

Συμπαγοποίηση ενός σημείου

Εμμανουήλ Στάθης (1112202300092)

Ιανουάριος 2026

Η συμπαγοποίηση ενός τοπολογικού χώρου είναι ένας χώρος που ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες, μερικές από τις οποίες είναι η συμπαγεία και το να περιέχει τον αρχικό χώρο ως πυκνό υπόχωρο. Οι συμπαγοποιήσεις παρουσιάζουν θεωρητικό ενδιαφέρον λόγω των καλών ιδιοτήτων που έχουν, κάτι το οποίο καθιστά χρήσιμο την αναζήτηση συνθηκών για τις οποίες ένας τοπολογικός χώρος να μπορεί να έχει μια συμπαγοποίηση.

Η συμπαγοποίηση ενός σημείου ή συμπαγοποίηση Alexandron ενός χώρου προκύπτει από τον εφοδιασμό με την κατάλληλη τοπολογία στην ένωση του αρχικού χώρου με ένα νέο σημείο. Ένα τέτοιο αντικείμενο υπάρχει πάντα, καθώς από τα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων κατά Zermelo-Fraenkel έπεται άμεσα ότι για κάθε σύνολο $X, X \notin X$. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μελέτη αναγκαίων και ικανών συνθηκών για την ύπαρξη της συμπαγοποίησης ενός σημείου ενός τοπολογικού χώρου και των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται σε αυτούς τους χώρους, η απόδειξη της μοναδικότητας μεταξύ άλλων ιδιοτήτων και η εύρεση της συμπαγοποίησης ενός σημείου μερικών γνωστών χώρων. Στα παρακάτω, ως χώρο θεωρούμε έναν τοπολογικό χώρο και, σχετικά με τον συμβολισμό, ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}, [n] := \{1, \dots, n\}$. Επίσης, αν δεν αναφέρεται διαφορετικά, θα θεωρείται ότι ένας χώρος είναι εφοδιασμένος με τη συνήθη τοπολογία του. Οι πηγές πληροφόρησης για την εργασία αυτή είναι τα βιβλία Topology του James Munkres και Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση.

Ορισμός 1. Ένας χώρος Y λέγεται *συμπαγοποίηση* ενός χώρου X αν είναι συμπαγής Hausdorff και περιέχει τον X ως πυκνό υπόχωρο του.

Ο ορισμός του βιβλίου Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση απαιτεί τον Y να περιέχει έναν πυκνό υπόχωρο ομοιομορφικό με το X αντί για τον ίδιο το X . Οι τέσσερις πρώτοι ορισμοί που θα χρησιμοποιούμε υπάρχουν στο βιβλίο Topology του James Munkres.

Ορισμός 2. Αν ένας χώρος Y είναι συμπαγοποίηση ενός χώρου X και το $Y \setminus X$ είναι μονοσύνολο, τότε ο Y λέγεται *συμπαγοποίηση ενός σημείου* του X .

Μερικοί συμβολισμοί μίας συμπαγοποίησης ενός σημείου για ένα χώρο X είναι οι $X^*, X_\infty, \omega X$. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούμε το συμβολισμό X_∞ .

Ορισμός 3. Δύο συμπαγοποιήσεις Y_1, Y_2 ενός χώρου X λέγονται *ισοδύναμες* αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : Y_1 \rightarrow Y_2$ με $h|_X = \text{id}_X$.

Μία από τις αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη συμπαγοποίησης ενός σημείου ενός χώρου είναι η τοπική συμπαγεία, της οποίας ο ορισμός δίνεται παρακάτω. Για τους χώρους Hausdorff, ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με την ύπαρξη βάσης περιοχών από συμπαγή σύνολα σε κάθε σημείο του χώρου και μία απόδειξη αυτού του ισχυρισμού χρησιμοποιεί τη συμπαγοποίηση ενός σημείου, ωστόσο αυτό δεν θα μας απασχολήσει.

Ορισμός 4. Ένας χώρος X λέγεται *τοπικά συμπαγής* αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει συμπαγής περιοχή $C \in \mathcal{N}_x$.

