

Εισαγωγή στην Τοπολογία

Το θεώρημα μετρικοποίησης Nagata-Smirnov

(Χειμερινό Εξάμηνο 2025 - 2026)

Ορέστης Λιγνός (orelig2006@gmail.com)

Δεκέμβριος 2025

Παρουσίαση στα πλαίσια του μαθήματος 714. *Εισαγωγή στην Τοπολογία*, με διδάσκουσα την κ. Ειρήνη Δελγιάννη. Η παρουσίαση είναι βασισμένη στο βιβλίο *Topology* του James R. Munkres.

Για την θεία, που περνά δύσκολα.

1 Περίληψη των βημάτων

Βήμα 1. Διατύπωση του Θεωρήματος μετρικοποίησης του Urysohn (κάθε κανονικός χώρος με αριθμήσιμη βάση είναι μετρικοποιήσιμος). Σύντομος σχολιασμός του βασικού αποτελέσματος, που ισχυροποιεί το πρώτο Θεώρημα, και σύγκριση των ομοιοτήτων και των διαφορών των δύο αποδείξεων.

Βήμα 2. (Αριθμήσιμα) τοπικά πεπερασμένες οικογένειες, σύγκριση με την έννοια της δεύτερης αριθμησιμότητας και κάποια προκαταρκτικά Λήμματα. (Λήμματα 39.2, 40.1 και 40.2 στον Munkres).

Βήμα 3. Το Θεώρημα μετρικοποίησης Nagata-Smirnov (Θεώρημα 40.3 στον Munkres).

2 Βήμα 1

Το πρώτο βασικό Θεώρημα που δίνει ένα κριτήριο για το πότε ένας χώρος είναι μετριοποιήσιμος είναι το Θεώρημα μετριοποίησης του Urysohn. Ξεκινάμε σχολιάζοντας την νοητή σχέση μεταξύ αυτού και του Θεωρήματος που πρόκειται να αποδείξουμε.

Θεώρημα 1 (Θεώρημα μετριοποίησης του Urysohn). Κάθε κανονικός και δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος X είναι μετριοποιήσιμος.

Σχόλια. Το Θεώρημα μετριοποίησης του Urysohn δίνει μία ικανή συνθήκη για να είναι ένας χώρος μετριοποιήσιμος. Σαφώς δεν είναι αναγκαία, καθώς υπάρχουν μη διαχωρίσιμοι (ισοδύναμα, όχι δεύτεροι αριθμήσιμοι) μετριοποιήσιμοι τοπολογικοί χώροι (για παράδειγμα, το $\mathbb{R}$ με την τοπολογία που επάγει η διακριτή μετρική). Συνεπώς, έχει ενδιαφέρον να αναζητήσουμε μία συνθήκη ασθενέστερη της δεύτερης αριθμησιμότητας, ώστε να πάρουμε μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ένας χώρος μετριοποιήσιμος. Προς αυτή την κατεύθυνση, το Θεώρημα μετριοποίησης Nagata-Smirnov εκλεπτύνει το Θεώρημα μετριοποίησης του Urysohn.

Εισάγουμε πιο κάτω την έννοια της *αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένης οικογένειας*. Το βασικό αποτέλεσμα λέει ότι ένας χώρος είναι μετριοποιήσιμος αν και μόνο αν είναι κανονικός και έχει αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένη βάση.

Από τους πιο κάτω ορισμούς, είναι άμεσο ότι αν ένας χώρος είναι δεύτερος αριθμήσιμος, τότε είναι αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένος. Συνεπώς, από το Θεώρημα μετριοποίησης Nagata-Smirnov παίρνουμε ως πόρισμα το Θεώρημα μετριοποίησης του Urysohn (το οποίο δεν χρησιμοποιούμε στην απόδειξη - δε θα μπορούσαμε άλλωστε, αφού δεν είναι κάθε χώρος με αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένη βάση δεύτερος αριθμήσιμος).

