

Θεωρία Πιθανοτήτων. Ασκήσεις III

1. Άσκηση 14.2 από τις σημειώσεις των Πιθανοτήτων II.

2. Έστω ϕ χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ναδειχθεί ότι

$$|\phi(t+h) - \phi(t)|^2 \leq 2(1 - \operatorname{Re}\{\phi(h)\})$$

για κάθε $t, h \in \mathbb{R}$.

3. Έστω $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο \mathbb{R} . Η χαρακτηριστική συνάρτηση της X_1 είναι

$$\phi(t) = \left(1 - \sqrt{|t|(2 - |t|)}\right) \mathbf{1}_{t \in [-1,1]}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Βρείτε κατάλληλη σταθερά $a > 0$ ώστε η ακολουθία $(S_n/n^a)_{n \in \mathbb{N}^+}$ να συγκλίνει κατά κατανομή σε μια μη τετριμμένη τυχαία μεταβλητή Y και προσδιορίστε την Y .

[Ως συνήθως, $S_n := X_1 + \dots + X_n$.]

4. Η 3.4.13 του Durrett.

5. Στο Παράδειγμα 2.2.7 του Durrett (συλλέκτης κουπονιών) θέτουμε $k(n) := [\lambda \sqrt{n}]$, όπου $\lambda > 0$ σταθερά. Ναδειχθεί ότι

$$\tau_{k(n)}^n - k(n) \Rightarrow \text{Poisson}(\lambda^2/2)$$

καθώς $n \rightarrow \infty$.