Παράδειγμα 1. Ο χώρος $[0, 1)$ είναι τοπικά συμπαγής, Hausdorff αλλά δεν είναι συμπαγής. Μία φυσική συμπαγοποίηση ενός σημείου του $[0, 1)$ είναι ο χώρος $[0, 1]$. Παρατηρούμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $[0, 1)$ είναι και ανοικτό στο $[0, 1]$ και ότι τα συμπληρώματα ανοικτών υποσυνόλων του $[0, 1]$ που περιέχουν το 1 είναι συμπαγή στο $[0, 1)$. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στην ιδέα της κατασκευής μιας συμπαγοποίησης ενός σημείου για ένα χώρο και στο επόμενο θεώρημα, το οποίο δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη της και περιγράφει κατά αυστηρό τρόπο τη μοναδικότητα της συμπαγοποίησης αυτής. Η παρακάτω έννοια της μοναδικότητας μας επιτρέπει να μιλάμε για τη συμπαγοποίηση ενός σημείου του χώρου.

Θεώρημα 1. Ένας χώρος X έχει συμπαγοποίηση ενός σημείου αν και μόνο αν είναι τοπικά συμπαγής, Hausdorff και μη συμπαγής. Σε αυτήν την περίπτωση, κάθε δύο συμπαγοποιήσεις ενός σημείου του X είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

Απόδειξη. $[\Rightarrow]$ Αν Y μια συμπαγοποίηση ενός σημείου του X , τότε ο X είναι Hausdorff, ως υπόχωρος του Hausdorff χώρου Y . Έστω $x \in X$. Τότε, επειδή ο Y είναι Hausdorff, υπάρχουν ξένα ανοικτά $G_1, G_2 \subseteq Y$, όπου $x \in G_1$ και το G_2 περιέχει το σημείο του $Y \setminus X$. Τότε, ορίζοντας $C := Y \setminus G_2 \subseteq X$ έχουμε ότι $x \in G_1 \subseteq C \Rightarrow C \in \mathcal{N}_x$ και το C είναι συμπαγές, άρα και συμπαγές στο X αφού $C \subseteq X$, ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς Y . Συνεπώς ο X είναι και τοπικά συμπαγής. $\bar{X} = Y \neq X$, άρα ο X δεν είναι συμπαγής αφού δεν είναι κλειστός στον Hausdorff Y .

$[\Leftarrow]$ Αν ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπικά συμπαγής Hausdorff και μη συμπαγής, θεωρούμε ένα αντικείμενο $\infty \notin X$ και ορίζουμε $X_\infty := X \cup \{\infty\}$. Εφοδιάζουμε το X_∞ με την τοπολογία $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{X_\infty \setminus C \mid C \subseteq X \text{ συμπαγές}\} \cup \{X_\infty\}$. Στο υπόλοιπο μέρος της απόδειξης, τα I, J θα είναι τυχαία μη κενά σύνολα δεικτών. Είναι άμεσο ότι $\emptyset, X_\infty \in \mathcal{T}'$. Επίσης, αν $\{G_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$, $\{X_\infty \setminus C_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{T}'$ με $C_j \subseteq X$ συμπαγές για κάθε $j \in J$, τότε $\cup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ και $\cup_{j \in J} (X_\infty \setminus C_j) = X_\infty \setminus (\cap_{j \in J} C_j) \in \mathcal{T}'$ γιατί κάθε C_j είναι κλειστό, ως συμπαγές υποσύνολο του Hausdorff χώρου X , οπότε το $\cap_{j \in J} C_j$ είναι κλειστό και άρα συμπαγές στο X , ως υποσύνολο του συμπαγούς C_{j_0} , όπου $j_0 \in J$ τυχαίο. Το $(\cap_{j \in J} C_j) \setminus (\cup_{i \in I} G_i)$ είναι συμπαγές, άρα $(\cup_{i \in I} G_i) \cup X_\infty \setminus (\cap_{j \in J} C_j) = X_\infty \setminus ((\cap_{j \in J} C_j) \setminus (\cup_{i \in I} G_i)) \in \mathcal{T}'$. Αν $\{X_\infty\} \subseteq \{U_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{T}'$, τότε $\cup_{i \in I} U_i = X_\infty \in \mathcal{T}'$. Έστω $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ και $C_1, C_2 \subseteq X$ συμπαγή. Τότε $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}'$, το $C_1 \cup C_2$ είναι συμπαγές οπότε $(X_\infty \setminus C_1) \cap (X_\infty \setminus C_2) = X_\infty \setminus (C_1 \cup C_2) \in \mathcal{T}'$ και αφού το C_1 είναι κλειστό, ως συμπαγές υποσύνολο του Hausdorff χώρου X , έχουμε τελικά ότι $U_1, X \setminus C_1 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap (X_\infty \setminus C_1) = U_1 \cap (X \setminus C_1) \in \mathcal{T}'$. Αν κάποιο από τα προηγούμενα σύνολα ήταν το X_∞ , τότε οι προηγούμενες τομές θα ήταν και πάλι στην $\mathcal{T}'$, άρα η $\mathcal{T}'$ είναι πράγματι τοπολογία στο X_∞ . Η τοπολογία $\mathcal{T}_X$ που έχει ο X ως υπόχωρος του X_∞ είναι η $\mathcal{T}$ γιατί αν $G \in \mathcal{T}$, τότε $G = X \cap G \in \mathcal{T}_X$ και αν $X \cap U \in \mathcal{T}_X$, τότε ελέγχοντας τις περιπτώσεις για τη μορφή του U είναι άμεσο ότι $X \cap U \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}_X = \mathcal{T}$ και άρα ο X είναι υπόχωρος του X_∞ . Έστω τώρα $(U_i)_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X_∞ . Τότε, υπάρχει $i_0 \in I$ με $\infty \in U_{i_0}$. Το $X_\infty \setminus U_{i_0}$ είναι συμπαγές και $X_\infty \setminus U_{i_0} \subseteq \cup_{i \in I} U_i$, άρα υπάρχει πεπερασμένο $F \subseteq I$ με $X_\infty \setminus U_{i_0} \subseteq \cup_{i \in F} U_i \Rightarrow X_\infty = \cup_{i \in F \cup \{i_0\}} U_i \Rightarrow$ ο X_∞ είναι συμπαγής. Έστω τώρα $x \neq y$ στον X_∞ . Αν $x, y \in X$, τότε αφού ο X είναι Hausdorff, υπάρχουν ξένα G_1, G_2 ανοικτά στο X με $x \in G_1, y \in G_2$. Αν $x = \infty$, τότε $y \in X$, άρα υπάρχει $C \in \mathcal{N}_y$ συμπαγές αφού ο X είναι τοπικά συμπαγής. Τα $G_1 := C^\circ$ και $G_2 := X_\infty \setminus C$ είναι ανοικτά, ξένα και $y \in G_1, x \in G_2$. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει ανάλογα στην περίπτωση που $y = \infty$, άρα ο X_∞ είναι Hausdorff. Ο X δεν είναι συμπαγής στο συμπαγή X_∞ , οπότε δεν είναι κλειστό υποσύνολο του. Άρα $\bar{X} = X_\infty$ και συνεπώς ο X_∞ είναι μία συμπαγοποίηση ενός σημείου του X .

