))$ (observa que esta propiedad no se deduce del Ejercicio A.2.6((4)) ya que no sabemos que existan las aplicaciones inversas de f ni de g).
(3) Si $f: A \to B$ es biyectiva, entonces:
    (a) $A_1 = A_2$ si y solo si $f(A_1) = f(A_2)$
    (b) $B_1 = B_2$ si y solo si $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$
    (c) Las aplicaciones $\mathcal{P}(f)$ y $\bar{\mathcal{P}}(f)$ (Observación A.2.4) son biyecciones.

OBSERVACIÓN A.2.13. Llegados a este punto y antes de causar un problema de conceptos (como tratamos de evitar en el comentario realizado en el Ejercicio A.2.8(2)), conviene aclarar la notación utilizada en Definición A.2.3(Im2) para la imagen inversa $f^{-1}(B_1)$ del conjunto $B_1 \subset B$ por la aplicación $f: A \to B$. Obsérvese que este conjunto siempre existe, aunque la aplicación f no sea biyectiva

y por tanto no tenga inversa. Podría plantearse en principio el siguiente problema de notación: supongamos ahora que f es biyectiva y que denotamos por f^{-1} a su aplicación inversa. Entonces la imagen directa de B_1 por la aplicación f^{-1} tendría la misma notación $f^{-1}(B_1)$. En realidad la ambigüedad no es tal ya que *ambos conjuntos coinciden*; $\{x \in A \mid f(x) \in B_1\} = \{f^{-1}(y) \mid y \in B_1\}$.

Demostración. Se hace por doble contenido.

($\subset$) Sea $x \in \{x \in A \mid f(x) \in B_1\}$. Llamemos $y = f(x) \in B_1$, entonces $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ por definición de aplicación inversa, por lo tanto $x \in \{f^{-1}(y) \mid y \in B_1\}$.

($\supset$) Sea $x \in \{f^{-1}(y) \mid y \in B_1\}$. Eso significa que existe $y \in B_1$ de modo que $x = f^{-1}(y)$. Por definición de aplicación inversa esto significa que $f(x) = y$ y por tanto $f(x) \in B_1$, luego $x \in \{x \in A \mid f(x) \in B_1\}$. □

En otras palabras, acabamos que probar que si g es la aplicación inversa de f, entonces

$$f^{-1}(B_1) = g(B_1). \tag{A.3}$$

Del mismo modo, llamando g a f^{-1}, se tiene que $f = g^{-1}$ (Ejercicio A.2.6(2)) y entonces, aplicando (A.3) se obtiene $g^{-1}(B_1) = f(B_1)$, es decir,

$$f(B_1) = (f^{-1})^{-1}(B_1). \tag{A.4}$$

Ejemplo A.2.14. Sea $f : A \to B$ una aplicación biyectiva y $A_1, A_2 \subset A$, entonces, por (A.3) (Observación A.2.13) se tiene que $f(A_1 \cap A_2) = (f^{-1})^{-1}(A_1 \cap A_2)$. Aplicando la Propiedad A.2.5(5) tenemos que

$$(f^{-1})^{-1}(A_1 \cap A_2) = (f^{-1})^{-1}(A_1) \cap (f^{-1})^{-1}(A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

Por lo tanto hemos probado que

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2). \tag{A.5}$$

Hemos visto en el Ejercicio A.2.4(b) que esta propiedad es cierta si f es inyectiva.

Ejemplo A.2.15. Consideremos $\mathbf{1}_X : X \to X$ la aplicación identidad. Sea $A \subset X$, entonces por definición $\mathbf{1}_X(A) = \{\mathbf{1}_X(x) \in X \mid x \in A\}$ y como $\mathbf{1}_X(x) = x$, se tiene que $\mathbf{1}_X(A) = \{x \mid x \in A\} = A$, es decir,

$$\mathbf{1}_X(A) = A.$$

Ahora, supongamos que queremos calcular $\mathbf{1}_X^{-1}(A)$. Por la Observación A.2.13 (A.3), como $\mathbf{1}_X^{-1} = \mathbf{1}_X$ (Ejercicio A.2.6(3)) se tiene que

$$\mathbf{1}_X^{-1}(A) = \mathbf{1}_X(A) = A.$$

Ejercicio A.2.9 Sea $f : A \to B$ aplicación y $B \subset C$. Se puede definir una aplicación $\bar{f} : A \to C$ del siguiente modo $\bar{f}(a) = f(a)$. Demuestra que si f es inyectiva entonces $\bar{f}$ también es inyectiva.

Ejercicio A.2.10 Sea $f : A \to B$ una aplicación inyectiva y $A_1 \subset A$, entonces $f|_{A_1}$ también es inyectiva. Sea $A_1 \subset A$. y consideremos la **inclusión** $i_{A,A_1} : A_1 \to A$. Demuestra que si $B \subset A$, entonces $i^{-1}_{A_1,A}(B) = A_1 \cap B$.

Ejercicio A.2.11 Sea $f : A \to B$ aplicación. Se puede definir también otra aplicación $\bar{f} : A \to f(A)$ del siguiente modo $\bar{f}(a) = f(a)$. Demuestra los siguientes resultados sobre la aplicación $\bar{f}$:

(1) Si f es inyectiva entonces $\bar{f}$ es inyectiva.
(2) $\bar{f}$ es sobreyectiva.

Ejercicio A.2.12 Sea $A \subset X$; se define la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccl} \chi_A : & X & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \chi_A(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases} \end{array} \tag{A.6}$$

La aplicación χ_A se suele denominar *aplicación característica* de A. Demuestra que $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$, que $\chi_A^{-1}(\{0\}) = A^c$ y que χ_A es sobreyectiva si y solo si $\emptyset \neq A \subsetneq X$.

Tema A.3. Operaciones extendidas de conjuntos

En este tema extenderemos las operaciones de conjuntos anteriormente definidas a familias arbitrarias de conjuntos. Describiremos brevemente la notación utilizada en el caso general de familias arbitrarias de conjuntos.

DEFINICIÓN A.3.1. Sea Λ un conjunto no vacío y supongamos que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe asociado un conjunto A_λ. Entonces la colección $\mathcal{F} := \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se llama *familia de conjuntos parametrizada por* Λ. Si $\Lambda' \subset \Lambda$ decimos que $\mathcal{F}' := \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'\} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ es una *subfamilia de* $\mathcal{F}$.

