1.4.Συνεχείς συναρτήσεις

Η έννοια της συνεχούς συνάρτησης είναι θεμελιώδης και μελετάται κατ’ αρχήν για συναρτήσεις μιας και κατόπιν δύο ή περισσότερων μεταβλητών στα μαθήματα του Απειροστικού Λογισμού. Στο μάθημα της Πραγματικής Ανάλυσης η έννοια αυτή επεκτείνεται σε χώρους γενικότερων των ευκλειδείων, δηλαδή στους μετρικούς χώρους.

Εδώ θα διατυπώσουμε έναν ορισμό της συνέχειας, για συναρτήσεις ορισμένες σε τοπολογικούς χώρους ο οποίος θα περιλαμβάνει τους προηγούμενους ορισμούς ως ειδικές περιπτώσεις. Αυτό που επιτρέπει την επέκταση του κλασικού ορισμού, είναι η έννοια του <u>ανοικτού</u> συνόλου και η συναρτώμενη έννοια της <u>περιοχής</u> ή <u>γειτονιάς</u> ενός σημείου. Η τελευταία υλοποιεί την´´ εγγύτητα´´ δύο σημείων: το σύνολο των σημείων που είναι ´´ αρκετά κοντά´´ στο σημείο a είναι μια περιοχή του a. Στους μετρικούς χώρους περιοχές είναι οι σφαίρες και η ´´εγγύτητα´´ γίνεται ποσοτική, εφόσον το σημείο x είναι ´´αρκετά κοντά´´ στο a αν το x ανήκει σε κάποια σφαίρα $B(a,\varepsilon)$ ($\Leftrightarrow d(x,a)<\varepsilon$).

Ας ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας τον ορισμό της συνέχειας σε μετρικούς χώρους.

Έστω $(X,d),(Y,\rho)$ μετρικοί χώροι και $f:X\to Y$ συνάρτηση. Η f λέγεται ότι είναι συνεχής στο $a\in X$ αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon,a)>0:x\in X$ και $d(x,a)<\delta\Rightarrow\rho\big(f(x),f(a)\big)<\varepsilon$. Χρησιμοποιώντας σφαίρες ο ορισμός αυτός διατυπώνεται και με τον ακόλουθο τρόπο: για κάθε σφαίρα $B\big(f(a),\varepsilon\big)$ του Y υπάρχει σφαίρα $B(a,\delta)$ του X ώστε, $f\big(B(a,\delta)\big)\subseteq B\big(f(a),\varepsilon\big)$.

Είναι η τελευταία μορφή του ορισμού την οποία θα γενικεύσουμε σε τοπολογικούς χώρους.

<u>Ορισμός</u> 1.42 . Έστω X,Y τοπολογικοί χώροι , $f:X\to Y$ συνάρτηση και $a\in X$.

Η f λέγεται <u>συνεχής στο a</u>, αν για κάθε περιοχή V του $f(a)$ στον Y υπάρχει περιοχή U του a στον X ώστε $f(U) \subseteq V$.

Η f λέγεται συνεχής επί του X, αν και μόνο αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X. (Αν δεν υπάρχει αμφιβολία για το πεδίο ορισμού της f, θα λέμε ότι η f είναι συνεχής.)

Το βασικό θεώρημα για συνεχείς συναρτήσεις είναι το ακόλουθο:

<u>Θεώρημα</u> 1.43 . Έστω X και Y τ. χ. και $f: X \to Y$ συνάρτηση. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Για κάθε ανοικτό υποσύνολο V (μέλος μιας υποβάσης) του Y, το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό στον X.

(γ) Για κάθε κλειστό υποσύνολο F του Y το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στον X.

(δ) Ισχύει ότι, $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$, για κάθε $A \subseteq X$.

<u>Απόδειξη</u>: Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος υπενθυμίζουμε ότι:

Αν X, Y σύνολα και $f: X \to Y$ συνάρτηση τότε η επέκταση f^{-1} της f στο $P(Y)$, δηλαδή η συνάρτηση $A \in P(Y) \to f^{-1}(A) \in P(X)$, διατηρεί όλες τις συνολοθεωρητικές πράξεις (της ένωσης τομής και διαφοράς).

(α) $\Rightarrow$(β) Έστω V ανοικτό στο Y και $x \in f^{-1}(V)$. Εφόσον f συνεχής στο x και το V είναι περιοχή του $f(x)$ (ως ανοικτό) , θα υπάρχει περιοχή U του x ώστε $f(U) \subseteq V$. Έπεται ότι $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$ και έτσι το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό, εφόσον για κάθε $x \in f^{-1}(V)$ υπάρχει περιοχή U του x ώστε $U \subseteq f^{-1}(V)$.