Για τη μοναδικότητα, έστω Y_1, Y_2 δύο συμπαγοποιήσεις ενός σημείου ενός χώρου X . Αν ∞_1, ∞_2 τα στοιχεία των μονοσυνόλων $Y_1 \setminus X, Y_2 \setminus X$ αντίστοιχα, τότε ορίζουμε $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ με $f(\infty_1) = \infty_2$ και $f(x) = x$ για κάθε $x \in X$. Το ότι f 1-1 και επί είναι άμεσο. Αν $U \subseteq Y_1$ ανοικτό και $\infty_1 \notin U$, τότε $f(U) = U$ ανοικτό στο Y_2 . Αν $\infty_1 \in U$, το $Y_1 \setminus U$ είναι κλειστό και άρα συμπαγές υποσύνολο του $Y_2 \Rightarrow$ το $f(U) = Y_2 \setminus (f(Y_1 \setminus U)) = Y_2 \setminus (Y_1 \setminus U)$ είναι ανοικτό, άρα η f είναι ανοικτή και έπεται ότι f^{-1} συνεχής. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι f συνεχής, άρα η f είναι ομοιομορφισμός με $f|_X = \text{id}_X$. Άρα, οι Y_1, Y_2 είναι ισοδύναμες. $\square$

Παρατήρηση 1. Αν ο X είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff, τότε η $\mathcal{T}'$ είναι και πάλι τοπολογία στον X_∞ , ο οποίος είναι συμπαγής Hausdorff με τον X ως υπόχωρο. Για το λόγο αυτό, θα θεωρούμε στο υπόλοιπο μέρος της εργασίας ότι ο X_∞ έχει την τοπολογία $\mathcal{T}'$. Ωστόσο, αν ο X είναι συμπαγής, το $\{\infty\} = X_\infty \setminus X$ είναι ανοικτό, άρα ο X_∞ δεν είναι συμπαγοποίηση του X .

Το επόμενο θεώρημα θα μας βοηθήσει στην περιγραφή της συμπαγοποίησης ενός σημείου για τον $\mathbb{R}^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ύπαρξη του οποίου εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 1.

