Λογισμός Malliavin και το θεώρημα Hörmander

Διπλωματική Εργασία στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Κωνσταντίνος Ντέτσικας

Επιβλέπων καθηγητής: Δημήτρης Χελιώτης

Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ
Αθήνα 2021

Περίληψη

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία παρουσιάζουμε τα βασικά στοιχεία του λεγόμενου στοχαστικού λογισμού μεταβολών, ή λογισμού Malliavin, που ξεκίνησε στα τέλη της δεκαετίας του 70 από τον Paul Malliavin, ο οποίος είχε σκοπό να προσεγγίσει με πιθανοθεωρητικό τρόπο το θεώρημα του Hörmander για την υποελλειπτικότητα διαφορικών τελεστών δεύτερης τάξης.

Ξεκινάμε με τις ιδιότητες των αφηρημένων χώρων Wiener, καθώς και του αντίστοιχου χώρου Cameron-Martin και εξάγουμε μία σχέση ολοκλήρωσης κατά μέρη σε αφηρημένους χώρους Wiener.

Στη συνέχεια, αναπτύσουμε τα βασικά στοιχεία του λογισμού Malliavin, ορίζουμε κατάλληλους χώρους Sobolev και αποδεικνύουμε τον τύπο των Clark-Ocone.

Έπειτα, μελετάμε την ομαλότητα κατανομών κατάλληλων τυχαίων μεταβλητών. Εφαρμόζουμε αυτά τα αποτελέσματα ομαλότητας σε στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, όπου δείχνουμε ένα πιθανοθεωρητικό ανάλογο του θεωρήματος ελλειπτικής ομαλότητας, καθώς και ένα θεώρημα ομαλότητας κάτω από τη συνθήκη του Hörmander.

Στο υπόλοιπο της εργασίας στρέφουμε την προσοχή μας σε κανονικές προσεγγίζεις και πιο ειδικά στη σύνδεση μεταξύ της μεθόδου του Stein για κανονικές προσεγγίσεις και του λογισμού Malliavin. Χρησιμοποιούμε αυτή τη σύνδεση για να αποδείξουμε το θεώρημα τέταρτης ροπής των Nualart και Peccati καθώς και για κάποιες επεκτάσεις του. Τέλος, εκμεταλευόμαστε αυτά τα θεωρήματα τέταρτης ροπής για να δώσουμε μία σύντομη απόδειξη του θεωρήματος Breuer-Major.

Abstract

In this thesis we present the basic ingredients of the so called stochastic calculus of variations or Malliavin calculus, initiated during the late 70s by Paul Malliavin, with the aim of approaching Hörmander's theorem on second-order hypoelliptic differential operators in a probabilistic way.

We begin with abstract Wiener spaces, study some of their properties and the associated Cameron-Martin space. We also derive an integration by parts formula on abstract Wiener spaces.

Next, we develop the basic ingredients of the Malliavin calculus, define some appropriate Sobolev spaces and prove the Clark-Ocone formula.

Then we begin the study of regularity of distributions of certain random variables. These regularity results are then applied to stochastic differential equations, where we prove a probabilistic counterpart of the elliptic regularity theorem as well as a regularity theorem under Hörmander's bracket condition.

In the sequel, we turn our attention to normal approximations and especially study the connection between Stein's method for normal approximations and Malliavin calculus. We use this link to prove the fourth moment theorem of Nualart and Peccati and give some extensions. Finally, we take advantage of the fourth moment theorems that have been developed, to give a short proof of the Breuer-Major theorem.

Ευχαριστίες

Με αυτή τη διπλωματική εργασία ολοκληρώνονται οι σπουδές μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα θεωρητικών μαθηματικών του τμήματος μαθηματικών του ΕΚΠΑ.

Θα ήθελα σε αυτό το σημείο να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Δημήτρη Χελιώτη που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με το θέμα της εργασίας, καθώς και για τη βοήθεια που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της συγγραφής της. Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές Αθανάσιο Ν.Γιαννακόπουλο και Μιχαήλ Λουλάκη που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή.

Ένα ευχαριστώ οφείλω και στον καθηγητή Ιάκωβο Ανδρουλιδάκη, από τον οποίο άκουσα για πρώτη φορά για το θεώρημα του Hörmander στο μάθημά του για ψευδοδιαφορικούς τελεστές.

Εν κατακλείδι, ευχαριστώ τους γονείς μου για την στήριξή τους και την πίστη τους σε μένα όλα αυτά τα χρόνια, τη Γεωργία Δαούτη που ήταν δίπλα μου στα χρόνια των μεταπτυχιακών σπουδών μου και τη γραμματέα του τμήματος μαθηματικών Άλκηστις Νταή για την υπομονή της και τις κατατοπιστικές οδηγίες της.

Κωνσταντίνος Ντέτσικας
Αθήνα, Απρίλιος 2021

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

Εισαγωγή

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο θέλουμε να κάνουμε μία σύντομη συζήτηση για το τρόπο που αναπτύχθηκε ο λογισμός Malliavin από τον Paul Malliavin στα τέλη της δεκαετίας του 1970. Συγκεκριμένα θέλουμε να εντοπίσουμε ένα πρόβλημα που υπήρχε το οποίο χρειαζόταν κάποια καινούργια ιδέα για να ξεπεραστεί, και να σκιαγραφήσουμε κάποια από τα αρχικά επιχειρήματα του Malliavin.

0.1 Το πρόβλημα υποελλειπτικότητας

Θεωρούμε $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, όπου α είναι πολυδείκτης. Ένα γενικό πρόβλημα στις μερικές διαφορικές εξισώσεις που δεν εξαρτάται άμεσα από τον τύπο της εξίσωσης (ελλειπτική, υπερβολική, παραβολική κλπ) είναι το πρόβλημα υποελλειπτικότητας. Πρώτα όμως ας δούμε τον ορισμό του υποελλειπτικού διαφορικού τελεστή.

Ορισμός 0.1.1. Ένας διαφορικός τελεστής L με $C^\infty(U)$ συντελεστές λέγεται υποελλειπτικός στο U αν για κάθε ανοικτό σύνολο $U' \subset U$ και κάθε κατανομή $u \in \mathcal{D}'(U')$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$Lu \in C^\infty(U') \implies u \in C^\infty(U'). \tag{1}$$

Οι γραμμικοί διαφορικοί τελεστές με σταθερούς μιγαδικούς τελεστές, οι οποίοι είναι υποελλειπτικοί, χαρακτηρίζονται από το ακόλουθο θεώρημα του Hörmander

Θεώρημα 0.1.1. *Έστω $L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial_x^\alpha$ όπου $m \in \mathbb{N}$ και $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Έστω επίσης $p(\xi)$ το πολυώνυμο που ορίζεται από τη σχέση*

$$\mathscr{F}(Lu)(\xi) = p(\xi)\mathscr{F}(u)(\xi), \tag{2}$$

όπου $\mathscr{F}$ είναι ο τελεστής του μετασχηματισμού Fourier. Τότε ο L είναι υποελλειπτικός αν και μόνο αν

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \frac{|\nabla p(\xi)|}{|p(\xi)|} = 0. \tag{3}$$

Από αυτό το θεώρημα μπορεί κανείς να δεί ότι οι εξισώσεις Laplace, Cauchy-Riemann και θερμότητας είναι υποελλειπτικές, ενώ οι εξισώσεις κύματος και Schrödinger δεν είναι.

Η περίπτωση των διαφορικών τελεστών με μή σταθερούς συντελεστές είναι αρκετά πιο δύσκολη και δεν έχει βρεθεί κάποιο θεώρημα, όπως το παραπάνω, που να χαρακτηρίζει πλήρως τους γραμμικούς υποελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές με μεταβλητούς συντελεστές. Ένα θετικό αποτέλεσμα προς αυτή τη κατεύθυνση είναι το διάσημο θεώρημα ελλειπτικής ομαλότητας (elliptic regularity theorem)

Ορισμός 0.1.2. Ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής τάξης $m \in \mathbb{N}$

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$$

λέγεται ελλειπτικός αν το πρωτεύον σύμβολο $p_0(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ μηδενίζεται μόνο στο $\xi = 0$.

Θεώρημα 0.1.2 (Ελλειπτικής ομαλότητας)**.** *Κάθε ελλειπτικός διαφορικός τελεστής με C^∞ συντελεστές είναι υποελλειπτικός.*

Όμως οι ελλειπτικοί διαφορικοί τελεστές δεν είναι οι μόνοι υποελλειπτικοί διαφορικοί τελεστές. Η υπάρχουσα θεωρία που υπήρχε στις αρχές τις δεκαετίας του 1960 δεν μπορούσε να εξηγήσει την υποελλειπτικότητα ορισμένων σημαντικών διαφορικών τελεστών, όπως για παράδειγμα του τελεστή Kolmogorov

$$K = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}. \tag{4}$$

Ο ίδιος ο Kolmogorov υπολόγισε σε κλειστή μορφή τη θεμελιώδη λύση του παραπάνω τελεστή, η οποία είναι C^∞ σε κάθε σημείο διαφορετικό από την διαγώνιο, οπότε ο K είναι υποελλειπτικός.

Σύνδεση με τις πιθανότητες. Θεωρούμε τώρα $d, m \in \mathbb{N}$ και $A, V_1, \ldots, V_d : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ λείες συναρτήσεις με φραγμένες μερικές παραγώγους κάθε τάξης. Θεωρούμε επίσης και τον διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης

$$L = \sum_{k=1}^m A^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^m a_{k\ell}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_\ell}, \tag{5}$$

όπου $a = VV^T$ και $V = \left(V_j^i\right)_{i,j=1}^{m,d}$ και $A = (A^i)_{i=1}^m$. Τότε ο L είναι ο γεννήτορας της ανέλιξης $X^x = \{X_t^x\}_{t\geq 0}$ που ορίζεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{cases} dX_t^x = A(X_t^x)dt + V(X_t^x)dB_t \\ X_0^x = x \end{cases} \tag{6}$$

όπου B είναι τυπική $d-$διάστατη κίνηση Brown που ορίζεται σε κάποιον χωρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Μπορείτε να σκέφτεστε το εξής. Μία συνήθης διαφορική εξίσωση μετατρέπει ευθείες σε ολοκληρωτικές καμπύλες του εκάστοτε πεδίου και μία στοχαστική διαφορική εξίσωση μετατρέπει μονοπάτια της κίνησης Brown σε άλλες διαχύσεις X^x.

Από τη δουλεία του Itô είναι γνωστό πως η X^x είναι μία χρονικά ομογενής στοχαστική ανέλιξη Markov, που έχει συνεχή μονοπάτια με πιθανότητα 1 και πιθανότητες μετάβασης

$$p(t, x, B) = \mathbb{P}(X_t^x \in B) \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m). \tag{7}$$

Το $p(t,x,dy)$ είναι δηλαδή το μέτρο εικόνα του μέτρου Wiener μ_w μέσω της απεικόνισης X_t^x. Η X^x ονομάζεται επίσης $L-$διάχυση ή στοχαστική ροή του L καθώς η συνάρτηση

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left[f(X_t^x)\right] = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)p(t,x,dy) \tag{8}$$

αποτελεί την μοναδική κλασική λύση του προβλήματος Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = Lu(t,x) & (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^m \\ u(0,x) = f(x) & x \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{9}$$

αν $u \in C^{1,2}((0,\infty)\times\mathbb{R}^m)$ (για περισσότερα δείτε στο [32]).

Αναπαράσταση Feynman-Kac. Έστω λ θετικός πραγματικός αριθμός. Υπό κατάλληλες συνθήκες, η λύση του προβλήματος Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = Lu(t,x) - \lambda u(t,x) & (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^m \\ u(0,x) = f(x) & x \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{10}$$

γράφεται στην μορφή

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda t} f(X_t^x)\right] = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\lambda t} f(y)p(t,x,dy). \tag{11}$$

Εξίσωση Fokker-Planck. Από τα παραπάνω βλέπουμε πως προκύπτει φυσιολογικά το ερώτημα ύπαρξης και ομαλότητας πυκνότητας για το μέτρο πιθανότητας $p(t,x,dy)$ ως προς το $m-$διάστατο μέτρο Lebesgue.

Αυτό το ερώτημα μεταφέρεται στην περιοχή των μερικών διαφορικών εξισώσεων, καθώς η p αποτελεί λύση με την έννοια των κατανομών, της ακόλουθης εξίσωσης Fokker-Planck

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x,y) = L_y^* p(t,x,y) \tag{12}$$

$$\lim_{t\to 0} p(t,x,y) = \delta(y-x), \tag{13}$$

όπου ο L_y^* είναι ο συζυγής του L και δρά ως

$$L_y^*\phi(y) = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_\ell}\left(a_{k\ell}(y)\phi(y)\right) - \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(A^k(y)\phi(y)\right). \tag{14}$$

Θεώρημα Hörmander. Θεωρούμε τη λεία συνάρτηση

$$V_0 = A - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \partial V_j \cdot V_j \tag{15}$$

όπου ∂V_j είναι ο πίνακας Jacobi της V_j και ο παραπάνω πολλαπλασιασμός είναι πολλαπλασιασμός πινάκων.

Μία σημαντική παρατήρηση είναι η εξής. Αν θεωρήσουμε τα λεία διανύσματικά πεδία $\tilde{V}_0, \tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_d$ που δίνονται ως

$$\tilde{V}_j = \sum_{i=1}^{m} V_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{16}$$

τότε ο διαφορικός τελεστής (5) γράφεται στη λεγόμενη μορφή Hörmander ως

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \tilde{V}_j^2 + \tilde{V}_0. \tag{17}$$

Η σημασία αυτής της γραφής γίνεται φανερή από το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα που απέδειξε ο βραβευμένος με το Fields medal Lars Hörmander στην εργασία του [24].

Θεώρημα 0.1.3 (Hörmander, 1967)**.** *Έστω $\tilde{V}_0, \tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_d$ λεία διανυσματικά πεδία στον $\mathbb{R}^m$ που έχουν φραγμένες μερικές παραγώγους κάθε τάξης. Αν $\dim \mathscr{L}(x) = m$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$, όπου $\mathscr{L}(x)$ είναι η άλγεβρα Lie $\mathscr{L}(x) = \mathrm{Lie}\left(\tilde{V}_0, \tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_d\right)(x)$ τότε ο τελεστής (17) είναι υποελλειπτικός.*

Βλέπουμε λοιπόν πως αν ο (5) ικανοποιεί το θεώρημα του Hörmander τότε η πιθανότητα μετάβασης $p(t, x, dy)$ έχει πυκνότητα ως προς το $m-$διάστατο μέτρο Lebesgue που είναι λεία ως προς (t, y).

0.2 Η κατάσταση πριν τον Malliavin

Παρ'όλο που το θεώρημα του Hörmander είχε δώσει μία ικανοποιητική απάντηση στα παραπάνω, οι μαθηματικοί της εποχής ένιωθαν μία αμηχανία, καθώς έπρεπε συχνά να χρησιμοποιούν ένα ισχυρό αποτέλεσμα της θεωρίας των μερικών διαφορικών εξισώσεων (το θεώρημα Hörmander) για να αποδεικνύουν πως η πιθανότητα μετάβασης $p(t, x, dy)$ έχει λεία πυκνότητα . Εξ' άλλου, η αποδείξη που έδωσε ο Hörmander το 1967 είχε σχεδόν αποκλειστικά μεθόδους συναρτησιακής ανάλυσης και ήταν περίπλοκη, ενώ η απόδειξη που έδωσε αργότερα ο Kohn είχε ως κρίσιμο εργαλείο τους ψευδοδιαφορικούς τελεστές.

Ας δούμε ένα παράδειγμα που θα κάνει σαφές πως ένας πιθανοθεωρητικός τρόπος προσέγγισης του θεωρήματος Hörmander ενέχει δυσκολίες.

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με λεία πυκνότητα p και $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση με παράγωγο που δεν μηδενίζεται πουθενά και απειρίζεται στο άπειρο. Θέλουμε να δείξουμε πως η τυχαία μεταβλητή $Y = F(X)$ έχει πυκνότητα ως προς το μέτρο Lebesgue. Για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ γράφουμε

$$\mathbb{E}\left[\phi'(Y)\right] = \int_{\mathbb{R}} \phi'(F(x)) p(x) dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi(F(x)) p'(x) dx \tag{18}$$

και με την αντικατάσταση $t = F(x)$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\phi'(Y)\right] = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) R p(t) dt, \tag{19}$$

όπου ο τελεστής R δρά στην p ως $Rp = -\dfrac{p' \circ F^{-1}}{F' \circ F^{-1}}$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το παραπάνω επιχείρημα, παίρνουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι

$$\left|\mathbb{E}\left[\phi^{(k)}(Y)\right]\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} \phi(t) R^k p(t) dt\right| \le \|\phi\|_\infty \|R^k p\|_{L^1(\mathbb{R})}, \tag{20}$$

όπου $R^k = R \circ \cdots \circ R$ k φορές. Από αυτό έπεται, όπως και στο Λήμμα 3.1.2 της εργασίας, ότι η Y έχει πυκνότητα ως προς το μέτρο Lebesgue και μάλιστα θα είναι και λεία. Παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση που οι X, Y έχουν τιμές σε κάποιον $\mathbb{R}^n$.