Μάλιστα, η διαδικασία της απόδειξης παρουσιάζει κάποια κοινά σημεία στα δύο Θεωρήματα, αλλά και μια βασική διαφορά. Συγκεκριμένα, ο τρόπος με τον οποίο αποδεικνύουμε ότι ένας κανονικός χώρος με αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένη βάση είναι μετριοποιήσιμος είναι να τον εμφυτεύσουμε σε κάποιον κατάλληλο χώρο $[0, 1]^J$, στον οποίο έχουμε δώσει την τοπολογία που επάγει η *ομοιόμορφη μετρική* (και όχι η τοπολογία γινόμενο). Το J μπορεί να μην είναι αριθμήσιμο. Δεν θα μπορούσαμε να ελπίζουμε κάτι τέτοιο, άλλωστε, καθώς τότε ο χώρος X θα ήταν δεύτερος αριθμήσιμος, κάτι που δεν υποθέτουμε). Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε θα μας δοθούν από το Λήμμα 3, το ανάλογο του Λήμματος του Urysohn στην περίπτωση αυτή.

Η απόδειξη της ύπαρξης της εμφύτευσης $X \rightarrow [0, 1]^J$ θα γίνει σε δύο στάδια. Στο πρώτο, δείχνουμε την ύπαρξη εμφύτευσης όταν ο $[0, 1]^J$ έχει την τοπολογία γινόμενο, μιμούμενοι την απόδειξη του Θεωρήματος 1, χρησιμοποιώντας το Λήμμα Εμφύτευσης. Στο δεύτερο, εφοδιάζουμε τον $[0, 1]^J$ με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης (οπότε ο χώρος είναι μετριοποιήσιμος), και αφού αυτή η τοπολογία είναι λεπτότερη της τοπολογίας γινόμενο αρκεί να αποδείξουμε μόνο την συνέχεια της απεικόνισης.

3 Βήμα 2

Περνάμε τώρα στην έννοια των τοπικά πεπερασμένων οικογενειών. Δίνουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 1 (τοπικά πεπερασμένες και αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένες οικογένειες).

(α) Έστω X τοπολογικός χώρος. Μια οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{A}$ του X λέγεται *τοπικά πεπερασμένη* στο X αν κάθε $x \in X$ έχει μια περιοχή που τέμνει πεπερασμένο το πλήθος συνόλων της οικογένειας $\mathcal{A}$.

(β) Μια οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{B}$ του X λέγεται *αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένη* στο X (ή σ -τοπικά πεπερασμένη) αν η $\mathcal{B}$ μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n$$

ώστε οι οικογένειες $\mathcal{B}_n$ να είναι τοπικά πεπερασμένες.

Παρατήρηση (σχέση αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένης βάσης και δεύτερης αριθμησιμότητας).

Ένας δεύτερος αριθμήσιμος χώρος σαφώς έχει αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένη βάση, καθώς αν $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$, τότε $\mathcal{B} = \bigcup_{k \geq 1} \{B_k\}$ και προφανώς κάθε οικογένεια $\{B_k\}$

είναι (τοπικά) πεπερασμένη.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, ο $\mathbb{R}$ με την διακριτή μετρική δεν είναι δεύτερος αριθμήσιμος (αφού κάθε μονοσύνολο είναι ανοικτό, κάθε βάση πρέπει να περιέχει τα μονοσύνολα), αλλά σαφώς έχει αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένη βάση. Μάλιστα, η οικογένεια $\mathcal{A} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη (το $\{x_0\}$ είναι ανοικτή περιοχή του $x_0 \in X$ και τέμνει μόνο ένα σύνολο της οικογένειας αυτής) βάση του χώρου.

Ορισμός 2 (εκλέπτυνση). Έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X . Μια οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{B}$ του X θα λέγεται *εκλέπτυνση* της $\mathcal{A}$ αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο, ώστε $B \subseteq A$.

