Εισαγωγή στην Τοπολογία
Ενδιάμεση εξέταση 25-11-2023

Θέμα 1ο $(3 \times 0,8 = 2,4$ μον.)

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος που είναι T_1. Αν $A \subseteq X$ και το x είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε κάθε περιοχή του x περιέχει άπειρα σημεία του A.

(β) Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι T_2, τότε κάθε συγκλίνον δίκτυο στον X έχει μοναδικό όριο.

(γ) Ο χώρος γινόμενο $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ μιας ακολουθίας διαχωρίσιμων τοπολογικών χώρων είναι διαχωρίσιμος.

Θέμα 2ο $(4 \times 0,8 = 3,2$ μον.)

Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την κλάση

$$\mathscr{T} = \Big\{(a,+\infty) \ : \ a \in \mathbb{R}\Big\} \cup \Big\{\emptyset, \mathbb{R}\Big\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η $\mathscr{T}$ είναι τοπολογία στο $\mathbb{R}$ και ότι ο τοπολογικός χώρος $(\mathbb{R},\mathscr{T})$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

(β) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, προσδιορίστε την κλειστή θήκη $\overline{A}$ του A ως προς την τοπολογία $\mathscr{T}$.

(γ) Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συνεχής και ως συνάρτηση από τον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ στον $(\mathbb{R},\mathscr{T})$.

(δ) Αποδείξτε ότι οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις από τον $(\mathbb{R},\mathscr{T})$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι οι σταθερές.

Θέμα 3ο $(4 \times 0,8 = 3,2$ μον.)

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις εξετάστε αν οι τοπολογικοί χώροι X και Y που δίνονται είναι ομοιομορφικοί, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας:

(α) $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{Q}$

(β) $X = (0, 1)$, $Y = (0, +\infty)$

(γ) $X = (0, 1)$, $Y = [0, 1)$

(δ) $X = \mathbb{R}_S$, $Y = (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cf})$.

Διευκρινίσεις: 1. Στα (α), (β), (γ), τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ θεωρούνται ως υπόχωροι του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη τοπολογία.

2. $\mathbb{R}_S$ είναι η ευθεία του Sorgenfrey, δηλαδή το $\mathbb{R}$ με την τοπολογία που έχει ως βάση την κλάση των ημιανοιχτών διαστημάτων της μορφής $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

3. $\mathscr{T}_{cf}$ είναι η συμπεπερασμένη τοπολογία στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 4ο $(1,2 + 1 + 1 = 3,2$ μον.)

(α) Αποδείξτε ότι, αν ένας μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος, τότε και κάθε υπόχωρός του είναι διαχωρίσιμος.

(β) Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$, όπου $\mathbb{R}_S$ η ευθεία του Sorgenfrey και τον υπόχωρό του $A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(i) Αποδείξτε ότι κάθε σημείο του A είναι μεμονωμένο σημείο του.

(ii) Χρησιμοποιήστε αυτό το παράδειγμα για να αποδείξετε ότι, γενικά, ένας υπόχωρος διαχωρίσιμου τοπολογικού χώρου μπορεί να μην είναι διαχωρίσιμος χώρος.