Αν μπορούσαμε να εφαρμόσουμε αυτή την τεχνική για τη λύση X_t^x της εξίσωσης (6) τότε θα είχαμε μια ευκαιρία να δείξουμε το θεώρημα Hörmander με πιθανοθεωρητικό τρόπο. Όμως αν $\mathcal{W}$ είναι ο χώρος Wiener, η απεικόνιση $X_t^x : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^m$ με $B \to X_t^x(B)$ δεν είναι αρκετά ομαλή για να μπορέσουμε να κάνουμε την ολοκλήρωση κατά μέρη που χρειάζεται. Μάλιστα η X_t^x ορίζεται μόνο με πιθανότητα 1 ως προς το μέτρο Wiener οπότε η κλασική θεωρία διαφόρισης δεν είναι αρκετή για αυτό το σκοπό.

Συναρτησιακή ολοκλήρωση. Θεωρούμε ξανά τον χώρο Wiener $\mathcal{W}$ καθώς και το μέτρο Wiener μ_w στον $\mathcal{W}$. Τότε η σχέση (8) μπορεί να γραφεί ως

$$u(t,x) = \int_{\mathcal{W}} f\left(X_t^x(B)\right) \mu_w(dB), \tag{21}$$

όπου $B \in \mathcal{W}$. Παρατηρήστε πως η παραπάνω σχέση αποτελεί συναρτησιακή ολοκλήρωση. Αν θέλουμε να εκμεταλευτούμε την παραπάνω τεχνική, θα πρέπει με κάποιο τρόπο να γίνει μία ολοκλήρωση κατά μέρη στον χώρο Wiener $\mathcal{W}$.

Η ολοκλήρωση κατά μέρη στη συναρτησιακή ολοκλήρωση είναι κάτι που χρησιμοποιούν οι φυσικοί από την εποχή που ο Feynman εισήγαγε το ομώνυμο ολοκλήρωμα τροχιάς. Για παράδειγμα, στην Ευκλείδεια κβαντική θεωρία πεδίου, χρειάζεται να εφοδιάσουμε κάποιον κατάλληλο χώρο συναρτήσεων με ένα μέτρο μ της μορφής

$$\mu(d\phi) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla\phi(x)|^2 + m^2\phi^2(x)dx\right) \mathcal{D}\phi, \tag{22}$$

όπου το $\mathcal{D}\phi$ παριστάνει κάποιο ανάλογο του μέτρου Lebesgue σε άπειρες διαστάσεις, το οποίο όμως θα δούμε ότι δεν υπάρχει στο Θεώρημα 1.2.1.

Αφηρημένοι χώροι Wiener. Από τη δουλειά των Cameron-Martin είχε ήδη ξεκινήσει η ανάλυση στον χώρο Wiener, και με κίνητρο τα παραπάνω ο Leonard Gross ανέπτυξε μία θεωρία αφηρημένων χώρων Wiener, τα βασικά στοιχεία της οποίας θα παρουσιάσουμε στο πρώτο κεφάλαιο αυτής της εργασίας.

0.3 Το πρόγραμμα του Malliavin

Ο Paul Malliavin κατάλαβε πως χρειαζόμαστε κάποια σχέση ολοκλήρωσης κατά μέρη για συναρτήσεις που δεν είναι διαφορίσιμες με τη κλασική έννοια.

Σκέφτηκε πως ίσως η απεικόνιση $B \to X_t^x(B)$ να είναι ασθενώς λεία. Εξ' άλλου, στον χώρο Wiener $\mathcal{W}$ δεν ισχύει κάποιο θεώρημα εμβάπτισης Sobolev οπότε είναι δυνατόν μία συνάρτηση που είναι ασθενώς λεία να μην είναι καν συνεχής με τη κλασική έννοια.

Για να μετρήσει τάξεις ομαλότητας, ο Paul Malliavin χρησιμοποίησε ένα αντικείμενο από την κβαντομηχανική και συγκεκριμένα τον λεγόμενο τελεστή αριθμού (number operator) $\mathcal{N}$, γνωστός στους πιθανοθεωρητικούς και ως τελεστής Ornstein-Uhlenbeck (στην παρούσα εργασία ο τελεστής Ornstein-Uhlenbeck που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ο $-\mathcal{N}$).

Ο $\mathcal{N}$ είναι αυτοσυζυγής και ορίζει μία συμμετρική και μη αρνητική διγραμμική μορφή μέσω της σχέσης

$$\langle F, G\rangle = \mathcal{N}(FG) - F\mathcal{N}G - G\mathcal{N}F, \tag{23}$$

όπου F, G είναι κατάλληλες συναρτήσεις στον $L^2(\mathcal{W})$ (παρατηρήστε πως επειδή οι F, G δέχονται ορίσματα από τον $\mathcal{W}$, μπορούμε να τις βλέπουμε ως συναρτησοειδή). Αυτή η μορφή ικανοποιεί την εξίσωση

$$\langle \phi \circ F, G\rangle = \phi' \circ F \langle F, G\rangle \quad \text{για κάθε } \phi \in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \tag{24}$$

Για $G = F$ έχουμε ότι

$$\phi' \circ F \langle F, F\rangle = \langle \phi \circ F, F\rangle = \mathcal{N}(F\phi \circ F) - \phi \circ F\mathcal{N}F - F\mathcal{N}(\phi \circ F) \tag{25}$$

και αν $\langle F, F\rangle > 0$ τότε

$$\phi' \circ F = \frac{\mathcal{N}(F\phi \circ F)}{\langle F, F\rangle} - \frac{\phi \circ F\mathcal{N}F}{\langle F, F\rangle} - \frac{F\mathcal{N}(\phi \circ F)}{\langle F, F\rangle}. \tag{26}$$

Επειδή ο $\mathcal{N}$ είναι αυτοσυζυγής, έχουμε τελικά

$$\int_{\mathcal{W}} \phi' \circ F d\mu_w = \int_{\mathcal{W}} \phi \circ F \left\{ F\mathcal{N}\left(\frac{1}{\langle F, F\rangle}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{F}{\langle F, F\rangle}\right) - \frac{\mathcal{N}F}{\langle F, F\rangle} \right\} d\mu_w. \tag{27}$$

Βλέπουμε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι μία εξίσωση ολοκλήρωσης κατά μέρη στον $\mathcal{W}$ στην οποία δεν υποθέτουμε ότι η F είναι διαφορίσιμη με την κλασική έννοια. Για να δούμε τη σημασία αυτής της εξίσωσης, θεωρούμε ξ_t^x τη λύση της μονοδιάστατης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης Itô $d\xi_t^x = b(\xi_t^x)dt + \sigma(\xi_t^x)dB_t$. Τότε, αν $F = \xi_t^x$ στην παραπάνω εξίσωση και η έκφραση στις αγκύλες είναι ολοκληρώσιμη, τότε μπορούμε να πάρουμε μία ανισότητα της μορφής (20) που είδαμε πιο πάνω. Κι εδώ ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν στην περίπτωση που οι απεικονίσεις παίρνουν τιμές σε κάποιον $\mathbb{R}^m$.

Για να συμπληρωθεί το πρόγραμμα του Malliavin πρέπει κανείς να δείξει πως κάτω από τη συνθήκη του Hörmander η λύση X_t^x της εξίσωσης (6) είναι στο πεδίο ορισμού του $\mathcal{N}$ και ότι η $\langle X_t^x, X_t^x\rangle^{-1}$ ορίζεται καλά και έχει καλές ιδιότητες ολοκληρωσιμότητας.

Τελικά η περιγραφή αυτών των χώρων Sobolev δεν είναι εύκολο να γίνει μέσω του $\mathcal{N}$, όμως χάρη σε ορισμένα ισχυρά αποτελέσματα του P.A.Meyer, αυτοί οι χώροι μπορούν να περιγραφούν ισοδύναμα χρησιμοποιώντας τον τελεστή παραγώγισης Malliavin D. Σε αυτή την προσέγγιση συνέβαλαν και άλλοι μαθηματικοί όπως ο D.W.Stroock και οι Ιάπωνες S.Watanabe και H.Sugita.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αυτής της εργασίας θα παρουσιάσουμε τον λογισμό Malliavin κυρίως μέσω του τελεστή παραγώγισης Malliavin D και του συζυγή του δ.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα δούμε πως το πρόγραμμα του Malliavin μπορεί πράγματι να ολοκληρωθεί και να αποδείξει το θεώρημα Hörmander, όπως ήθελε αρχικά.

Για όλα αυτά θα βασιστούμε κυρίως στις αναφορές [19, 29, 39, 40, 45].

Μία παρατήρηση στο πρόγραμμα του Malliavin. Θυμηθείτε πως το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε, δηλαδή να δείξουμε ένα αποτέλεσμα ομαλότητας για εξισώσεις όπως οι (9) και (6), είναι από τη φύση του πεπερασμένης διάστασης. Το πρόγραμμα του Malliavin είναι να πάρει το πρόβλημα, να το σηκώσει σε άπειρες διαστάσεις, να εφαρμοσθεί εκεί ο λογισμός Malliavin και μετά να κατέβουμε στο αρχικό πρόβλημα και να πάρουμε τη λύση του.

0.4 Κανονικές προσεγγίσεις

Ξεκινάμε με μία τυπική κίνηση Brown $(B_t)_{t\geq 0}$ στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \sigma(B), \mathbb{P})$ όπου $\sigma(B) = \sigma(B_t : t \geq 0)$. Σε ορισμένα προβλήματα στοχαστικής γεωμετρίας, χρειάζεται να μελετήσουμε την ασυμπτοτική συμπεριφορά μίας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών $(Y_n)_{n\geq 1} \subset L^2(\Omega, \sigma(B), \mathbb{P})$. Το θεώρημα διάσπασης σε χάος Wiener 2.1.4 μας λέει ότι

$$L^2(\Omega, \sigma(B), \mathbb{P}) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathscr{H}_q^B,$$

όπου $\mathscr{H}_q^B$ είναι κατάλληλοι υπόχωροι του $L^2(\Omega, \sigma(B), \mathbb{P})$. Κατά συνέπεια κάθε τυχαία μεταβλητή Y_n γράφεται ως

$$Y_n = \sum_{q=0}^{\infty} F_{n,q},$$

όπου $F_{n,q} \in \mathscr{H}_q^B$, που είναι η προβολή της Y_n στον υπόχωρο $\mathscr{H}_q^B$. Η ιδέα είναι να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά για $n \to \infty$ της $F_{n,q}$ και μετά με κάποιο τρόπο να πάρουμε πληροφορία για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της ακολουθίας $(Y_n)_{n\geq 1}$.

Στην περίπτωση που το ερώτημα ασυμπτωτικής συμπεριφοράς, είναι η σύγκλιση κατά κατανομή σε κανονική τυχαία μεταβλητή, ένα σημαντικό αποτέλεσμα προς αυτή τη κατεύθυνση ήρθε το 2005 από τους D.Nualart και G.Peccati, στην εργασία [42] με το λεγόμενο θεώρημα τέταρτης ροπής, το οποίο απλουστεύει σε μεγάλο βαθμό τη μέθοδο των ροπών, για ακολυθίες τυχαίων μεταβλητών που ανήκουν σε κάποιο σταθερό χάος Wiener.

Θεώρημα 0.4.1. *Έστω $q \geq 2$ ακέραιος αριθμός και ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(F_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{H}_q^B$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[F_n^2\right] = \sigma^2.$$

Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $F_n \to N(0, \sigma^2)$ *κατά κατανομή καθώς* $n \to \infty$.

(ii) $\mathbb{E}[F_n^4] \to 3\sigma^4$ *καθώς* $n \to \infty$.

Σε αυτή την εργασία, μπορείτε να βρείτε την πλήρη διατύπωση του παραπάνω θεωρήματος, και την απόδειξη, στο Θεώρημα 4.3.5.

Η αρχική απόδειξη του θεωρήματος τέταρτης ροπής βασιζόταν στο θεώρημα Dambis-Dubins-Schwarz. Αυτό γενικεύτηκε από τους G.Peccati και C.Tudor σε πολυδιάστατο πλαίσιο στο Θεώρημα 4.3.6.

Ο ρόλος του λογισμού Malliavin. Το 2009 οι I.Nourdin και G.Peccati ανακάλυψαν μία σύνδεση μεταξύ της μεθόδου του C.Stein για κανονικές προσεγγίσεις και του λογισμού Malliavin. Αυτή η σύνδεση αναπτύχθηκε περαιτέρω και οδήγησε σε καινούργιες αποδείξεις για τα θεωρήματα τέταρτης ροπής που αναφέραμε.

Αυτά θα μας απασχολήσουν στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας, όπου θα δούμε κανονικές προσεγγίσεις. Για την παρουσίαση βασιζόμαστε κατά κύριο λόγο στις αναφορές [36, 37, 40].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Γκαουσιανή ανάλυση

1.1 Γκαουσιανή Ανάλυση σε μία διάσταση

Έστω Z μία τυχαία μεταβλητή που έχει τη κατανομή $N(0,1)$ και έστω γ αυτή η κατανομή. Γνωρίζουμε ότι το γ είναι μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ που έχει πυκνότητα $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$. Το μέτρο γ δίνει σε κάθε διάστημα $[a,b]$ πιθανότητα ίση με

$$\gamma([a,b]) = \int_a^b p(x)dx.$$

Θεωρούμε επίσης το χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R},\gamma)$ ο οποίος αποτελείται από μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(y)\gamma(dy) = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)p(x)dx < \infty.$$

Ορίζουμε τώρα δύο σημαντικούς τελεστές . Για $f \in C^1(\mathbb{R})$
Τελεστής παραγώγισης: $Df(x) = f'(x)$.
Τελεστής απόκλισης: $\delta f(x) = xf(x) - f'(x)$.

Με $C_p^k(\mathbb{R}^d)$ συμβολίζουμε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ οι οποίες έχουν συνεχείς παραγώγους μέχρι και k τάξης, οι οποίες έχουν επιπλέον, πολυωνυμική αύξηση (polynomial growth). Δηλαδή για κάθε $n \leq k$ υπάρχει $N \geq 1$ έτσι ώστε

$$|f^{(n)}(x)| \leq c(1 + |x|^N).$$

Λήμμα 1.1.1. *Οι τελεστές D, δ είναι συζυγείς με την ακόλουθη έννοια: Για κάθε $f, g \in C_p^1(\mathbb{R})$ ισχύει*

$$\langle Df, g\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = \langle f, \delta g\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)}.$$

Απόδειξη.

$$\langle Df, g\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = \int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x)p(x)dx = (f(x)g(x)p(x))|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)(g(x)p(x))'dx.$$

Η συνάρτηση $p(x)$ φθίνει πιο γρήγορα από κάθε πολυώνυμο οπότε $(f(x)g(x)p(x))|_{-\infty}^{\infty} = 0$. Επίσης η $p(x)$ ικανοποιεί την $p'(x) = -xp(x)$ οπότε

$$\langle Df, g\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)(g'(x) - xg(x))p(x)dx = \langle f, \delta g\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)}.$$

□

Λήμμα 1.1.2 (Σχέση μετάθεσης τύπου Heisenberg)**.** *Αν $f \in C^2(\mathbb{R})$ τότε $(D\delta - \delta D)f = f$.*

Απόδειξη.

$$D\delta f(x) = D(xf(x) - f'(x)) = f(x) + xf'(x) - f''(x) = f(x) + \delta Df(x)$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Το λήμμα αυτό γενικεύεται ως εξής

Λήμμα 1.1.3. *Αν $n \geq 2$ και $f \in C^n(\mathbb{R})$ τότε $(D\delta^n - \delta^n D)f = n\delta^{n-1}f$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$ έχουμε το ζητούμενο από το προηγούμενο λήμμα. Έστω τώρα ότι $n > 1$ και ότι

$$(D\delta^{n-1} - \delta^{n-1}Df) = (n-1)\delta^{n-2}f \quad (*)$$

Έχουμε

$$D\delta^n f = D\delta(\delta^{n-1}f) = \delta D(\delta^{n-1}f) + \delta^{n-1}f = \delta(D\delta^{n-1}f + \delta^{n-2}f)$$
$$\overset{(*)}{=\!=} \delta[\delta^{n-1}Df + (n-1)\delta^{n-2}f + \delta^{n-2}f] = \delta[\delta^{n-1}Df + n\delta^{n-2}f] = \delta^n Df + n\delta^{n-1}f$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Θα εισάγουμε τώρα τα πολυώνυμα Hermite H_n και θα ξεκινήσουμε να βλέπουμε ιδιότητές τους.

