4.3 Τελείως κανονικοί χώροι ($\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$).

Έχοντας υπόψιν το Λήμμα του Urysohn, είναι φυσικό να θέσουμε το ακόλουθο ερώτημα: Αν X κανονικός χώρος, $x_0 \in \mathrm{X}$ και $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ κλειστό ώστε $x_0 \notin \mathrm{A}$. Υπάρχει τότε συνεχής συνάρτηση $f : \mathrm{X} \to [0,1]$ ώστε $f(x_0) = 1$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι (καθόλου προφανής και) αρνητική. Έτσι οδηγούμαστε στην διατύπωση ενός νέου διαχωριστικού αξιώματος, το οποίο ονομάζεται αξίωμα της τέλειας κανονικότητας. Η προκύπτουσα κλάση χώρων είναι αρκετά ενδιαφέρουσα αφού, όπως αποδεικνύεται, συμπίπτει με την κλάση όλων των υποχώρων συμπαγών και Hausdorff χώρων.

Ορισμός 4.25. Έστω X ένας χώρος Hausdorff. Ο X καλείται $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ ή τελείως κανονικός (completely regular), αν για κάθε σημείο $x_0 \in \mathrm{X}$ και κάθε κλειστό σύνολο A ώστε $x_0 \notin \mathrm{A}$, υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathrm{X} \to [0,1]$, έτσι ώστε $f(x_0) = 1$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

Παρατήρηση 4.26. 1) Ένας φυσιολογικός χώρος είναι τελείως κανονικός, όπως έπεται από το Λήμμα του Urysohn, και ένας τελείως κανονικός χώρος είναι κανονικός. Πράγματι ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται εύκολα από τον παραπάνω ορισμό, αφού τα σύνολα $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right)\right)$ και $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\right)$ είναι ξένα ανοικτά σύνολα που περιέχουν το A και το x_0 αντίστοιχα. Έτσι έχουμε ότι, $\mathrm{T}_4 \Rightarrow \mathrm{T}_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathrm{T}_3$. Οι αντίστροφες συνεπαγωγές, όπως θα διαπιστώσουμε δεν ισχύουν .

Θεώρημα 4.27 Ένας υπόχωρος ενός τελείως κανονικού χώρου είναι τελείως κανονικός. Ένα γινόμενο τοπολογικών χώρων είναι τελείως κανονικός χώρος αν και μόνο αν κάθε παράγων του γινομένου είναι τελείως κανονικός χώρος.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω X τελείως κανονικός χώρος και Υ υπόχωρος του X. Έστω $x_0 \in \mathrm{Y}$ και $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Y}$ κλειστό στον υπόχωρο Υ ώστε $x_0 \notin \mathrm{A}$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}} \bigcap \mathrm{Y}$, όπου $\overline{\mathrm{A}}$ η κλειστότητα του A στον X, επομένως $x_0 \notin \overline{\mathrm{A}}$. Ο X είναι τελείως κανονικός, έτσι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathrm{X} \to [0,1]$ ώστε $f(x_0) = 1$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \overline{\mathrm{A}}$. Ο περιορισμός της f στον Y είναι η ζητούμενη συνεχής συνάρτηση επί του Y.

Έστω τώρα $\mathrm{X} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$, ένα γινόμενο τελείως κανονικών χώρων. Θεωρούμε ένα σημείο $b = (b_i)$ του X και ένα κλειστό υποσύνολο A του X ώστε $b \notin \mathrm{A}$. Επιλέγουμε ένα βασικό ανοικτό υποσύνολο $W = \prod_{i \in F} U_i \times \prod_{i \notin F} \mathrm{X}_i$, ($F \subseteq \mathrm{I}$ πεπερασμένο) του X ώστε $b \in W$ και $W \bigcap \mathrm{A} = \varnothing$. Έστω $F = \{i_1, ..., i_n\}$. Για κάθε $k = 1, 2, ..., n$ επιλέγουμε μια συνεχή συνάρτηση

$$f_k : \mathrm{X}_{i_k} \to [0,1],$$

έτσι ώστε $f_k(b_{i_k}) = 1$ και $f_k(\mathrm{X}_{i_k} \setminus U_{i_k}) = \{0\}$ ($b_{i_k} \in U_{i_k}, k = 1, 2, ..., n$).