Θεώρημα 2. Έστω X, Y τοπικά συμπαγείς Hausdorff χώροι. Αν $X \cong Y$, τότε $X_\infty \cong Y_\infty$.

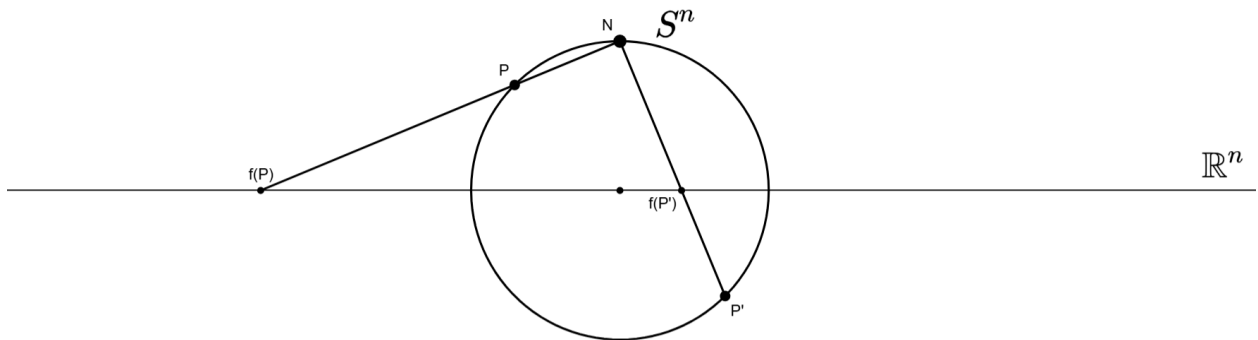
Απόδειξη. Έστω $h : X \rightarrow Y$ ένας ομοιομορφισμός. Ορίζουμε μία συνάρτηση $h_\infty : X_\infty \rightarrow Y_\infty$ για την οποία το στοιχείο του μονοσυνόλου $X_\infty \setminus X$ απεικονίζεται στο στοιχείο του μονοσυνόλου $Y_\infty \setminus Y$ και $h_\infty|_X = h$. Είναι άμεσο ότι h_∞ 1-1 και επί. Η απόδειξη της συνέχειας των h_∞, h_∞^{-1} είναι ανάλογη με την απόδειξη της συνέχειας των f, f^{-1} στο Θεώρημα 1. Άρα, $X_\infty \cong Y_\infty$. $\square$

Παρατήρηση 2. Στην πραγματικότητα, δείξαμε κάτι ισχυρότερο. Συγκεκριμένα, δείξαμε ότι κάθε ομοιομορφισμός μεταξύ των X, Y επεκτείνεται σε ομοιομορφισμό μεταξύ των X_∞, Y_∞ . Το ότι η επέκταση αυτή είναι μοναδική είναι άμεσο.

Παρατήρηση 3. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. $([0, 1])_\infty \cong [0, 1] \cong ([0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1])_\infty$, αλλά $[0, 1] \not\cong [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ γιατί μόνο ο $[0, 1]$ είναι συνεκτικός.

Θεώρημα 3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n)_\infty \cong S^n$.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{N\}$, όπου $N := e_{n+1}$, γιατί τότε θα έχουμε, από το Θεώρημα 2, ότι $(\mathbb{R}^n)_\infty \cong (S^n \setminus \{N\})_\infty \cong S^n$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}})$ η οποία είναι καλά ορισμένη και συνεχής διότι για κάθε $i \in [n]$, η $\pi_i \circ f$ είναι συνεχής. Η f λέγεται *στερεογραφική προβολή*.



Η συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$ με $g(x_1, \dots, x_n) = (\frac{2x_1}{1+x_1^2+\dots+x_n^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+x_1^2+\dots+x_n^2}, \frac{x_1^2+\dots+x_n^2-1}{1+x_1^2+\dots+x_n^2})$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής αφού για κάθε $i \in [n+1]$, η $\pi_i|_{S^n \setminus \{N\}} \circ g$ είναι συνεχής. Με πράξεις ελέγχεται ότι $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ και $g \circ f = \text{id}_{S^n \setminus \{N\}}$, άρα $g = f^{-1}$ και η f είναι ομοιομορφισμός, άρα $\mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{N\}$. $\square$

Παρατήρηση 4. Για $n = 2$ στο Θεώρημα 3, έχουμε $(\mathbb{R}^2)_\infty \cong S^2$. Επίσης, οι $\mathbb{R}^2, \mathbb{C}$ είναι ομοιομορφικοί ως τοπολογικοί χώροι, άρα, από το Θεώρημα 2, $\mathbb{C}_\infty \cong S^2$. Η συμπαγοποίηση ενός σημείου του $\mathbb{C}$ συνήθως συμβολίζεται με $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ και ονομάζεται *σφαίρα του Riemann*.