Ορισμός 1.1.1 (Πολυώνυμα Hermite)**.** Ορίζουμε $H_0(x) = 1$ και $H_n(x) = \delta^n 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για παράδειγμα, για $n = 1, 2, 3, 4$ έχουμε

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \delta 1 = x, \\ H_2(x) &= \delta x = x^2 - 1, \\ H_3(x) &= \delta(x^2 - 1) = x^3 - 3x, \\ H_4(x) &= \delta(x^3 - 3x) = x^4 - 6x^2 + 3. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τη γενικευμένη σχέση μετάθεσης (Λήμμα 1.1.3) και έχουμε

$$H_n'(x) = D\delta^n 1 = \delta^n D1 + n\delta^{n-1}1 = nH_{n-1}(x).$$

Ισχύει λοιπόν η χρήσιμη σχέση $H_n' = nH_{n-1}$.
Πριν δούμε περισσότερες ιδιότητες των πολυωνύμων Hermite, θα αποδείξουμε ότι με μία κατάλληλη σταθερά κανονικοποίησης, αυτά τα πολυώνυμα αποτελούν ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$. Το παραγοντικό $n!$ που θα εμφανιστεί έχει κατα κάποιο τρόπο ανάλογο ρόλο με το 2π που εμφανίζεται στην ανάλυση Fourier. Θα είναι χρήσιμο σε υπολογισμούς να θεωρούμε επίσης και τα ανηγμένα πολυώνυμα Hermite που ορίζονται ως

Ορισμός 1.1.2 (Ανηγμένα πολυώνυμα Hermite)**.** Ορίζουμε τα ανηγμένα πολυώνυμα Hermite $\tilde{H}_n$ ως

$$\tilde{H}_n = \frac{H_n}{n!}. \tag{1.1}$$

Για τα πολυώνυμα $H_n, \tilde{H}_n$ ισχύουν ανάλογα αποτελέσματα με κατάλληλη τροποποίηση.

Πρόταση 1.1.1. *Η ακολουθία* $\left\{\frac{1}{\sqrt{n!}}H_n : n \geq 0\right\}$ *αποτελεί ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert* $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$.

Απόδειξη. **Ισχυρισμός:** Για $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\langle H_n, H_m\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = n\langle H_{n-1}, H_{m-1}\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)}.$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}
\langle H_n, H_m\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = \int_{\mathbb{R}} H_n(x)H_m(x)p(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} H_n(x)\delta^m 1p(x)dx \\
&= \langle H_n, \delta^m 1\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} \\
&= \langle DH_n, \delta^{m-1} 1\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} H_n'(x)\delta^{m-1} 1p(x)dx \\
&= n\int_{\mathbb{R}} H_{n-1}(x)H_{m-1}(x)p(x)dx \\
&= n\langle H_{n-1}, H_{m-1}\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

οπότε ο ισχυρισμός αληθεύει.

Αν $n = m$ τότε

$$\langle H_n, H_n\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = n\langle H_{n-1}, H_{n-1}\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)}$$

και συνεχίζοντας με αυτό το τρόπο έπεται ότι

$$\langle H_n, H_n\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = n!\langle 1, 1\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = n!$$

δηλαδή $\int_{\mathbb{R}} H_n^2(x)p(x)dx = n!$.

Αν $n \neq m$ τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $m > n$ και έχουμε από τον ισχυρισμό ότι

$$\langle H_n, H_m\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = n!\langle 1, H_{m-n}\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = n!\langle 1, \delta^{m-n}1\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = n!\langle D1, \delta^{m-n-1}1\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = 0.$$

Συνολικά λοιπόν έχουμε τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\langle H_n, H_m\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = \begin{cases} n! & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι $L^2(\mathbb{R}, \gamma) = \overline{\text{span}}\left\{\frac{1}{\sqrt{n!}}H_n : n \in \mathbb{N}\right\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το μόνο διάνυσμα που είναι κάθετο σε όλα τα H_n είναι το μηδενικό. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε τη συνεπαγωγή

$$\text{Αν } f \in L^2(\mathbb{R}, \gamma) \text{ έτσι ώστε } \langle f, H_n\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = 0 \ \forall n \ \in \mathbb{N} \implies f = 0.$$

Έστω λοιπόν $f \in L^2(\mathbb{R},\gamma)$ με την ιδιότητα $\langle f, H_n\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = 0\ \forall n\ \in \mathbb{N}$. Βλέπουμε ότι απο αυτή την ιδιότητα έπεται ότι η f είναι κάθετη σε κάθε μονόνυμο x^n. Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης fp.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(fp)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)p(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^n x^n}{n!} f(x)p(x)dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)p(x)dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^n}{n!} \langle f, x^n\rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = 0.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Από το θεώρημα μοναδικότητας έπεται ότι $fp = 0$ άρα $f = 0$ και έχουμε το ζητούμενο. Παρατηρήστε ότι η εναλλαγή άθροισης και ολοκληρώματος επιτρέπεται αφού χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|-i\xi x|^n}{n!} |f(x)|p(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi x|^n}{n!} |f(x)|p(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{|\xi x|} |f(x)|p(x)dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x)p(x)dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2|\xi x|} p(x)dx\right)^{1/2} < \infty.\end{aligned} \tag{1.4}$$

□

Πρόταση 1.1.2 (Ανισότητα Poincare-Nash)**.** *Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f \in L^2(\mathbb{R},\gamma)$ τέτοια ώστε $f' \in L^2(\mathbb{R},\gamma)$, είναι*

$$\operatorname{Var}(f) \leq \|f'\|_{L^2(\mathbb{R},\gamma)}, \tag{1.5}$$

όπου $\operatorname{Var}(f) = \int_{\mathbb{R}} (f(x) - \overline{f})^2 \gamma(dx)$ *και* $\overline{f} = \int_{\mathbb{R}} f d\gamma$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε πως $(f-\overline{f})^2 \leq 2(f^2+\overline{f}^2)$ άρα $(f-\overline{f})^2 \in L^2(\mathbb{R},\gamma)$. Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα του Parseval και γράφουμε

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle f - \overline{f}, H_{n+1}\rangle^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle f - \overline{f}, \delta H_n\rangle^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle D(f - \overline{f}), H_n\rangle^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle f', H_n\rangle^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle f', H_n\rangle^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} \\ &= \|f'\|_{L^2(\mathbb{R},\gamma)}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

□

Πρόταση 1.1.3. *Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Hermite είναι η* $G(x,t) = \exp(tx - \frac{t^2}{2})$*. Δηλαδή*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{tx - \frac{t^2}{2}}.$$

Απόδειξη. Έστω $t \in \mathbb{R}$ τυχόν και έστω g η συνάρτηση $g(x) = e^{tx}$. Από την Πρόταση 1.1.1 και το γεγονός ότι ο δ^n είναι ο συζυγής του D^n έχουμε

$$\begin{aligned} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle g, H_n \rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} \frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle g, \delta^n 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} \frac{H_n(x)}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle D^n g, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} \frac{H_n(x)}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \langle g, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} H_n(x). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Όμως $\langle g, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = \int_{\mathbb{R}} g(x) p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{tx - x^2/2} dx$. Θέτουμε $\mu = t, \lambda = \frac{1}{2}$ στον παρακατω τύπο

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\mu x - \lambda x^2} dx = e^{\mu^2/4\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \lambda > 0$$

και έχουμε ότι $\langle g, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = e^{t^2/2}$. Τελικά λοιπόν

$$e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{t^2/2} H_n(x) \implies e^{tx - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x),$$

που είναι η ζητούμενη σχέση. □

Λήμμα 1.1.4. *Για κάθε ακέραιο* $n \geq 1$ *είναι* $(n+1)\tilde{H}_{n+1} = x\tilde{H}_n - \tilde{H}_{n-1}$.

Απόδειξη. Επειδή $\frac{\partial G}{\partial t} = (x-t)G(x,t)$, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n (n+1) \tilde{H}_{n+1}(x) = (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n \tilde{H}_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(t^n x \tilde{H}_n(x) - t^{n+1} \tilde{H}_n(x) \right) \tag{1.8}$$

και εξισώνοντας συντελεστές έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.1.4. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *είναι* $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$.

Απόδειξη. Επειδή $tx - \frac{t^2}{2} = x^2 - \frac{1}{2}(x-t)^2$ έχουμε

$$\begin{aligned} G(x,t) = \exp\left(x^2 - \frac{1}{2}(x-t)^2 \right) &= e^{x^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{d^n}{dt^n}\Big|_{t=0} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \right) \\ &= e^{x^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left((-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Αναφέρουμε εδώ ένα λήμμα που θα μας χρειαστεί αργότερα όταν θα δούμε την ορθογώνια διάσπαση σε χάος Wiener. Εκεί θα χρειαστεί να εισάγουμε Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές στα πολυώνυμα Hermite. Ας θεωρήσουμε X μία Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με πραγματικές τιμές, που ορίζεται σε κάποιον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Τότε $X \in L^r(\Omega)$ για κάθε $r \geq 1$ και από την ανισότητα Hölder έπεται ότι $p(X) \in L^r(\Omega)$ για κάθε $r \geq 1$.

Λήμμα 1.1.5. *Έστω X, Y τυπικές Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές , τέτοιες ώστε το διάνυσμα (X, Y) να είναι Γκαουσιανό. Τότε για κάθε φυσικούς αριθμούς $n, m \geq 0$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}[(H_n(X)H_m(Y)] = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \neq m \\ n!\ \mathbb{E}[XY]^n & \text{αν } n = m \end{cases}$$

Απόδειξη. Έστω $v = \mathbb{E}(XY)$. Η ροπογεννήτρια του διανύσματος (X, Y) δίνεται από τον τύπο

$$\mathbb{E}[e^{sX+tY}] = e^{\frac{1}{2}(s^2+t^2+2stv)}.$$

Συνεπώς

$$\mathbb{E}[e^{sX-\frac{s^2}{2}} e^{tY-\frac{t^2}{2}}] = e^{stv}.$$

Χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor και στα δύο μέλη, εξισώσουμε συντελεστές και έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.1.5 (Πολυώνυμα Hermite σε κλειστή μορφή)**.** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι σχέσεις :*

i) $H_n(x) = n! \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j x^{n-2j}}{j!(n-2j)!2^j}$

ii) $H_n(x) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\oint_C \frac{e^{\zeta x - \frac{\zeta^2}{2}}}{\zeta^{n+1}} d\zeta$ *όπου η C περικλείει το $(0, 0)$.*

Απόδειξη.

i)

$$\begin{aligned} G(x,t) = e^{tx-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx - \frac{t^2}{2})^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(tx)^{k-j}(-1)^j t^{2j}}{2^j k!} \\ &\overset{n=k+j}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-j}{j} \frac{t^{n-2j}x^{n-2j}(-1)^j t^{2j}}{2^j (n-j)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(n-j)!}{j!(n-2j)!} \frac{n! x^{n-2j}(-1)^j}{2^j (n-j)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!(-1)^j x^{n-2j}}{j!(n-2j)!2^j} \end{aligned}$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

ii) Έπεται άμεσα από την Πρόταση 1.1.3 και το θεώρημα Cauchy.

□

1.1.1 Η ημιομάδα Ornstein - Uhlenbeck

Λέμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι ανέλιξη Ornstein - Uhlenbeck με αρχή το $x \in \mathbb{R}$ εαν ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_t &= -aX_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 &= x \end{aligned}$$

όπου $a, \sigma > 0$ σταθερές και $(B_t)_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown. Αυτό το μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί ως το συνεχές ανάλογο για το μοντέλο των χρονοσειρών $AR(1)$.
Θα υπολογίσουμε το διαφορικό $d(e^{at}X_t)$.

$$d(e^{at}X_t) = d(e^{at})X_t + e^{at}dX_t + d(e^{at})dX_t = ae^{at}X_t - ae^{at}X_t + \sigma e^{at}dB_t = \sigma e^{at}dB_t.$$

Δηλαδή

$$e^{at}X_t - x = \sigma \int_0^t e^{as}dB_s \implies X_t = xe^{-at} + \int_0^t \sigma e^{a(t-s)}dB_s.$$

Το παρακάτω λήμμα θα μας επιτρέψει να βρούμε τη κατανομή που ακολουθεί το στοχαστικό ολοκλήρωμα στην παραπάνω σχέση.

Λήμμα 1.1.6. *Έστω $0 \leq a < b$ και $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση με $\int_a^b h^2(s)ds < \infty$. Τότε η τυχαία μεταβλητή $X = \int_a^b h(s)dB_s$ ακολουθεί τη κατανομή $N(0, \int_a^b h^2(s)ds)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ανέλιξη $X_t = \int_a^t h(s)dB_s$ και τη συνάρτηση $f(y) = e^{iuy}$ όπου $u \in \mathbb{R}$ φιξαρισμένο. Από τον τύπο του Itô έχουμε

$$df(X_t) = f'(X_t)dt + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2 \implies df(X_t) = iue^{iuX_t}h(t)dB_t - \frac{u^2}{2}e^{iuX_t}h^2(t)dt.$$

Αφού γράψουμε την εξίσωση σε ολοκληρωτική μορφή, και λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα έχει μέση τιμή 0, έχουμε

$$\mathbb{E}(e^{iuX_t}) = \mathbb{E}(f(X_t)) = \mathbb{E}\left(-\frac{u^2}{2}\int_a^t e^{iuX_s}h^2(s)ds\right) = -\frac{u^2}{2}\int_a^t h^2(s)\mathbb{E}(e^{iuX_s})ds.$$

Συνεπώς η συνάρτηση $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{iuX_t})$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\varphi'(t) = -\frac{u^2}{2}h^2(t)\varphi(t), \quad \varphi(a) = 1.$$

Η λύση αυτής είναι $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{iuX_t}) = \exp(-\frac{u^2}{2}\int_a^t h^2(s)ds)$. Όμως το $u \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν , οπότε στην ουσία βρήκαμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της X_t για κάθε t. Για $t = b$ το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα μοναδικότητας. □

Γυρνάμε πίσω, στην ανέλιξη Ornstein - Uhlenbeck και έχουμε ότι η $Y_t = \int_0^t \sigma e^{a(t-s)}dB_s$ ακολουθεί τη κατανομή $N(0, \sigma(t))$ όπου

$$\sigma(t) = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2at}}{2a}.$$

Θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση που $a = 1, \sigma = \sqrt{2}$. Τότε $Y_t \sim N(0, 1 - e^{-2t})$ και στνεπώς $X_t \sim N(e^{-t}x, 1 - e^{-2t})$. Η $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι ανέλιξη Markov (είναι και διαδικασία Feller) και έτσι μπορούμε να έχουμε την ημιομάδα των τελεστών P_t, έτσι ώστε

$$P_t f(x) = \mathbb{E}^x(f(X_t)),$$

όπου η f είναι φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση.

Πρόταση 1.1.6 (Τύπος του Mehler). *Για f φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση ισχύει ότι*

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)\gamma(dy). \tag{1.10}$$

Απόδειξη. Είναι $X_t = e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}Z$ όπου $Z \sim N(0, 1)$ οπότε

$$P_t f(x) = \int_{\Omega} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}Z\right) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)\gamma(dy)$$

που είναι το ζητούμενο. □

Μιας και είπαμε ότι η $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι διαδικασία Feller, θα υπολογίσουμε τον γεννήτορά της L, ο οποίος ορίζεται από τη σχέση

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{E}(f(X_t)) - f(x)}{t}.$$

Θεωρούμε ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και φραγμένη. Τότε, ο τύπος του Itô μας δίνει την εξίσωση

$$f(X_t) - f(x) = \int_0^t (-X_s f'(X_s) + f''(X_s))ds + \sqrt{2}\int_0^t f'(X_s)dB_s.$$

Παίρνουμε μέση τιμή και έχουμε ότι

$$\frac{\mathbb{E}(f(X_t)) - f(x)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}^x(-X_s f'(X_s) + f''(X_s))ds) = \mathbb{E}^x(-X_{\xi_t} f'(X_{\xi_t}) + f''(X_{\xi_t})),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού με $\xi_t \in (0, t)$. Παίρνουμε τώρα το όριο $t \to 0^+$ και χρησιμοποιούμε το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης για να πάρουμε την εξίσωση

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{E}(f(X_t)) - f(x)}{t} = -xf'(x) + f''(x).$$

Άρα λοιπόν ο γεννήτορας αυτής της ανέλιξης Ornstein-Uhlenbeck είναι ο τελεστής $Lf(x) = -xf'(x) + f''(x)$ τον οποίο αποκαλούμε τελεστή Ornstein-Uhlenbeck.

Ας δούμε μερικές ιδιότητες του L.

1. $Lf = -\delta Df$.

Πράγματι $-\delta Df = \delta f'(x) = -xf'(x) + f''(x) = Lf$

2. $LH_n = -nH_n$ όπου H_n το n-οστό πολυώνυμο Hermite.

Πράγματι $LH_n = -\delta DH_n = -\delta(-nH_{n-1}) = -nH_n$.