(β) $\Rightarrow$(α) Έστω $x \in X$ και V περιοχή του $f(x)$, τότε υπάρχει $W \subseteq Y$ ανοικτό ώστε $f(x) \in W \subseteq V$. Επομένως $x \in f^{-1}(W)$ και το $U = f^{-1}(W)$ είναι ανοικτή περιοχή του x. Έπεται ότι, $f(U) \subseteq W \subseteq V$ και έτσι η f είναι συνεχής στο x. (Έστω Σ μια υποβάση για την τοπολογία τ_Y του Y και έστω τ_X η τοπολογία του X. Υποθέτουμε ότι, $V \in \Sigma \Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau_X$. Τότε το ίδιο ισχύει για τις πεπερασμένες τομές μελών της Σ και συνεπώς για τις αυθαίρετες ενώσεις τέτοιων τομών. Έτσι έχουμε ότι, $V \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau_X$.

(β) $\Leftrightarrow$(γ) . Η απόδειξη αυτής της ισοδυναμίας βασίζεται στην παρατήρηση ότι, $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ (1) για κάθε $F \subseteq Y$. Επειδή το $F \subseteq Y$ είναι κλειστό $\Leftrightarrow$ το $V = Y \setminus F$ είναι ανοικτό, από την (1) έπεται ότι το $U = X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(V) \subseteq X$ είναι ανοικτό $\Leftrightarrow$ το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στον X.

Έτσι οι ισχυρισμοί (α), (β), (γ) είναι ισοδύναμοι και είναι αρκετό να αποδείξουμε τις (γ) $\Rightarrow$(δ) και (δ) $\Rightarrow$(γ).

(γ) $\Rightarrow$(δ) Έστω $A \subseteq X$. Θέτομε $F = \overline{f(A)}$.

Τότε το F είναι κλειστό στον Y και από την υπόθεσή μας το $f^{-1}(F)$ θα είναι κλειστό στον X. Παρατηρούμε ότι το $f^{-1}(F)$ περιέχει το A. Πράγματι, $f(A) \subseteq F \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(F)$. Έπεται ότι $\overline{A} \subseteq f^{-1}(F) \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq f(f^{-1}(F)) \subseteq F = \overline{f(A)}$.

(δ) $\Rightarrow$(γ) . Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό και $A = f^{-1}(F)$. Για να αποδείξουμε ότι το A είναι κλειστό είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $\overline{A} \subseteq A$. Παρατηρούμε ότι $f(A) \subseteq F$. Επομένως αν $x \in \overline{A}$ τότε ,

$$f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{F} = F .$$

Έτσι το $x \in f^{-1}(F) = A$ και συνεπώς $\overline{A} \subseteq A$.

Σημείωση . Στο υπόλοιπο αυτών των σημειώσεων, όταν θα κάνουμε αναφορά στον τοπολογικό χώρο $R^n, n \geq 1$ (ή στον χώρο R^n) θα εννοούμε πάντοτε ότι είναι εφοδιασμένο με την ευκλείδεια (και τα υποσύνολά του με την σχετική) τοπολογία.
Σε διαφορετική περίπτωση θα κάνουμε ρητή αναφορά στην τοπολογία την οποία θεωρούμε επ' αυτού.

Αποδεικνύουμε ακολούθως κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων

Ορισμός 1.44 . Έστω X,Y σύνολα, $A \subseteq X$ και $f: X \to Y$ συνάρτηση. Η συνάρτηση $f\big|A: A \to Y: \left(f|A\right)(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$ ονομάζεται ό περιορισμός της f στο A.

Πρόταση 1.45 Έστω X,Y,Z τοπολογικοί χώροι

(α) Σύνθεση: Αν $f: X \to Y$ και $g: Y \to Z$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε και η $gof: X \to Z$ είναι συνεχής.

(β) Περιορισμός του πεδίου ορισμού: Αν η $f: X \to Y$ είναι συνεχής και $A \subseteq X$ θεωρείται με την σχετική τοπολογία, τότε η συνάρτηση περιορισμός, $f\Big|_A : A \to Y$ είναι συνεχής.

(γ) Περιορισμός του πεδίου τιμών: Αν η $f: X \to Y \subseteq Z$ συνάρτηση και Y υπόχωρος του τοπολογικού χώρου Z τότε : $f: X \to Z$ συνεχής $\Leftrightarrow f: X \to Y$ συνεχής. (Όπου με f συμβολίζουμε την ίδια συνάρτηση με πεδίο τιμών τον υπόχωρο Y του Z.)