Ορισμός 5. Αν X ένας τοπικά συμπαγής χώρος, τότε μία συνεχής $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ *μηδενίζεται στο άπειρο* αν για κάθε $\varepsilon > 0$, το $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon))$ είναι συμπαγές. Το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων που μηδενίζονται στο άπειρο συμβολίζεται με $C_0(X)$.

Παρατήρηση 5. Αν X τοπικά συμπαγής χώρος, τότε το $C_0(X)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και κάθε $f \in C_0(X)$ είναι φραγμένη. Πράγματι, αν $f \in C_0(X)$, τότε το $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))$ είναι συμπαγές, άρα για κάθε $x \in X, |f(x)| \leq 1$ ή $|f(x)| > 1$ επομένως έχουμε ότι $|f(x)| \leq \max\{|f|(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus (-1, 1)))\} < \infty \Rightarrow \|f\|_\infty < \infty$.

Στο επόμενο θεώρημα, ο $C_0(X)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$.

Θεώρημα 4. Έστω X τοπικά συμπαγής Hausdorff χώρος. Τότε, ο $C_0(X)$ είναι ισομετρικά και γραμμικά ισόμορφος με κλειστό γραμμικό υπόχωρο Y του $C(X_\infty)$ για τον οποίο ισχύει ότι $\dim(C(X_\infty)/Y) = 1$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $T : C_0(X) \rightarrow C(X_\infty)$ με $Tf(\infty) = 0$ και $Tf|_X = f$ για κάθε $f \in C_0(X)$. Έστω $f \in C_0(X)$ και $x \in X$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτό $G \in \mathcal{N}_x$ με $f(G) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Επίσης, $Tf(G) = f(G) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$, οπότε η Tf είναι συνεχής στο x . Το $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon))$ είναι συμπαγές, άρα το $V := X_\infty \setminus f^{-1}(\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon))$ είναι ανοικτό, $V \in \mathcal{N}_\infty$ και $Tf(V) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$, οπότε η Tf είναι συνεχής στο ∞ . Άρα, η T είναι καλά ορισμένη. Η γραμμικότητα της έπεται άμεσα. Για κάθε $f \in C_0(X)$, αφού $|Tf(\infty)| = 0 \leq \|Tf\|_\infty$, $\|Tf\|_\infty = \sup_{x \in X_\infty} |Tf(x)| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \|f\|_\infty$, άρα η T είναι ισομετρία, συνεπώς είναι και $1-1$. Οπότε, ο $C_0(X)$ είναι ισομετρικά και γραμμικά ισόμορφος με τον γραμμικό υπόχωρο $T(C_0(X)) = \{f : X_\infty \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ συνεχής και } f(\infty) = 0\}$ του $C(X_\infty)$. Για τη γραμμική $\pi : C(X_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\pi(f) = f(\infty)$, έχουμε ότι για κάθε $f, g \in C(X_\infty)$, $|\pi(f) - \pi(g)| = |(f - g)(\infty)| \leq \|f - g\|_\infty$, οπότε είναι συνεχής ως Lipschitz. Επομένως, ο $T(C_0(X)) = \ker \pi$ είναι κλειστός υπόχωρος του $C(X_\infty)$. Ο X_∞ είναι φυσιολογικός, ως συμπαγής Hausdorff. Έστω ένα $x \in X$. Τότε, υπάρχει ένα συμπαγές $C \in \mathcal{N}_x$. Τα C και $\{\infty\}$ είναι κλειστά και ξένα υποσύνολα του X_∞ , άρα υπάρχει, από το Λήμμα του Urysohn, $f : X_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(X_\infty) \subseteq [0, 1]$, $f(\infty) = 1$ και $f(C) = \{0\}$. Τότε, $\pi(f) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Im } \pi = \mathbb{R}$, γιατί αλλιώς θα είχαμε $\text{Im } \pi = \{0\}$, άτοπο. Άρα, από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών, $\dim(C(X_\infty)/T(C_0(X))) = \dim(\text{Im } \pi) = 1$. $\square$

Παρατήρηση 6. Ο $C_0(X)$ είναι και χώρος Banach, διότι είναι ισομετρικός με τον $T(C_0(X))$, ο οποίος είναι χώρος Banach, ως κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $C(X_\infty)$.