

Τοπολογία

Η Συμπαγοποίηση κατά Stone-Čech

Πάνος Γλύπτης, Γιάννης Κόλλιας

Δεκέμβριος 2025

Εργασία και παρουσίαση στο μάθημα 714. Τοπολογία (Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026),
με διδάσκουσα την κα. Ειρήνη Δεληγιάννη.

Περίληψη - Περιεχόμενα:

Ενότητα 1. Χώροι Tychonoff

Ορίζουμε τους χώρους Tychonoff ή αλλιώς $T_{3\frac{1}{2}}$ και μελετάμε κάποιες βασικές τους ιδιότητες, οι οποίες θα μας φανούν χρήσιμες για τα παρακάτω.

Ενότητα 2. Συμπαγοποίηση με ένα σημείο

Ορίζουμε την συμπαγοποίηση ενός τοπολογικού χώρου X και ασχολούμαστε με το πότε αυτός έχει συμπαγοποίηση με ένα σημείο. Εισάγουμε την έννοια της τοπικής συμπάγειας και αποδεικνύουμε σχετικές προτάσεις.

Ενότητα 3. Συμπαγοποίηση κατά Stone-Čech

Αποδεικνύουμε έναν χαρακτηρισμό των χώρων Tychonoff που σχετίζεται με τη συμπαγοποίηση, μέσω ενός βασικού λήμματος. Κατασκευάζουμε και ορίζουμε την συμπαγοποίηση κατά Stone-Čech δίνοντας έμφαση στο ιδιαίτερο γνώρισμά της (γνωστό και ως ιδιότητα συνεχούς επέκτασης). Αναφερόμαστε, στο τέλος, στην μεγιστικότητά της.

Ενότητα 4. Εφαρμογή σε Stone-Weierstrass

Μια εφαρμογή της συμπαγοποίησης κατά Stone-Čech σε πόρισμα του Θεωρήματος Stone-Weierstrass.

Πηγές:

- 1) Topology 2nd Edition by James R. Munkes, παράγραφοι 29 και 38
- 2) Διπλωματική Εργασία: Η Stone-Čech Συμπαγοποίηση μέσω των Υπερφίλτρων και το Θεώρημα Hindman, του Τηνιακουδάκη Αντώνη (Ε.Μ.Π.), παράγραφοι 1.1-1.2 και 3.1-3.2

1. Χώροι Tychonoff

Ορισμός 1.1

Έστω τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$. Ο $(X, \mathcal{T})$ θα λέγεται $T_{3\frac{1}{2}}$ ή **Tychonoff** αν:

1) είναι T_1 και

2) για κάθε $x \in X$ και $K \subseteq X$ κλειστό, μη κενό, με $x \notin K$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \rightarrow [0, 1]$, τ.ω. $f(x) = 0$ και $f(K) = \{1\}$.

Πρόταση 1.2

Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T})$, $T_{3\frac{1}{2}}$. Τότε ο X είναι T_3 .

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο X είναι κανονικός. Έστω $K \subseteq X$, κλειστό, μη κενό και $x \notin K$. Από υπόθεση, υπάρχει συνεχής $f : X \rightarrow [0, 1]$, έτσι ώστε $f(x) = 0$ και $f(K) = \{1\}$. Τα διαστήματα $[0, \frac{1}{3})$ και $(\frac{2}{3}, 1]$ είναι ανοικτά στο $[0, 1]$ και επειδή η f συνεχής, έχουμε ότι, το $U_1 = f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$ και το $U_2 = f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$, είναι ανοικτά στον X και προφανώς

$$x \in U_1, \quad K \subseteq U_2 \quad \text{και} \quad U_1 \cap U_2 = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{3}\right)\right) \cap f^{-1}\left(\left(\frac{2}{3}, 1\right]\right) = \emptyset.$$

Επομένως ο X είναι T_3 . ■

Πρόταση 1.3

Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T})$, $T_{3\frac{1}{2}}$ και $Y \subseteq X$ ένας υπόχωρός του. Τότε ο Y είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.

Απόδειξη. Έστω Y υπόχωρος του X , $F \subseteq Y$, μη κενό, κλειστό στον Y , και $x \in Y$ με $x \notin F$. Υπάρχει $K \subseteq X$, κλειστό τ.ω. $F = Y \cap K$. Αφού ο X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$, και $x \notin K$, υπάρχει συνεχής $f : X \rightarrow [0, 1]$, με $f(x) = 0$ και $f(K) = \{1\}$. Θεωρούμε $g = f|_Y : Y \rightarrow [0, 1]$. Η g είναι συνεχής ως περιορισμός συνεχούς συνάρτησης, και θα δείξουμε ότι διαχωρίζει το x από το F . Έχουμε ότι, $g(x) = f|_Y(x) = f(x) = 0$ και

$$g(F) = f|_Y(Y \cap K) = f(Y \cap K) \subseteq f(Y) \cap f(K) \subseteq f(K) = \{1\},$$

και άρα $g(F) = \{1\}$ αφού το F είναι μη κενό. Άρα ο Y είναι $T_{3\frac{1}{2}}$. ■

Πρόταση 1.4

Έστω οικογένεια τοπολογικών χώρων $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$. Αν για κάθε $i \in I$ ο $(X_i, \mathcal{T}_i)$ είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ και $X = \prod_{i \in I} X_i$, τότε ο χώρος γινόμενο $(X, \mathcal{T})$ είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.

Απόδειξη. Έστω $F \subseteq X$ μη κενό, κλειστό και $x = (x_i)_{i \in I} \in X \setminus F$. Αφού το $X \setminus F$ ανοικτό, υπάρχουν πεπερασμένο $J \subseteq I$ και $U_j \subseteq X_j$, $\mathcal{T}_j$ -ανοικτά, όπου $j \in J$, τέτοια ώστε

$$x \in \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) \subseteq X \setminus F. \quad (1)$$