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $(gof)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$. Έστω $V \subseteq Z$ ανοικτό τότε (επειδή g συνεχής) το $g^{-1}(V)$ είναι ανοικτό στον Y και (επειδή f συνεχής) το $f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) = (gof)^{-1}(V)$ είναι ανοικτό στον X. Έπεται από το θεώρημα 1.43 ότι η gof είναι συνεχής.

(β) Έστω $V \subseteq Y$ ανοικτό, τότε το $\left(f|A\right)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \bigcap A$. Όμως η f είναι συνεχής το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό άρα το $f^{-1}(V) \bigcap A$ είναι ανοικτό ως προς A.

(γ) παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $I:Y\to Z:I(y)=y$ για $y\in Y$ είναι συνεχής.

(Αν$U\subseteq Z$ ανοικτό, τότε $I^{-1}(U)=U\bigcap Y$, ανοικτό ως προς Y.)

($\Rightarrow$) Έστω ότι f συνεχής. Αν $V\subseteq Y$ ανοικτό ως προς Y τότε υπάρχει U ανοικτό στον Z ώστε $V=U\bigcap Y$.

Τότε $f^{-1}(V)=f^{-1}(Y\bigcap U)=f^{-1}(Y)\bigcap f^{-1}(U)=X\bigcap f^{-1}(U)=f^{-1}(U)$ ανοικτό στον X. Επομένως η f είναι συνεχής.

$''\Leftarrow''$ Παρατηρούμε ότι $f=Io f$. Έτσι αν η f είναι συνεχής τότε επειδή και η I είναι συνεχής από τον ισχυρισμό (α) της πρότασης η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

Παραδείγματα 1.46.

1) Έστω $(X,d),(Y,\rho)$ μετρικοί χώροι $a\in X$ και $f:X\to Y$ συνάρτηση συνεχής στο a, τότε βέβαια (σύμφωνα με την συζήτηση που προηγήθηκε του ορισμού 1.4) η f είναι συνεχής στο a, με τον γνωστό μας ορισμό της Πραγματικής Ανάλυσης

2) Αν X και Y τοπολογικοί χώροι, τότε κάθε σταθερή συνάρτηση $f:X\to Y$ είναι συνεχής. (Η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού $U\subseteq Y$ είναι είτε το $\varnothing$ ή ο X.)

3)Έστω X σύνολο με δύο τοπολογίες τ_1,τ_2. Η ταυτοτική απεικόνιση $I:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2):I(x)=x$, όπου $x\in X$ είναι συνεχής αν και μόνο αν $\tau_2\subseteq\tau_1$.

4) Έστω X,Y,Z τ.χ. και $f:X\to Y,g:X\to Z$ συναρτήσεις . Ορίζουμε $\varphi:X\to Y\times Z:\varphi(x)=(f(x),g(x))$, $x\in X$.

Τότε η φ είναι συνεχής (ο $Y\times Z$ θεωρείται με την τοπολογία γινόμενο, πρβλ παράδειγμα 1.33 (1)) αν και μόνο αν οι f και g είναι συνεχείς. Πράγματι, αν $U\subseteq Y$ και $V\subseteq Z$ ανοικτά τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι , $\varphi^{-1}(U\times V)=f^{-1}(U)\bigcap g^{-1}(V)$.

Έπεται ότι αν $V = Z$ τότε $\varphi^{-1}(U \times Z) = f^{-1}(U)$ και αν $U = Y$ τότε $\varphi^{-1}(Y \times V) = g^{-1}(V)$. Επειδή τα σύνολα της μορφής $U \times Z$ και $Y \times V$, όπου $U \subseteq Y$ και $V \subseteq Z$ είναι ανοικτά, συνιστούν μία υποβάση του χώρου $Y \times Z$. Άρα το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα 1.43 (β).

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το παράδειγμα αυτό γενικεύεται για μια πεπερασμένη ακολουθία συναρτήσεων $f_k : X \to Y_k, k = 1, 2, ..., n$. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.).

Ως ειδικές περιπτώσεις του ανωτέρω παραδείγματος αναφέρουμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f : R \to R^2 : f(t) = (\cos t, \sin t)$ και $F : R^2 \to R^3 : F(x, y) = (x + y^2, x^3, e^x)$.