DEFINICIONES A.3.2. Sea $\mathcal{F} := \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos parametrizada por Λ.

($\mathcal{F}$1) La unión de $\mathcal{F}$ es el conjunto

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \mid \exists \lambda \in \Lambda \text{ t.q. } x \in A_\lambda\}.$$

($\mathcal{F}$2) La intersección de $\mathcal{F}$ es el conjunto

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \mid \forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\}.$$

($\mathcal{F}$3) La unión disjunta de $\mathcal{F}$ es el conjunto

$$\coprod \mathcal{F} = \coprod \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{(x, \lambda) \mid x \in A_\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

($\mathcal{F}$4) El producto cartesiano de $\mathcal{F}$ es el conjunto

$$\prod \mathcal{F} = \prod \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{\Lambda \xrightarrow{f} \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \mid \forall \lambda \in \Lambda, f(\lambda) \in A_\lambda\}.$$

Si $f \in \prod \mathcal{F}$, denotaremos por x_λ al elemento $f(\lambda)$, y por $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ a la propia aplicación f (donde x_λ es la coordenada en λ de f).

Si $X_\lambda = X$, $\forall \lambda \in \Lambda$, entonces denotaremos el producto cartesiano como X^Λ. Si además $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$, lo denotaremos X^n.

Ejercicio A.3.1 Sea $\mathcal{F} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ familia de conjuntos, las siguientes son sencillas consecuencias de las definiciones anteriores.

(i) $A_\lambda \subset \bigcup \mathcal{F}, \forall \lambda \in \Lambda$, y por tanto si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcup \mathcal{G} \subset \bigcup \mathcal{F}$.
(ii) $\bigcap \mathcal{F} \subset A_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$, y por tanto si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcap \mathcal{F} \subset \bigcap \mathcal{G}$.
(iii) Si $A \subset A_\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda$, entonces $A \subset \bigcap \mathcal{F}$,
(iv) Si $A_\lambda \subset A \ \forall \lambda \in \Lambda$, entonces $\bigcup \mathcal{F} \subset A$.

PROPIEDADES A.3.3 (Operaciones extendidas de conjuntos). Consideremos $\mathcal{F} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_1\}$ y $\mathcal{G} = \{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_2\}$ familias de conjuntos parametrizadas por Λ_1 y Λ_2 respectivamente y sea $\mathcal{F}'$ (resp. $\mathcal{G}'$) subfamilia de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$). Sea $f : \cup\mathcal{F} \to \cup\mathcal{G}$ aplicación y X un conjunto, entonces:

(a) $X \cup \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_\lambda \{X \cup A_\lambda\}$.
(b) $X \cap \bigcap \mathcal{F} = \bigcap_\lambda \{X \cap A_\lambda\}$.
(c) $X \cup \bigcap \mathcal{F} = \bigcap_\lambda \{X \cup A_\lambda\}$.
(d) $X \cap \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_\lambda \{X \cap A_\lambda\}$.
(e) $(\bigcup \mathcal{F})^c = \bigcap_\lambda A_\lambda^c$, $(\bigcap \mathcal{F})^c = \bigcup_\lambda A_\lambda^c$.
(f) $f(\bigcup \mathcal{F}') = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} \{f(A_\lambda)\}$.
(g) $f(\bigcap \mathcal{F}') \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda'} \{f(A_\lambda)\}$.
(h) $f^{-1}(\bigcup \mathcal{G}') = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} \{f^{-1}(B_\lambda)\}$.
(i) $f^{-1}(\bigcap \mathcal{G}') = \bigcap_{\lambda \in \Lambda'} \{f^{-1}(B_\lambda)\}$.
(j) $\bigcup \mathcal{F} \times \bigcup \mathcal{G} = \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} (A_{\lambda_1} \times B_{\lambda_2})$.
(k) Si $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$, entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \times B_\lambda) = \bigcap \mathcal{F} \times \bigcap \mathcal{G}$.

La demostración de estas propiedades se omite ya que es similar a las de otras ya realizadas o propuestas. Para terminar este capítulo, veamos una nueva operación de conjuntos denominada cociente. Para poder definirla necesitamos un par de definiciones.

DEFINICIÓN A.3.4. Sea X un conjunto. Una *relación de equivalencia* en X es un subconjunto $\mathcal{R} \subset X \times X$ del producto cartesiano de X por sí mismo que cumple las siguientes propiedades:

Reflexiva: $(x, x) \in \mathcal{R}$ $\forall x \in X$.
Simétrica: Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ entonces $(y, x) \in \mathcal{R}$.
Transitiva: Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$ entonces $(x, z) \in \mathcal{R}$.

En tal caso si $(x, y) \in \mathcal{R}$ decimos que x *está relacionado con* y y lo denotamos por $x\mathcal{R}y$, $x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y$ o simplemente $x \sim y$.

Si $x \in X$ denominamos *clase de equivalencia* de x al conjunto

$$[x] := \{y \in X \mid x\mathcal{R}y\}.$$

OBSERVACIÓN A.3.5. Si $x\mathcal{R}y$ vamos a ver que $[x] = [y]$. Si $z \in [x]$, entonces $x\mathcal{R}z$ (por definición). Por otra parte, como $x\mathcal{R}y$ sabemos que $y\mathcal{R}x$ (propiedad simétrica). Así pues $y\mathcal{R}x$ y $x\mathcal{R}z$ lo que implica que $y\mathcal{R}z$ (propiedad transitiva) es decir, $z \in [y]$. Análogamente (cambiando la x por la y en el razonamiento anterior) se tiene que $[y] \subset [x]$ y por tanto $[x] = [y]$.

Ejercicio A.3.2 Sea X un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Demuestra que el conjunto de clases de equivalencia $X/\mathcal{R} := \{[x] \mid x \in X\}$ es una **partición** de X, es decir,

$$\bigcup_{[x]\in X/\mathcal{R}}^{\emptyset} [x] = X.$$

Definición A.3.6. Si X es un conjunto y $\mathcal{R}$ una clase de equivalencia, existe una aplicación natural

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\pi} X/\mathcal{R} \\ x &\longmapsto \pi(x) := [x] \end{aligned}$$

que asocia a cada elemento su clase de equivalencia. A esta aplicación se la denomina *proyección cociente*.