Σκοπός μας τώρα είναι να βρούμε τη δράση του P_t πάνω στα πολυώνυμα Hermite. Επειδή ξέρουμε τον γεννήτορα L, θα έχουμε ότι

$$P_t H_n = e^{tL} H_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} L^k H_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (-1)^k n^k H_n = e^{-nt} H_n.$$

Η παραπάνω σχέση είναι πολύ σημαντική, καθώς θα μας επιτρέψει να ορίσουμε την ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck στον Gaussian χώρο $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$.

Για $f \in L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ ο τελεστής P_t δρά στην f ως εξής :

$$P_t f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle f, H_n \rangle_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} e^{-nt} H_n(x).$$

Επιπλέον ο τελεστής $P_t : L^2(\mathbb{R}, \gamma) \to L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ είναι συστολή. Πράγματι για $f \in L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|P_t f\|^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle f, H_n \rangle^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} e^{-2nt} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle f, H_n \rangle^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle f, \frac{H_n}{\sqrt{n!}} \right\rangle^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} \\ &= \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

όπου στη τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη ταυτότητα του Parseval.

1.2 Απειροδιάστατη Γκαουσιανή ανάλυση

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε τον μονοδιάστατο Γκαουσιανό χώρο $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \gamma)$ και ορισμένες βασικές ιδιότητές του. Με λίγη παραπάνω δουλεία, μπορούμε να μελετήσουμε τον Γκαουσιανό χώρο $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \gamma_n)$ όπου $n > 1$ και $\gamma_n = \otimes_{i=1}^n \gamma$ καθώς και τη δράση της αντίστοιχης ημιομάδας Ornstein-Uhlenbeck. Δείτε στο [58] για περισσότερα.

Εμείς θα κοιτάξουμε μία πιο γενική περίπτωση. Ξεκινώντας με έναν απειροδιάστατο διαχωρίσιμο χώρο Banach $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ θέλουμε να τον εφοδιάσουμε με ένα μέτρο πιθανότητας και να μελετήσουμε τις ιδιότητες που προκύπτουν. Πιο ειδικά θέλουμε να τον εφοδιάσουμε με ένα Γκαουσιανό μέτρο καθώς επίσης και να μελετήσουμε τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τιμές στον $\mathcal{B}$.

1.2.1 Απειροδιάστατη ανάλυση

Μία βασική διαφορά με την περίπτωση πεπερασμένης διάστασης, είναι πως στην απειροδιάστατη περίπτωση δεν υπάρχει κάποιο μέτρο που να είναι το ανάλογο του μέτρου Lebesgue. Συγκεκριμένα έχουμε το εξής θεώρημα

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω $\mathcal{B}$ απειροδιάστατος χώρος Banach και $\mu : \mathscr{B}(\mathcal{B}) \to [0, \infty]$ μία σ-αθροιστική συνολοσυνάρτηση με τις ιδιότητες:*

(i) $\mu(x + B) = \mu(B)$ *για κάθε* $B \in \mathscr{B}(\mathcal{B})$.

(ii) $\mu(B(0, r)) > 0$ *για κάθε* $r > 0$.

Τότε $\mu(U) = \infty$ για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathcal{B}$.

Απόδειξη. Από το λήμμα του Riesz η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{B}$ δεν είναι συμπαγής και επειδή όλες οι μπάλες είναι ομοιομορφικές καμία κλειστή μπάλα δεν είναι συμπαγής. Κατά συνέπεια, αν $r > 0$ τότε μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset B(0, r)$ και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B(x_n, \varepsilon) \subset B(0, r)$ για κάθε $n \geq 1$ και $B(x_n, \varepsilon) \cap B(x_k, \varepsilon) = \emptyset$ για κάθε $n \neq k$. Θέτουμε $c = \mu(B(0, \varepsilon)$. Τότε από την ιδιότητα (ii) είναι $c > 0$ και

$$\mu(B(0, r)) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B(x_n, \varepsilon)) \overset{\text{(i)}}{=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B(0, \varepsilon)) = \sum_{n=1}^{\infty} c = \infty.$$

Έπεται πως κάθε μπάλα έχει άπειρο μέτρο συνεπώς κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathcal{B}$ θα έχει άπειρο μέτρο. □

Να σημειώσουμε πως το παραπάνω θεώρημα, εκτός από τις συνέπειες που έχει για τα μαθηματικά, αποτελεί και ένα από τα κύρια εμπόδια για τον αυστηρό ορισμό και χειρισμό των ολοκληρωμάτων τροχιών του Feynman.

Παρ'όλο που στην απειροδιάστατη περίπτωση να λείπει το ανάλογο του μέτρου Lebesgue, υπάρχουν αρκετές καλές ιδιότητες για τους σκοπούς μας, τις οποίες θα δούμε τώρα.

Λήμμα 1.2.2. *Έστω $\mathcal{B}$ απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Banach και $\sigma(\mathcal{B}^*)$ η ελάχιστη σ-άλγεβρα στον $\mathcal{B}$ που κάνει κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ να είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε $\sigma(\mathcal{B}^*) = \mathscr{B}(\mathcal{B})$.*

Απόδειξη. Επειδή κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ είναι συνεχής συνάρτηση από τον $\mathcal{B}$ στο $\mathbb{R}$, έπεται πως κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση άρα $\sigma(\mathcal{B}^*) \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{B})$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αρκεί να δείξουμε πως η κλειστή μοναδιαία μπάλα B του $\mathcal{B}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{B}^*)$. Πράγματι, αν αυτό αληθεύει τότε κάθε κλειστή μπάλα ανήκει στην σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{B}^*)$ αφού κάθε κλειστή μπάλα είναι ομοιομορφική με την B. Επειδή ο $\mathcal{B}$ είναι διαχωρίσιμος, κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως μία αριθμήσιμη ένωση από κλειστές μπάλες και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

Δείχνουμε τώρα ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα B ανήκει στην σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{B}^*)$. Έστω $\{x_n\}_{n\geq 1}$ πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{B}$. Από το θεώρημα Hahn-Banach για κάθε $n \geq 1$ υπάρχει $f_n \in \mathcal{B}^*$ με την ιδιότητα $\|f_n\|_{\mathcal{B}^*} = 1$ και $f_n(x_n) = \|x_n\|$.

Ισχυριζόμαστε πως $B = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in B : |f_n(x)| \leq 1\}$. Πράγματι αν $x \in B$ τότε

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\mathcal{B}^*}\|x\| = \|x\| \leq 1$$

οπότε $B \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in B : |f_n(x)| \leq 1\}$.

Έστω τώρα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in B : |f_n(x)| \leq 1\}$. Επιλέγουμε υπακολουθία $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ τέτοια ώστε $x_{n_k} \to x$ καθώς $k \to \infty$. Τότε

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| = \|x\|$$

και

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x)| \leq \|f_{n_k}\|_{\mathcal{B}^*}\|x_{n_k} - x\| = \|x_{n_k} - x\| \to 0 \quad \text{καθώς } k \to \infty.$$

Άρα λοιπόν $\|x\| = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \leq 1$ συνεπώς $x \in B$ που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

Ορισμός 1.2.1. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Θα λέμε ότι η $X : \Omega \to \mathcal{B}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathcal{B}$ αν είναι μία $(\mathcal{F}, \mathscr{B}(\mathcal{B}))-$μετρήσιμη συνάρτηση. Διαισθητικά, σκεφτόμαστε πως X είναι ένα τυχαίο σημείο του $\mathcal{B}$. Αν $\int_\Omega \|X\| d\mathbb{P} < \infty$ τότε η X είναι Bochner ολοκληρώσιμη και ορίζουμε την μέση τιμή $\mathbb{E}[X]$ της X ως

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P}.$$

Μία τυχαία μεταβλητή X με τιμές στον $\mathcal{B}$ εφοδιάζει τον $\mathcal{B}$ με ένα μέτρο πιθανότητας $\mu_X : \mathscr{B}(\mathcal{B}) \to [0, \infty]$ που λέγεται μέτρο εικόνα του $\mathbb{P}$ μέσω της X ή απλά κατανομή της X και ορίζεται ως $\mu_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ για κάθε $B \in \mathscr{B}(\mathcal{B})$. Το μέτρο μ_X συμβολίζεται και με $X_*\mathbb{P}$

Παραθέτουμε δύο χρήσιμες προτάσεις για ολοκληρώματα Bochner.

Πρόταση 1.2.1 (Αλλαγή μεταβλητής)**.** *Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathcal{B}$ και $\mu = \mu_X$ η κατανομή της X . Έστω επίσης $\mathcal{U}$ διαχωρίσιμος χώρος Banach και συνεχής συνάρτηση $F : \mathcal{B} \to \mathcal{U}$ που είναι Bochner ολοκληρώσιμη ως προς το μ. Τότε η $F(X)$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη ως προς το $\mathbb{P}$ και*

$$\int_\Omega F(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathcal{B} F(x)\mu(dx). \tag{1.12}$$

Πρόταση 1.2.2. *Έστω X Bochner ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathcal{B}$. Τότε για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ είναι*

$$f\left(\int_\Omega X d\mathbb{P}\right) = \int_\Omega f(X) d\mathbb{P}. \tag{1.13}$$

Περισσότερα για το ολοκλήρωμα Bochner μπορείτε να βρείτε στο [47].

Ορισμός 1.2.2. Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $(\mathcal{B}, \mathscr{B}(\mathcal{B}))$. Ορίζουμε την *χαρακτηριστική συνάρτηση* $\hat{\mu} : \mathcal{B}^* \to \mathbb{C}$ του μ ως

$$\hat{\mu}(f) = \int_\mathcal{B} e^{if(x)}\mu(dx) \quad \text{για κάθε } f \in \mathcal{B}^*. \tag{1.14}$$

Η *χαρακτηριστική συνάρτηση* μιας τυχαίας μεταβλητής X με τιμές στον $\mathcal{B}$ ορίζεται να είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής της, δηλαδή του μέτρου μ_X.

Λήμμα 1.2.3. *Έστω μ, ν δύο μέτρα πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $(\mathcal{B}, \mathscr{B}(\mathcal{B}))$. Αν $f_*\mu = f_*\nu$ για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ τότε $\mu = \nu$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την άλγεβρα των κυλινδρικών συνόλων

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^\infty \{x \in \mathcal{B} : (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in C, f_1, \dots f_n \in \mathcal{B}^*, C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\}. \tag{1.15}$$

Από την υπόθεση $f_*\mu = f_*\nu$ για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ και το ότι τα πεπερασμένα μέτρα στον $\mathbb{R}^n$ καθορίζονται από τις μονοδιάστατες προβολές τους, έπεται ότι $\mu = \nu$ στην άλγεβρα των κυλινδρικών συνόλων $\mathcal{C}$. Όμως $\sigma(\mathcal{C}) = \mathscr{B}(\mathcal{B})$ οπότε $\mu = \nu$ στην σ-άλγεβρα $\mathscr{B}(\mathcal{B})$. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει πως και σε αυτή την περίπτωση η χαρακτηριστική συνάρτηση $\hat{\mu}$ πράγματι χαρακτηρίζει το μέτρο πιθανότητας μ.

Πρόταση 1.2.3. *Έστω μ, ν δύο μέτρα πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $(\mathcal{B}, \mathscr{B}(\mathcal{B}))$. Αν $\hat{\mu}(f) = \hat{\nu}(f)$ για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ τότε $\mu = \nu$.*

Απόδειξη. Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{B}^*$ είναι $\xi f \in \mathcal{B}^*$ και από την υπόθεση $\hat{\mu}(\xi f) = \hat{\nu}(\xi f)$. Από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής είναι

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}(f_*\mu)(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}(f_*\nu)(dx)$$

και από το θεώρημα μοναδικότητας στην πραγματική ευθεία συμπεραίνουμε πως $f_*\mu = f_*\nu$. Το προηγούμενο λήμμα μας δίνει ότι $\mu = \nu$. □

Δίνουμε τώρα τον ορισμό των Γκαουσιανών μέτρων στον $\mathcal{B}$ καθώς και των Γκαουσιανών τυχαίων μεταβλητών με τιμές στον $\mathcal{B}$.

Ορισμός 1.2.3. Ένα μέτρο πιθανότητας μ στον μετρήσιμο χώρο $(\mathcal{B}, \mathscr{B}(\mathcal{B}))$ λέγεται Γκαουσιανό αν το μέτρο $f_*\mu$ είναι Γκαουσιανό για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$. Το μ θα λέγεται κεντραρισμένο ή συμμετρικό αν το $f_*\mu$ έχει μέση τιμή 0 για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$.

Μία τυχαία μεταβλητή X με τιμές στον $\mathcal{B}$ λέγεται Γκαουσιανή αν για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ η τυχαία μεταβλητή $f(X)$ είναι Γκαουσιανή.

Έστω μ ένα Γκαουσιανό μέτρο. Παρατηρούμε πως $\mathcal{B}^* \subseteq L^p(\mathcal{B}, \mathscr{B}(\mathcal{B}), \mu)$ για κάθε $p \geq 1$ αφού από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής είναι

$$\int_{\mathcal{B}} |f(x)|^p \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} |x|^p (f_*\mu)(dx)$$

και $\int_{\mathbb{R}} |x|^p (f_*\mu)(dx) < \infty$ επειδή το $f_*\mu$ είναι Γκαουσιανό.

Ορισμός 1.2.4. Έστω μ ένα Γκαουσιανό μέτρο στον $\mathcal{B}$. Ορίζουμε την μέση τιμή a_μ και την συνδιακύμανση Q_μ ως

$$a_\mu(f) = \int_{\mathcal{B}} f(x)\mu(dx) \tag{1.16}$$

και

$$Q_\mu(f, g) = \int_{\mathcal{B}} (f(x) - a_\mu(f)) \cdot (g(x) - a_\mu(g))\mu(dx), \tag{1.17}$$

όπου $f, g \in \mathcal{B}^*$. Η απεικόνιση $a_\mu : \mathcal{B}^* \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική ενώ η απεικόνιση $Q_\mu : \mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^* \to \mathbb{R}$ είναι διγραμμική.

Το επόμενο θεώρημα μας δείχνει πως όπως και στον $\mathbb{R}^n$ έτσι και στον $\mathcal{B}$ μπορούμε να καθορίσουμε τα Γκαουσιανά μέτρα χρησιμοποιώντας την χαρακτηριστική συνάρτηση.

Θεώρημα 1.2.4. *Ένα μέτρο πιθανότητας μ στον μετρήσιμο χώρο $(\mathcal{B}, \mathscr{B}(\mathcal{B}))$ είναι Γκαουσιανό αν και μόνο αν η χαρακτηριστική συνάρτηση $\hat{\mu}$ έχει την μορφή*

$$\hat{\mu}(f) = \exp\left(ia(f) - \frac{1}{2}Q(f, f)\right), \tag{1.18}$$

όπου $a : \mathcal{B}^* \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική απεικόνιση και $Q : \mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^* \to \mathbb{R}$ είναι θετικά ημιορισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή στον $\mathcal{B}^*$.

Απόδειξη. Αν το μ είναι Γκαουσιανό τότε για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ είναι

$$\hat{\mu}(f) = \int_{\mathcal{B}} e^{if(x)}\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi}(f_*\mu)(d\xi) = \exp\left(im - \frac{1}{2}\sigma^2\right),$$

όπου m, σ^2 είναι η μέση τιμή και η διασπορά του $f_*\mu$ αντίστοιχα. Όμως

$$m = \int_{\mathbb{R}} \xi(f_*\mu)(d\xi) = \int_{\mathcal{B}} f(x)\mu(dx) = a_\mu(f)$$

και

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (\xi - m)^2(f_*\mu)(d\xi) = \int_{\mathcal{B}} (f(x) - a_\mu(f))^2\mu(dx) = Q_\mu(f, f)$$

οπότε η εξίσωση (1.18) αληθεύει.

Έστω τώρα πως το μέτρο πιθανότητας μ ικανοποιεί την (1.18). Τότε για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ είναι

$$\widehat{(f_*\mu)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi}(f_*\mu)(d\xi) = \int_{\mathcal{B}} e^{itf(x)}\mu(dx) = \exp\left(ita(f) - \frac{1}{2}t^2Q(f, f)\right) \tag{1.19}$$

που σημαίνει ότι $f_*\mu = N(a(f), Q(f, f))$. Άρα το μ είναι Γκαουσιανό. □

Η επόμενη πρόταση δίνει έναν χαρακτηρισμό για τα κεντραρισμένα Γκαουσιανά μέτρα στον $\mathcal{B}$.