Τα βασικά αποτελέσματα της ενότητας αυτής είναι τα επόμενα Λήμματα, που θα μας χρησιμεύσουν στην απόδειξη του θεωρήματος μετριοποίησης Nagata-Smirnov.

Λήμμα 1. Έστω X μετριοποιήσιμος χώρος. Αν η $\mathcal{A}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X , τότε υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{E}$ του X που εκλεπτύνει το $\mathcal{A}$ τέτοιο, ώστε να είναι αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένο.

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την αρχή της καλής διάταξης (ισοδύναμα, το αξίωμα της επιλογής). Έστω d μετρική στο X . Η ιδέα είναι να κάνουμε διαδοχικά τα εξής βήματα:

Βήμα 1. Έστω $n \geq 1$. Για κάθε σύνολο U του καλύμματος $\mathcal{A}$, συρρικνώνουμε το

σύνολο αυτό κατά $1/n$ (θεωρούμε όλα τα στοιχεία του για τα οποία η ανοικτή μπάλα με κέντρο αυτά και ακτίνα $1/n$ περιέχεται στο σύνολο). Έστω λοιπόν

$$A_n(U) := \{x : B(x, 1/n) \subseteq U\} \subseteq U.$$

Βήμα 2. Από την αρχή της καλής διάταξης, μπορούμε να θεωρήσουμε τα σύνολα

$$B_n(U) := A_n(U) - \bigcup_{V < U} V,$$

τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους (ο λόγος που πήραμε αυτή την κατασκευή θα φανεί πιο μετά. Τυπικά, θέλουμε κάθε x να τέμνει αριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία της οικογένειας που θα θεωρήσουμε. Αφού η οικογένεια ξέρουμε ότι θα γραφεί ως ένωση οικογενειών που αποτελούνται από σύνολα που είναι περίπου τα $B_n(U)$, θα ήταν λογική απαίτηση κάθε x να τέμνει το πολύ ένα σύνολο από τα $B_n(U)$). Μάλιστα, η αρχική επιλογή της συρρίκνωσης εξασφαλίζει απόσταση τουλάχιστον $1/n$ μεταξύ των συνόλων $B_n(U)$).

Βήμα 3. Θα θέλαμε επίσης τα σύνολα $B_n(U)$ να είναι και ανοικτά, οπότε τότε η ζητούμενη οικογένεια θα ήταν η ένωση όλων αυτών των συνόλων, πάνω στα $U \in \mathcal{A}$, για κάθε $n \geq 1$. Επειδή όμως δεν είναι απαραίτητα, πρέπει να τα επεκτείνουμε λίγο. Θεωρούμε λοιπόν το σύνολο $C_n(U)$, που είναι η επέκταση του $B_n(U)$ κατά $1/(3n)$ (Η επιλογή του $1/(3n)$ εξασφαλίζει ότι η τελευταία ιδιότητα των $B_n(U)$ που περιγράψαμε - έχουν απόσταση $\geq 1/n$ - θα συνεχίσει (ουσιαστικά) να διατηρείται). Τυπικά,

$$C_n(U) := \bigcup_{x \in B_n(U)} B(x, 1/(3n)) \supseteq B_n(U).$$

Βήμα 4. Ορίζουμε τώρα

$$\mathcal{E}_n := \{C_n(U) : U \in \mathcal{A}\},$$

οπότε και έχουμε λύσει το ζήτημα του να είναι τα σύνολα ανοικτά, και τέλος θέτουμε

$$\mathcal{E} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{E}_n,$$

προκειμένου να καλύψουμε όλο το X . Ο ισχυρισμός είναι ότι αυτή η οικογένεια είναι η ζητούμενη.

Με βάση τα πιο πάνω, πρέπει να αποδείξουμε τα εξής.