Ejemplo A.3.7. Vamos a interpretar el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales a partir de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ a cuyos elementos llamaremos *fracciones*; cada número racional $\frac{a}{b}$ admite varias fracciones por lo que lo podemos ver como una clase de equivalencia por la relación de equivalencia:

$$\text{Sean } (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\}), \text{ entonces } (a,b)\sim(c,d) \text{ si } ad = cb.$$

De este modo $(a,b)\sim(c,d)$ equivale a lo que entendemos en la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. No solo funciona bien esta interpretación para igualdad de fracciones, podemos definir incluso la suma y el producto de pares:

$$(a,b)+(c,d) = (ad+cb, bd), \qquad (a,b)\cdot(c,d) = (ac, bd).$$

Estas fórmulas cumplen que si $(a,b)\sim(a',b')$ y $(c,d)\sim(c',d')$ entonces

$$(a,b)+(c,d) \sim (a',b')+(c',d'), \qquad (a,b)\cdot(c,d) \sim (a',b')\cdot(c',d').$$

Las clases de equivalencia contienen un elemento especial que se llama **fracción irreducible**. Una fracción irreducible es un par $(a,b)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ tal que $b>0$ y a y b son primos entre sí, es decir, si $a = ka'$ y $b = kb'$ con $k>0$ entonces $k=1$. Se puede comprobar que todo par $(a,b)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ tiene una única fracción irreducible en su clase de equivalencia. Trabajar con el conjunto de *fracciones irreducibles* es más sencillo que con $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$.

Este concepto de fracción irreducible nos permite introducir el concepto de sistema transversal.

Definición A.3.8. Decimos que $D\subset X$ es un *sistema transversal* para la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ si para cualquier elemento $x\in X$ existe un único $d_x\in D$ tal que $x\mathcal{R}d_x$.

Por lo tanto el conjunto de fracciones irreducibles es un sistema transversal del conjunto de las fracciones.

Observación A.3.9. El motivo por el que un sistema transversal es algo muy útil es que si $D \subset X$ es sistema transversal para la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ entonces la restricción de la proyección

$$\pi : X \to X/\mathcal{R}, \qquad x \mapsto [x],$$

a D es una biyección. Es claro que $\pi|_D$ es inyectiva ya que si $d_1, d_2 \in D$ fueran distintos y cumplieran que $\pi(d_1) = [d_1] = [d_2] = \pi(d_2)$ entonces la clase $[d_1] = [d_2]$ tendría dos representantes en D lo cual no es posible ya que D es sistema transversal. Para ver que $\pi|_D$ es sobreyectiva basta ver que, por ser D sistema transversal, toda clase $[x] \in X/\mathcal{R}$ tiene un representante en D, es decir, existe $d \in D$ tal que $[d] = \pi(d) = [x]$.

Ejemplo A.3.10. Consideremos $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y la relación de equivalencia $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Es sencillo ver que esta es una relación de equivalencia ya que:

(a) Se tiene $x \sim x$ (puesto que $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$).
(b) Si $x \sim y$ entonces $x - y \in \mathbb{Z}$, es decir, si $n = x - y$ se tiene que $y - x = -n \in \mathbb{Z}$ y así $y \sim x$.
(c) Si $x \sim y$ e $y \sim z$ entonces $n = x - y \in \mathbb{Z}$ y $m = y - z \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $x - z = (x - y) + (y - z) = n + m \in \mathbb{Z}$, luego $x \sim z$.

La clase de equivalencia de x es el conjunto $[x] = \{x + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Un sistema transversal está formado por el intervalo $[0, 1)$, así podemos pensar en el conjunto $\mathbb{R}/\sim$ como el intervalo $[0, 1)$.

Observación A.3.11 (El producto cartesiano y el Axioma de elección). En la Definición A.3.2($\mathcal{F}$4) hemos descrito el conjunto producto cartesiano de una familia arbitraria de conjuntos $\mathcal{F}$ parametrizada por un conjunto Λ. Es claro que si algún miembro A_λ de la familia $\mathcal{F}$ es vacío ($A_\lambda = \emptyset$) entonces $\prod \mathcal{F} = \emptyset$ ya que para elegir un elemento de $\prod \mathcal{F}$ es necesario *elegir* un elemento para cada $A_\lambda \in \mathcal{F}$. La pregunta que nos planteamos es si el recíproco es cierto, es decir, supongamos que todo miembro A_λ de $\mathcal{F}$ es no vacío: ¿Nos asegura esto que $\prod \mathcal{F} \neq \emptyset$? El problema no es trivial, dado que demostrar que $\prod \mathcal{F} \neq \emptyset$ es equivalente a ser capaces de describir un elemento de este conjunto (recordemos que *describir* quiere decir de manera finita).

En ciertos casos es obvio que esto se puede hacer, por ejemplo, si la familia $\mathcal{F}$ es finita, o bien, si los conjuntos A_λ tienen alguna estructura especial que permita

describir algún elemento (por ejemplo si todos los A_λ son espacios vectoriales, un elemento de $\prod \mathcal{F}$ puede ser elegir el elemento neutro de la suma para cada A_λ, es decir, la aplicación $e : \Lambda \to \cup\mathcal{F}$ definida por $e(\lambda) := \overline{0}_{A_\lambda}$, o por ejemplo si todos los A_λ son subconjuntos de $\mathbb{N}$ podemos describir un elemento de $\prod \mathcal{F}$ tomando el mínimo de cada A_λ, es decir, la aplicación $e : \Lambda \to \bigcup \mathcal{F}$ definida por $e(\lambda) := \text{mín}\, A_\lambda$).

En cambio, si los A_λ son conjuntos arbitrarios, sin estructura aparente (es decir, de manera que los puntos de A_λ sean de alguna forma indistinguibles), no queda muy claro cómo describir un elemento de $\prod \mathcal{F}$. Sería algo así como describir un método para elegir un grano de arroz de una cantidad infinita de bolsas de arroz (para una cantidad finita podemos simplemente coger el grano, pero para una cantidad infinita no tenemos manera de describir qué grano concreto queremos elegir). A la *convicción* de que esto se puede hacer, es decir, de que se puede describir un elemento en $\prod \mathcal{F}$ para $\mathcal{F}$ arbitrario, se le denomina **Axioma de elección** (este axioma tiene muchos enunciados equivalentes y el siguiente es el que más se aproxima al contexto en el que lo vamos a utilizar en este curso).

Axioma A.3.12 (Axioma de elección). *Sea* $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de conjuntos parametrizada por* $\Lambda \neq \emptyset$. *Entonces:* $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ *si y solo si* $A_\lambda \neq \emptyset$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

A partir este momento, supondremos cierto el Axioma de elección.