Θεωρούμε τώρα, για κάθε $k = 1, 2, ..., n$ την σύνθετη συνάρτηση $\phi_k = f_k o \pi_{i_k}$, τότε $\phi_k : \mathrm{X} \to [0,1]$ και βέβαια είναι συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $\phi_k(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{X} \setminus \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$

Είναι τώρα σαφές ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \phi_1(x) ... \phi_n(x), x \in \mathrm{X}$$

Είναι η ζητούμενη συνεχής συνάρτηση επί του X ώστε $f(b) = 1$ και $f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathrm{X} \setminus W$.

Καθόσον αφορά το αντίστροφο του ισχυρισμού μας αυτό έπεται από τον πρώτο ισχυρισμό του θεωρήματος σε συνδυασμό με την παρατήρηση 4.7

……………………………………………..

Η κρίσιμη ιδιότητα για την απόδειξη του θεωρήματος μετρικοποίησης του Urysohn, ήταν ο διαχωρισμός σημείων και κλειστών συνόλων από συνεχείς συναρτήσεις. Είναι σαφές ότι σε έναν τελείως κανονικό χώρο, από τον ορισμό του, η ιδιότητα αυτή ισχύει. Βέβαια η προκύπτουσα οικογένεια συνεχών συναρτήσεων στην περίπτωση ενός αυθαίρετου τελείως κανονικού χώρου X δεν είναι αναγκαία αριθμήσιμη. Έτσι δεν αναμένουμε εμφύτευση του X στον κύβο του Hilbert, όπως στην περίπτωση του θεωρήματος μετρικοποίησης του Urysohn. Παρόλα αυτά έχουμε το ακόλουθο ενδιαφέρον θεώρημα εμφύτευσης.

<u>Θεώρημα</u> 4.28. Έστω X τελείως κανονικός χώρος. Τότε ο X είναι ομοιομορφικός με υπόχωρο του κύβου $[0,1]^{\Gamma}$ για κάποιο σύνολο Γ.

<u>Απόδειξη</u> . Έστω Γ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f:\mathrm{X}\to[0,1]$. Τότε , επειδή ο X είναι τελείως κανονικός, οι συναρτήσεις του συνόλου Γ διαχωρίζουν σημεία και κλειστά υποσύνολα του X. Έπεται από το Λήμμα της εμφύτευσης ότι η απεικόνιση

$$F:x\in\mathrm{X}\to F(x)=\left(f(x)\right)_{f\in\Gamma}\in[0,1]^{\Gamma}$$

είναι ένας ομοιομορφισμός του X και του υποχώρου $F(\mathrm{X})$ του κύβου $[0,1]^{\Gamma}$.

<u>Πόρισμα</u> 4.29. Έστω X τοπολογικός χώρος. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Ο X είναι τελείως κανονικός

(β) Ο X είναι ομοιομορφικός με ένα υπόχωρο κάποιου συμπαγούς και Hausdorff χώρου

(γ) Ο X είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο κάποιου φυσιολογικού χώρου.

<u>Απόδειξη</u>.(α) $\Rightarrow$(β) Αν ο X είναι τελείως κανονικός τότε, από το προηγούμενο θεώρημα, είναι ομοιομορφικός με υπόχωρο του συμπαγούς χώρου $[0,1]^{\Gamma}$, για κάποιο σύνολο Γ.

(β) $\Rightarrow$(γ) Αν ο X είναι ομοιομορφικός με κάποιο υπόχωρο Y του συμπαγούς και Hausdorff χώρου Ω, τότε το συμπέρασμα έπεται αμέσως από το γεγονός ότι ένας συμπαγής χώρος του Hausdorff είναι φυσιολογικός (Θεώρημα 4.12).

(γ) $\Rightarrow$(α) Έστω ότι ο X είναι ομοιομορφικός με τον υπόχωρο Y του φυσιολογικού χώρου Ω. Από την παρατήρηση 4.26 ο Ω είναι τελείως κανονικός και άρα, από το θεώρημα 4.27 ο Y (ως υπόχωρος του Ω) είναι τελείως κανονικός. Έτσι ο X ως χώρος ομοιομορφικός με τελείως κανονικό χώρο έχει και αυτός την ίδια ιδιότητα.

…………………………………………………..

<u>Παραδείγματα</u> 4.30. 1) Έστω X ένας φυσιολογικός χώρος ώστε ο $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ δεν είναι φυσιολογικός. (Ένας τέτοιος χώρος είναι ο R_S, σύμφωνα με το παράδειγμα 4.9 (2).)