5) Έστω X, Y τ.χ. Θεωρούμε τις προβολές $\pi_1 : X \times Y \to X : \pi_1(x, y) = x$ και $\pi_2 : X \times Y \to Y : \pi_2(x, y) = y$, στην πρώτη και δεύτερη συντεταγμένη αντίστοιχα. Οι π_1, π_2 είναι συνεχείς συναρτήσεις (όταν ο $X \times Y$ θεωρείται με την τοπολογία γινόμενο.). Πράγματι, $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ και $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ και αυτά τα σύνολα είναι ανοικτά αν τα U και V είναι ανοικτά.

Πρόταση 1.47 . Έστω X, Y τ.χ. και $\{A_a : a \in A\}$ οικογένεια υποσυνόλων του X ώστε $\bigcup_{a \in A} A_a = X$. Για κάθε $a \in A$, έστω $f_a : A_a \to Y$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f_a | A_a \cap A_\beta = f_\beta | A_a \cap A_\beta$, για κάθε $a, \beta \in A$. Υποθέτομε ότι είτε:

(1)Τα σύνολα A_a είναι ανοικτά,

ή (2) Τα σύνολα A_a είναι κλειστά και η οικογένεια πεπερασμένη, έστω $\{A_1, ..., A_n\}$

Τότε υπάρχει (μοναδική) συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ η οποία επεκτείνει κάθε f_a, δηλαδή, για κάθε $a \in A$, $f | A_a = f_a$.

Απόδειξη Για κάθε $x \in X$, ορίζουμε $f(x) = f_a(x)$, όπου a είναι ένας δείκτης για τον οποίο $x \in A_a$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι έτσι ορίζεται πράγματι μία συνάρτηση $f : X \to Y$ ώστε, $f\,|A_a = f_a$, για κάθε $a \in A$.

(1)Έστω $V \subseteq Y$ ανοικτό. Τότε, $f^{-1}(V) \cap A_a = f_a^{-1}(V)$. Από τη συνέχεια της f_a το $f_a^{-1}(V)$ είναι ανοικτό ως προς A_a και άρα (επειδή το A_a είναι ανοικτό υποσύνολο του X) ανοικτό στον X. Έπεται ότι $f^{-1}(V) = \bigcup_{a\in A}\left(f^{-1}(V \cap A_a)\right) = \bigcup_{a\in A} f_a^{-1}(V)$, ανοικτό στον X . Έτσι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

(2) Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό. Τότε, $f^{-1}(F) \cap A_k = f_k^{-1}(F)$ από την συνέχεια της f_k, το $f_k^{-1}(F)$ είναι κλειστό ως προς A_k και άρα (το A_k είναι κλειστό υποσύνολο του X) κλειστό στον X .

Έπεται ότι, $f^{-1}(F) = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(F \cap A_k) = \bigcup_{k=1}^{n} f_k^{-1}(F)$. Έτσι το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό ως πεπερασμένη ένωση κλειστών και η f είναι συνεχής.

Παρατηρήσεις 1. 48 .

1) Έστω X σύνολο και $\{A_a : a \in A\}$ οικογένεια υποσυνόλων του X ώστε, $\bigcup_{a\in A} A_a = X$. Μια τέτοια οικογένεια ονομάζεται κάλυψη ή κάλυμμα του X .

2) Ο ισχυρισμός (1) της πρότασης 1.47 , εκφράζει το γεγονός ότι η συνέχεια μιας συνάρτησης είναι τοπική ιδιότητα.

3)Ως εφαρμογή της πρότασης 1.47 παρατηρούμε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ \dfrac{x}{3}, \; x \leq 0 \end{cases} \;, \; g(x) = \begin{cases} \sin x, \quad x \geq 0 \\ 0, \; x \in [-1,0] \\ -x-1, x \leq -1 \end{cases}$$

Ορισμός 1.49. Έστω X,Y τ.χ. και $f: X \to Y$ μια 1 – 1 και επί συνάρτηση. Η f λέγεται ομοιομορφισμός αν τόσο η f όσο και η αντίστροφή της $f^{-1}: Y \to X$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Τότε οι X και Y λέγονται ομοιομορφικοί και αυτό το συμβολίζουμε γράφοντας $X \cong Y$.
Αν X και Y τ.χ. και $f: X \to Y$ συνάρτηση, η f λέγεται τοπολογική εμφύτευση, αν είναι 1 – 1 συνεχής και η $f^{-1}: f(X) \to X$ είναι συνεχής (όπου ο $f(X)$ θεωρείται ως υπόχωρος του Y.).