Εφόσον κάθε X_i είναι $T_{3\frac{1}{2}}$, τα $X_j \setminus U_j$ είναι κλειστά και $x_j \notin X_j \setminus U_j$ έχουμε ότι για κάθε $j \in J$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_j : X_j \rightarrow [0, 1]$, ώστε

$$f_j(x_j) = 0 \text{ και } f_j(X_j \setminus U_j) = \{1\}. \quad (2)$$

Θέτουμε $f : X \rightarrow [0, 1]$, με τύπο

$$f(z) = \max\{(f_j \circ \pi_j)(z) \mid j \in J\}.$$

Το J είναι πεπερασμένο, οπότε η f ορίζεται καλά. Επειδή η $f_j \circ \pi_j$ είναι συνεχής για κάθε $j \in J$ ως σύνθεση συνεχών, είναι εύκολο να δείξουμε ότι και το μέγιστο αυτών θα είναι επίσης συνεχής, άρα η είναι f συνεχής. Μένει να δείξουμε ότι διαχωρίζει το x και το F . Από τη (2) είναι προφανές ότι $f(x) = 0$. Τώρα από τη σχέση (1) έχουμε ότι αν $y = (y_i)_{i \in I} \in F$ τότε υπάρχει $i_0 \in J$ με $y_{i_0} \notin U_{i_0} \Rightarrow y_{i_0} \in X_{i_0} \setminus U_{i_0}$ άρα $f_{i_0}(y_{i_0}) = 1 \Rightarrow f(y) = 1$ (αφού $1 = f_{i_0}(y_{i_0}) \leq f(y) \leq 1$) κι επομένως $f(F) = \{1\}$. ■

Πρόταση 1.5

Αν ο τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ είναι T_4 , τότε είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.

Απόδειξη. Έστω $F \subseteq X$, μη κενό, κλειστό και $x \in X$, με $x \notin F$. Τότε από το Λήμμα του Urysohn, επειδή ο X είναι T_4 , υπάρχει συνεχής $f : X \rightarrow [0, 1]$, τ.ω. $f(x) = 0$ και $f(F) = \{1\}$.

Άρα ο X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$. ■

Συνοψίζοντας, έχουμε την παρακάτω σύνδεση ανάμεσα στους χώρους T_i :

$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1.$$

Πρόταση 1.6

Ο τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ αν και μόνο αν εμφυτεύεται (ομοιομορφικά) στον $[0, 1]^I$, για κάποιο σύνολο I .

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Θέτουμε $C_X = \{f : X \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ συνεχής}\}$. Τότε επειδή ο X είναι χώρος Tychonoff (είναι T_1 και) τα στοιχεία του C_X διαχωρίζουν τα κλειστά σύνολα από τα σημεία του X . Άρα, η οικογένεια C_X ικανοποιεί τις συνθήκες του Λήμματος Εμφύτευσης, και έτσι η συνάρτηση εκτίμησης $e : X \rightarrow [0, 1]^{C_X}$, $e(x) = (f(x))_{f \in C_X}$, είναι (ομοιομορφική) εμφύτευση.

$(\Leftarrow)$ Εφόσον ο $[0, 1]^I$ είναι $T_{3\frac{1}{2}}$, τότε κάθε υποχώρος του είναι επίσης $T_{3\frac{1}{2}}$, άρα ο X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ ως ομοιομορφικός με έναν υποχώρο του $[0, 1]^I$. ■

2. Συμπαγοποίηση με ένα σημείο

Ορισμός 2.1

Ένας συμπαγής χώρος Hausdorff Y λέγεται **συμπαγοποίηση** ενός χώρου X , αν περιέχει τον X ως υπόχωρο και $\bar{X} = Y$.

Δύο συμπαγοποιήσεις Y_1 και Y_2 του X λέγονται **ισοδύναμες** αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : Y_1 \rightarrow Y_2$ τέτοιος ώστε $h(x) = x$ για κάθε $x \in X$.

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε την έννοια της τοπικής συμπαγείας, και αποδεικνύουμε το βασικό θεώρημα ότι κάθε τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff μπορεί να εμφυτευθεί σε έναν συγκεκριμένο συμπαγή χώρο Hausdorff που θα ονομάσουμε *μονοσημειακή συμπαγοποίησή του*.

Ορισμός 2.2

Ένας χώρος X λέγεται **τοπικά συμπαγής στο x** αν υπάρχει κάποιος συμπαγής υποχώρος C του X που περιέχει μια περιοχή του x . Αν ο X είναι τοπικά συμπαγής σε κάθε σημείο του, ο X λέγεται απλά **τοπικά συμπαγής**.

Σημειώστε ότι ένας συμπαγής χώρος είναι αυτόματα τοπικά συμπαγής.

Παράδειγμα [1] Η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ είναι τοπικά συμπαγής. Το σημείο $x \in \mathbb{R}$ βρίσκεται σε κάποιο διάστημα (a, b) , το οποίο με τη σειρά του περιέχεται στον συμπαγή υποχώρο $[a, b]$.

Ο υποχώρος $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών δεν είναι τοπικά συμπαγής. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{Q}$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $C \subseteq \mathbb{Q}$ συμπαγής που να περιέχει μια περιοχή του x , τότε θα πρέπει να περιέχει κάποιο σύνολο της μορφής $(a, b) \cap \mathbb{Q}$. Όμως στο (a, b) υπάρχει άρρητος r , και ακολουθία ρητών στο (a, b) που συγκλίνει στο r . Εφόσον το C θα είναι συμπαγές στο $\mathbb{R}$, θα είναι κλειστό, δηλαδή θα πρέπει να περιέχει το r το οποίο είναι άτοπο, αφού το C είναι υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. (Εδώ χρησιμοποιήσαμε την εξής πρόταση: Έστω X τ.χ. και Y υπόχωρος του X . Ένα $K \subseteq Y$ είναι συμπαγές στον Y αν και μόνο αν είναι συμπαγές στον X .)

Παράδειγμα [2] Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι τοπικά συμπαγής. Το σημείο x βρίσκεται σε κάποιο στοιχείο βάσης $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, το οποίο με τη σειρά του βρίσκεται στον συμπαγή υποχώρο $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Ο χώρος $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ δεν είναι τοπικά συμπαγής. Κανένα από τα στοιχεία βάσης του δεν περιέχεται σε συμπαγείς υποχώρους. Διότι αν το

$$B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \cdots$$

περιεχόταν σε έναν συμπαγή υποχώρο, τότε η θήκη του

$$\bar{B} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times \mathbb{R} \times \cdots$$

θα ήταν συμπαγής, το οποίο δεν ισχύει.

Θεώρημα 2.3

Έστω ένας τ.χ. X . Τότε ο X είναι τοπικά συμπαγής Hausdorff αν και μόνο αν υπάρχει ένας χώρος Y που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- (i) Ο X είναι υποχώρος του Y ,
- (ii) το $Y \setminus X$ είναι μονοσύνολο, και
- (iii) ο Y είναι συμπαγής χώρος Hausdorff.

Αν οι Y και Y' είναι δύο χώροι που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες, τότε υπάρχει ένας ομοιομορφισμός του Y με τον Y' που ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση στον X .