Ο X είναι τότε τελείως κανονικός και συνεπώς ο $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ είναι τελείως κανονικός (Πρβλ. την παρατήρηση 4.26 και το θεώρημα 4.27.). Έτσι ο $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ είναι τελείως κανονικός αλλά όχι φυσιολογικός χώρος. Επίσης ο $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ είναι από το πόρισμα 4.29 ομοιομορφικός με υπόχωρο φυσιολογικού χώρου(π.χ. ενός κύβου $[0,1]^{\Gamma}$). Έτσι έχουμε ένα παράδειγμα φυσιολογικού χώρου (του $[0,1]^{\Gamma}$) με υπόχωρο (τον $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$) ο οποίος δεν είναι φυσιολογικός. (Πρβλ. το παράδειγμα 4.9 (3).)

Σημειώνουμε ότι ένα ακόμη παράδειγμα τελείως κανονικού χώρου ο οποίος δεν είναι φυσιολογικός είναι ο χώρος $\mathrm{X}=R^{\Gamma}$, όπου Γ υπεραριθμήσιμο σύνολο, με την τοπολογία γινόμενο. Από το θεώρημα 4.27 είναι σαφές ότι ο X είναι τελείως κανονικός, για την

(δύσκολη) απόδειξη ότι ο X δεν είναι φυσιολογικός παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία

([Mu] Κεφάλαιο 4, παράγραφος 4.2 , παράδειγμα 4 άσκηση 15.).

2) Υπάρχουν παραδείγματα κανονικών χώρων οι οποίοι δεν είναι τελείως κανονικοί, είναι όμως δύσκολο να ορισθούν και έτσι παραπέμπουμε και πάλι στην βιβλιογραφία. Ένα σχετικά απλό παράδειγμα υπάρχει στο [Mu] (Κεφάλαιο.5, παράγραφος 5.2, άσκηση 6).

Ασκήσεις

1)Αποδείξτε ότι ένας τ.χ. X είναι T_1 αν και μόνο αν τα μονοσύνολα του X είναι κλειστά

[Υπόδειξη: Αν ο X είναι T_1 και $x\in\mathrm{X}$ τότε $\overline{\{x\}}=\{x\}$.]

2)Αποδείξτε ότι στον ορισμό των κανονικών, φυσιολογικών και τελείως κανονικών χώρων η υπόθεση ότι ο χώρος είναι T_2 μπορεί να αντικατασταθεί από την (ασθενέστερη) υπόθεση ότι είναι T_1.

3)Έστω X τ.χ. Hausdorff. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ και x είναι σημείο συσσώρευσης (σ.σ) του A τότε κάθε περιοχή του x περιέχει άπειρα σημεία του A.

(β) Αν $\{x_1, \ldots x_n\}$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του X, τότε υπάρχουν ξένες ανά δύο περιοχές $U_1, \ldots, U_n$ των $x_1, \ldots x_n$ αντίστοιχα.

4) Αποδείξτε ότι σε ένα πεπερασμένο σύνολο X η μόνη Hausdorff τοπολογία είναι η διακριτή.

5) Αν X είναι άπειρος χώρος Hausdorff, τότε περιέχει ένα άπειρο υπόχωρο του οποίου η (σχετική) τοπολογία είναι η διακριτή.

6)Έστω X, Y τ.χ. με τον Y Hausdorff και $f, g : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι:

(α) $\{x \in \mathrm{X} : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό στον X.

(β) Αν $D \subseteq \mathrm{X}$ είναι πυκνό στον X και $f\Big|_D = g\Big|_D$, τότε $f = g$ επί του X.

(γ)Το γράφημα $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{X}\}$ της (συνεχούς) f είναι κλειστό στον $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ και ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Αν όμως ο Y είναι επί πλέον συμπαγής τότε ισχύει.

[<u>Υπόδειξη</u>. Για το (γ): Αν το $G(f)$ είναι κλειστό στον $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ (ο Y συμπαγής) και V είναι ανοικτή περιοχή του $f(x_0)$, τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή W του x_0 ώστε $W \times (\mathrm{Y} \setminus V)$ δεν τέμνει το $G(f)$.]