Έστω $f: X \to Y$ ομοιομορφισμός, τότε εύκολα εξακριβώνουμε ότι $U \subseteq X$ ανοικτό αν και μόνο αν $f(U) \subseteq Y$ ανοικτό. Έτσι η f επεκτείνεται σε 1 – 1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των τοπολογιών $\tau(X)$ και $\tau(Y)$ των X και Y. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι κάθε ιδιότητα του X η οποία εκφράζεται μέσω της τοπολογίας (δηλαδή των ανοικτών συνόλων) του X ισχύει και για το Y. Μια τέτοια ιδιότητα ονομάζεται τοπολογική ιδιότητα του X.

Περισσότερα γενικά, θα ονομάζουμε μια ιδιότητα τοπολογικών χώρων ένα τοπολογικό αναλλοίωτο, αν οποτεδήποτε είναι αληθής για το χώρο X είναι επίσης αληθής και για κάθε χώρο ομοιομορφικό με τον X.

Παρατηρούμε ότι η σχέση του ομοιομορφισμού για τοπολογικούς χώρους είναι μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των τοπολογικών χώρων: (α) $X \cong X$,
(β) $X \cong Y \Leftrightarrow Y \cong X$ και (γ) $X \cong Y$ και $Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z$. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες .)

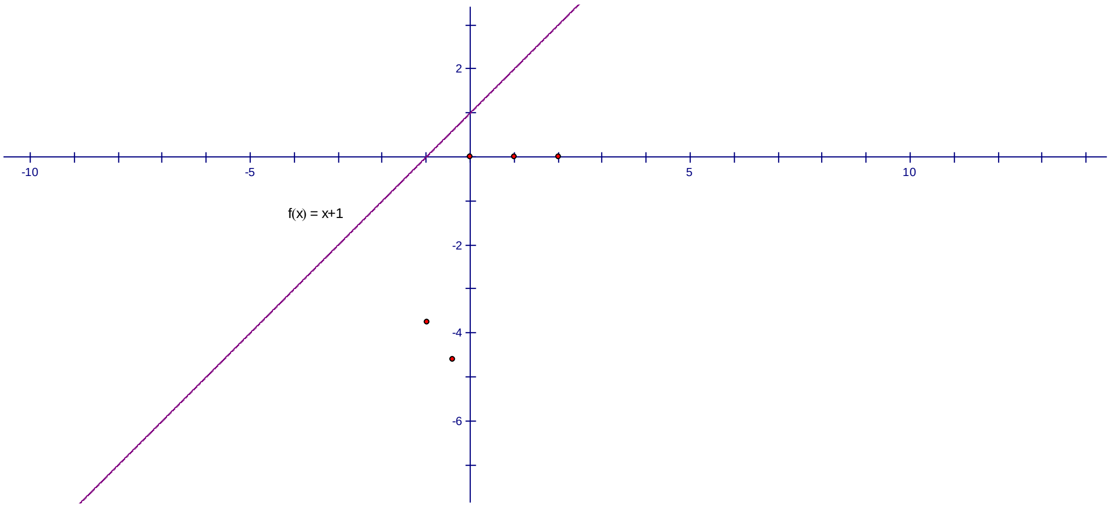
Παραδείγματα 1.50. 1) Έστω $f: X \to Y$ ομοιομορφισμός. Αν A υπόχωρος του X τότε $A \cong f(A)$. Πράγματι είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η απεικόνιση $f|A: A \to f(A) \subseteq Y$ είναι ομοιομορφισμός.

2) Έστω $c, d \in R$ με $c \neq 0$. Τότε η απεικόνιση $f: R \to R: f(x) = cx + d, x \in R$, είναι ένας ομοιομορφισμός εφόσον τόσο η f όσο και η αντίστροφή της $f^{-1}(y) = \frac{1}{c}y - \frac{d}{c}$,

$y \in R$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Έπεται ιδιαίτερα ότι αν $a,b \in R$ με $a,b \in R -\infty < a < b < +\infty$ τότε:

$[a,b] \cong [0,1]$, $(a,b) \cong (0,1)$, $[a,b) \cong [0,1)$ και $(a,b] \cong (0,1]$.

Πράγματι η απεικόνιση $f(x) = (b-a)x + a, x \in R$ είναι ένας ομοιομορφισμός , $f(0) = a$, $f(1) = b$ και $f([0,1]) = [a,b]$.



3) Η συνάρτηση $f : R \to (-1,1) : f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}, x \in R$, είναι ένας ομοιομορφισμός των χώρων R και $(-1,1)$. Πράγματι τόσο η f όσο και η αντίστροφή της $f^{-1} : (-1,1) \to R : f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ως συνθέσεις συνεχών.

Έπεται ιδιαίτερα ότι: $R \cong (-1,1)$, $[0,+\infty) \cong [0,1)$, $(-\infty,0] \cong (-1,0]$.