Observación A.3.13 (Conjuntos cocientes y Axioma de elección). Otra forma de entender las cuestiones que subyacen al Axioma de elección es considerar los conjuntos cocientes y los sistemas transversales. Sea X un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia. El Axioma de elección indica que existe un sistema transversal para $\mathcal{R}$, es decir, que podemos *elegir* exactamente un elemento de cada clase de equivalencia.

En el Ejemplo A.3.10, hemos elegido el único elemento x de cada clase de equivalencia que cumple $\lfloor x \rfloor = 0$, donde $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual a x. Observemos que no es tan fácil obtener este sistema transversal si reemplazamos $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Q}$.

Un axioma equivalente al de Elección es el Lema de Zorn. Equivalente en este sentido quiere decir que si suponemos cierto uno podemos demostrar el otro y viceversa. A veces se dice simplemente que el Lema de Zorn es *otra versión* del Axioma de Elección. Como lo utilizaremos más adelante vamos a enunciarlo al menos una vez en el curso. Necesitamos para ello algunas definiciones.

DEFINICIÓN A.3.14. Sea X un conjunto. Una *relación de orden* en X es un subconjunto $\mathcal{R} \subset X \times X$ del producto cartesiano de X por sí mismo que cumple las siguientes propiedades.

Reflexiva: $(x, x) \in \mathcal{R}\ \forall x \in X$.

Antisimétrica: Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, x) \in \mathcal{R}$, entonces $y = x$.

Transitiva: Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$ entonces $(x, z) \in \mathcal{R}$.

En tal caso se dice también que X es un *conjunto ordenado*. Si además $\mathcal{R}$ verifica que:

$$\forall x, y \in X (x \neq y) \text{ se tiene que, o bien } (x, y) \in \mathcal{R}, \text{ o bien } (y, x) \in \mathcal{R},$$

entonces se dice que $\mathcal{R}$ es una relación de orden *total*, o que X es un conjunto *totalmente ordenado*.

A menudo se denota una relación de orden en X por $(X, \overset{\mathcal{R}}{\leq})$ donde $x \overset{\mathcal{R}}{\leq} y$ (o simplemente $x \leq y$) significa que $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Obsérvese que si $(X. \leq)$ es un conjunto ordenado y $A \subset X$ es un subconjunto de X, entonces $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado. Un subconjunto $A \subset X$ es una *cadena*, si $(A, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Ejercicio A.3.3 Comprueba que $(\mathbb{R}, \leq)$ es una relación de orden total y que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ (donde X es un conjunto cualquiera) es una relación de orden, pero no necesariamente total.

DEFINICIÓN A.3.15. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y $A \subseteq X$, diremos que $x \in X$ es una *cota superior de* A si $a \leq x\ \forall a \in A$. Análogamente, se dice que $x \in X$ es una *cota inferior de* A si $x \leq a\ \forall a \in A$. Un elemento $x \in A$ se dice *elemento maximal* de A si no existe $a \in A$ $(a \neq x)$ tal que $x \leq a$. Análogamente, un elemento $x \in A$ se dice *elemento minimal* de A si no existe $a \in A$ $(a \neq x)$ tal que $a \leq x$.

AXIOMA A.3.16 (Lema de Zorn). *Sea X un conjunto ordenado. Si toda cadena de X tiene cota superior, entonces X tiene un elemento maximal.*

Tema A.4. Propiedades de los números reales

En este tema explicitaremos algunas propiedades que necesitaremos de los números reales sin entrar ni en su definición ni en las demostraciones.

PROPIEDAD A.4.1 (Arquimediana). Dados dos números reales $0 < a < b$, existe un número natural n tal que $na > b$.

Un subconjunto A no vacío de $\mathbb{R}$ se dice acotado superiormente si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$, $\forall a \in A$; en tal caso x es una cota superior. Se dice que x es supremo si es la menor cota superior. Análogamente se definen acotado inferiormente, cota inferior e ínfimo.

PROPIEDAD A.4.2. Todo conjunto acotado superiormente (resp. inferiormente) y no vacío admite un único supremo (ínfimo).

PROPIEDAD A.4.3. Si x es el supremo (resp. ínfimo) de $A \subset \mathbb{R}$, entonces todo intervalo $[x - \frac{1}{n}, x]$ (resp. $[x, x + \frac{1}{n}]$) contiene puntos de A. En particular existe una sucesión creciente (resp. decreciente) en A que converge a x.

Tema A.5. Cardinales

Terminaremos el capítulo con una breve referencia a la teoría de cardinales.

DEFINICIÓN A.5.1. Diremos que el conjunto X tiene *el mismo cardinal que* el conjunto Y si existe una biyección $f: X \to Y$ (se denotará $\#X = \#Y$).

OBSERVACIONES A.5.2.

(#1) La propiedad *tener el mismo cardinal que* define una *relación de equivalencia* entre conjuntos.

Reflexiva: ($\#X = \#X$) Sabemos que $\mathbf{1}_X : X \to X$ es una biyección (Propiedad A.2.11(iv)).

Simétrica: ($\#X = \#Y \Rightarrow \#Y = \#X$) Si $f : X \to Y$ es biyección, entonces $f^{-1}: Y \to X$ es también biyección (Ejercicio A.2.6(1)).

Transitiva: ($\#X = \#Y,\ \#Y = \#Z \Rightarrow \#X = \#Z$). Si $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ son biyecciones, entonces $g \circ f: X \to Z$ es biyección (Propiedad A.2.11(iii)).

(#2) Todo conjunto *tiene un único cardinal*.

(#3) Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ definimos el siguiente conjunto:

$$\mathbf{n} := \begin{cases} \emptyset & \text{si } n = 0 \\ \{0, 1, ..., n-1\} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Si $x \in \mathbf{n}$ entonces $\#(\mathbf{n} \setminus \{x\}) = \#(\mathbf{n} - \mathbf{1})$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \setminus \{x\} &\xrightarrow{g} \mathbf{n} - \mathbf{1} \\ x &\longmapsto \begin{cases} k, & \text{si } k < x, \\ k-1, & \text{si } k > x. \end{cases} \end{aligned}$$

Veamos que g es una biyección:

Inyectividad: Sean $i, j \in \mathbf{n} \setminus \{x\}$ con $i \neq j$. Supongamos que $i < j$. Podemos distinguir tres casos posibles:

a) $i < j < x$. En tal caso $g(i) = i < j = g(j)$, luego $g(i) \neq g(j)$.

b) $i < x < j$. En tal caso $j - i \geq 2$, $g(i) = i$ y $g(j) = j - 1$, luego $g(j) - g(i) = j - i - 1 \geq 1$ y así $g(i) \neq g(j)$.

c) $x < i < j$. En tal caso $g(i) = i - 1 < j - 1 = g(j)$, luego $g(i) \neq g(j)$.

