ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ
28/01/2019

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Νδο υπάρχει τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ στο X με $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ και με την ιδιότητα:

$$\mathcal{T} \text{ τοπολογία στο } X \text{ με } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{T}.$$

(β) Θεωρούμε $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ με την ιδιότητα:

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall n \in U : p|n \Rightarrow p \in U.$$

Νδο $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο $\mathbb{N}$ που δεν συμπίπτει με την διακριτή.

ΘΕΜΑ 2. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{R} = \{A \subseteq X : A = (\bar{A})^o\}$. Νδο εν γένει $\mathcal{R} \neq \mathcal{T}$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα παρακάτω:
(α) $\forall A \subseteq X : (\bar{A})^o \in \mathcal{R}$.
(β) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$.
(γ) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Εστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής, αν και μόνον αν, για κάθε δίκτυο (x_λ) στο X με $x_\lambda \to x$, ισχύει $f(x_\lambda) \to f(x)$.

(β) Έστω $\mathcal{T}$ η συνήθης τοπολογία του $\mathbb{R}$ και $\mathcal{T}_S$ η τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων. Να ελέγξετε αν είναι συνεχής ή/και ανοιχτή η απεικόνιση $g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ με $g(x) = [-x]$, όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος του x.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να βρεθεί η αρχική (:ασθενής) τοπολογία που ορίζεται στον $X = \mathbb{R}$ από την οικογένεια $F = \{f_a : X \to \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\}$, όπου $f_a(x) = 0$, για $x \leq a$ και $f_a(x) = 1$, για $x > a$.

(β) Έστω $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ οικογένεια T_3–χώρων. Θεωρούμε στον $X = \prod X_i$ την τοπολογία-γινόμενο. Νδο ο X είναι T_3–χώρος.

ΘΕΜΑ 5. (α) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$, νδο το διάστημα $[a, b]$ είναι συνεκτικό.

(β) Έστω I σύνολο. Θεωρούμε στο $\mathbb{R}^I$ την τοπολογία-γινόμενο. Νδο ένα $F \subseteq \mathbb{R}^I$ είναι συμπαγές αν και μόνον αν το F είναι κλειστό και, για κάθε $i \in I$, η εικόνα της i-προβολής $\pi_i(F)$ είναι φραγμένη.

ΘΕΜΑ 6. (α) Νδο κάθε 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.

(β) Νδο για κάθε 1ο αριθμήσιμο, διαχωρίσιμο T_2–χώρο X, ισχύει $|X| \leq |\mathbb{R}|$.

Να απαντηθούν 5 από τα 6 θέματα
Καλή Επιτυχία!!!