Απόδειξη.

Βήμα 1. Επαληθεύουμε πρώτα τη μοναδικότητα. Έστω Y και Y' δύο χώροι που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες. Ορίζουμε $h : Y \rightarrow Y'$ θέτοντας το h να απεικονίζει το μοναδικό σημείο p του $Y \setminus X$ στο σημείο q του $Y' \setminus X$, και θέτοντας το h ίσο με την ταυτοτική στον X . (Άρα η h είναι 1-1 και επί.) Δείχνουμε ότι αν το U είναι ανοιχτό στο Y , τότε το $h(U)$ είναι ανοιχτό στο Y' . Τότε η h είναι ομοιομορφισμός λόγω συμμετρίας.

Αρχικά, θεωρούμε την περίπτωση όπου το U δεν περιέχει το p . Τότε $h(U) = U$. Επειδή το U είναι ανοιχτό στο Y και περιέχεται στο X , είναι ανοιχτό στο X . Επειδή το X είναι ανοιχτό στο Y' , το σύνολο U είναι επίσης ανοιχτό στο Y' , όπως επιθυμούσαμε.

Δεύτερον, υποθέτουμε ότι το U περιέχει το p . Επειδή το $C = Y \setminus U$ είναι κλειστό στο Y , είναι συμπαγές ως υποχώρος του Y . Επειδή το C περιέχεται στο X , είναι συμπαγής υποχώρος του X . Τότε, επειδή ο X είναι υποχώρος του Y' , ο χώρος C είναι επίσης συμπαγής υποχώρος του Y' . Επειδή ο Y' είναι Hausdorff, το C είναι κλειστό στο Y' . Γράφουμε $U = (U \cap X) \cup \{p\}$ οπότε $h(U) = (U \cap X) \cup \{q\} = (X \setminus C) \cup \{q\} = Y' \setminus C$ (αφού $X \setminus C = U \cap X$), άρα το $h(U) = Y' \setminus C$ είναι ανοιχτό στο Y' , όπως επιθυμούσαμε.

Βήμα 2. Τώρα υποθέτουμε ότι ο X είναι τοπικά συμπαγής Hausdorff και κατασκευάζουμε τον χώρο Y . Το Βήμα 1 μας δίνει μια ιδέα για το πώς να προχωρήσουμε. Ας πάρουμε

κάποιο αντικείμενο που δεν είναι σημείο του X , ας το συμβολίσουμε με το σύμβολο ∞ για ευκολία, και ας το προσαρτήσουμε στο X , σχηματίζοντας το σύνολο $Y = X \cup \{\infty\}$. (Τέτοιο αντικείμενο υπάρχει, δείτε την παρατήρηση στην ενότητα 3.) Τοπολογικοποιούμε το Y ορίζοντας τη συλλογή των ανοιχτών συνόλων του Y να αποτελείται από (1) όλα τα σύνολα U που είναι ανοιχτά στο X , και (2) όλα τα σύνολα της μορφής $Y \setminus C$, όπου C είναι συμπαγής υποχώρος του X , (και προφανώς το ίδιο το Y).

Πρέπει να ελέγξουμε ότι αυτή η συλλογή είναι, πράγματι, μια τοπολογία στο Y . Το κενό σύνολο είναι σύνολο τύπου (1), και ο χώρος Y είναι σύνολο τύπου (2). Ελέγχοντας ότι η τομή δύο ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτή, έχουμε τρεις περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 & \text{ είναι τύπου (1),} \\ (Y \setminus C_1) \cap (Y \setminus C_2) &= Y \setminus (C_1 \cup C_2) \text{ είναι τύπου (2),} \\ U_1 \cap (Y \setminus C_1) &= U_1 \cap (X \setminus C_1) \text{ είναι τύπου (1),} \end{aligned}$$

επειδή το C_1 είναι κλειστό στο X . Ομοίως, ελέγχουμε ότι η ένωση οποιασδήποτε συλλογής ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτή:

$$\begin{aligned} \bigcup U_\alpha &= U \text{ είναι τύπου (1),} \\ \bigcup (Y \setminus C_\beta) &= Y \setminus \left(\bigcap C_\beta \right) = Y \setminus C \text{ είναι τύπου (2),} \end{aligned}$$

αφού ο X είναι T_2 και άρα η τομή συμπαγών είναι συμπαγής, και

$$\left(\bigcup U_\alpha \right) \cup \left(\bigcup (Y \setminus C_\beta) \right) = U \cup (Y \setminus C) = Y \setminus (C \setminus U),$$

το οποίο είναι τύπου (2) επειδή το $C \setminus U$ είναι κλειστός υποχώρος του C και επομένως συμπαγής.

Τώρα δείχνουμε ότι ο X είναι υποχώρος του Y . Δοθέντος οποιουδήποτε ανοιχτού συνόλου του Y , δείχνουμε ότι η τομή του με το X είναι ανοιχτή στο X . Αν το U είναι τύπου (1), τότε $U \cap X = U$. Αν το $Y \setminus C$ είναι τύπου (2), τότε $(Y \setminus C) \cap X = X \setminus C$. Και τα δύο αυτά σύνολα είναι ανοιχτά στο X . Αντίστροφα, κάθε ανοιχτό σύνολο στο X είναι σύνολο τύπου (1) και επομένως ανοιχτό στο Y εξ ορισμού.

Για να δείξουμε ότι ο Y είναι συμπαγής, έστω $\mathcal{A}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του Y . Η συλλογή $\mathcal{A}$ πρέπει να περιέχει ένα ανοιχτό σύνολο τύπου (2), έστω $Y \setminus C$, αφού κανένα από τα ανοιχτά σύνολα τύπου (1) δεν περιέχει το σημείο ∞ . Παίρνουμε όλα τα μέλη της $\mathcal{A}$ διάφορα του $Y \setminus C$ και τα τέμνουμε με το X . Αυτά σχηματίζουν μια συλλογή ανοιχτών συνόλων του X που καλύπτει το C . Επειδή το C είναι συμπαγές, πεπερασμένο πλήθος από αυτά καλύπτει το C . Η αντίστοιχη πεπερασμένη συλλογή στοιχείων της $\mathcal{A}$ θα καλύπτει, μαζί με το στοιχείο $Y \setminus C$, όλο το Y .

