Τοπολογία
4η Σειρά Ασκήσεων
Διαχωριστικά Αξιώματα - Λήμμα Urysohn
Θεώρημα μετρικοποίησης του Urysohn

29. Έστω X τοπολογικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο X είναι κανονικός (T_3), τότε κάθε δύο διαφορετικά σημεία του έχουν περιοχές των οποίων οι κλειστές θήκες είναι ξένες.

(β) Αν ο X είναι φυσιολογικός (T_4), τότε κάθε δύο ξένα κλειστά υποσύνολά του περιέχονται σε ανοιχτά σύνολα των οποίων οι κλειστές θήκες είναι ξένες.

30. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f, g : X \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν ο Y είναι χώρος Hausdorff (T_2), αποδείξτε ότι το σύνολο $K = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό.

31. Έστω X 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και S ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολό του. Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων του S που είναι σημεία συσσώρευσης του S είναι υπεραριθμήσιμο. Ειδικότερα, ο X δεν περιέχει κανένα υπεραριθμήσιμο διακριτό υποσύνολο.

32. Αποδείξτε ότι κάθε άπειρος χώρος Hausdorff περιέχει έναν άπειρο υπόχωρο του οποίου η σχετική τοπολογία είναι η διακριτή.

(*Υπόδειξη:* Αποδείξτε πρώτα ότι μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανοιχτών μη κενών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_k$ να είναι άπειρο και $U_{n+1} \subseteq X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_k$.)

33. Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε κλειστός υπόχωρος ενός T_4 χώρου είναι T_4.

(β) Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι T_4, ο Y είναι T_1 και υπάρχει απεικόνιση $f : X \to Y$ συνεχής, κλειστή και επί του Y, τότε ο Y είναι T_4.

34. Όπως ξέρουμε, ένας υπόχωρος ενός T_4 χώρου μπορεί να μην είναι T_4 και το καρτεσιανό γινόμενο T_4 χώρων μπορεί να μην είναι T_4. Από την άλλη μεριά, αποδείξτε ότι ισχύει το εξής: Αν ο χώρος γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$ είναι T_4, τότε και κάθε X_i είναι T_4.

35. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων $(U_r)_{r\in D}$ που ορίσαμε στην απόδειξη του Λήμματος του Urysohn και την αντίστοιχη συνάρτηση f. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in [0, 1)$, ισχύει:

$$f^{-1}(\{x\}) = \bigcap_{r\in D,\, r>x} U_r \setminus \bigcup_{s\in D,\, s<x} U_s\,.$$

36. Δώστε μια άμεση απόδειξη του Λήμματος του Urysohn για μετρικούς χώρους (X, d), θεωρώντας τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)},$$

όπου $d(x, C) = \inf\{d(x, c) : c \in C\}$, για κάθε $x \in X$ και $C \subseteq X$, $C \neq \emptyset$.

37. Ένα υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται σύνολο G_δ αν ισούται με την τομή μιας ακολουθίας ανοιχτών συνόλων, δηλαδή $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, όπου, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $G_n \subseteq X$ είναι ανοιχτό. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν ο X είναι 1ος αριθμήσιμος και T_1 τοπολογικός χώρος, τότε τα μονοσύνολα του X είναι G_δ σύνολα.

(β) Έστω X T_4 χώρος και A υποσύνολο του X. Το A είναι κλειστό και G_δ αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ τέτοια ώστε $A = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

38. Δώστε παράδειγμα ενός 2ου αριθμήσιμου χώρου Hausdorff που δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

39. Θα δείξουμε ότι το επίπεδο του Sorgenfrey $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ δεν είναι φυσιολογικός (T_4) τοπολογικός χώρος, παρουσιάζοντας δύο κλειστά και ξένα υποσύνολά του, τα οποία δεν διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα. Έχουμε δει ότι το σύνολο $L = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ είναι κλειστό και διακριτό στον $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$.

(α) Αποδείξτε ότι κάθε υποσύνολο του L είναι κλειστό στον $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$.

(β) Θεωρούμε τα σύνολα

$$A = \{(x,-x) : x \in \mathbb{Q}\} \text{ και } B = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\},$$

τα οποία, σύμφωνα με το (α), είναι κλειστά στον $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ και ξένα. Έστω V ένα τυχόν ανοικτό σύνολο που περιέχει το B. Θα αποδείξουμε ότι $A \cap \overline{V} \neq \emptyset$, το οποίο συνεπάγεται ότι κάθε ανοικτό U που περιέχει το A, θα τέμνει το V (εξηγήστε την τελευταία συνεπαγωγή). Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$K_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left[x, x + \frac{1}{n}\right) \times \left[-x, -x + \frac{1}{n}\right) \subseteq V \right\}.$$

Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Baire για να συμπεράνετε ότι υπάρχει κάποιος $n_0 \in \mathbb{N}$ και κάποιο διάστημα (a,b) ώστε $(a,b) \subseteq \overline{K}_{n_0}$.

(ii) Αποδείξτε ότι το V περιέχει το ανοικτό παραλληλόγραμμο

$$R = \bigcup_{x\in(a,b)} \left[\{x\} \times \left(-x, -x + \frac{1}{n_0}\right) \right].$$

(iii) Αποδείξτε ότι, για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$, το $(q,-q) \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του V.