- (1) Κάθε $\mathcal{E}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένη.
- (2) Η $\mathcal{E}$ εκλεπτύνει την $\mathcal{A}$ (αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε $\mathcal{E}_n$ έχει αυτή την ιδιότητα).
- (3) Η $\mathcal{E}$ καλύπτει το X .

Για το (1), έστω $x \in X$. Τότε, ισχυριζόμαστε ότι κάθε δύο σύνολα $C_n(U), C_n(V)$

με $U \neq V$ απέχουν τουλάχιστον $1/(3n)$. Αυτό δίνει άμεσα ότι η μπάλα $B(x, 1/(6n))$ είναι μια περιοχή του x που τέμνει το πολύ ένα σύνολο της οικογένειας $\mathcal{E}_n$.

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού, αν $k \in C_n(U) \cap C_n(V)$, τότε $k \in B(x, 1/(3n)) \cap B(y, 1/(3n))$ για κάποια $x \in B_n(U), y \in B_n(V)$. Άρα,

$$d(x, y) \leq d(x, k) + d(k, y) \leq 2/(3n)$$

και $x \in B_n(U), y \in B_n(V)$.

Όμως, ο ορισμός των συνόλων $B_n(U)$ πιο πάνω εξασφαλίζει απόσταση τουλάχιστον $1/n$ μεταξύ των στοιχείων τους, κάτι που δίνει το ζητούμενο άτοπο. Πράγματι, αν χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι $U < V$ τότε $x \in B_n(U) \subseteq A_n(U)$ και άρα $B(x, 1/n) \subseteq U$. Ακόμη, $y \in B_n(V)$ και άρα εξ ορισμού $y \notin U$. Συνεπώς, $y \notin B(x, 1/n)$ που δίνει το ζητούμενο.

Για το (2), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $C_n(U) \subseteq U$ για κάθε $U \in \mathcal{A}$, και άρα κάθε $\mathcal{E}_n$ εκλεπτύνει την $\mathcal{A}$ (άρα και η ένωσή τους). Ο προηγούμενος εγκλεισμός έπεται διότι κάθε $C_n(U)$ είναι ένωση ανοικτών μπαλών ακτίνας $1/(3n)$ και κέντρων στοιχείων του $B_n(U)$. Όμως, εξ' ορισμού κάθε μπάλα με κέντρο αυτά τα σημεία και ακτίνα $1/n$ περιέχεται στο U .

Για το (3), έστω $x \in X$ και U το πρώτο στοιχείο της συλλογής $\mathcal{A}$ για το οποίο $x \in U$. Ο ισχυρισμός είναι ότι $x \in C_n(U)$ για κάποιο n . Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x \in B_n(U)$, και λόγω της επιλογής του U αρκεί να είναι $x \in A_n(U)$ για κάποιο n . Αυτό όμως είναι άμεσο, αφού κάθε σύνολο U είναι ανοικτό.

Συνδυάζοντας τα πιο πάνω, έχουμε το ζητούμενο ■

Λήμμα 2. Έστω X κανονικός χώρος με βάση $\mathcal{B}$ που είναι αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένη. Τότε,

- (α) ο X είναι φυσιολογικός, και
- (β) κάθε κλειστό σύνολο στον X είναι G_δ στον X .

Απόδειξη. Δείτε την απόδειξη του Λήμματος 40.1 στον Munkres. Για το Βήμα 3, αντιπαραβάλλατε με την απόδειξη του ότι κάθε κανονικός και δεύτερος αριθμήσιμος χώρος είναι φυσιολογικός ■

Λήμμα 3 (Άσκηση 37). Έστω X φυσιολογικός χώρος και A ένα κλειστό και G_δ σύνολο στον X . Τότε, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \rightarrow [0, 1]$ τέτοια, ώστε $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in A$.