Για να δείξουμε ότι ο Y είναι Hausdorff, έστω x και y δύο διαφορετικά σημεία του Y . Αν και τα δύο βρίσκονται στο X , υπάρχουν ξένα σύνολα U και V ανοιχτά στο X που τα περιέχουν, αντίστοιχα. Από την άλλη πλευρά, αν $x \in X$ και $y = \infty$, μπορούμε να

επιλέξουμε ένα συμπαγές σύνολο C στο X που να περιέχει μια περιοχή U του x . Τότε τα U και $Y \setminus C$ είναι ξένες περιοχές των x και ∞ , αντίστοιχα, στο Y .

Βήμα 3. Τέλος, αποδεικνύουμε το αντίστροφο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας χώρος Y που ικανοποιεί τις συνθήκες (i)-(iii). Τότε ο X είναι Hausdorff επειδή είναι υποχώρος του Hausdorff χώρου Y . Δοθέντος $x \in X$, δείχνουμε ότι ο X είναι τοπικά συμπαγής στο x . Επιλέγουμε ξένα ανοιχτά σύνολα U και V του Y που περιέχουν το x και το μοναδικό σημείο του $Y \setminus X$, αντίστοιχα. Τότε το σύνολο $C = Y \setminus V$ είναι κλειστό στο Y , άρα είναι συμπαγές υποχώρος του Y . Επειδή το C είναι υποσύνολο του X , είναι επίσης συμπαγές ως υποχώρος του X , και περιέχει την περιοχή U του x . ■

Παρατήρηση. Αν ο X τύχει να είναι συμπαγής, τότε ο χώρος Y του προηγούμενου θεωρήματος δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γιατί προκύπτει από τον X προσαρτώντας ένα μοναδικό απομονωμένο σημείο. (Αυτό επειδή ο ίδιος ο X είναι συμπαγής και άρα το $Y \setminus X = \{\infty\}$ είναι ανοιχτό σύνολο. Έτσι το ∞ είναι μεμονωμένο σημείο και η κλειστή θήκη του X στον Y είναι το X , δηλαδή το X δεν είναι πυκνό στο Y . Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, ο Y δεν αποτελεί συμπαγοποίηση του X .) Ωστόσο, αν ο X δεν είναι συμπαγής, τότε το σημείο του $Y \setminus X$ είναι σημείο συσσώρευσης του X (γιατί κάθε ανοιχτή περιοχή του ∞ περιέχει σημεία του X), έτσι ώστε $\bar{X} = Y$.

Ορισμός 2.4

Έστω X ένας τ.χ. και Y μια συμπαγοποίησή του. Αν το $Y \setminus X$ περιέχει ένα μοναδικό σημείο, τότε ο Y καλείται η **μονοσημειακή συμπαγοποίηση** του X .

Έχουμε δείξει ότι ο X έχει μονοσημειακή συμπαγοποίηση Y αν και μόνο αν ο X είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff που δεν είναι ο ίδιος συμπαγής. Μιλάμε για τον Y ως «τη» μονοσημειακή συμπαγοποίηση επειδή ο Y καθορίζεται μοναδικά μέσω της ισοδυναμίας.

Παράδειγμα [3] Η μονοσημειακή συμπαγοποίηση της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφική με τον κύκλο, όπως μπορείτε εύκολα να ελέγξετε. Ομοίως, η μονοσημειακή συμπαγοποίηση του $\mathbb{R}^2$ είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα S^2 .

Πρόταση 2.5

Έστω X ένας χώρος Hausdorff. Τότε ο X είναι τοπικά συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε x στο X , και για κάθε ανοιχτή περιοχή U του x , υπάρχει μια περιοχή V του x τέτοια ώστε η $\bar{V}$ να είναι συμπαγής και $\bar{V} \subseteq U$.

Απόδειξη. Προφανώς αυτή η νέα διατύπωση συνεπάγεται την τοπική συμπαγεία. Το σύνολο $C = \bar{V}$ είναι το επιθυμητό συμπαγές σύνολο που περιέχει μια περιοχή του x . Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι ο X είναι τοπικά συμπαγής. Έστω x ένα σημείο του X και έστω U μια ανοιχτή περιοχή του x . Παίρνουμε τη μονοσημιακή συμπαγοποίηση Y του X , και έστω C το σύνολο $Y \setminus U$. Τότε το C είναι κλειστό στο Y , άρα το C είναι συμπαγής υποχώρος του Y . Επιλέγουμε ξένα ανοιχτά σύνολα V και W που περιέχουν τα x και C , αντίστοιχα. Τότε η θήκη $\bar{V}$ του V στο Y είναι συμπαγής. Επιπλέον, το $\bar{V}$ είναι ξένο από το C , οπότε $\bar{V} \subseteq U$, όπως επιθυμούσαμε. ■

Πόρισμα 2.6

Έστω X τοπικά συμπαγής Hausdorff. Έστω A υποχώρος του X . Αν το A είναι κλειστό στο X ή ανοιχτό στο X , τότε το A είναι τοπικά συμπαγές.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το A είναι κλειστό στο X . Δοθέντος $x \in A$, έστω C ένας συμπαγής υποχώρος του X που περιέχει την περιοχή U του x στο X . Τότε το $C \cap A$ είναι κλειστό στο C και άρα συμπαγές, και περιέχει την περιοχή $U \cap A$ του x στο A . (Δεν έχουμε χρησιμοποιήσει τη συνθήκη Hausdorff εδώ.)

Υποθέτουμε τώρα ότι το A είναι ανοιχτό στο X . Δοθέντος $x \in A$, εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα για να επιλέξουμε μια περιοχή V του x στο X τέτοια ώστε το $\bar{V}$ να είναι συμπαγές και $\bar{V} \subseteq A$. Τότε το $C = \bar{V}$ είναι ένας συμπαγής υποχώρος του A που περιέχει την περιοχή V του x στο A . ■

Πόρισμα 2.7

Ένας χώρος X είναι ομοιομορφικός με έναν ανοιχτό υποχώρο ενός συμπαγούς χώρου Hausdorff αν και μόνο αν ο X είναι τοπικά συμπαγής Hausdorff.

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.3 και το Πόρισμα 2.6. ■

3. Συμπαγοποίηση κατά Stone-Čech

Έχουμε ήδη μελετήσει έναν τρόπο συμπαγοποίησης ενός τοπολογικού χώρου X , τη μονοσημειακή συμπαγοποίηση. Είναι κατά μία έννοια η *ελαχιστική* συμπαγοποίηση του X . Η συμπαγοποίηση κατά Stone-Čech του X , την οποία μελετάμε τώρα, είναι κατά μία έννοια η *μεγιστική* συμπαγοποίηση του X . Κατασκευάστηκε από τον Marshall Stone και τον Eduard Čech, ανεξάρτητα, το 1937.