7) Αποδείξτε ότι αν ο X είναι κανονικός τ.χ., τότε για κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων x και y του X υπάρχουν περιοχές U και V των x και y ώστε $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

8) Αποδείξτε ότι αν ο X είναι φυσιολογικός τ.χ., τότε για κάθε ζεύγος κλειστών ξένων υποσυνόλων του A και B υπάρχουν ανοικτά σύνολα U και V ώστε $A \subseteq U, B \subseteq V$ και $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

9)Αποδείξτε ότι ένας κλειστός υπόχωρος ενός φυσιολογικού χώρου είναι φυσιολογικός.

10) Έστω $(X, \leq)$ ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο, θεωρούμε το X ως τ.χ. με την τοπολογία της διάταξης (πρβλ. την άσκηση 4 της παραγράφου 1.3). Αποδείξτε ότι ο τ.χ. X είναι κανονικός.

11)Αποδείξτε ότι: (α) Κάθε 2^{ος} αριθμήσιμος τ. χ. είναι Lindelof

(β) Κάθε κλειστός υπόχωρος Y ενός χώρου Lindelof X είναι Lindelof, αλλά το συμπέρασμα δεν ισχύει γενικά χωρίς την υπόθεση ότι ο Y είναι κλειστός στον X.

12) Αποδείξτε ότι κάθε κανονικός χώρος Lindelof είναι φυσιολογικός

[Υπόδειξη .Προσαρμόστε την απόδειξη του θεωρήματος 4.13]

13) Έστω X μετρικοποιήσιμος τ.χ.. Αποδείξτε ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Ο X είναι 2^{ος} αριθμήσιμος.

(β) Ο X είναι διαχωρίσιμος.

(γ) Ο X είναι Lindelof.

14)Αποδείξτε ότι ο χώρος $R_S \times R_S$ (= το επίπεδο Sorgenfrey) είναι διαχωρίσιμος. Εντούτοις περιέχει υπόχωρο ο οποίος δεν είναι διαχωρίσιμος.

[Υπόδειξη . Δείξτε ότι ο υπόχωρος $L = \{(x, -x) : x \in R\}$ του $R_S \times R_S$ έχει την διακριτή τοπολογία.]

15)Αποδείξτε ότι αν X είναι 2ος αριθμήσιμος τ. χ. τότε κάθε οικογένεια ξένων ανά δύο μη κενών ανοικτών υποσυνόλων του X, είναι το πολύ αριθμήσιμη

[Υπόδειξη. Ο X είναι διαχωρίσιμος.]

16) Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος X είναι 2ος αριθμήσιμος.

[Υπόδειξη. Έστω d μια μετρική η οποία επάγει την τοπολογία του X. Για κάθε $n \in N$, θεωρούμε ένα πεπερασμένο κάλυμμα a_n του X από ανοικτές σφαίρες ακτίνας $\frac{1}{n}$. Τότε η οικογένεια $a = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$, είναι μία αριθμήσιμη βάση για τον X. Μία έμμεση απόδειξη έπεται επίσης και από την άσκηση 13.]

17)Αποδείξτε με ένα παράδειγμα ότι ένας 2ος αριθμήσιμος χώρος του Hausdorff δεν είναι απαραίτητα μετρικοποιήσιμος.

18)Έστω X τ.χ., θεωρούμε τον R^{X} με την τοπολογία γινόμενο και συμβολίζουμε με $C(\mathrm{X})$ τον (διανυσματικό) υπόχωρο του R^{X} όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathrm{X} \to R$.

Αποδείξτε ότι: (α) Ο $C(R)$ είναι πυκνός υπόχωρος του R^R. Ισχύει αυτό το αποτέλεσμα αν ο X είναι είτε μετρικοποιήσιμος ή συμπαγής και Hausdorff;

(β) Αποδείξτε ότι ο $C(R)$ δεν είναι ακολουθιακά πυκνός στον R^R. (Δηλαδή υπάρχει $f : R \to R$ συνάρτηση για την οποία δεν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : R \to R, n \geq 1$, ώστε $f_n(t) \to f(t)$ για κάθε $t \in R$.)

[Υπόδειξη. Για το (α): Αν $f \in R^R$ τότε κάθε βασική περιοχή $V = \{ g \in R^R : |g(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon, k = 1,2,...,n \}$, όπου $x_1,...,x_n \in R, \varepsilon > 0$, περιέχει συνεχή συνάρτηση. Για το (β) : Ο πληθάριθμος $\left|C\left(R\right)\right| = c$ (= το συνεχές). Όμως $\left|R^{R}\right| = 2^{c} > c$