Απόδειξη. Έστω ότι $A = \bigcap_{n \geq 1} U_n$, όπου το U_n είναι ανοικτό, για κάθε $n \geq 1$. Από το

Λήμμα του Uryshon, επιλέγουμε συναρτήσεις $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ τέτοιες, ώστε $f_n(x) = 0$ αν $x \in A$ και $f_n(x) = 1$ αν $x \in X \setminus U_n$. Ορίζουμε την συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

τύπο

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{f_n(x)}{2^n}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι αυτή είναι η ζητούμενη. Πράγματι, η f είναι καλά ορισμένη (η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in [0, 1]$ καθώς $0 \leq f_n(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και $n \geq 1$), είναι συνεχής αφού η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη και αφού $f_n(x) = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και $x \in A$, είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$. Από την άλλη, αν $x \notin A$ τότε υπάρχει $n_0 \geq 1$ τέτοιο, ώστε $x \notin U_{n_0}$. Τότε, $f_{n_0}(x) \neq 0$ και άρα

$$f(x) \geq \frac{f_{n_0}(x)}{2^{n_0}} > 0,$$

όπως θέλαμε ■

4 Βήμα 3

Τώρα αποδεικνύουμε το βασικό Θεώρημα χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 1 έως και 3.

Θεώρημα 2 (Θεώρημα Μετρικοποίησης Nagata-Smirnov). Ένας χώρος είναι μετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν είναι κανονικός και έχει μία αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένη βάση.

Απόδειξη. Ευθύ. Η ιδέα είναι να εμφυτεύσουμε τον X στον $[0, 1]^J$ για κάποιο σύνολο J , όπου έχουμε εφοδιάσει τον $[0, 1]^J$ με μια κατάλληλη μετρική d . Αυτό προφανώς δίνει το ζητούμενο.

Από το Λήμμα 2, ο X είναι φυσιολογικός και τα κλειστά σύνολα σε αυτόν είναι G_δ .

Έστω $\mathcal{B} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n$ αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένη βάση του X , όπου κάθε $\mathcal{B}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένο. Για κάθε $B \in \mathcal{B}_n$, από το Λήμμα 3 μπορούμε να επιλέξουμε συνεχή συνάρτηση

$$f_{n,B} : X \rightarrow [0, 1/n]$$

τέτοια, ώστε $f_{n,B}(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in X \setminus B \iff x \notin B$ (διαιρούμε την συνάρτηση που δίνει το Λήμμα 3 με n . Η επιλογή αυτή του $1/n$ θα γίνει σαφής στην απόδειξη της *συνέχειας* της εμφύτευσης πιο κάτω). Τώρα, ο τρόπος ορισμού της εμφύτευσης είναι σαφής. Ορίζουμε

$$F : X \rightarrow [0, 1]^J, \quad x \mapsto (f_{n,B}(x))_{(n,B) \in J},$$

όπου έχουμε ορίσει

$$J := \{(n, B) : n \geq 1, B \in \mathcal{B}_n\}.$$

Παρατηρήστε ότι το σύνολο J δεν είναι απαραίτητα αριθμήσιμο. Οι συναρτήσεις $f_{n,B}$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος Εμφύτευσης, καθώς αν $x \in X$ και A κλειστό με $x \notin A$, τότε $X \setminus A$ ανοικτό και άρα υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $x \in B \subseteq X \setminus A$. Υπάρχει $n \geq 1$ με $B \in \mathcal{B}_n$. Τότε, για την συνάρτηση $f_{n,B}$ έχουμε ότι $f_{n,B}(x) > 0$ αφού $x \in B$ και $f_{n,B}(A) = \{0\}$ καθώς $A \subseteq X \setminus B$. Συνεπώς,

$$\overline{f_{n,B}(A)} = \overline{\{0\}} = \{0\},$$

και άρα $f_{n,B}(x) \notin \overline{f_{n,B}(A)}$, όπως θέλαμε.