Αυτό που δεν έχουμε συζητήσει ακόμη, είναι υπό ποιες προϋποθέσεις ένας χώρος X μπορεί να έχει συμπαγοποίηση. Η παρακάτω πρόταση απαντά στο ερώτημα αυτό και μας λέει ότι ο X πρέπει και αρκεί να είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.

Πρόταση 3.1

Ο X είναι χώρος Tychonoff αν και μόνο αν έχει συμπαγοποίηση.

Απόδειξη. Αν ο X έχει μια συμπαγοποίηση Y , τότε ο X πρέπει να είναι χώρος Tychonoff, εφόσον είναι υπόχωρος του χώρου Tychonoff Y . (Αυτό επειδή ο Y είναι συμπαγής Hausdorff άρα T_4 δηλαδή και $T_{3\frac{1}{2}}$.)

Αντιστρόφως, αν ο X είναι Tychonoff, τότε ο X έχει μια συμπαγοποίηση, διότι ο X μπορεί να εμφυτευθεί στον συμπαγή χώρο Hausdorff $[0, 1]^I$ για κάποιο I , και κάθε τέτοια εμφύτευση δημιουργεί μια συμπαγοποίηση του X , όπως δείχνει το ακόλουθο λήμμα. ■

Λήμμα 3.2

Έστω X ένας χώρος. Υποθέτουμε ότι $h : X \rightarrow Z$ είναι μια εμφύτευση του X στον συμπαγή χώρο Hausdorff Z . Τότε υπάρχει μια αντίστοιχη συμπαγοποίηση Y του X . Αυτή έχει την ιδιότητα ότι υπάρχει μια εμφύτευση $H : Y \rightarrow Z$ που ισούται με την h πάνω στο X . Η συμπαγοποίηση Y καθορίζεται μοναδικά ως προς την ισοδυναμία.

Ο Y θα λέγεται η συμπαγοποίηση που **επάγεται** από την εμφύτευση h .

Απόδειξη. Δοθείσης της h , έστω X_0 ο υπόχωρος $h(X)$ του Z , και έστω Y_0 η κλειστότητα του στο Z . Τότε ο Y_0 είναι ένας συμπαγής χώρος Hausdorff και $\overline{X_0} = Y_0$. Συνεπώς, ο Y_0 είναι μια συμπαγοποίηση του X_0 .

Κατασκευάζουμε τώρα έναν χώρο Y που περιέχει τον X τέτοιο ώστε το ζεύγος (X, Y) να είναι ομοιομορφικό με το ζεύγος (X_0, Y_0) . Ας επιλέξουμε ένα σύνολο A ξένο από το X που να βρίσκεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο $Y_0 \setminus X_0$ μέσω μιας απεικόνισης $k : A \rightarrow Y_0 \setminus X_0$. Ορίζουμε $Y = X \cup A$, και ορίζουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $H : Y \rightarrow Y_0$ με τον κανόνα:

$$\begin{aligned} H(x) &= h(x) \quad \text{για } x \in X, \\ H(a) &= k(a) \quad \text{για } a \in A. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια εφοδιάζουμε τον Y με τοπολογία, ορίζοντας το U να είναι ανοικτό στο Y αν και μόνο αν το $H(U)$ είναι ανοικτό στο Y_0 . Η απεικόνιση H είναι αυτομάτως ομοιομορφισμός, και ο χώρος X είναι υπόχωρος του Y διότι η H ισούται με τον ομοιομορφισμό h όταν περιοριστεί στον υπόχωρο X του Y . Επεκτείνοντας το πεδίο τιμών της H , λαμβάνουμε την απαιτούμενη εμφύτευση του Y στο Z . Ακόμη, λόγω κατασκευής, ο Y είναι συμπαγής χώρος Hausdorff (ως ομοιομορφικός με τον Y_0) και ισχύει $\overline{X} = H^{-1}(H(\overline{X})) = H^{-1}(H(X)) = H^{-1}(h(X)) = H^{-1}(\overline{X}_0) = H^{-1}(Y_0) = Y$, αφού οι ομοιομορφισμοί διατηρούν τις κλειστές θήκες. Επομένως, ο Y είναι συμπαγοποίηση του X .

Τώρα ας υποθέσουμε ότι ο Y_i είναι μια συμπαγοποίηση του X και ότι $H_i : Y_i \rightarrow Z$ είναι μια εμφύτευση που είναι επέκταση της h , για $i = 1, 2$. Τότε η H_i απεικονίζει τον X επί του X_0 . Επειδή η H_i είναι συνεχής, πρέπει να απεικονίζει τον Y_i μέσα στο $\overline{X}_0$, διότι το $H_i(Y_i)$ περιέχει το X_0 και είναι κλειστό (όντας συμπαγές), άρα περιέχει το $\overline{X}_0$. Συνεπώς $H_i(Y_i) = \overline{X}_0$, και η $H_2^{-1} \circ H_1$ ορίζει έναν ομοιομορφισμό του Y_1 με τον Y_2 που ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση στο X . ■

Μια συνολοθεωρητική παρατήρηση. Στην παραπάνω απόδειξη χρειαζόμαστε ένα σύνολο A που να είναι, ας πούμε, αντίγραφο του $S = Y_0 \setminus X_0$, αλλά πρέπει να διασφαλίσουμε ότι το A και το X είναι ξένα. (Να σημειώσουμε ότι το S μπορεί να είναι οποιοδήποτε σύνολο, δεν έχει σημασία η συγκεκριμένη επιλογή του.) Αυτό το κάνουμε με σκοπό να έχει η συμπαγοποίηση Y του X , τον X σαν υπόχωρο, δηλαδή το X να είναι υποσύνολο του Y . Επομένως θέλουμε ένα σύνολο A ξένο από το X και ισοπληθικό με το S , το οποίο θα κατασκευάσουμε αμέσως.

Η ιδέα είναι να «μαρκάρουμε» τα στοιχεία του S με ένα σύνολο r , δηλαδή να θέσουμε $A = S \times \{r\}$ και τα ζεύγη (s, r) να μην ανήκουν στο X . Κοιτάζουμε, λοιπόν, τα στοιχεία του X για να δούμε αν περιέχει διατεταγμένα ζεύγη. Συλλέγουμε όλες τις «δεύτερες συντεταγμένες» αυτών των ζευγών σε ένα σύνολο U . Δηλαδή $U = \{m \mid \exists n \text{ τ.ω. } (n, m) \in X\}$. Τότε το U είναι σύνολο και μάλιστα $U \subseteq \bigcup \bigcup X$.