Sobreyectividad: Sea $j \in \mathbf{n} - \mathbf{1}$, buscamos $i \in \mathbf{n} \setminus \{x\}$ de modo que $g(i) = j$. Consideremos dos casos:

a) Si $j < x$, entonces $j \in \{0, 1, ..., x-1\} \subset \mathbf{n} \setminus \{x\}$ y $g(j) = j$.

b) Si $j \geq x$, entonces $j \in \{x, ..., n-2\}$ por lo que $j+1 \in \{x+1, ..., n-1\} \subset \mathbf{n} \setminus \{x\}$ y $g(j+1) = j$.

□

(#4) Si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, entonces $\#\mathbf{n} \neq \#\mathbf{m}$.

Demostración. Suponemos que $n < m$. Demostremos el resultado por inducción sobre n.

• Si $n = 0$ el resultado es trivial, ya que la única aplicación entre $\emptyset$ y $\mathbf{m}$ es $f = \emptyset$, que no es sobreyectiva ya que $\mathbf{m} \neq \emptyset$.

• Suponemos ahora $0 < n < m$. La hipótesis de inducción es que el resultado es cierto para $n' < m'$, con $n' < n$. Supongamos que $\#\mathbf{n} = \#\mathbf{m}$. Por el apartado A.5.2, esto implica que $\#(\mathbf{n}-\mathbf{1}) = \#(\mathbf{m}-\mathbf{1})$; como $n-1 < m-1$, podemos aplicar la hipótesis de inducción y llegamos a contradicción.

□

Definición A.5.3. Diremos que un conjunto X es *finito* y *de orden* o *cardinal* n (en notación, $\#X = n$), si existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\#X = \#\mathbf{n}$. Diremos que X es *infinito* si no es finito.

Ejercicio A.5.1 Demuestra que si $A \subset X$ es un subconjunto finito de X, y $x \in X$ entonces $A \cup \{x\}$ es finito.

Ejercicio A.5.2 La aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{f} \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 2n, & \text{si } n \geq 0, \\ -(2n+1), & \text{si } n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

es una biyección, es decir, $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$.

Proposición A.5.4. *Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.*

Demostración. En primer lugar veamos que para demostrar este resultado, basta hacerlo sobre los conjuntos finitos $\mathbf{n}$. Supongamos que el resultado es cierto para $\mathbf{n}$, y consideremos X conjunto finito de orden n, es decir, $\#X = \#\mathbf{n}$. Sean $A \subset X$ y $f : X \to \mathbf{n}$ biyección; tenemos que $\bar{f} : A \to f(A)$ como en el Ejercicio A.2.11 es una biyección. Así pues, sabemos que $f(A) \subset \mathbf{n}$ es finito y $\#A = \#f(A)$, así pues A es también finito.

Por tanto basta demostrar que si $A \subset \mathbf{n}$, entonces A es finito. Usemos inducción sobre n.

• Si $n = 0$, el resultado es trivial.

• Supongamos el resultado cierto para $\mathbf{n}$ (Hipótesis de inducción). Sea $A \subset \mathbf{n}+\mathbf{1}$. Si $A = \emptyset$ el resultado es trivial. Si $A \neq \emptyset$ tomemos $a \in A$, entonces $A' = A \setminus \{x\}$ es un subconjunto de $(\mathbf{n}+\mathbf{1}) \setminus \{x\}$. Por la Observación A.5.2(#3) sabemos que existe una biyección $f : (\mathbf{n}+\mathbf{1}) \setminus \{x\} \to \mathbf{n}$. Así $\bar{f} : A' \to \mathbf{n}$ como el Ejercicio A.2.11 es una biyección. Por tanto $\bar{f}(A') \subset \mathbf{n}$ es finito por hipótesis de inducción y como $\bar{f}$ es biyección A' también es finito. Por último, utilizando el Ejercicio A.5.1, $A = A' \cup \{x\}$ es finito. □

PROPOSICIÓN A.5.5. *Sea X conjunto finito con $A \subsetneq X$, entonces $\#A \neq \#X$.*

DEMOSTRACIÓN. Análogamente al principio de la demostración de la Proposición A.5.4 basta demostrar el resultado para $X = \mathbf{n}$. Lo haremos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

• Si $n = 0$ el resultado es trivial ya que no hay subconjuntos propios de $\emptyset$.

• Supongamos que el resultado es cierto para $\mathbf{n}$ (Hipótesis de inducción). Sea $A \subsetneq \mathbf{n}+\mathbf{1}$. De nuevo, podemos suponer que $A \neq \emptyset$ (en caso contrario el resultado es trivial). Supongamos que existe $f : \mathbf{n}+\mathbf{1} \to A$ biyección. Entonces $\tilde{f} : \mathbf{n} \to A' := A \setminus \{f(n)\}$ es biyección, pero $A' \subsetneq \mathbf{n}$, lo cual contradice la hipótesis de inducción. □

OBSERVACIÓN A.5.6. El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $\mathbb{Z}$ es infinito. Si $\mathbb{Z}$ fuera finito, no tendría el mismo cardinal que ningún subconjunto propio suyo (Proposición A.5.5), pero esto contradice el Ejercicio A.5.2 en el que vimos que $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$, luego $\mathbb{Z}$ es infinito. Como $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$, entonces $\mathbb{N}$ también es infinito. □

DEFINICIÓN A.5.7. Diremos que X es *numerable* si $\#X = \#\mathbb{N}$; el cardinal de $\mathbb{N}$ se denota $\aleph_0$.