Άρα, έχουμε ότι η απεικόνιση F είναι εμφύτευση του X στον $[0, 1]^J$, όπου αυτός έχει την τοπολογία γινόμενο. Επιθυμούμε τώρα να ισχυριστούμε ότι ο X εμφυτεύεται, μέσω της F στον $[0, 1]^J$ όπου αυτός τώρα έχει την τοπολογία που επάγει η ομοιόμορφη μετρική

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{|x_i - y_i|, i \in I\},$$

όπου $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I}$, $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in I}$. Πετυχαίνοντας το αυτό, έχουμε δώσει μετρική στον χώρο $[0, 1]^J$ και άρα παίρνουμε το ζητούμενο.

Για να αποδείξουμε τον πιο πάνω ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι αφού η τοπολογία που επάγει η ομοιόμορφη μετρική είναι λεπτότερη της τοπολογίας γινόμενο, έχουμε ότι η F είναι πάλι 1-1, ενώ μεταφέρει ανοικτά σύνολα του σε ανοικτά σύνολα του $F(X)$. Μένει μόνο να επαληθεύσουμε ότι είναι συνεχής.

Για τον σκοπό αυτό, έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε, θα βρούμε περιοχή U του x τέτοια, ώστε να ισχύει

$$y \in U \Rightarrow d(F(y), F(x)) < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, θέλουμε να ισχύει ότι

$$\sup\{|f_{n,B}(y) - f_{n,B}(x)|, (n, B) \in J\} < \varepsilon,$$

δηλαδή $|f_{n,B}(y) - f_{n,B}(x)| < \varepsilon$ για κάθε $y \in U$ και $(n, B) \in J$. Η πρώτη ιδέα της απόδειξης είναι ότι για μεγάλα n , έστω $n > 2/\varepsilon$, αυτή η ανισότητα ισχύει (εδώ αξιοποιούμε την επιλογή του $[0, 1/n]$ ως συνόλου τιμών των $f_{n,B}$), καθώς τότε

$$|f_{n,B}(y) - f_{n,B}(x)| < 2/n < \varepsilon.$$

Οπότε, αρκεί να δουλέψουμε μόνο για $n \leq \lfloor 2/\varepsilon \rfloor := N$. Η δεύτερη ιδέα της απόδειξης είναι να παρατηρήσουμε ότι αφού κάθε $\mathcal{B}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένο, μπορούμε να επιλέξουμε περιοχές V_n του x τέτοιες, ώστε κάθε V_n να τέμνει μόνο πεπερασμένα σύνολα της οικογένειας $\mathcal{B}_n$. Άρα όλες εκτός από πεπερασμένες το πλήθος συναρτήσεις $f_{n,B}$ είναι 0 στο αντίστοιχο V_n .

Θα επιθυμούσαμε να ορίσουμε ως την περιοχή U που ψάχνουμε την τομή των πρώτων N τέτοιων συνόλων V_n , δηλαδή

$$U := \bigcap_{1 \leq n \leq N} V_n,$$

καθώς τότε για $y \in U$ και $n \leq N$ έχουμε ότι

$$|f_{n,B}(y) - f_{n,B}(x)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$$

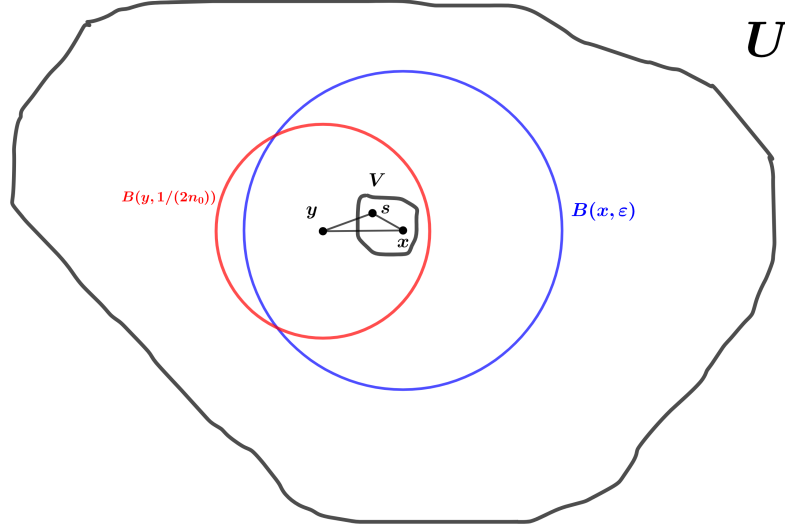
για όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος B (για σταθερό n). Επομένως, έχουμε το εξής πρόβλημα: η ανισότητα μπορεί να μην ισχύει για πεπερασμένα το πλήθος $B \in \mathcal{B}_n$.

Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό παρατηρούμε ότι για κάθε $n \leq N$ σταθερό, λόγω της συνέχειας κάθε μιας εκ των πεπερασμένων το πλήθος $f_{n,B}$ για τις οποίες το πιο πάνω επιχείρημα δεν δουλεύει, μπορούμε να περάσουμε σε περιοχή U_n του x τέτοια, ώστε $x \in U_n \subseteq V_n$ και

$$|f_{n,B}(p) - f_{n,B}(x)| < \varepsilon/2$$

για κάθε $p \in U_n$ και $B \in \mathcal{B}_n$. (για κάθε ένα από τα πεπερασμένα το πλήθος $B \in \mathcal{B}_n$ που τέμνουν το V_n επιλέγουμε μια περιοχή του x που να ικανοποιεί την ανισότητα, και μετά παίρνουμε την τομή τους που είναι πάλι μια περιοχή του x). Τώρα, θέτοντας πάλι

$$U := \bigcap_{1 \leq n \leq N} U_n,$$



Σχήμα 1 (Θεώρημα 2).

είναι εύκολο να δούμε ότι για $n \leq N$ και $y \in U$ έχουμε άμεσα την ζητούμενη ανισότητα.

Αντίστροφο. Έστω ότι ο X είναι μετριοποιήσιμος (έστω με την μετρική d). Γνωρίζουμε τότε ότι είναι κανονικός. Η ιδέα είναι να θεωρήσουμε τα ανοικτά καλύμματα

$$\mathcal{A}_n := \{B(x, 1/(2n)) : x \in X\}$$

του X , για κάθε $n \geq 1$. Μέσω του Λήμματος 1, περνάμε σε ανοικτά καλύμματα $\mathcal{B}_n$ που εκλεπτύνουν τα $\mathcal{A}_n$ και είναι αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένα. Τότε, ισχυριζόμαστε ότι η οικογένεια

$$\mathcal{B} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n$$

είναι αριθμήσιμα τοπικά πεπερασμένη (άμεσο, ως αριθμήσιμη ένωση τέτοιων) και βάση του X .

Έστω U ανοικτό και $x \in U$. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Επιλέγουμε ένα $n_0 > 1/\varepsilon$. Αφού η $\mathcal{B}_{n_0}$ είναι ανοικτό κάλυμμα, υπάρχει $V \in \mathcal{B}_{n_0}$ ώστε $x \in V$. Αφού εκλεπτύνει την $\mathcal{A}_{n_0}$, υπάρχει $y \in X$ τέτοιο, ώστε $V \subseteq B(y, 1/(2n_0))$.

Ισχυριζόμαστε ότι

$$x \in V \subseteq B(x, \varepsilon).$$

Πράγματι, ο εγκλεισμός έπεται διότι αν $s \in V$ τότε $s \in B(y, 1/(2n_0))$ και άρα $d(s, y) < 1/(2n_0)$. Ακόμη, $x \in B(y, 1/(2n_0))$ και άρα $d(y, x) < 1/(2n_0)$. Οπότε,

$$d(s, x) \leq d(s, y) + d(y, x) \leq 1/(2n_0) + 1/(2n_0) = 1/n_0 < \varepsilon,$$

όπως θέλαμε.