Πρόταση 1.2.4. *Έστω μ ένα Γκαουσιανό μέτρο στον $\mathcal{B}$ και ν το μέτρο πιθανότητας που δίνεται ως $\nu(B) = \mu(-B)$ για κάθε $B \in \mathscr{B}(\mathcal{B})$. Τότε το μ είναι κεντραρισμένο αν και μόνο αν $\mu = \nu$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $R : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ με $R(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathcal{B}$. Τότε $\nu = R_*\mu$. Από το προηγούμενο θεώρημα είναι $\hat{\mu}(f) = \exp\left(ia_\mu(f) - \frac{1}{2}Q_\mu(f, f)\right)$ για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$. Γράφουμε

$$\hat{\nu}(f) = \int_{\mathcal{B}} e^{if(x)}\nu(dx) = \int_{\mathcal{B}} e^{-if(x)}\mu(dx) = \exp\left(-ia_\mu(f) - \frac{1}{2}Q_\mu(f, f)\right)$$

άρα $\hat{\mu} = \hat{\nu}$ αν και μόνο αν $a_\mu(f) = 0$ για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$. Η Πρόταση 1.2.3 μας δίνει το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας χαρακτηριστικές συναρτήσεις, μπορεί να αποδειχθεί και η επόμενη χρήσιμη πρόταση.

Πρόταση 1.2.5. *Έστω μ ένα Γκαουσιανό μέτρο στον $\mathcal{B}$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) Αν το ν είναι Γκαουσιανό μέτρο στον διαχωρίσιμο χώρο Banach $\mathcal{U}$, τότε το $\mu \otimes \nu$ είναι Γκαουσιανό μέτρο στον $\mathcal{B} \times \mathcal{U}$.

(ii) Έστω ν ένα άλλο Γκαουσιανό μέτρο στον $\mathcal{B}$. Ορίζουμε το συνελικτικό μέτρο $\mu * \nu$ να είναι το μέτρο πιθανότητας στον $\mathcal{B}$ που είναι το μέτρο εικόνα του $\mu \otimes \nu$ μέσω της απεικόνισης $(x, y) \to x + y$. Τότε το $\mu * \nu$ είναι ένα Γκαουσιανό μέτρο στον $\mathcal{B}$ που για κάθε $B \in \mathscr{B}(\mathcal{B})$ δίνεται από την σχέση

$$\mu * \nu(B) = \int_{\mathcal{B}} \nu(B - x)\mu(dx) = \int_{\mathcal{B}} \mu(B - x)\nu(dx).$$

(iii) Αν το μ είναι κεντραρισμένο και $R : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ είναι η απεικόνιση στροφής κατά $\theta \in \mathbb{R}$, $R(x, y) = (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$ τότε $R_*(\mu \otimes \mu) = \mu \otimes \mu$.

Έστω μ ένα Γκαουσιανό μέτρο στον $\mathcal{B}$. Είναι πιό φυσικό να ορίσουμε την μέση τιμή $\overline{a}_\mu \in \mathcal{B}$ ως το ολοκληρώματα Bochner

$$\overline{a}_\mu = \int_{\mathcal{B}} x\mu(dx).$$

Το πρόβλημα είναι πως δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων αν αυτό το ολοκληρώμα υπάρχει.

Το ακόλυθο θεώρημα είναι ένα ισχυρό αποτέλεσμα ολοκληρωσιμότητας, βασικό για την θεωρία Γκαουσιανών μέτρων σε απειροδιάστατους διαχωρίσιμους χώρους Banach, το οποίο θα μας επιτρέψει να χειριστούμε ολοκληρώματα της παραπάνω μορφής.

Θεώρημα 1.2.5 (Fernique, 1970)**.** *Έστω μ ένα κεντραρισμένο Γκαουσιανό μέτρο στον διαχωρίσιμο χώρο Banach $\mathcal{B}$. Τότε υπάρχει σταθερά $\beta > 0$ τέτοια ώστε*

$$\int_{\mathcal{B}} e^{\beta\|x\|^2}\mu(dx) < \infty. \tag{1.20}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα (iii) της Πρότασης 1.2.5 για $\theta = \frac{\pi}{4}$ και έχουμε για κάθε $\tau, t > 0$

$$\begin{aligned} \mu(\|x\| \le \tau)\mu(\|x\| > t) &= \int_{\|x\|\le\tau}\int_{\|y\|>t} \mu(dy)\mu(dx) \\ &= \int\limits_{\left\|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\|\le\tau}\ \int\limits_{\left\|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\|>t} \mu(dy)\mu(dx) \\ &\le \int\limits_{\|x\|>\frac{t-\tau}{\sqrt{2}}}\ \int\limits_{\|y\|>\frac{t-\tau}{\sqrt{2}}} \mu(dy)\mu(dx) \\ &= \left(\mu\left(\|x\| > \frac{t-\tau}{\sqrt{2}}\right)\right)^2, \end{aligned} \tag{1.21}$$

όπου στην ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι το σύνολο

$$\left\{(x,y) \in \mathcal{B}\times\mathcal{B} : \|x+y\| > \sqrt{2}t \ \text{ και } \ \|x-y\| \le \sqrt{2}\tau\right\}$$

περιέχεται στο σύνολο

$$\left\{(x,y) \in \mathcal{B}\times\mathcal{B} : \|x\| > \frac{t-\tau}{\sqrt{2}} \ \text{ και } \ \|y\| > \frac{t-\tau}{\sqrt{2}}\right\}$$

λόγω της τριγωνικής ανισότητας. Επειδή $\|x\| < \infty$ $\mu-$σχεδόν για κάθε $x \in \mathcal{B}$ μπορούμε να επιλέξουμε $r > 0$ ώστε $\mu\left(\|x\| \le r\right) \ge \frac{2}{3}$.

Θέτουμε $t_0 = r$ και $t_n = r + \sqrt{2}t_{n-1}$ για κάθε $n \ge 1$. Με επαγωγή βλέπουμε πως η ακολουθία $(t_n)_{n\ge1}$ γράφεται σε κλειστή μορφή ως

$$t_n = r\ \frac{(\sqrt{2})^{n+1}-1}{\sqrt{2}-1}$$

οπότε $t_n \le r(\sqrt{2})^{n+4}$ για κάθε $n \ge 1$. Θέτουμε

$$a_n = \frac{\mu\left(\|x\| > t_n\right)}{\mu\left(\|x\| \le r\right)}$$

και βλέπουμε ότι $a_0 \leq \frac{(1-\frac{2}{3})}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$. Από την ανισότητα (1.21) για $\tau = r$ και $t = t_{n+1}$ έχουμε ότι

$$\mu\left(\|x\| \leq r\right)\mu\left(\|x\| > t_{n+1}\right) \leq \left(\mu\left(\|x\| > t_n\right)\right)^2 \implies a_{n+1} \leq a_n^2.$$

Εφαρμόζουμε διαδοχικά αυτή την ανισότητα και έχουμε ότι $a_n \leq a_0^{2^n} \leq 2^{-2^n}$ και κατά συνέπεια $\mu\left(\|x\| > t_n\right) = a_n \mu\left(\|x\| \leq r\right) \leq 2^{-2^n}$. Για $\beta > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} e^{\beta\|x\|^2}\mu(dx) &\leq \mu\left(\|x\| \leq r\right)e^{\beta r^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\mu(t_n < \|x\| \leq t_{n+1})\cdot e^{\beta t_{n+1}^2} \\ &\leq e^{\beta r^2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n}\cdot \exp\left(\beta r^2 2^{n+5}\right) \\ &= e^{\beta r^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(2^n(-\ln 2 + 2^5\beta r^2)\right). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Επιλέγουμε το $\beta > 0$ να είναι αρκετά μικρό έτσι ώστε $-\ln 2 + 2^5\beta r^2 < 0$. Τότε η παραπάνω σειρά συγκλίνει και έχουμε το ζητούμενο. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει πως το συμπέρασμα του θεωρήματος Fernique ισχύει και στην περίπτωση που το Γκαουσιανό μέτρο μ δεν είναι κεντραρισμένο. Συνήθως αναφέρεται και αυτό ως θεώρημα Fernique. Δε θα το χρειαστούμε αρκετά στη συνέχεια όμως παραθέτουμε την απόδειξη για πληρότητα.

Θεώρημα 1.2.6. *Έστω μ ένα Γκαουσιανό μέτρο στον διαχωρίσιμο χώρο Banach $\mathcal{B}$. Τότε υπάρχει σταθερά $\beta > 0$ τέτοια ώστε*

$$\int_{\mathcal{B}} e^{\beta\|x\|^2}\mu(dx) < \infty.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το Γκαουσιανό μέτρο ν στον $\mathcal{B}$ που δίνεται ως $\nu(B) = \mu(-B)$ για κάθε $B \in \mathscr{B}(\mathcal{B})$. Έστω $\mu_1 = \mu * \nu$ το συνελικτικό μέτρο των μ και ν. Τότε από την Πρόταση 1.2.5 το μ_1 είναι το μέτρο εικόνα του $\mu \otimes \nu$ μέσω της απεικόνισης $h : \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ με $h(x,y) = x+y$ και είναι ένα Γκαουσιανό μέτρο στον $\mathcal{B}$. Παρατηρούμε ότι είναι και κεντραρισμένο αφού για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} a_{\mu_1}(f) = \int_{\mathcal{B}} f(x)\mu_1(dx) &= \int_{\mathcal{B}}\int_{\mathcal{B}} f(x+y)\mu(dx)\nu(dy) \\ &= \int_{\mathcal{B}}\int_{\mathcal{B}} f(x-y)\mu(dx)\mu(dy) \\ &= \int_{\mathcal{B}}\int_{\mathcal{B}} f(x)\mu(dx)\mu(dy) - \int_{\mathcal{B}}\int_{\mathcal{B}} f(y)\mu(dx)\mu(dy) = 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει σταθερά $\beta_1 > 0$ έτσι ώστε $\int_{\mathcal{B}}\exp\left(\beta_1\|x\|^2\right)\mu_1(dx) < \infty$. Γράφουμε

$$\int_{\mathcal{B}} e^{\beta_1\|x\|^2}\mu_1(dx) = \int_{\mathcal{B}}\int_{\mathcal{B}} e^{\beta_1\|x+y\|^2}\mu(dx)\nu(dy) = \int_{\mathcal{B}}\left(\int_{\mathcal{B}} e^{\beta_1\|x-y\|^2}\mu(dx)\right)\mu(dy). \tag{1.24}$$

Άρα λοιπόν $\int_{\mathcal{B}}\exp\left(\beta_1\|x-y\|^2\right)\mu(dx) < \infty$ $\mu-$σχεδόν για κάθε $y \in \mathcal{B}$.

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχουμε ότι

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2 \quad \text{για κάθε } a, b, \varepsilon > 0. \tag{1.25}$$

Γράφουμε

$$\|x\|^2 \leq (\|x-y\| + \|y\|)^2 = \|x-y\| + \|y\|^2 + 2\|x-y\|\|y\| \leq (1+\varepsilon)\|x-y\|^2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|y\|^2,$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα (1.25). Θεωρούμε τώρα $\beta \in (0, \beta_1)$ και $\varepsilon = \frac{\beta_1}{\beta} - 1$ οπότε η παραπάνω ανισότητα παίρνει την μορφή

$$\beta\|x\|^2 \leq \beta_1\|x-y\|^2 + \frac{\beta\beta_1}{\beta_1 - \beta}\|y\|^2$$

και κατά συνέπεια

$$\int_{\mathcal{B}} e^{\beta\|x\|^2}\mu(dx) \leq \exp\left(\frac{\beta\beta_1}{\beta_1-\beta}\|y\|^2\right)\int_{\mathcal{B}} e^{\beta_1\|x-y\|^2}\mu(dx).$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας είναι πεπερασμένο $\mu-$σχεδόν για κάθε $y \in \mathcal{B}$ οπότε $\int_{\mathcal{B}} e^{\beta\|x\|^2}\mu(dx) < \infty$. □

Παρατήρηση. Αν $\beta > 0$ σταθερά που ικανοποιεί το θεώρημα Fernique και $p \geq 1$ τότε υπάρχει θετική σταθερά $c_{p,\beta}$ (που εξαρτάται από τα p, β) έτσι ώστε $\|x\|^p \leq c_{p,\beta}\exp(\beta\|x\|^2)$ άρα

$$\int_{\mathcal{B}} \|x\|^p \mu(dx) < \infty \quad \text{για κάθε } p \geq 1. \tag{1.26}$$

Πιο ειδικά $\int_{\mathcal{B}} \|x\|\mu(dx) < \infty$ οπότε το ολοκλήρωμα $\overline{a}_\mu = \int_{\mathcal{B}} x\mu(dx)$ είναι καλά ορισμένο στοιχείο του $\mathcal{B}$.

Πρόταση 1.2.6. *Έστω μ Γκαουσιανό μέτρο στον $\mathcal{B}$. Τότε οι γραμμικοί τελεστές $a_\mu : \mathcal{B}^* \to \mathbb{R}$, $Q_\mu : \mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^* \to \mathbb{R}$ του Ορισμού 1.2.4 είναι φραγμένοι. Επίσης το $\overline{a}_\mu = \int_{\mathcal{B}} x\mu(dx) \in \mathcal{B}$ αναπαριστά τον a_μ, δηλαδή*

$$a_\mu(f) = f(\overline{a}_\mu) \quad \text{για κάθε } f \in \mathcal{B}^*. \tag{1.27}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $c_1 = \int_{\mathcal{B}} \|x\|\mu(dx)$ και $c_2 = \int_{\mathcal{B}} \|x\|^2\mu(dx)$. Τότε

$$|a_\mu(f)| \leq \int_{\mathcal{B}} |f(x)|\mu(dx) \leq c_1\|f\|_{\mathcal{B}^*}$$

οπότε ο $a_\mu : \mathcal{B}^* \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένος.

Επειδή $|f(x) - a_\mu(f)| \leq \|f\|_{\mathcal{B}^*}(\|x\| + c_1)$ για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} |Q_\mu(f,g)| &\leq \int_{\mathcal{B}} |f(x) - a_\mu(f)||g(x) - a_\mu(g)|\mu(dx) \\ &\leq \int_{\mathcal{B}} (\|x\| + c_1)^2\mu(dx)\|f\|_{\mathcal{B}^*}\|g\|_{\mathcal{B}^*} \\ &= (3c_1^2 + c_2)\|f\|_{\mathcal{B}^*}\|g\|_{\mathcal{B}^*} \end{aligned} \tag{1.28}$$

άρα και ο $Q_\mu : \mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^* \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένος.

Τέλος, έχουμε ότι

$$a_\mu(f) = \int_{\mathcal{B}} f(x)\mu(dx) = f\left(\int_{\mathcal{B}} x\mu(dx)\right) = f(\overline{a}_\mu). \tag{1.29}$$

□

1.2.2 Αφηρημένοι χώροι Wiener

Ορισμός 1.2.5 (Αφηρημένος χώρος Wiener)**.** Έστω $\mathcal{B}$ απειροδιάστατος και διαχωρίσιμος χώρος Banach. Ο χώρος πιθανότητας $(\mathcal{B}, \mathscr{B}(\mathcal{B}), \mu)$ θα λέγεται αφηρημένος χώρος Wiener αν το μέτρο πιθανότητας μ είναι ένα κεντραρισμένο Γκαουσιανό μέτρο. Δηλαδή το μ είναι Γκαουσιανό και $\overline{a}_\mu = \int_{\mathcal{B}} x\mu(dx) = 0$

Θεωρούμε την ένθεση $j : \mathcal{B}^* \hookrightarrow L^2(\mathcal{B}, \mathscr{B}(\mathcal{B}), \mu)$. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν οι νόρμες $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^*}$ και $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{B})}$ είναι ισοδύναμες στον $\mathcal{B}^*$. Θα δείξουμε πως η απάντηση είναι αρνητική.

Αρχικά παρατηρούμε πως η ένθεση $j : \mathcal{B}^* \hookrightarrow L^2(\mathcal{B}, \mathscr{B}(\mathcal{B}), \mu)$ είναι φραγμένη. Πράγματι για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ είναι

$$\|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})} = \int_{\mathcal{B}} |f(x)|^2 \mu(dx) \leq \int_{\mathcal{B}} \|x\|^2 \mu(dx) \cdot \|f\|^2_{\mathcal{B}^*}$$

άρα $\|f\|_{L^2(\mathcal{B})} \leq \left(\int_{\mathcal{B}} \|x\|^2 \mu(dx)\right)^{1/2} \cdot \|f\|_{\mathcal{B}^*}$. Άρα λοιπόν η $L^2(\mathcal{B})-$τοπολογία στον $\mathcal{B}^*$ είναι ασθενέστερη από την τοπολογία της νόρμας $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^*}$. Μάλιστα ισχύει κάτι ισχυρότερο.