PROPOSICIÓN A.5.8. *Sea X un conjunto, entonces $\#\mathcal{P}(X) = \#\mathbf{2}^X$, donde*

$$\mathbf{2}^X := \{f : X \to \mathbf{2} = \{0,1\} \mid f \text{ aplicación}\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la siguiente aplicación: $\chi : \mathcal{P}(X) \to \mathbf{2}^X$ dada por $\chi(A) := \chi_A$, donde

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\chi_A} \mathbf{2} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases} \end{aligned}$$

Veamos que χ es una biyección. Tengamos en cuenta que $A = \chi_A^{-1}(1)$

Inyectiva: Sean $A, B \subset X$, de modo que $\chi_A = \chi_B$. Entonces $A = \chi_A^{-1}(1) = \chi_B^{-1}(1) = B$ (Ejercicio A.2.12).

Sobreyectiva: Sea $f \in \mathbf{2}^X$. Sea $A_f := f^{-1}(1) = \{x \in X \mid f(x) = 1\} \subset X$. Veamos que $\chi_{A_f} = f$. Para ello basta ver que si $x \in X$ entonces $\chi_{A_f}(x) = f(x)$. Pero esto es claro ya que $\chi_{A_f}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A_f \Leftrightarrow f(x) = 1$ y $\chi_{A_f}(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A_f \Leftrightarrow f(x) = 0$. □

PROPOSICIÓN A.5.9. *Sea X un conjunto, entonces $\#\mathcal{P}(X) \neq \#X$.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a probar que no existen aplicaciones sobreyectivas entre X y $\mathcal{P}(X)$. Sea $f : X \to \mathcal{P}(X)$ una aplicación. Veamos que existen elementos en $\mathcal{P}(X)$ que no pertenecen a $f(X)$. Consideremos el siguiente subconjunto de X:

$$A_f := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Supongamos que $A_f \in f(X)$, entonces existiría $y \in X$ tal que $f(y) = A_y$. Si $y \in A_f$ entonces, por definición de A_f, es porque $y \notin f(y) = A_f$, contradicción. Si $y \notin A_f$ entonces, de nuevo por definición de A_f, es porque $y \in f(y) = A_f$, contradicción. Por lo tanto $A_f \notin f(X)$ y así pues f no es sobreyectiva, luego no puede ser biyección. □

OBSERVACIONES A.5.10.

(i) De las Proposiciones A.5.8 y A.5.9 se deduce que $\#\mathbf{2}^X \neq \#X$.
(ii) Obsérvese que, al menos, existe un aplicación inyectiva $i : X \hookrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $i(x) = \{x\} \subset X$.

Uno quisiera decir que, de alguna manera, el cardinal de $\mathcal{P}(X)$ es mayor que el cardinal de X.

DEFINICIÓN A.5.11. Sean X e Y conjuntos. Decimos que $\#X \leq \#Y$ si existe aplicación inyectiva de X a Y (si además $\#X \neq \#Y$, se dice que $\#X < \#Y$). Decimos que $\#X \geq \#Y$ si existe aplicación suprayectiva de X a Y (análogamente, si además $\#X \neq \#Y$, se dice que $\#X > \#Y$).

OBSERVACIONES A.5.12.

(1) Si $A \subset B$, entonces $\#A \leq \#B$ ya que la inclusión $i : A \to B$ es una aplicación inyectiva (Ejercicio A.2.10).

(2) Por la Proposición A.5.9 y la Observación A.5.10(ii) se tiene que $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.

(3) Obsérvese que $\#X \leq \#Y \Leftrightarrow \#Y \geq \#X$ no es consecuencia inmediata de las definiciones, sino que es un resultado en sí mismo. Dada una aplicación inyectiva $i : X \to Y$ y $x_0 \in X$ podemos definir una aplicación sobreyectiva

$$\begin{aligned} Y &\xrightarrow{j} X \\ y &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } \ i(x) = y \\ x_0 & \text{si } \ y \notin i(X). \end{cases} \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $j : Y \to X$ es una aplicación sobreyectiva, podemos definir una aplicación inyectiva $i : X \to Y$ de modo que $i(x) = y$ donde y es un elemento del conjunto $j^{-1}(x)$ (dicho conjunto es no vacío por ser j sobreyectiva). Para poder elegir un elemento en cada conjunto $j^{-1}(x)$, es decir, para mostrar la existencia de i tal y como la hemos definido, se necesita utilizar una versión del Axioma de Elección A.3.12.

(4) El motivo de utilizar la notación $\leq$ o $\geq$ es el siguiente resultado, cuya demostración se sale del objetivo de este trabajo, y que se denomina *Teorema de Schröder-Bernstein*:

TEOREMA A.5.13. *Sean X e Y conjuntos, y supongamos que $\#X \leq \#Y$ y $\#X \geq \#Y$, entonces $\#X = \#Y$.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que X e Y son disjuntos. Por hipótesis existen dos aplicaciones inyectivas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$.

Dado $x \in X$ podemos construir aplicar f y g alternativamente y de manera indefinida

$$x \to f(x) \to g(f(x)) \to f\big(g(f(x))\big) \to \cdots$$

Por el otro lado, podremos pensar en $g^{-1}(x)$ como un punto de Y si x pertenece a la imagen de g. Para aplicar f^{-1} sobre ese tendríamos una condición similar, en otras palabras la sucesión

$$\cdots \to f^{-1}\big(g^{-1}(x)\big) \to g^{-1}(x) \to x \to f(x) \to g(f(x)) \to f\big(g(f(x))\big) \to \cdots$$

podría, eventualmente, detenerse al no estár definida f^{-1} o g^{-1} en algún punto. Si no se detiene diremos que es *infinita*. Si no es el caso, el primer elemento de la sucesión podría ser un elemento de X o de Y, y diremos que la sucesión *empieza en* X o *en* Y respectivamente. Obviamente, dos de estas sucesiones o son iguales o no tienen ningún elemento en común, ya que X e Y son disjuntos y si las sucesiones coinciden en algún punto, necesariamente han de coincidir a izquierda y derecha de dicho punto ya que están univocamente determinadas por las inyecciones f y

g. En otras palabras cada sucesión genera un subconjunto $A_x \subset X \cup Y$, y estos forman una partición.

Entonces, si tenemos una sucesión infinita A_x (abusamos del lenguaje al identificar la sucesión con el subconjunto asociado), tanto f como g serían biyecciones entre $A_x \cap X$ y $A_x \cap Y$. Además, si A_x empieza en X, f también es una biyección entre $A_x \cap X$ y $A_x \cap Y$

Por otro lado, si A_x empieza en Y, la función f no nos sirve, el primer elemento de la sucesión no estaría emparejado. Así que usaremos g^{-1} como biyección entre $A_x \cap X$ y $A_x \cap Y$ (debemos usar el inverso ya que queremos que el dominio esté en X).