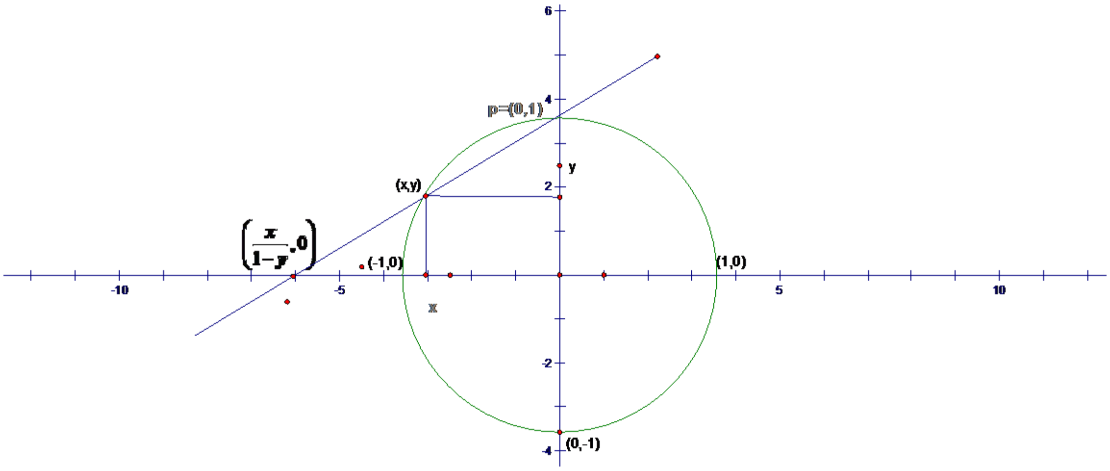
Συνδυάζοντας τα παραδείγματα (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι: $-\infty \le a < b \le +\infty$ τότε $(a,b) \cong (0,1)$. (γιατί;).

4) Έστω $(\overline{R}, \tau_e)$ η επεκτεταμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών (πρβλ. παράδειγμα 1.38 (2)) Τότε η απεικόνιση $F : \overline{R} \to [-1,1] : F(x) = \dfrac{x}{1+|x|}, x \in R$ και $F(\pm\infty) = \pm 1$, είναι ένας ομοιομορφισμός, και κατά συνέπεια η επεκτεταμένη ευθεία $\overline{R}$ είναι ομοιομορφική με το διάστημα $[-1,1]$ (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.)

5) Θεωρούμε το σημείο $p=(0,1)$ του μοναδιαίου κύκλου $S^1=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2=1\}$ του ευκλείδειου επιπέδου. Τότε $S^1\setminus\{p\}\cong R$. Πράγματι η απεικόνιση

$$\varphi:(x,y)\in S^1\setminus\{p\}\to\left(\frac{x}{1-y},0\right)\in R\times\{0\}\subseteq R^2,$$

είναι όπως εύκολα διαπιστώνεται (και γεωμετρικά) ένας ομοιομορφισμός των χώρων $S^1\setminus\{p\}$ και του υποχώρου $R\times\{0\}$ του R^2. Επειδή ο χώρος R ταυτίζεται με τον $R\times\{0\}$ μέσω της ομοιομορφικής εμφύτευσης $x\in R\to(x,0)\in R^2$, έχουμε το συμπέρασμα.



6) Μία συνεχής συνάρτηση $f:X\to Y$ η οποία είναι επιπλέον 1 – 1 και επί δεν είναι αναγκαία ομοιομορφισμός. Μία τέτοια συνάρτηση είναι η ταυτοτική $I:(R,\tau)\to R$, όπου τ =η διακριτή τοπολογία στον R.

Ένα ακόμη παράδειγμα είναι η ταυτοτική $I:R_s\to R$. (πρβλ. το παράδειγμα 1.33 (2).)

Ασκήσεις

1)Έστω X σύνολο και $A\subseteq X$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση X_A του A ορίζεται ως $X_A(x)=1$, αν $x\in A$ και $X_A(x)=0$ αν $x\in X\setminus A$. Υποθέτομε ότι X είναι τοπολογικός χώρος και $A\subseteq X$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η χαρακτηριστική συνάρτηση X_A είναι συνεχής αν και μόνο αν το A είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X.

(β) Αποδείξτε ότι στον χώρο R_s (= ευθεία Sorgenfrey) το διάστημα $[a,b)$ είναι ανοικτό και κλειστό για κάθε $a,b \in R$ με $a<b$.

2) Έστω X τ.χ. και $f,g : X \to R$ συνεχείς συναρτήσεις .

