

**Τοπολογία**  
**3η Σειρά Ασκήσεων**

**Γινόμενα τοπολογικών χώρων**

**22.** Έστω  $\{X_i : i \in I\}$  οικογένεια τοπολογικών χώρων,  $A_i \subseteq X_i$ , για κάθε  $i \in I$  και  $X = \prod_{i \in I} X_i$  ο χώρος γινόμενο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν, για κάθε  $i \in I$ , το  $A_i$  είναι κλειστό στον  $X_i$ , τότε το  $\prod_{i \in I} A_i$  είναι κλειστό στον  $X$ .

(β) Γενικά ισχύει

$$\prod_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i \in I} A_i}.$$

(γ) Το  $\prod_{i \in I} A_i$  είναι πυκνό στον  $X$ , αν και μόνο αν, για κάθε  $i \in I$ , το  $A_i$  είναι πυκνό στον  $X_i$ .

(δ) Έστω  $x^0 = (x^0(i))_{i \in I}$  ένα στοιχείο του  $X$ . Σταθεροποιούμε το  $x^0$  και θέτουμε

$$D = \{x = (x(i)) \in X : \text{το } x \text{ διαφέρει από το } x^0 \text{ σε ένα το πολύ πεπερασμένο σύνολο δεικτών}\}.$$

Τότε το  $D$  είναι πυκνό στον  $X$ .

**23.** Έστω  $I$  ένα άπειρο σύνολο,  $\{X_i : i \in I\}$  οικογένεια τοπολογικών χώρων, και  $X = \prod_{i \in I} X_i$  ο χώρος γινόμενο. Αν, για κάθε  $i \in I$ , ο  $X_i$  έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, αποδείξτε ότι η τοπολογία του  $X$  δεν είναι η διακριτή.

**24.** Έστω  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  ακολουθία τοπολογικών χώρων και  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  ο χώρος γινόμενο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν, για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , ο  $X_n$  είναι 1ος αριθμήσιμος, τότε ο  $X$  είναι 1ος αριθμήσιμος.

(β) Αν, για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , ο  $X_n$  είναι 2ος αριθμήσιμος, τότε ο  $X$  είναι 2ος αριθμήσιμος.

(γ) Αν, για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , ο  $X_n$  είναι διαχωρίσιμος, τότε ο  $X$  είναι διαχωρίσιμος.

**25.** Θεωρούμε το σύνολο  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  των πραγματικών ακολουθιών ως τοπολογικό χώρο με την τοπολογία  $\mathcal{T}_{\text{box}}$ , δηλαδή την τοπολογία που έχει ως βάση την κλάση

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n : U_n \subseteq \mathbb{R} \text{ ανοιχτό για κάθε } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Ο  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_{\text{box}})$  δεν είναι 1ος αριθμήσιμος, άρα ούτε μετριοποιήσιμος.

(β) Η απεικόνιση  $f : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_{\text{box}})$  με  $f(t) = (t, t, \dots, t, \dots)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , δεν είναι συνεχής.

**26.** Έστω  $\Gamma$  ένα μη κενό σύνολο. Στον διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^\Gamma$  των συναρτήσεων από το  $\Gamma$  στο  $\mathbb{R}$ , θεωρούμε την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης  $\mathcal{T}_u$ , δηλαδή την τοπολογία που έχει ως βάση την κλάση  $\mathcal{B}_u$  των συνόλων της μορφής

$$V_{f,\varepsilon} = \left\{ g \in \mathbb{R}^\Gamma : \sup_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma) - g(\gamma)| < \varepsilon \right\}, \text{ όπου } f \in \mathbb{R}^\Gamma, \varepsilon > 0.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

- (α) Η κλάση  $\mathcal{B}_u$  είναι πράγματι βάση για κάποια τοπολογία.
- (β) Ο χώρος  $(\mathbb{R}^\Gamma, \mathcal{T}_u)$  είναι μετριοποιήσιμος και μια μετρική η οποία επάγει την  $\mathcal{T}_u$  είναι η  $d$  με  $d(f, g) = \sup \left\{ \min\{1, |f(\gamma) - g(\gamma)|\} : \gamma \in \Gamma \right\}$ , για κάθε  $f, g \in \mathbb{R}^\Gamma$ .
- (γ) Μια ακολουθία  $(f_n)$  στον  $\mathbb{R}^\Gamma$  συγκλίνει σε μια  $f \in \mathbb{R}^\Gamma$  ως προς την  $\mathcal{T}_u$  αν και μόνο αν η  $(f_n)$  συγκλίνει στην  $f$  ομοιόμορφα στο  $\Gamma$ .
- (δ) Η τοπολογία γινόμενο  $\mathcal{T}$  στον  $\mathbb{R}^\Gamma$  είναι ασθενέστερη της  $\mathcal{T}_u$  (δηλαδή  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_u$ ) και, αν το  $\Gamma$  είναι άπειρο σύνολο, τότε  $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_u$ .

**27.** Στον διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$  των πραγματικών ακολουθιών, θεωρούμε την τοπολογία γινόμενο  $\mathcal{T}$ , την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης  $\mathcal{T}_u$  και την box τοπολογία  $\mathcal{T}_{\text{box}}$ .

- (α) Να συγκρίνετε μεταξύ τους αυτές τις τοπολογίες.
- (β) Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\mathbb{N}$  με

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \dots), \quad g(t) = (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \dots), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Σε ποιες από τις παραπάνω τοπολογίες είναι καθεμιά από τις συναρτήσεις  $f, g$  συνεχής;

**28.** Συμβολίζουμε με  $c_{00}$  το υποσύνολο του  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$  που αποτελείται από τις τελικά μηδενικές ακολουθίες, δηλαδή

$$c_{00} = \{(x_k) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \forall k \geq n \ x_k = 0\}.$$

Βρείτε την κλειστή θήκη του  $c_{00}$  σε καθέναν από τους τοπολογικούς χώρους  $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \mathcal{T})$ ,  $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \mathcal{T}_u)$  και  $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\text{box}})$ .