Así que podemos definir h como

$$h(x \in X) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{si la sucesión } A_x \text{ empieza en } Y \\ f(x) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La función h es biyectiva ya que por contrucción es biyectiva entre los conjuntos $A_x \cap X$ y $A_x \cap Y$ y estos forman una partición de X e Y respectivamente. □

En otras palabras, si existe una aplicación inyectiva y otra sobreyectiva de X a Y, entonces debe existir una biyección entre X e Y. Este teorema no se utilizará en el curso.

Ejercicio A.5.3 Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Demuestra que si $A \subset X$, entonces $\#f(A) \leq \#A$. Además, si f es inyectiva, entonces $\#f(A) = \#A$.

Teorema A.5.14. *Existen conjuntos de cardinal mayor que el de* $\mathbb{N}$*, es decir, existen* X *tales que* $\aleph_0 < \#X$.

Demostración. Por la Observación A.5.12(2) basta tomar $X := \mathcal{P}(\mathbb{N})$. □

Teorema A.5.15. *Todo conjunto infinito contiene un subconjunto numerable, es decir, si* X *es infinito, entonces* $\aleph_0 \leq \#X$.

Demostración. Definimos recurrentemente una aplicación $f : \mathbb{N} \to X$ como sigue. Elegimos arbitrariamente $x_0 \in X$ y definimos $f(0) := x_0$.

Definimos $f(k) =: x_k$, $k \leq n$. Entonces $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subsetneq X$ por ser X infinito. Elegimos $x_{n+1} \in X \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y definimos $f(n+1) := x_{n+1}$. Es fácil ver que f es inyectiva, por lo que $f(\mathbb{N}) \subset X$ es numerable. □

Definición A.5.16. Si X es un conjunto infinito de modo que $\#X \neq \aleph_0$, entonces diremos que X es *infinito no numerable*. Si X es finito o numerable diremos que X es *contable*.

Observaciones A.5.17.

(ℵi) El Teorema A.5.15 puede reescribirse diciendo que X es infinito si y solo si $\aleph_0 \leq \#X$. Falta ver que si $\aleph_0 \leq \#X$ entonces X es infinito; en efecto, existe una aplicación inyectiva $i\colon \mathbb{N} \hookrightarrow X$ y por tanto, $i(\mathbb{N})$ es un subconjunto numerable de X, luego X no puede ser finito por la Proposición A.5.4.

(ℵii) Por el Teorema A.5.15 un conjunto X es infinito no numerable si y solo si $\aleph_0 < \#X$.

(ℵiii) Un conjunto X es contable si y solo si $\#X \leq \aleph_0$. En efecto, si X es numerable se da la igualdad; si X es finito, posee una aplicación inyectiva en $\mathbb{N}$ por lo que se da la desigualdad estricta. En la dirección contraria, si X es finito ya está. Si no lo es, supongamos que es infinito no numerable. Entonces $\aleph_0 < \#X \leq \aleph_0$, contradicción.

(ℵiv) Del apartado anterior deducimos que los subconjuntos de un conjunto contable son contables y si son infinitos son numerables.

Propiedades A.5.18 (Uniones). Sea $\Lambda \neq \emptyset$ un conjunto y sea $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos no vacíos. Sea $X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

(1) Si algún X_λ es infinito (resp. infinito no numerable) entonces X es infinito (resp. infinito no numerable).

(2) Si Λ es finito y X_λ también es finito, $\forall\lambda \in \Lambda$, entonces X es finito. Si además la unión es disjunta, es decir, $X_{\lambda_1} \cap X_{\lambda_2} = \emptyset$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces si n_λ es el cardinal de X_λ, $\lambda \in \Lambda$, se tiene que $n := \sum_{\lambda\in\Lambda} n_\lambda$ es el cardinal de X.

(3) Si Λ es contable y X_λ también es contable, $\forall\lambda \in \Lambda$, entonces X es contable. Si además algún X_λ es numerable o X no está contenido en la unión de una subfamilia finita, X es numerable.

Demostración.

(1) Si X_λ es infinito, como $X_\lambda \subset X$ (Ejercicio A.3.1(i)) deducimos por la Proposición A.5.4 que X es infinito. Si además X_λ es infinito es infinito no numerable, tenemos $\#\mathbb{N} < \#X_\lambda \leq \#X$.

(2) Lo que importa en estas familias es el número de conjuntos, es decir, podemos suponer $\Lambda := \{1, \ldots, r\}$. Supongamos los resultados demostrados para $r = 2$. El caso general se hace por inducción sobre r; si $r = 1$, no hay nada que demostrar. Si $r > 1$, $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i = \left(\bigcup_{i=1}^{r-1} X_i\right) \cup X_r$; el primer subconjunto es finito por hipótesis

de inducción y el resultado se obtiene aplicando el caso $r = 2$. Observemos que este razonamiento se aplica también al caso de unión con intersecciones disjuntas.

Supongamos pues que tenemos dos conjuntos finitos A, B. Entonces, es inmediato que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Como $B \setminus A \subset B$, por la Proposición A.5.4 tenemos que $B \setminus A$ es finito. Por tanto basta que probemos el resultado para A, B finitos y disjuntos.

Suponemos entonces $X = A \cup B$, con $A \cap B = \emptyset$ y ambos finitos. Supongamos que A es de cardinal n y B es de cardinal m; debemos probar que X es de cardinal $n + m$. Fijemos $f : A \to \mathbf{n}$ y $g : B \to \mathbf{m}$, biyecciones. Entonces, es fácil ver que la aplicación

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{h} \mathbf{m} + \mathbf{n} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ g(x) + n & \text{si } x \in B, \end{cases} \end{aligned} \tag{A.7}$$

es una biyección.

(3) Comencemos suponiendo que Λ es finito; basta suponer que tenemos dos conjuntos y que al menos uno de ellos es numerable. Supongamos que tenemos $X = A \cup B$, A finito de cardinal n y B numerable. Sean $f : A \to \mathbf{n}$ y $g : B \to \mathbb{N}$ biyectivas. Construimos $h : X \to \mathbb{N}$ con la misma expresión que en (A.7). Es fácil ver que h es biyectiva.