Αποδείξτε ότι : (α) Οι συναρτήσεις $f \pm g$, λf $(\lambda \in R)$, $f \cdot g$, $\max(f,g)$ και $\min(f,g)$ είναι συνεχείς. Έπεται ιδιαίτερα ότι το σύνολο $C(X)$ όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to R$, είναι (με πράξεις ορισμένες κατά σημείο) διανυσματικός χώρος επί του R.

(β) Αν $f(x) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(γ) Αν X τ.χ. και $f,g : X \to C$ συνεχείς συναρτήσεις τότε οι $f \pm g, \lambda f$ $(\lambda \in C)$, $f \cdot g$ είναι συνεχείς. Αν $f \neq 0$ τότε η $\dfrac{1}{f}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

[<u>Υπόδειξη</u> . Για το (β): $f \cdot g = \frac{1}{4}\left[|f+g|^2 - |f-g|^2\right]$, $\max(f,g) = \frac{1}{2}\left[f+g+|f-g|\right]$, $\min(f,g) = \frac{1}{2}\left[f+g-|f-g|\right]$. Για τις $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και την πρόταση 1. 47 (2). Για το (γ) παρατηρούμε ότι το σύνολο των μιγαδικών C ταυτίζεται τοπολογικά με το R^2 και ότι αν $f : X \to C \cong R^2$ συνάρτηση τότε $f = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$.]

3) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $(x,y) \in R^2 \to x+y \in R$ και $(x,y) \in R^2 \to x \cdot y \in R$ είναι συνεχείς.

[<u>Υπόδειξη.</u> Έστω $(a,b) \in R^2$ και $\varepsilon > 0$. Για την πρόσθεση παρατηρούμε ότι : $|x-a| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|y-b| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(x+y)-(a+b)| \leq |x-a| + |y-b| < \varepsilon$.

Για τον πολλαπλασιασμό έχουμε ότι: αν επιλέξουμε $0<\delta<1$ ώστε $\delta(|a|+|b|+1) < \varepsilon$, τότε οι ανισότητες $|x-a|<\delta$ και $|y-b|<\delta$ μαζί με την ταυτότητα, $xy-ab = a(y-b)+(x-a)b+(x-a)(y-b)$ συμπεραίνουμε ότι, $|xy-ab| < \varepsilon$.]

4) α) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι ΄΄ δεξιά συνεχής΄΄ (δηλαδή $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a)$ για κάθε $a\in R$). Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής όταν θεωρείται ως συνάρτηση από τον R_S στον R.

(β) Τι είδους συναρτήσεις $f:R\to R$ είναι οι συνεχείς συναρτήσεις από τον R στον R_S ή από τον R_S στον R_S;

5) Βρείτε μία συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία έχει ακριβώς ένα σημείο συνέχειας .

6) Έστω X τ.χ. , $f_n : X\to R,\ n\geq 1$, ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f:X\to R$ συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν $f_n\to f$ ομοιόμορφα επί του X τότε και η f είναι συνεχής .

7) Έστω $\left(X,\|\cdot\|\right)$ χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $f:X\to B(0,1)\,(=\{x\in X:\|x\|<1\}:\ f(x)=\dfrac{x}{1+\|x\|},x\in X$ είναι ομοιομορφισμός.

8) Στο σύνολο R επισυνάπτουμε ένα σημείο έστω ∞ και θεωρούμε εκείνη την τοπολογία τ επί του συνόλου $R=R\bigcup\{\infty\}$, η οποία έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής, $\{x\in R:x<a\}$, $\{x\in R:x>a\}$ καθώς και τα $\{\infty\}\bigcup\{x\in R:x>a\}\bigcup\{x\in R:x<a\},a\in R$. Αποδείξτε ότι: (α) Η σχετική τοπολογία του R θεωρούμενου ως υποχώρου του (R,τ) είναι η Ευκλείδεια.

(β) Η απεικόνιση $F:S^1\to R:F(x,y)=\dfrac{x}{1-y}$, αν $(x,y)\neq(0,1)$ και $F(0,1)=\infty$, είναι ομοιομορφισμός. (Πρβλ. το παράδειγμα 1.50 (5).) Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία της F .