Θεώρημα 1.2.7. *Η ένθεση $j : \mathcal{B}^* \hookrightarrow L^2(\mathcal{B}, \mathscr{B}(\mathcal{B}), \mu)$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε πως κάθε φραγμένη ακολουθία $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}^*$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στον $L^2(\mathcal{B})$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ακολουθία $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}^*$ με $\|f_n\|_{\mathcal{B}^*} \leq 1$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε, από το θεώρημα Αλάογλου, υπάρχει υπακολουθία $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ της $(f_n)_{n\geq 1}$ η οποία συγκλίνει σε κάποια $f \in \mathcal{B}^*$ στην ασθενή $*-$τοπολογία του $\mathcal{B}^*$. Κατά συνέπεια $f_{n_k} \to f$ κατά σημείο καθώς $k \to \infty$ και

$$|f_{n_k}(x)|^2 \leq \|f_{n_k}\|^2_{\mathcal{B}^*} \|x\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Επειδή $\int_{\mathcal{B}} \|x\|^2 \mu(dx) < \infty$ το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue μας δίνει ότι $f_{n_k} \to f$ στον $L^2(\mathcal{B})$ και έτσι έχουμε υπακολουθία της $(f_n)_{n\geq 1}$ που συγκλίνει στον $L^2(\mathcal{B})$ όπως θέλαμε. □

Πόρισμα 1.2.7.1. *Ο $(\mathcal{B}^*, \|\cdot\|_{L^2(\mathcal{B})})$ δεν είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Η ταυτοτική απεικόνιση $j : (\mathcal{B}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{B}^*}) \to (\mathcal{B}^*, \|\cdot\|_{L^2(\mathcal{B})})$ είναι 1-1, επί και είδαμε παραπάνω ότι είναι φραγμένη. Έστω, προς άτοπο, ότι ο $(\mathcal{B}^*, \|\cdot\|_{L^2(\mathcal{B})})$ είναι χώρος Banach. Είναι συνέπεια του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης ότι και η αντίστροφη j^{-1} είναι φραγμένη οπότε τελικά η $j : (\mathcal{B}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{B}^*}) \to (\mathcal{B}^*, \|\cdot\|_{L^2(\mathcal{B})})$ είναι ομοιομορφισμός και έτσι οι νόρμες $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^*}$ και $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{B})}$ είναι ισοδύναμες στον $\mathcal{B}^*$. Όμως από το προηγούμενο θεώρημα η j είναι συμπαγής ένθεση και συνεπώς απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε ολικά φραγμένα σύνολα. Ο $(\mathcal{B}^*, \|\cdot\|_{L^2(\mathcal{B})})$ είναι λοιπόν τοπικά συμπαγής χώρος οπότε είναι πεπερασμένης διάστασης, το οποίο είναι άτοπο. □

Ορισμός 1.2.6 (Αναπαράγων πυρήνας)**.** Έστω $\mathcal{B}$ αφηρημένος χώρος Wiener. Ο αναπαράγων πυρήνας $\mathcal{R}$ ορίζεται ως

$$\mathcal{R} = \overline{j(\mathcal{B}^*)} \text{ όπου η κλειστότητα λαμβάνεται στον } L^2(\mathcal{B}).$$

Από το προηγούμενο πόρισμα βλέπουμε ότι ο $\mathcal{R}$ περιέχει τον $\mathcal{B}^*$ γνήσια.

Συμβολίζουμε ξανά με Q_μ την συνεχή επέκταση του Q_μ στον $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ η οποία δίνεται από τη σχέση

$$Q_\mu(f, g) = \int_{\mathcal{B}} f(x)g(x)\mu(dx) = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathcal{B})} \quad \text{για κάθε } f, g \in \mathcal{R}.$$

Επεκτείνουμε και την χαρακτηριστική συνάρτηση $\hat{\mu}$ στον $\mathcal{R}$ ως $\hat{\mu}(f) = \int_{\mathcal{B}} \exp(if(x))\mu(dx)$ για κάθε $f \in \mathcal{R}$.

Ορισμός 1.2.7 (Γκαουσιανός χώρος Hilbert)**.** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Γκαουσιανός χώρος Hilbert ονομάζεται κάθε κλειστός υπόχωρος του $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ που κάθε στοιχείο του είναι κεντραρισμένη (δηλαδή έχει μέση τιμή 0) Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή.

Η επόμενη πρόταση δείχνει πως κάθε στοιχείο στον αναπαράγοντα πυρήνα $\mathcal{R}$ είναι κεντραρισμένη Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή. Ο $\mathcal{R}$ είναι λοιπόν ένας Γκαουσιανός χώρος Hilbert.

Πρόταση 1.2.7. *Έστω $\mathcal{B}$ αφηρημένος χώρος Wiener. Τότε*

$$\hat{\mu}(f) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right) \quad \text{για κάθε } f \in \mathcal{R} \tag{1.30}$$

και συνεπώς $f \sim N\left(0, \|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)$

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{R}$ και $(f_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{B}^*$ που συγκλίνει στην f στον $L^2(\mathcal{B})$. Επειδή $|e^{it_1} - e^{it_2}| \leq |t_1 - t_2|$ για κάθε $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathcal{B}} e^{if(x)}\mu(dx) - \int_{\mathcal{B}} e^{if_n(x)}\mu(dx)\right| &\leq \int_{\mathcal{B}} \left|e^{if(x)} - e^{if_n(x)}\right|\mu(dx) \\ &\leq \int_{\mathcal{B}} |f(x) - f_n(x)|\mu(dx) \\ &\leq \|f - f_n\|_{L^2(\mathcal{B})} \to 0 \ \text{ καθώς } n \to \infty. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Συνεπώς

$$\hat{\mu}(f) = \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}(f_n) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}Q_\mu(f_n, f_n)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right) \tag{1.32}$$

που είναι η (1.30). Για να δείξουμε ότι $f \sim N\left(0, \|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)$ γράφουμε

$$\hat{\mu}(tf) = \int_{\mathcal{B}} e^{itf(x)}\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{its}(f_*\mu)(ds) = \widehat{(f_*\mu)}(t) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}. \tag{1.33}$$

Όμως από την (1.30) έχουμε ότι $\hat{\mu}(tf) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)$ οπότε $\widehat{(f_*\mu)}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)$. □

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι τα στοιχεία που βρίσκονται στον αναπαράγων πυρήνα $\mathcal{R}$ είναι σχεδόν γραμμικές συναρτήσεις.

Πρόταση 1.2.8. *Για κάθε $f \in \mathcal{R}$ υπάρχει μετρήσιμος υπόχωρος V_f του $\mathcal{B}$ και γραμμική απεικόνιση $\tilde{f} : V_f \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mu(V_f) = 1$ και $\tilde{f} = f$ $\mu-$σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{R}$ και $(f_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στον $\mathcal{B}^*$ που συγκλίνει στην f στον $L^2(\mathcal{B})$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ της $(f_n)_{n\geq 1}$ που συγκλίνει στην f, $\mu-$σχεδόν παντού. Το σύνολο

$$V_f = \left\{x \in \mathcal{B} : \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \ \text{ υπάρχει}\right\}$$

είναι ένας μετρήσιμος υπόχωρος του $\mathcal{B}$ με $\mu(V_f) = 1$. Θέτουμε $\tilde{f}(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ για κάθε $x \in V_f$. Τότε η $\tilde{f}$ είναι γραμμική και $\tilde{f} = f$ $\mu-$σχεδόν παντού. □

Θεωρούμε τώρα τον τελεστή $\tilde{Q}_\mu : \mathcal{B}^* \to \mathcal{B}$ που ορίζεται ως

$$\tilde{Q}_\mu f = \int_{\mathcal{B}} x f(x)\mu(dx) \quad \text{για κάθε } f \in \mathcal{B}^*. \tag{1.34}$$

Μάλιστα το $\tilde{Q}_\mu$ είναι φραγμένος αφού για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ είναι

$$\|\tilde{Q}_\mu f\| \leq \int_{\mathcal{B}} \|x\||f(x)|\mu(dx) \leq \int_{\mathcal{B}} \|x\|^2\mu(dx) \cdot \|f\|_{\mathcal{B}^*}. \tag{1.35}$$

Παρατηρούμε επιπλέον πως κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ επάγει γραμμική απεικόνιση $\tilde{Q}_\mu f : \mathcal{B}^* \to \mathbb{R}$ με

$$(\tilde{Q}_\mu f)(g) = \int_{\mathcal{B}} f(x)g(x)\mu(dx) = g\left(\tilde{Q}_\mu f\right) = Q_\mu(f,g) \quad \text{για κάθε } g \in \mathcal{B}^*. \tag{1.36}$$

Θα επεκτείνουμε τώρα τον τελεστή $\tilde{Q}_\mu$ στον $\mathcal{R}$. Θα συμβολίζουμε αυτή την επέκταση ξανά με $\tilde{Q}_\mu$.

Πρόταση 1.2.9. *Ο τελεστής $\tilde{Q}_\mu$ επεκτείνεται σε φραγμένη εμφύτευση $\tilde{Q}_\mu : \mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{B}$. Μάλιστα ο $\tilde{Q}_\mu$ δίνεται από τη σχέση*

$$\tilde{Q}_\mu f = \int_{\mathcal{B}} x f(x)\mu(dx) \quad \text{για κάθε } f \in \mathcal{R}. \tag{1.37}$$

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{R}$ και $(f_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{B}^*$ που συγκλίνει στην f στον $L^2(\mathcal{B})$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\left\|\tilde{Q}_\mu f_n - \tilde{Q}_\mu f_m\right\| \leq \int_{\mathcal{B}} \|x\|^2|f_n(x) - f_m(x)|\mu(dx) \leq \left(\int_{\mathcal{B}} \|x\|^2\mu(dx)\right)^{1/2} \|f_n - f_m\|_{L^2\mathcal{B})} \tag{1.38}$$

και επειδή η $(f_n)_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $L^2(\mathcal{B})$ η $\left(\tilde{Q}_\mu f_n\right)_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{B}$ άρα συγκλίνει. Θέτουμε $\tilde{Q}_\mu f = \lim_{n\to\infty} \tilde{Q}_\mu f_n$. Επιπλέον ισχύει ο τύπος (1.37) αφού

$$\begin{aligned} \left\|\int_{\mathcal{B}} x f(x)\mu(dx) - \int_{\mathcal{B}} x f_n(x)\mu(dx)\right\| &\leq \int_{\mathcal{B}} \|x\||f(x) - f_n(x)|\mu(dx) \\ &\leq \left(\int_{\mathcal{B}} \|x\|^2\mu(dx)\right)^{1/2} \|f - f_n\|_{L^2\mathcal{B})} \to 0 \end{aligned} \tag{1.39}$$

καθώς $n \to \infty$. Μένει να δείξουμε πως ο $\tilde{Q}_\mu : \mathcal{R} \to \mathcal{B}$ είναι 1-1. Έστω λοιπόν $f \in \ker \tilde{Q}_\mu$, δηλαδή $\int_{\mathcal{B}} x f(x)\mu(dx) = 0$. Τότε για κάθε $g \in \mathcal{B}^*$ είναι

$$g\left(\int_{\mathcal{B}} x f(x)\mu(dx)\right) = 0 \implies \int_{\mathcal{B}} f(x)g(x)\mu(dx) = 0. \tag{1.40}$$

Κατά συνέπεια $\langle f, g\rangle_{L^2(\mathcal{B})} = 0$ για κάθε $g \in \mathcal{B}^*$, άρα και για κάθε $g \in \mathcal{R}$. Τότε όμως $f = 0$. □

1.2.3 Ο χώρος Cameron - Martin

Σε αυτή την ενότητα δουλεύουμε με έναν αφηρημένο χώρο Wiener $(\mathcal{B}, \mathscr{B}(\mathcal{B}), \mu)$, κατασκευάζουμε τον χώρο Cameron - Martin $\mathcal{H}$ του $\mathcal{B}$ και μελετάμε ορισμένες ιδιότητές του. Πιο ειδικά αν $h \in \mathcal{B}$ και T_h είναι η μετάθεση κατά h, δηλαδή $T_h(x) = x + h$ για κάθε $x \in \mathcal{B}$ τότε το μέτρο $\mu_h = (T_h)_*\mu$ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ μόνο όταν το h είναι στοιχείο του χώρου Cameron - Martin.

Ορισμός 1.2.8 (Χώρος Cameron - Martin)**.** Ο χώρος Cameron - Martin $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}$ ορίζεται να είναι η εικόνα του τελεστή $\tilde{Q}_\mu$ που δίνεται από τον τύπο (1.37), δηλαδή $\mathcal{H} = \operatorname{im} \tilde{Q}_\mu$.

Ο $\mathcal{H}$ γίνεται διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ που δίνεται από τη σχέση

$$\langle h_1, h_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f_{h_1}, f_{h_2} \rangle_{L^2(\mathcal{B})}, \tag{1.41}$$

όπου $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ και τα f_{h_1}, f_{h_2} είναι τα μοναδικά στοιχεία του $\mathcal{R}$ με $h_i = \tilde{Q}_\mu f_{h_i}, i = 1, 2$.

Μπορούμε να δώσουμε και έναν εναλλακτικό χαρακτηρισμό για τη νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$

Λήμμα 1.2.8. *Για κάθε $h \in \mathcal{H}$ είναι $\|h\|_{\mathcal{H}} = \sup \left\{ f(h) : f \in \mathcal{B}^*, \|f\|_{L^2(\mathcal{B})} \le 1 \right\}$.*

Απόδειξη. Έστω $h \in \mathcal{H}$ και f_h το μοναδικό στοιχείο του $\mathcal{R}$ με $h = \tilde{Q}_\mu f_h$. Επειδή ο $\mathcal{R}$ είναι χώρος Hilbert και ο $\mathcal{B}^*$ είναι πυκνός στον $\mathcal{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|h\|_{\mathcal{H}} = \|f_h\|_{L^2(\mathcal{B})} &= \sup \left\{ |\langle f, f_h \rangle_{L^2(\mathcal{B})}| : f \in \mathcal{R}, \|f\|_{L^2(\mathcal{B})} \le 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| f \left(\tilde{Q}_\mu f_h \right) \right| f \in \mathcal{B}^*, \|f\|_{L^2(\mathcal{B})} \le 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ |f(h)| : f \in \mathcal{B}^*, \|f\|_{L^2(\mathcal{B})} \le 1 \right\} \end{aligned} \tag{1.42}$$

που είναι το ζητούμενο. ☐

Λήμμα 1.2.9. *Ο χώρος Cameron-Martin $\mathcal{H}$ εμφυτεύεται συνεχώς στον $\mathcal{B}$.*

Απόδειξη. Αν θέσουμε c να είναι η νόρμα της ένθεσης $j : \mathcal{B}^* \hookrightarrow L^2(\mathcal{B})$, τότε χρησιμοποιούμε το προηγούμενο λήμμα και έχουμε

$$\begin{aligned} \|h\|_{\mathcal{B}} &= \sup \{ f(h) : f \in \mathcal{B}^*, \|f\|_{\mathcal{B}^*} \le 1 \} \\ &\le \sup \left\{ f(h) : \|j(f)\|_{L^2(\mathcal{B})} \le c \right\} \\ &= c\|h\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

☐

Λήμμα 1.2.10. *Υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathcal{R}$ που περιέχεται στον $\mathcal{B}^*$.*

Απόδειξη. Έστω $F = \{f_n\}_{n \ge 1}$ πυκνό υποσύνολο του $\left(\mathcal{B}^*, \|\cdot\|_{L^2(\mathcal{B})} \right)$. Με τη διαδικασία Gram-Schmidt κατασκευάζουμε ορθοκανονική βάση $\{e_n\}_{n \ge 1}$ του $\mathcal{B}^*$, η οποία θα είναι και ορθοκανονική βάση του $\mathcal{R}$. ☐

Πρόταση 1.2.10. *Έστω $\mathcal{B}$ αφηρημένος χώρος Wiener και $\mathcal{H}$ ο αντίστοιχος χώρος Cameron-Martin. Τότε $\mu(\mathcal{H}) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $\{e_n\}_{n \ge 1}$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{R}$ που περιέχεται στον $\mathcal{B}^*$. Τότε οι e_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές καθε μία από τις οποίες έχει την κατανομή $N(0, 1)$. Από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} |e_n|^2 = 1 \quad \mu - \text{σχεδόν παντού}$$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} |e_n|^2 = \infty$ $\mu-$σχεδόν παντού.