Πράγματι, από τον ορισμό του Kuratowski είναι $(n, m) = \{\{n\}, \{n, m\}\}$ οπότε (αν το X περιέχει διατεταγμένα ζεύγη, τότε) η $\bigcup X$ περιέχει τα σύνολα $\{n\}, \{n, m\}$ και άρα η $\bigcup \bigcup X$ περιέχει τα ίδια τα n και m . Τα $\bigcup X$ και $\bigcup \bigcup X$ είναι σύνολα από το Αξίωμα της Ένωσης και άρα το $U = \{m \in \bigcup \bigcup X \mid \exists n \text{ τ.ω. } (n, m) \in X\}$ είναι σύνολο από το Αξίωμα του

Διαχωρισμού.

Τώρα ορίζουμε το r ως εξής: Θέτουμε $r = \{x \in U \mid x \notin x\}$. Το r είναι σύνολο από το Αξίωμα του Διαχωρισμού και θα δείξουμε ότι το r δεν ανήκει στο U . Υποθέτουμε ότι $r \in U$. Τότε, με ένα παρόμοιο επιχείρημα με το παράδοξο του Russell, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν $r \in r$ τότε αφού $r \in U$ έπεται ότι $r \notin r$.

Επίσης, αν $r \notin r$ τότε αφού $r \in U$ έπεται ότι $r \in r$.

Δηλαδή $r \in r \iff r \notin r$ το οποίο είναι άτοπο.

Άρα το r δεν ανήκει στο U και ορίζουμε το A επισυνάπτοντας το r σε κάθε στοιχείο του S , δηλαδή: $A = S \times \{r\}$ και τότε λόγω κατασκευής το A δεν έχει κοινά στοιχεία με το X διότι στο X δεν υπάρχει ζεύγος με δεύτερη συντεταγμένη το r . Βλέπουμε επιπλέον ότι μέσω της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης $k : A \rightarrow S$ με $k((s, r)) = s \ \forall s \in S$, τα A και S είναι ισοπληθικά.

Η παραπάνω κατασκευή είναι εφικτή χωρίς κανένα επιπλέον αξίωμα εκτός από τα συνήθη αξιώματα της θεωρίας ZFC. Ακόμη, αν λαμβάναμε υπόψη μας το Αξίωμα της Κανονικότητας (ή Θεμελίωσης) του von Neumann θα μπορούσαμε να επιλέξουμε απλά $r = X$ και τότε το A θα ήταν ξένο από το X καθώς το αξίωμα αυτό αποτρέπει κυκλικές αλυσίδες στοιχείων. Η κατασκευή θα ήταν δηλαδή πιο εύκολη.

Γενικά, υπάρχουν αρκετοί διαφορετικοί τρόποι συμπαγοποίησης ενός χώρου X . Παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα για τον $X = (0, 1)$.

Παράδειγμα [1] Πάρτε τον μοναδιαίο κύκλο S^1 στο $\mathbb{R}^2$ και έστω $h : (0, 1) \rightarrow S^1$ η απεικόνιση

$$h(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

Η συμπαγοποίηση που επάγεται από την εμφύτευση h είναι ισοδύναμη με τη μονοσημιακή συμπαγοποίηση του X .

Παράδειγμα [2] Έστω Y ο χώρος $[0, 1]$. Τότε ο Y είναι μια συμπαγοποίηση του X . Λαμβάνεται «προσθέτοντας ένα σημείο σε κάθε άκρο του $(0, 1)$ ».

Ένα βασικό πρόβλημα που προκύπτει στη μελέτη των συμπαγοποιήσεων είναι το εξής:

Αν ο Y είναι μια συμπαγοποίηση του X , υπό ποιες συνθήκες μπορεί μια συνεχής πραγματική συνάρτηση f που ορίζεται στο X να επεκταθεί συνεχώς στο Y ;

Η συνάρτηση f θα πρέπει να είναι φραγμένη αν πρόκειται να είναι επεκτάσιμη, καθώς η επέκτασή της θα μεταφέρει τον συμπαγή χώρο Y στο $\mathbb{R}$ και άρα θα είναι φραγμένη.

Αλλά το να είναι φραγμένη δεν είναι αρκετό, γενικά. Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα [3] Έστω $X = (0, 1)$. Θεωρήστε τη μονοσημειακή συμπαγοποίηση του X που δίνεται στο Παράδειγμα [1]. Μια φραγμένη συνεχής συνάρτηση $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι επεκτάσιμη σε αυτή τη συμπαγοποίηση αν και μόνο αν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσα.

Για την συμπαγοποίηση του X με δύο σημεία που θεωρήθηκε στο Παράδειγμα [2], η συνάρτηση f είναι επεκτάσιμη αν και μόνο αν και τα δύο αυτά όρια απλά υπάρχουν στο $\mathbb{R}$.

Τώρα είμαστε έτοιμοι για την βασική ιδέα πίσω από τη συμπαγοποίηση Stone-Čech. Έχει ως εξής:

Θεώρημα 3.3

Έστω X ένας χώρος Tychonoff. Υπάρχει μια συμπαγοποίηση Y του X που έχει την ιδιότητα ότι κάθε φραγμένη συνεχής απεικόνιση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια συνεχή απεικόνιση του Y στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ η συλλογή όλων των φραγμένων συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο X , με δείκτες από κάποιο σύνολο δεικτών J . Για κάθε $\alpha \in J$, επιλέγουμε ένα κλειστό διάστημα I_α στο $\mathbb{R}$ που περιέχει το $f_\alpha(X)$. Συγκεκριμένα, επιλέγουμε

$$I_\alpha = [\inf f_\alpha(X), \sup f_\alpha(X)].$$

Τότε ορίζουμε $h : X \rightarrow \prod_{\alpha \in J} I_\alpha$ με τον κανόνα

$$h(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}.$$

Από το θεώρημα Tychonoff, το $\prod I_\alpha$ είναι συμπαγές. Επειδή ο X είναι Tychonoff, η συλλογή $\{f_\alpha\}$ διαχωρίζει τα σημεία από τα κλειστά σύνολα στο X . Επομένως, από το Λήμμα Εμφύτευσης, η απεικόνιση h είναι εμφύτευση.