9) Έστω $f:R\to S^1: f(t)=(\cos t,\sin t),t\in R$. Αποδείξτε ότι:

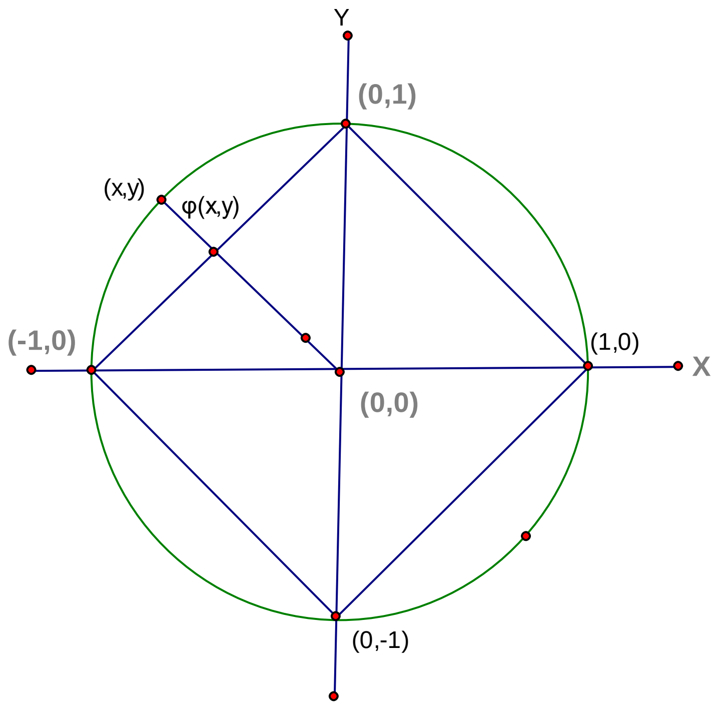
(α) Η f είναι συνεχής και επί του S^1

(β) Η $f\|[0,2\pi)$ είναι 1 – 1 και επί του S^1, αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός.

(γ) Αν ταυτίσουμε τα σημεία 0 και 2π του $[0,2\pi]$, ποια τοπολογία τ στο $[0,2\pi)$ μπορεί να κάνει την $f\|[0,2\pi)$ ομοιομορφισμό;

[Υπόδειξη. Για το (γ): θεωρούμε ως βάση περιοχών του 0 όλα τα σύνολα της μορφής $[0,\varepsilon)\cup(2\pi-\varepsilon,2\pi), 0<\varepsilon<2\pi$. Συσχετίστε αυτή την ´´ κατασκευή´´ με το χώρο (R,τ) της άσκησης (8).]

10) Εξηγήστε γεωμετρικά ότι η απεικόνιση φ του σχήματος είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ του μοναδιαίου κύκλου S^1 και του τετραγώνου $S=\{(x,y):|x|+|y|=1\}$ με κορυφές $(0,1),(-1,0),(0,-1)$ και



$(1,0)$.

Εν συνεχεία αποδείξτε ότι η φ επεκτείνεται σε ένα ομοιομορφισμό $\varphi: R^2 \to R^2$ ώστε $\varphi(D)=\Omega$, όπου D και Ω είναι τα εσωτερικά των S^1 και S.

[<u>Υπόδειξη.</u> Για κάθε $\vec{x}=(x,y)\in R^2$, θέτομε, $\left\|\vec{x}\right\|_1=|x|+|y|$ και $\|x\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$. Η ζητούμενη φ είναι η $\varphi\left(\vec{x}\right)=\frac{\left\|\vec{x}\right\|_2}{\left\|\vec{x}\right\|_1}\cdot\vec{x}, \vec{x}\neq(0,0)$ και $\varphi(0,0)=(0,0)$ και η αντίστροφή της η $\varphi^{-1}\left(\vec{y}\right)=\frac{\left\|\vec{y}\right\|_1}{\left\|\vec{y}\right\|_2}\cdot\vec{y}, \vec{y}\neq(0,0)$ και $\varphi^{-1}(0,0)=(0,0)$. Παρατηρούμε ότι, αν $\left(\overrightarrow{x_n}\right)\subseteq R^2$ τότε $\left\|\overrightarrow{x_n}\right\|_2\to 0\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{x_n}\right\|_1\to 0$.]

11) Έστω $p=(0,0,1)$ ο «βόρειος» πόλος της σφαίρας $S^2=\left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2=1\right\}$ του R^3. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\varphi:(x,y,z)\in S^2\setminus\{p\}\to\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},0\right)\in R^2\times\{0\}\subseteq R^3$ είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ των χώρων $S^2\setminus\{p\}$ και του υποχώρου $R^2\times\{0\}\cong R^2$ του R^3. Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται <u>στερεογραφική προβολή</u>. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι, $S^n\setminus\left\{(0,0,\ldots,1)\right\}\cong R^n\times\{0\}\cong R^n$, όπου $S^n=\left\{(x_1,\ldots,x_{n+1})\in R^{n+1} : x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2=1\right\}$