Έστω τώρα $h \in \mathcal{H}$ και f_h το μοναδικό στοιχείο του $\mathcal{R}$ ώστε $h = \tilde{Q}_\mu f_h = \int_{\mathcal{B}} x f_h(x)\mu(dx)$. Επειδή $\{e_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}^*$ έχουμε ότι $e_n(h) = \int_{\mathcal{B}} e_n(x) f_h(x)\mu(dx) = \langle e_n, f_h\rangle_{L^2(\mathcal{B})}$. Με τη βοήθεια της ταυτότητας Parseval γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e_n(h)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, f_h\rangle^2_{L^2(\mathcal{B})} = \|f_h\|^2_{L^2(\mathcal{B})} = \|h\|^2_{\mathcal{H}} < \infty. \tag{1.44}$$

Πράγματι λοιπόν $\mu(\mathcal{H}) = 0$. $\square$

Πρόταση 1.2.11. *Έστω $\mathcal{B}$ αφηρημένος χώρος Wiener και $c \in \mathbb{R}$. Έστω επίσης η απεικόνιση $P_c : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ με $P_c(x) = cx$ για κάθε $x \in \mathcal{B}$. Τότε $(P_c)_*\mu \perp \mu$ για κάθε $c \neq \pm 1$.*

Απόδειξη. Όπως και στην προηγούμενη πρόταση, έστω $\{e_n\}_{n\geq 1}$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{R}$ που περιέχεται στον $\mathcal{B}^*$. Τότε οι e_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές καθε μία από τις οποίες έχει την κατανομή $N(0,1)$. Από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} |e_n|^2 = 1 \quad \mu - \text{σχεδόν παντού.}$$

Στον χώρο πιθανότητας $(\mathcal{B}, \mathscr{B}(\mathcal{B}), (P_c)_*\mu)$ οι e_n είναι ξανά ανεξάρτητες και ισόνομες όμως κάθε μία έχει τη κατανομή $N(0, c^2)$. Ξανά από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} |e_n|^2 = c^2 \quad (P_c)_*\mu - \text{σχεδόν παντού.}$$

Αν λοιπόν $c \neq \pm 1$ τότε τα μέτρα $(P_c)_*\mu$ και μ είναι κάθετα. $\square$

Το Θεώρημα Cameron-Martin. Η προηγούμενη πρόταση μας δείχνει πως τα Γκαουσιανά μέτρα σε απειροδιάστατους διαχωρίσιμους χώρους Banach έχουν μία τάση να είναι κάθετα μεταξύ τους. Θα εξετάσουμε τι γίνεται με τις μεταθέσεις Γκαουσιανών μέτρων. Ας θυμηθούμε όμως τι συμβαίνει στην περίπτωση πεπερασμένης διάστασης.

Έστω $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \gamma_n)$ ο $n-$διάστατος Γκαουσιανός χώρος, όπου το γ_n είναι το μέτρο

$$\gamma_n(A) = (2\pi)^{-n/2} \int_A \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) dx \quad \text{για κάθε } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n).$$

Αν $h \in \mathbb{R}^n$ και T_h είναι η μετάθεση κατά h, τότε θέτουμε $\nu = (T_h)_*\gamma_n$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ είναι

$$\begin{aligned}\nu(A) = \gamma_n(T_h^{-1}(A)) = \gamma_n(A-h) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{A-h} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_A \exp\left(-\frac{|x-h|^2}{2}\right) dx \\ &= \int_A \exp\left(\langle x, h\rangle_{\mathbb{R}^n} - \frac{|h|^2}{2}\right) \gamma_n(dx).\end{aligned} \tag{1.45}$$

Άρα το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το γ_n για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$ και

$$\frac{d\nu}{d\gamma_n}(x) = \exp\left(\langle x, h\rangle_{\mathbb{R}^n} - \frac{|h|^2}{2}\right).$$

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα στην απειροδιάστατη περίπτωση είναι το θεώρημα Cameron-Martin, το οποίο μας λέει πως ο παραπάνω υπολογισμός «επιβιώνει» μόνο όταν $h \in \mathcal{H}$.

Θεώρημα 1.2.11 (Cameron-Martin). *Έστω $\mathcal{B}$ αφηρημένος χώρος Wiener. Για κάθε $h \in \mathcal{B}$ θεωρούμε την μετάθεση $T_h(x) = x + h$ για κάθε $x \in \mathcal{B}$, και το μέτρο $\mu_h = (T_h)_*\mu$. Τότε το μ_h είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ αν και μόνο αν το h είναι στοιχείο του χώρου Cameron-Martin $\mathcal{H}$. Σε αυτή την περίπτωση*

$$\frac{d\mu_h}{d\mu}(x) = \exp\left(f_h(x) - \frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2\right), \tag{1.46}$$

όπου f_h το μοναδικό στοιχείο του $\mathcal{R}$ με $h = \tilde{Q}_\mu f_h$. Αν $h \notin \mathcal{H}$ τότε $\mu_h \perp \mu$.

Η απόδειξη θα βασιστεί στις επόμενες προτάσεις.
Ξεκινάμε με το παρακάτω γενικό θεώρημα που αποτελεί ένα κριτήριο για τη καθετότητα δύο μέτρων πιθανότητας.

Θεώρημα 1.2.12 (Hellinger). *Έστω μ, ν δύο μέτρα πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{F})$ και λ ένα θετικό μέτρο τέτοιο ώστε $\mu << \lambda$ και $\nu << \lambda$. Τότε το ολοκλήρωμα*

$$H(\mu,\nu) = \int_X \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}\cdot\frac{d\nu}{d\lambda}}d\lambda \tag{1.47}$$

δεν εξαρτάται από το λ και

$$2(1 - H(\mu,\nu)) \leq |\mu-\nu|(X) \leq 2\sqrt{1 - H(\mu,\nu)^2}. \tag{1.48}$$

Απόδειξη. Αρχικά θεωρούμε ότι $\lambda = \mu + \nu$. Θέτουμε $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$ και $g = \frac{d\nu}{d\lambda}$. Τότε $|\mu - \nu|(X) = \int_X |f-g|d\lambda$. Ολοκληρώνουμε την ανισότητα

$$\left(\sqrt{f} - \sqrt{g}\right)^2 \leq |f-g| = \left|\sqrt{f} - \sqrt{g}\right|\left|\sqrt{f} + \sqrt{g}\right|$$

και έχουμε

$$\int_X \left(\sqrt{f} - \sqrt{g}\right)^2 d\lambda \leq \int_X |f-g|d\lambda \implies \int_X fd\lambda + \int_X gd\lambda + 2\int_X \sqrt{fg}d\lambda \leq |\mu-\nu|(X) \tag{1.49}$$

οπότε $2(1 - H(\mu,\nu)) \leq |\mu - \nu|(X)$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz γράφουμε

$$\begin{aligned} |\mu-\nu|(X) &= \int_X |f-g|d\lambda \\ &= \int_X \left|\sqrt{f} - \sqrt{g}\right|\left|\sqrt{f} + \sqrt{g}\right| d\lambda \\ &\leq \left(\int_X \left|\sqrt{f} - \sqrt{g}\right|^2 d\lambda\right)^{1/2} \left(\int_X \left|\sqrt{f} + \sqrt{g}\right|^2 d\lambda\right)^{1/2} \\ &= (2 - 2H(\mu,\nu))^{1/2}(2 + 2H(\mu,\nu))^{1/2} \\ &= 2\sqrt{1 - H(\mu,\nu)^2} \end{aligned} \tag{1.50}$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο για το μέτρο $\lambda = \mu + \nu$.

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι το $H(\mu,\nu)$ δεν εξαρτάται από το λ. Αν λ' είναι ένα άλλο μέτρο με $\mu << \lambda'$, $\nu << \lambda'$ τότε $\lambda << \lambda'$. Θέτουμε $f' = \frac{d\mu}{d\lambda'}$, $g' = \frac{d\nu}{d\lambda'}$ και $h = \frac{d\lambda}{d\lambda'}$, οπότε $f' = hf$ και $g' = hg$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_X \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda}\cdot\frac{d\nu}{d\lambda}}d\lambda = \int_X \sqrt{fg}d\lambda = \int_X \sqrt{fg}hd\lambda' \\ = \int_X \sqrt{hf\cdot hg}d\lambda' \\ = \int_X \sqrt{f'g'}d\lambda' \\ = \int_X \sqrt{\frac{d\mu}{d\lambda'}\cdot\frac{d\nu}{d\lambda'}}d\lambda'\end{aligned} \tag{1.51}$$

πράγματι λοιπόν το $H(\mu,\nu)$ δεν εξαρτάται από το λ. □

Πόρισμα 1.2.12.1. *Αν τα μ,ν είναι μέτρα πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $(X,\mathcal{F})$ τότε έχουμε την ισοδυναμία*

$$\mu \perp \nu \iff H(\mu,\nu) = 0 \iff |\mu-\nu|(X) = 2. \tag{1.52}$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα $H(\mu,\nu) = 0 \iff |\mu-\nu|(X) = 2$. Με τον συμβολισμό του προηγούμενου θεωρήματος, $H(\mu,\nu) = 0$ αν και μόνο αν $\lambda(A) = 0$ όπου $A = \{x \in X : f(x)g(x) \neq 0\}$. Τότε $\mu(A) = \nu(A) = 0$. Αν θεωρήσουμε το σύνολο

$$E = \{x \in X : f(x) = 0, g(x) > 0\}$$

τότε $\mu(E) = \nu(A^c \setminus E) = 0$ και το ζητούμενο έπεται. □

Πόρισμα 1.2.12.2. *Έστω $a \in \mathbb{R}$ και πραγματικές συναρτήσεις $p, p_a : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ με*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{και} \quad p_a(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2}\right).$$

Θεωρούμε επίσης τα Γκαουσιανά μέτρα γ,γ_a που έχουν πυκνότητες τις παραπάνω συναρτήσεις αντίστοιχα. Τότε $|\gamma-\gamma_a|(\mathbb{R}) \geq 2\left(1-\exp\left(-\frac{a^2}{8}\right)\right)$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα Hellinger είναι $|\gamma-\gamma_a|(\mathbb{R}) \geq 2(1-H(\gamma,\gamma_a))$. Όμως

$$H(\gamma,\gamma_a) = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{p(x)p_a(x)}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{4}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2}(ax-x^2)}dx = \exp\left(-\frac{a^2}{8}\right). \tag{1.53}$$

□

Λήμμα 1.2.13. *Έστω $g \in \mathcal{R}$. Τότε το μέτρο μ_g που δίνεται ως*

$$\mu_g(A) = \int_A \exp\left(g(x) - \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)\mu(dx) \quad \text{για κάθε } A \in \mathscr{B}(\mathcal{B})$$

είναι Γκαουσιανό μέτρο στον $\mathcal{B}$ με χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\hat{\mu}_g(f) = \exp\left(if\left(\tilde{Q}_\mu g\right) - \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right) \quad \text{για κάθε } f \in \mathcal{B}^*. \tag{1.54}$$

Απόδειξη. Επειδή $g \sim N\left(0, \|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)$ έχουμε ότι

$$\int_{\mathcal{B}} e^{a|g(x)|}\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{a|t|}(g_*\mu)(dt) < \infty \quad \text{για κάθε } a > 0. \tag{1.55}$$

Ειδικότερα $e^{|g|} \in L^1(\mathcal{B})$ οπότε το μ_g είναι πεπερασμένο μέτρο. Μάλιστα είναι μέτρο πιθανότητας αφού

$$\mu_g(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \exp\left(g(x) - \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)\mu(dx) = \exp\left(\frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)\int_{\mathbb{R}} e^t(g_*\mu)(dt) = 1, \tag{1.56}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τη ταυτότητα

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha t - \lambda t^2}dt = \exp\left(\frac{\alpha}{4\lambda}\right)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \quad \text{για } \lambda > 0.$$

Προχωράμε τώρα στην απόδειξη της (1.54). Για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ είναι

$$\hat{\mu}_g(f) = \int_{\mathcal{B}} e^{if(x)}\mu_g(dx) = \exp\left(\frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)\int_{\mathcal{B}} e^{if(x)+g(x)}\mu(dx). \tag{1.57}$$

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)\int_{\mathcal{B}} e^{i(f(x)-tg(x))}\mu(dx)\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)\hat{\mu}(f-tg)\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\|f-tg\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})} + \|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})} + t^2\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})} - 2t\langle f, g\rangle_{L^2(\mathcal{B})}\right)\right)\\
&= \exp\left(tf\left(\tilde{Q}_\mu g\right) - \frac{t^2+1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})} - \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)
\end{aligned} \tag{1.58}$$

και επειδή $e^{a|g|} \in L^2(\mathcal{B})$ για κάθε $a > 0$ οι συναρτήσεις

$$z \to \exp\left(\frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)\int_{\mathcal{B}} e^{i(f(x)-zg(x))}\mu(dx)$$

και

$$z \to \exp\left(zf\left(\tilde{Q}_\mu g\right) - \frac{z^2+1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathcal{B})} - \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)$$

είναι ολόμορφες στο $\mathbb{C}$ και συμπίπτουν για κάθε πραγματικό z. Από την αρχή της αναλυτικής συνέχισης θα συμπίπτουν και σε όλο το $\mathbb{C}$. Για $z = i$ έχουμε ότι $i(f(x) - ig(x)) = if(x) + g(x)$ άρα

$$\hat{\mu}_g(f) = \exp\left(if\left(\tilde{Q}_\mu g\right) - \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right),$$

που είναι η (1.54). □

Έχουμε τώρα όλα τα εργαλεία για να αποδείξουμε το θεώρημα Cameron-Martin.

Απόδειξη για το Θεώρημα 1.2.11. Έστω $h \in \mathcal{H}$. Τότε για κάθε $f \in \mathcal{B}^*$ έχουμε

$$\hat{\mu}_h(f) = \int_{\mathcal{B}} e^{if(x)} \mu_h(dx) = \int_{\mathcal{B}} e^{if(x+h)} \mu(dx) = e^{if(h)} \hat{\mu}(f).$$

Όμως $h = \tilde{Q}_\mu f_h$ και $\hat{\mu}(f) = \exp\left(-\frac{1}{2} \|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})}\right)$. Από την Πρόταση 1.2.3 και το Λήμμα 1.2.13 έχουμε ότι $\mu_h << \mu$ και

$$\frac{d\mu_h}{d\mu}(x) = \exp\left(f_h(x) - \frac{1}{2}\|h\|^2_{\mathcal{H}}\right)$$

Έστω τώρα ότι $h \notin \mathcal{H}$, οπότε $\|h\|_{\mathcal{H}} = \infty$. Από το Λήμμα 1.2.8 μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(f_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{B}^*$ έτσι ώστε για κάθε $k \geq 1$ να είναι $\|f_k\|_{L^2(\mathcal{B})} = 1$ και $f_k(h) \geq k$. Επειδή $(f_k)_* \mu = N(0,1)$ και $(f_k)_* \mu_h = N(-f_k(h), 1)$ έχουμε από το Πόρισμα 1.2.12.2 ότι

$$|\mu - \mu_h|(\mathcal{B}) \geq |(f_k)_*\mu - (f_k)_*\mu_h|(\mathbb{R}) \geq 2\left(1 - \exp\left(-\frac{f_k(h)^2}{8}\right)\right) \geq 2\left(1 - \exp\left(-\frac{k^2}{8}\right)\right). \tag{1.59}$$

Παίρνουμε το όριο $k \to \infty$ και το ζητούμενο έπεται απο το Πόρισμα 1.2.12.1. □

Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει τον χώρο Cameron-Martin ως τη τομή των γραμμικών υπόχωρων του $\mathcal{B}$ που έχουν $\mu-$μέτρο 1.

Πρόταση 1.2.12. *Έστω $\mathcal{B}$ αφηρημένος χώρος Wiener και $\mathcal{H}$ ο αντίστοιχος χώρος Cameron-Martin. Τότε είναι*

$$\mathcal{H} = \bigcap_{\substack{V \leq \mathcal{B} \\ \mu(V)=1}} V. \tag{1.60}$$

Απόδειξη. Έστω $h \notin \mathcal{H}$. Τότε $\|h\|_{\mathcal{H}} = \infty$ άρα από το Λήμμα 1.2.8 μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(f_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{B}^*$ έτσι ώστε για κάθε $k \geq 1$ να είναι $\|f_k\|_{L^2(\mathcal{B})} = 1$ και $f_k(h) \geq k$. Τότε

$$\int_{\mathbb{B}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |f_k(x)|^2 \mu(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \|f_k\|^2_{L^2(\mathcal{B})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \tag{1.61}$$

άρα ο υπόχωρος

$$L = \left\{ x \in \mathcal{B} : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |f_k(x)|^2 < \infty \right\} \tag{1.62}$$

έχει $\mu-$μέτρο 1. Όμως

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |f_k(x)|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} k^2 = \infty \tag{1.63}$$

και κατά συνέπεια $h \notin L$. Αυτό δείχνει ότι $\bigcap_{\substack{V \leq \mathcal{B} \\ \mu(V)=1}} V \subseteq \mathcal{H}$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση αν $h \in \mathcal{H}$ και $V \leq \mathcal{B}$ με $\mu(V) = 1$, τότε από το Θεώρημα Cameron-Martin 1.2.11 έπεται ότι $\mu(V + h) = 1$ και συνεπώς $h \in V$. Αυτό δείχνει ότι ισχύει και η αντίστροφη κατεύθυνση $\mathcal{H} \subseteq \bigcap_{\substack{V \leq \mathcal{B} \\ \mu(V)=1}} V$. □

1.3 Στοχαστικός Λογισμός μεταβολών

Ολοκλήρωση κατά μέρη στην εικόνα του Feynman. Στα πλαίσια της διατύπωσης της κβαντομηχανικής με ολοκληρώματα τροχιών, ο Feynman θεωρεί συναρτησοειδή της μορφής $F[\omega(t)]$ και ορίζει τη μέση τιμή του F μέσω της σχέσης

$$\langle F\rangle_S = \int F[\omega(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\omega(t)]\right)\mathcal{D}\omega(t), \tag{1.64}$$

όπου το $\omega(t)$ είναι ένα συνεχές μονοπάτι και $S[\omega(t)]$ είναι η δράση της κλασικής μηχανικής.