Έστω Y η συμπαγοποίηση του X που επάγεται από την εμφύτευση h . Τότε υπάρχει μια εμφύτευση $H : Y \rightarrow \prod I_\alpha$ που ισούται με h όταν περιοριστεί στον υπόχωρο X του Y . Δοθείσας μιας φραγμένης συνεχούς πραγματικής συνάρτησης f στο X , δείχνουμε ότι επεκτείνεται στο Y . Η συνάρτηση f ανήκει στη συλλογή $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$, οπότε ισούται με f_β για κάποιο δείκτη β . Έστω $\pi_\beta : \prod I_\alpha \rightarrow I_\beta$ η απεικόνιση προβολής. Τότε η συνεχής απεικόνιση $\pi_\beta \circ H : Y \rightarrow I_\beta$ είναι η επιθυμητή επέκταση της f . Διότι αν $x \in X$, έχουμε

$$\pi_\beta(H(x)) = \pi_\beta(h(x)) = \pi_\beta((f_\alpha(x))_{\alpha \in J}) = f_\beta(x).$$

Η μοναδικότητα της επέκτασης είναι συνέπεια του ακόλουθου λήμματος. ■

Λήμμα 3.4

Έστω $A \subseteq X$. Έστω $f : A \rightarrow Z$ μια συνεχής απεικόνιση του A στον χώρο Hausdorff Z . Υπάρχει το πολύ μία επέκταση της f σε μια συνεχή συνάρτηση $g : \bar{A} \rightarrow Z$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $g, g' : \bar{A} \rightarrow Z$ είναι δύο διαφορετικές επεκτάσεις της f . Επιλέγουμε x έτσι ώστε $g(x) \neq g'(x)$. Έστω U και U' ξένες περιοχές των $g(x)$ και $g'(x)$, αντίστοιχα. Επιλέγουμε μια περιοχή V του x έτσι ώστε $g(V) \subseteq U$ και $g'(V) \subseteq U'$. Τώρα το V τέμνει το A σε κάποιο σημείο y . Τότε $g(y) \in U$ και $g'(y) \in U'$. Αλλά αφού $y \in A$, έχουμε $g(y) = f(y)$ και $g'(y) = f(y)$. Αυτό αντιφάσκει με το γεγονός ότι τα U και U' είναι ξένα. ■

Θεώρημα 3.5

Έστω X ένας χώρος Tychonoff. Έστω Y μια συμπαγοποίηση του X που ικανοποιεί την ιδιότητα επέκτασης του Θεωρήματος 3.3. Δοθείσας οποιασδήποτε συνεχούς απεικόνισης $f : X \rightarrow C$ του X σε έναν συμπαγή χώρο Hausdorff C , η απεικόνιση f επεκτείνεται μοναδικά σε μια συνεχή απεικόνιση $g : Y \rightarrow C$.

Απόδειξη. Σημειώστε ότι ο C είναι Tychonoff, οπότε μπορεί να εμφυτευθεί στον $[0, 1]^I$ για κάποιο I . Άρα μπορούμε κάλλιστα να υποθέσουμε ότι $C \subseteq [0, 1]^I$. Τότε κάθε συνιστώσα συνάρτηση f_α της απεικόνισης f είναι μια φραγμένη συνεχής πραγματική συνάρτηση στο X . Από την υπόθεση, η f_α μπορεί να επεκταθεί σε μια συνεχή απεικόνιση g_α του Y στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^I$ θέτοντας $g(y) = (g_\alpha(y))_{\alpha \in I}$. Τότε η g είναι συνεχής επειδή ο $\mathbb{R}^I$ έχει την τοπολογία γινόμενο. Τώρα στην πραγματικότητα η g απεικονίζει το Y στον υποχώρο C του $\mathbb{R}^I$. Διότι η συνέχεια της g συνεπάγεται ότι

$$g(Y) = g(\bar{X}) \subseteq \overline{g(X)} = \overline{f(X)} \subseteq \bar{C} = C.$$

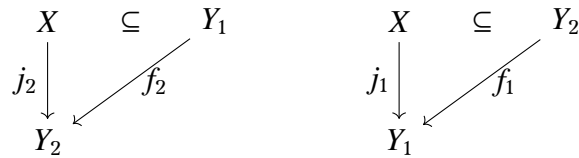
Άρα η g είναι η επιθυμητή επέκταση της f . ■

Θεώρημα 3.6

Έστω X ένας χώρος Tychonoff. Αν Y_1 και Y_2 είναι δύο συμπαγοποιήσεις του X που ικανοποιούν την ιδιότητα επέκτασης του Θεωρήματος 3.3, τότε οι Y_1 και Y_2 είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $j_2 : X \rightarrow Y_2$ με $j_2(x) = x$. Είναι μια συνεχής

απεικόνιση του X στον συμπαγή χώρο Hausdorff Y_2 . Επειδή ο Y_1 έχει την ιδιότητα επέκτασης, μπορούμε, από το προηγούμενο θεώρημα, να επεκτείνουμε την j_2 σε μια συνεχή απεικόνιση $f_2 : Y_1 \rightarrow Y_2$. Ομοίως, μπορούμε να επεκτείνουμε την όμοια ορισμένη απεικόνιση $j_1 : X \rightarrow Y_1$ σε μια συνεχή απεικόνιση $f_1 : Y_2 \rightarrow Y_1$ (επειδή ο Y_2 έχει την ιδιότητα επέκτασης και ο Y_1 είναι συμπαγής Hausdorff).



Η σύνθεση $f_1 \circ f_2 : Y_1 \rightarrow Y_1$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in X$, ισχύει $f_1(f_2(x)) = x$. Επομένως, η $f_1 \circ f_2$ είναι μια συνεχής επέκταση της ταυτοτικής απεικόνισης $i_X : X \rightarrow Y_1$. Αλλά και η ταυτοτική απεικόνιση του Y_1 είναι επίσης μια συνεχής επέκταση της i_X . Από τη μοναδικότητα των επεκτάσεων (Λήμμα 3.4), η $f_1 \circ f_2$ πρέπει να ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση του Y_1 . Ομοίως, η $f_2 \circ f_1$ πρέπει να ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση του Y_2 . Άρα οι f_1 και f_2 είναι ομοιομορφισμοί. ■

Ορισμός 3.7

Για κάθε χώρο Tychonoff X , επιλέγουμε μια συμπαγοποίηση του X που να ικανοποιεί τη συνθήκη επέκτασης του Θεωρήματος 3.3. Θα συμβολίζουμε αυτή τη συμπαγοποίηση του X με βX και θα την καλούμε **συμπαγοποίηση κατά Stone-Čech** του X . Χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \rightarrow C$ του X σε έναν συμπαγή χώρο Hausdorff C επεκτείνεται μοναδικά σε μια συνεχή απεικόνιση $g : \beta X \rightarrow C$.