Supongamos ahora que A y B son numerables; sean $f : A \to \mathbb{N}$ y $g : B \to \mathbb{N}$ biyectivas. Construimos

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{h} \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 2f(x) & \text{si } x \in A \\ 2g(x) + 1 & \text{si } x \in B. \end{cases} \end{aligned}$$

Es fácil ver que h es biyectiva.

Supongamos ahora que Λ es numerable; podemos suponer que $\Lambda = \mathbb{N}$. Distinguimos tres casos:

a) *Todos los X_n son finitos.* Sea m_n el cardinal de X_n y sea $k_n := \sum_{j=1}^{n} m_j$; por convención, $k_{-1} := 0$. Fijamos aplicaciones biyectivas $f_n : \mathbf{m_n} \to X_n$. Definimos una aplicación $h : \mathbb{N} \to X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ como sigue. Sea $m \in \mathbb{N}$; existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $k_{n-1} \leq m < k_n$. Así $h(m) := f_n(m - k_{n-1})$. Es inmediato comprobar que h es sobreyectiva, por lo que $\aleph_0 \geq \#X$, es decir, X es contable, ver Observación A.5.17(ℵiii).

b) *Todos los conjuntos X_n son numerables.* Fijamos aplicaciones biyectivas $f_n\colon \mathbb{N} \to X_n$. Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos $Y_n := \{f_p(q) \mid p+q=n\}$; es fácil ver que se trata de conjuntos finitos y que $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ por lo que el resultado se sigue del apartado anterior.

c) *Hay conjuntos finitos y numerables.* Agrupándolos convenientemente reducimos el problema a la unión de dos conjuntos contables. □

Ejercicio A.5.4 Sea $A \subset X$ conjunto infinito y $B \subset X$ conjunto finito, demuestra que $A \setminus B$ es un conjunto infinito.

Propiedades A.5.19 (Cardinales y productos cartesianos).

(1) El producto cartesiano de una familia finita de conjuntos finitos es finito y su cardinal es el producto de los cardinales.

(2) El producto cartesiano de una familia finita de conjuntos numerables es numerable.

(3) $\#\mathbf{2}^{\mathbb{N}} > \aleph_0$; en particular, el producto cartesiano de una familia numerable de conjuntos (de cardinal > 1) es infinito no numerable.

Demostración.

(1) Basta que lo probemos para el caso del producto de dos conjuntos A, B, $X := A \times B$. Fijemos una aplicación biyectiva $f\colon \mathbf{n} \to A$, $n := \#A$. Denotemos $B_j := \{(f(j), b) \in A \times B \mid b \in B\}$. Es inmediato que $A \times B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ y que los subconjuntos son dos a dos disjuntos. Aplicando la Propiedad A.5.18(2) tenemos que $\#(A \times B) = \sum_{j=1}^{n} \#B_j$; es inmediato ver que $\#B_j = \#B$, $\forall j = 1, \ldots, m$, por lo que $\#(A \times B) = n\#B = \#A\#B$.

(2) Se demuestra como el apartado anterior usando la Propiedad A.5.18(3).

(3) Cualquier producto cartesiano de una familia numerable de conjuntos de cardinal > 1 contiene un subconjunto biyectivo con $X := \#\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Basta que veamos que X es infinito no numerable. Si fuera contable, existiría una aplicación sobreyectiva $f\colon \mathbb{N} \to X$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, denotemos $f(n) = (x_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$, con $x_m^n \in \{0, 1\}$. Consideremos el elemento $y := (1 - x_m^m)_{m\in\mathbb{N}} \in X$; por definición, $f(n) \neq y$, $\forall n \in \mathbb{N}$, lo que contradice la sobreyectividad de f. □

Propiedades A.5.20 (Cardinales y partes de un conjunto).

(1) Si $\#X = n \in \mathbb{N}$, entonces $\#\mathcal{P}(X) = 2^n$.

(2) Si X es numerable, entonces $\mathcal{P}(X)$ es infinito no numerable.

Demostración.

(1) Tenemos $\#\mathcal{P}(X) = \#(\mathbf{2}^X)$ por la Proposición A.5.8.
Por la Propiedad A.5.19(1) tenemos que $\#(\mathbf{2}^X) = (\#\mathbf{2})^{\#X} = 2^{\#X}$.

(2) Se deduce de la Observación A.5.12(2). □

Ejemplo A.5.21.

(a) El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable. En efecto, por una parte, como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, tenemos que $\mathbb{Q}$ es infinito. Por otra parte se puede construir fácilmente una aplicación sobreyectiva de $X := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ en $\mathbb{Q}$, por lo que $\#X \geq \#\mathbb{Q}$. Por la Propiedad A.5.19(2) tenemos que $\#X = \aleph_0$ y por la Propiedad A.5.17($\aleph$iv) $\mathbb{Q}$ es numerable.

De hecho, cualquier conjunto $A \cap \mathbb{Q}$ donde $\emptyset \neq A$ es un intervalo (con más de un punto), es numerable. Supongamos que $A \cap \mathbb{Q}$ fuera finito; en ese caso encontraríamos un intervalo infinito en $\mathbb{R}$ sin números racionales, lo que es imposible

(b) El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es infinito no numerable, es decir, $\#\mathbb{R} > \aleph_0$. Para ello, construímos una aplicación inyectiva $f : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := 2\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{3^{n+1}}.$$

(c) Todo intervalo infinito de número reales tiene cardinal infinito no numerable. Basta recordar que dos intervalos infinitos son biyectivos.

Ejercicio A.5.5 Demostrar que la aplicación f del Ejemplo A.5.21((b)) es efectivamente inyectiva.

Ejercicio A.5.6 ¿Cuál es el cardinal de los números complejos $\mathbb{C}$?

Ejercicio A.5.7 Sea X un conjunto numerable, entonces

$$\mathcal{P}_F(X) := \{A \subset X \mid A \text{ es conjunto finito}\}$$

tiene cardinal numerable.

Ejercicio A.5.8 Consideremos $\mathcal{F} := \{A_\lambda \subset X \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de subconjuntos de X.

(i) Demuestra que $\#\mathcal{F} \leq \#\Lambda$.

(ii) Sea $f : X \to Y$ es una aplicación, entonces podemos definir la imagen de dicha familia como $f\mathcal{F} := \{f(A_\lambda) \subset Y \mid \lambda \in \Lambda\}$. Demuestra que $\#f\mathcal{F} \leq \#\mathcal{F}$. Además, si f es biyectiva, entonces $\#f\mathcal{F} = \#\mathcal{F}$.