Λήμμα 3.8(Άσκηση 4 του J. Munkres)

Έστω Y μια τυχαία συμπαγοποίηση του X και έστω βX η συμπαγοποίηση κατά Stone-Čech του X . Τότε υπάρχει $f : \beta X \rightarrow Y$ συνεχής, επί και κλειστή.

Απόδειξη. Έστω η συνεχής συνάρτηση $i_X : X \rightarrow Y$ με $i_X(x) = x$. Τότε από το Θεώρημα 3.5 αυτή έχει μια συνεχή επέκταση $f : \beta X \rightarrow Y$.

Είναι $f(\bar{X}) \subseteq \overline{f(X)}$ λόγω συνέχειας, και $\overline{f(X)} \subseteq f(\bar{X}) = f(\beta X)$ αφού η $f(\beta X)$ είναι συμπαγής και άρα κλειστή (λόγω Hausdorff) και $f(X) \subseteq f(\bar{X}) = f(\beta X)$.

Άρα η f είναι επί, γιατί:

$$f(\beta X) = f(\bar{X}) = \overline{f(X)} = \bar{X} = Y$$

Επίσης, η f είναι κλειστή γιατί αν $K \subseteq \beta X$ κλειστό τότε είναι και συμπαγές αφού βX συμπαγής και άρα $f(K)$ συμπαγές και άρα κλειστό αφού ο Y είναι Hausdorff. ■

Από το προηγούμενο Λήμμα 3.8, γνωρίζουμε ότι υπάρχει η επέκταση $f : \beta X \rightarrow Y$, η οποία είναι συνεχής, επί και κλειστή. Επομένως, η f είναι απεικόνιση πηλίκου. Αυτό σημαίνει ότι η τοπολογία του Y ταυτίζεται με την τοπολογία πηλίκου που επάγεται από την f . Ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο βX ως εξής:

$$a \sim b \iff f(a) = f(b)$$

Τότε ισχύει ότι:

$$Y \cong \beta X / \sim .$$

Δηλαδή, ο Y είναι ομοιομορφικός με τον χώρο πηλίκου που προκύπτει από την «ταύτιση» των σημείων του βX που απεικονίζονται στο ίδιο σημείο του Y .

Έχουμε αποδείξει, λοιπόν, το ακόλουθο:

Πόρισμα 3.9

Κάθε (τυχαία) συμπαγοποίηση Y του X είναι ομοιομορφική με έναν χώρο πηλίκου του βX .

Το πόρισμα αυτό αποτελεί έναν τρόπο για να δούμε την «μεγιστικότητα» της συμπαγοποίησης κατά Stone-Čech.

4. Εφαρμογή σε Stone-Weierstrass

Θεώρημα 4.1 (Stone-Weierstrass)

Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας συμπαγής χώρος Hausdorff.

Έστω $A \subseteq (C(X), \|\cdot\|_\infty)$ μια υποάλγεβρα του $C(X)$ επί του $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

- 1) Οι σταθερές συναρτήσεις ανήκουν στην A ,
- 2) και η A διαχωρίζει τα σημεία του X .

Τότε $\overline{A} = C(X)$.

Απόδειξη. Παραλείπεται (ΑΠΕΙ 3 Reference). ■

Ορισμός 4.2

Ένα σύνολο $Z \subseteq X$ λέγεται μηδενικό αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ με $Z = f^{-1}(\{0\})$.

Πόρισμα 4.3

Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας χώρος Tychonoff.

Έστω $A \subseteq (C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ μια υποάλγεβρα του $C_b(X)$ επί του $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

- 1) Οι σταθερές συναρτήσεις ανήκουν στην A ,
- 2) και η A διαχωρίζει τα μηδενικά σύνολα του X .

Τότε $\overline{A} = C_b(X)$.

Απόδειξη. Έστω η συμπαγοποίηση βX κατά Stone-Čech του X . Τότε κάθε συνάρτηση $f \in C_b(X)$ είναι φραγμένη, οπότε έχει μοναδική συνεχή επέκταση $\tilde{f} \in C(\beta X)$. Άρα αν θεωρήσουμε $\tilde{A} = \{\tilde{f} \in C(\beta X) : f \in A\}$ τότε προφανώς είναι υποάλγεβρα και:

- 1) Οι σταθερές συναρτήσεις ανήκουν στην $\tilde{A}$,
- 2) και η $\tilde{A}$ διαχωρίζει τα σημεία του βX .

Πράγματι, έστω $x \neq y$ στο βX . Τότε, αφού ο βX είναι χώρος Tychonoff, υπάρχει συνεχής $h : \beta X \rightarrow [0, 1]$ με $h(x) = 0$, $h(y) = 1$.

Έστω $Z_x = h^{-1}([0, \frac{1}{3}]) \cap X$ και $Z_y = h^{-1}([\frac{2}{3}, 1]) \cap X$. Τα δύο σύνολα είναι μηδενικά στο X .

(Παίρνουμε τις συναρτήσεις $\max\{h(x) - \frac{1}{3}, 0\}$ και $\min\{h(x) - \frac{2}{3}, 0\}$ αντίστοιχα.)

Άρα υπάρχει $f \in A$ συνεχής με $\overline{f(Z_x)} \cap \overline{f(Z_y)} = \emptyset$.

Τώρα εύκολα βλέπουμε ότι $x \in \overline{Z_x}$ άρα $\tilde{f}(x) \in \tilde{f}(\overline{Z_x}) \subseteq \overline{\tilde{f}(Z_x)} = \overline{f(Z_x)}$. Όμοια $\tilde{f}(y) \in \overline{f(Z_y)}$, οπότε $\tilde{f}(x) \neq \tilde{f}(y)$.

Άρα από το Θεώρημα Stone-Weierstrass, $\overline{\tilde{A}} = C(\beta X)$.

Έστω $f \in C_b(X)$. Τότε υπάρχει $\tilde{g}_\lambda \in \tilde{A}$ με $\|\tilde{f} - \tilde{g}_\lambda\|_\infty \rightarrow 0$ και $\|f - g_\lambda\|_\infty \leq \|\tilde{f} - \tilde{g}_\lambda\|_\infty \rightarrow 0$, άρα $f \in \overline{A}$. Τελικά $\overline{A} = C_b(X)$. ■