Υπενθυμίζουμε από το λογισμό μεταβολών, ότι αν $\eta(t)$ είναι μία μικρή διαταραχή του μονοπατιού $\omega(t)$ τότε η συναρτησιακή παράγωγος $\frac{\delta F}{\delta\omega(s)}$ είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε

$$F[\omega+\eta] = F[\omega] + \int \frac{\delta F}{\delta\omega(s)}\eta(s)ds + \text{ όροι ανώτερης τάξης} \tag{1.65}$$

και γράφουμε $\delta F = \int \frac{\delta F}{\delta\omega(s)}\delta\omega(s)ds$ σε αναλογία με το γνώριμο τύπο για διαφορικά $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$.

Θεωρούμε το συναρτησοειδές $G[\omega(t)] = F[\omega(t)]\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\omega(t)]\right)$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\frac{\delta G}{\delta\omega(s)} &= \frac{\delta F}{\delta\omega(s)}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\omega(t)]\right) + F[\omega(t)]\frac{\delta\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\omega(t)]\right)}{\delta\omega(s)} \\ &= \frac{\delta F}{\delta\omega(s)}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\omega]\right) + \frac{i}{\hbar}F[\omega]\frac{\delta S}{\delta\omega(s)} + \text{ όροι ανώτερης τάξης,}\end{aligned} \tag{1.66}$$

όπου παραπάνω αναπτύξαμε την εκθετική συνάρτηση σε σειρά Taylor και γράψαμε μόνο τον όρο πρώτης τάξης. Επίσης

$$G[\omega(t)+\eta(t)] = G[\omega(t)] + \int \frac{\delta G}{\delta\omega(s)}\eta(s)ds + \text{ όροι ανώτερης τάξης.} \tag{1.67}$$

Σε αυτό το σημείο θα αγνοήσουμε το Θεώρημα 1.2.1 και θα υποθέσουμε ότι $\mathcal{D}[\omega(t)+\eta(t)] = \mathcal{D}\omega(t)$ για σταθερό $\eta(t)$ (κάτι που φυσικά δεν ισχύει). Το ολοκλήρωμα (1.64) μένει αναλλοίωτο ως προς την αλλαγή μεταβλητής $\omega \to \omega+\eta$ (χειριζόμαστε το ολοκλήρωμα σα να ήταν συνηθισμένο ολοκλήρωμα Lebesgue) οπότε

$$\langle F\rangle_S = \int F[\omega(t)+\eta(t)]\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\omega(t)+\eta(t)]\right)\mathcal{D}\omega(t). \tag{1.68}$$

Η εξίσωση (1.67) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}\langle F\rangle_S = &\int F[\omega(t)+\eta(t)]\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\omega(t)+\eta(t)]\right)\mathcal{D}\omega(t) \\ &+ \int\left(\int\frac{\delta F}{\delta\omega(s)}\eta(s)ds\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\omega(t)]\right)\mathcal{D}\omega(t) \\ &+ \frac{i}{\hbar}\int\left(\int\frac{\delta S}{\delta\omega(s)}\eta(s)ds\right)F[\omega(t)]\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\omega(t)]\right)\mathcal{D}\omega(t) + \text{ όροι ανώτερης τάξης.}\end{aligned} \tag{1.69}$$

Από την εξίσωση (1.68), ο όρος μηδενικής τάξης στο παραπάνω ανάπτυγμα είναι $\langle F\rangle_S$ άρα θα πρέπει να μηδενίζονται οι όροι κάθε τάξης.

Συγκεκριμένα ο όρος πρώτης τάξης είναι μηδέν για κάθε $\eta(t)$ το οποίο μας δίνει την εξίσωση

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta\omega(s)} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar}\left\langle F\frac{\delta S}{\delta\omega(s)}\right\rangle_S . \tag{1.70}$$

Μπορούμε να γράψουμε αυτή την εξίσωση σε διαφορική μορφή ως $\langle \delta F\rangle_S = -\frac{i}{\hbar}\langle F\delta S\rangle_S$.

Από το Θεώρημα 1.2.1 γνωρίζουμε πως το $\mathcal{D}\omega$ δεν μπορεί να είναι κάποιο απειροδιάστατο ανάλογο του μέτρου Lebesgue και έτσι ο παραπάνω συλλογισμός είναι λάθος από μαθηματικής πλευράς.

Παρ'όλα αυτά ο Feynman ισχυρίζεται πως αυτή τη σχέση θα μπορούσε να αποτελεί βασικό νόμο για τη κβαντομηχανική. Συγκεκριμένα ισχυρίζεται πως γίνεται να ξεκινήσουμε με αυτό τον τύπο ως βασικό αξίωμα της κβαντομηχανικής και να εξάγουμε όλους τους άλλους, όπως για παράδειγμα τις σχέσεις μετάθεσης του Heisenberg. Αυτή η κατεύθυνση έχει ερευνηθεί από τον Julian Schwinger και η εξίσωση (1.70) είναι μία απ'τις εξισώσεις Schwinger - Dyson

Ολοκλήρωση κατά μέρη στον χώρο Wiener Αν σκεφτούμε να βρούμε κάποιο ανάλογο στη στοχαστική ανάλυση, μας έρχεται στο μυαλό ο κλασικός χώρος Wiener που ορίζεται ως εξής: Έστω $\tau > 0$ και $\mathcal{W} = C([0,\tau];\mathbb{R}^d) = \{f : [0,\tau] \to \mathbb{R}^d \ : f \text{ συνεχής}\}$ Σε αυτό τον χώρο θεωρούμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_1 = \{Y \cap \mathcal{W} : Y \in \otimes_{t\in[0,\tau]}\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\}$. Μπορούμε να δούμε τότε την τυπική κίνηση Brown ως τυχαία μεταβλητή $B : (A, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathcal{W}, \mathcal{A}_1)$, όπου $(A, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ είναι κάποιος χώρος πιθανότητας στον οποίον ορίζεται η κίνηση Brown. Αν θέσουμε μ_w την κατανομή της κίνησης Brown, τότε αυτό είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $(\mathcal{W}, \mathcal{A}_1)$ που το ονομάζουμε μέτρο Wiener.

Άν θεωρήσουμε μία τυχαία μεταβλητή $X : (\mathcal{W}, \mathcal{A}_1, \mu_w) \to \mathbb{R}$ τότε αυτή μπορεί να θεωρηθεί, κατα κάποιο τρόπο, ως συναρτησοειδές αφού κάθε $\omega \in \mathcal{W}$ είναι συνεχής μονοπάτι. Αν θέλουμε να έχουμε κάποιο ανάλογο της (1.70), τότε θα πρέπει με κάποιο τρόπο να ορίσουμε μία ποσότητα της μορφής $\frac{\delta X}{\delta\omega}$. Ουσιαστικά θέλουμε να παραγωγίζουμε τυχαίες μεταβλητές στον χώρο Wiener $\mathcal{W}$, ως προς μονοπάτια της κίνησης Brown $\omega \in \mathcal{W}$.

Ένας παρόμοιος τύπος ολοκλήρωσης κατά μέρη υπάρχει για Γκαουσιανές μεταβλητές. Αν το μέτρο ν είναι το μέτρο γινόμενο d ανεξάρτητων Γκαουσιανών κατανομών με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2 και $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε ισχύει ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} D_\upsilon f(x)\nu(dx) = \frac{1}{\sigma^2}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\sum_{k=1}^{d}\upsilon_k x_k \nu(dx), \tag{1.71}$$

όπου D_υ η παράγωγος κατά κατεύθυνση στη κατεύθυνση υ.

Είναι δυνατό να γενικεύσουμε αυτή τη σχέση στο χώρο Wiener. Γνωρίζουμε πως το μέτρο Wiener είναι ημιαναλοίωτο μόνο κάτω από τις μεταθέσεις $T_h(\omega) = \omega + h$ για τις οποίες το h είναι στοιχείο του χώρου Cameron - Martin $\mathcal{H}$. Στο [14] (Θεώρημα 42.15) αποδεικνύεται πως αυτός ο χώρος Cameron-Martin είναι

$$\mathcal{H} = \left\{ h : h(t) = \int_0^t \upsilon(s)ds \ , \upsilon \in L^2([0,\tau]) \right\} \tag{1.72}$$

Αν διαμερίσουμε το $[0,\tau]$ σε μικρά κομμάτια δt, τότε τα κομμάτια $\delta\omega(t)$ είναι ανεξάρτητες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με διασπορά δt (τα μονοπάτια ω είναι με πιθανότητα 1 μονοπάτια της κίνησης Brown). Μία διαταραχή του μονοπατιού ω στη κατεύθηνση $h = \int \upsilon(s)ds$ αντιστοιχεί σε διαταραχή κάθε κομματιού στη διεύθυνση $\upsilon(t)\delta t$. Από την εξίσωση (1.71), έχουμε

$$\int_{\mathcal{W}} D_h f(\omega)\mu_w(d\omega) \approx \frac{1}{\delta t}\int_{\mathcal{W}} f(\omega)\sum \upsilon(t)\delta t\delta\omega(t)\mu_w(d\omega) \approx \int_{\mathcal{W}} f(\omega)\left(\int_0^\tau \upsilon(t)d\omega(t)\right)\ \mu_w(d\omega). \tag{1.73}$$

Αν καταφέρουμε να δικαιολογήσουμε αυστηρά αυτό το συλογισμό θα έχουμε τον ακόλουθο σημαντικό τύπο ολοκλήρωσης κατά μέρη

$$\mathbb{E}\left[D_h f(\omega)\right] = \mathbb{E}\left[f(\omega)\int_0^T \upsilon(t)d\omega(t)\right]. \tag{1.74}$$

Παρατηρήστε πως το ολοκλήρωμα $\int_0^T \upsilon(t)d\omega(t)$ είναι στοχαστικό διότι $\omega(t)$ είναι μονοπάτι κίνησης Brown. Ο παραπάνω συλλογισμός έχει εμπνεύσει την ονομασία του κλάδου ως *στοχαστικός λογισμός μεταβολών*.

Σκοπός μας στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας, είναι να δείξουμε την Πρόταση 1.3.1 η οποία δείχνει πως ο παραπάνω συλλογισμός είναι δυνατό να γίνει αυστηρός μέσω του θεωρήματος Cameron-Martin.

Πρώτα όμως θα δούμε κάποια στοιχεία διαφορικού λογισμού στον αφηρημένο χώρο Wiener $\mathcal{B}$.

Ορισμός 1.3.1. Έστω συνάρτηση $F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η F είναι Fréchet διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathcal{B}$ αν υπάρχει $\ell \in \mathcal{B}^*$ έτσι ώστε

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - \ell(h)| = o(\|h\|_{\mathcal{B}}) \quad \text{καθώς} \quad h \to 0 \text{ στον } \mathcal{B}. \tag{1.75}$$

Ο τελεστής $\ell \in \mathcal{B}^*$ με την παραπάνω ιδιότητα είναι μοναδικός και θέτουμε $F'(x_0) = \ell$.

Αν η συνάρτηση $F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ είναι Fréchet διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathcal{B}$, τότε η παράγωγος κατά κατεύθυνση

$$\partial_\upsilon F(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{F(x_0 + t\upsilon) - F(x_0)}{t} \tag{1.76}$$

υπάρχει για κάθε $\upsilon \in \mathcal{B}$ και ισούται με $F'(x_0)(\upsilon)$.

Ορισμός 1.3.2. Μία συνάρτηση $F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ λέγεται $\mathcal{H}-$διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathcal{B}$ αν υπάρχει $\ell_0 \in \mathcal{H}^*$ έτσι ώστε

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - \ell_0(h)| = o(\|h\|_{\mathcal{H}}) \quad \text{καθώς} \quad h \to 0 \text{ στον } \mathcal{H}. \tag{1.77}$$

Αν η $F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{H}-$διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathcal{B}$ τότε ο τελεστής ℓ_0 λέγεται $\mathcal{H}-$παράγωγος της F στο x_0. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει μοναδικό $y \in \mathcal{H}$ το οποίο αναπαριστά τον ℓ_0, δηλαδή

$$\ell_0(h) = \langle y, h\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{για κάθε} \quad h \in \mathcal{H}. \tag{1.78}$$

Αυτό το $y \in \mathcal{H}$ το ονομάζουμε $\mathcal{H}-$κλίση της F στο x_0 ή παράγωγο Malliavin της F στο x_0 και θέτουμε

$$\nabla_{\mathcal{H}} F(x_0) = y. \tag{1.79}$$

Λήμμα 1.3.1. *Αν η συνάρτηση $F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ είναι Fréchet διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathcal{B}$, τότε είναι και $\mathcal{H}-$διαφορίσιμη στο x_0 και η $\mathcal{H}-$παράγωγος της F στο x_0 δίνεται από την σχέση $h \to F'(x_0)(h)$ για κάθε $h \in \mathcal{H}$. Επιπλέον ισχύει ότι $\nabla_{\mathcal{H}} F(x_0) = \tilde{Q}_\mu F'(x_0)$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.2.9 έχουμε ότι

$$\frac{\|h\|_{\mathcal{B}}}{\|h\|_{\mathcal{H}}} \le c \quad \text{για κάθε} \quad h \in \mathcal{H},$$

όπου c είναι η νόρμα της ένθεσης $j : \mathcal{B}^* \hookrightarrow L^2(\mathcal{B})$. Άρα λοιπόν

$$\lim_{\|h\|_{\mathcal{H}}\to 0} \frac{|F(x_0+h)-F(x_0)-F'(x_0)(h)|}{\|h\|_{\mathcal{H}}} = \lim_{\|h\|_{\mathcal{B}}\to 0} \frac{|F(x_0+h)-F(x_0)-F'(x_0)(h)|}{\|h\|_{\mathcal{B}}} \cdot \frac{\|h\|_{\mathcal{B}}}{\|h\|_{\mathcal{H}}} = 0. \tag{1.80}$$

Για να δείξουμε ότι $\nabla_{\mathcal{H}} F(x_0) = \tilde{Q}_\mu F'(x_0)$, παρατηρούμε πως για κάθε $\phi \in \mathcal{B}^*$ και $h \in \mathcal{H}$ είναι

$$\phi(h) = \phi\left(\tilde{Q}_\mu f_h\right) = \int_{\mathcal{B}} \phi(x) f_h(x)\mu(dx) = \left\langle \tilde{Q}_\mu \phi, h\right\rangle_{\mathcal{H}}, \tag{1.81}$$

άρα για $\phi = F'(x_0)$ είναι

$$F'(x_0)(h) = \left\langle \tilde{Q}_\mu F'(x_0), h\right\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{1.82}$$

Όμως $F'(x_0)(h) = \langle \nabla_{\mathcal{H}} F'(x_0), h\rangle_{\mathcal{H}}$ εξ' ορισμού, άρα $\nabla_{\mathcal{H}} F(x_0) = \tilde{Q}_\mu F'(x_0)$. □

Θεωρούμε τώρα μία $\mathcal{H}-$διαφορίσιμη τυχαία μεταβλητή $F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ και προχωράμε στο εξής φορμαλιστικό επιχείρημα.

Για σταθερό $h \in \mathcal{H}$ το θεώρημα Cameron-Martin δίνει ότι

$$\int_{\mathcal{B}} F(x+th)\mu(dx) = \int_{\mathcal{B}} F(x) \exp\left(tf_h(x) - \frac{1}{2}t^2\|h\|^2_{\mathcal{H}}\right)\mu(dx).$$

Παραγωγίζουμε ως προς t στα παραπάνω ολοκληρώματα και υπολογίζουμε την παράγωγο στο $t = 0$. Καταλήγουμε τότε στην εξίσωση ολοκλήρωσης κατά μέρη

$$\int_{\mathcal{B}} \langle \nabla_{\mathcal{H}} F(x), h\rangle_{\mathcal{H}}\, \mu(dx) = \int_{\mathcal{B}} F(x) f_h(x)\mu(dx). \tag{1.83}$$

Η προσέγγιση αυτή αναπτύχθηκε από τον Bismut στις αρχές της δεκαετίας του 1980.

Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να κάνουμε αυστηρό το παραπάνω επιχείρημα για κατάλληλες συναρτήσεις F.

Θεωρούμε τον χώρο $C^1_b(\mathcal{B})$ των Fréchet διαφορίσιμων συναρτήσεων που έχουν φραγμένη παράγωγο. Δηλαδή

$$C^1_b(\mathcal{B}) = \left\{F : \mathcal{B} \to \mathbb{R} : F \text{ Fréchet διαφορίσιμη και } \|F\|_{C^1_b(\mathcal{B})} = \sup_{x\in\mathcal{B}} \|F'(x)\|_{\mathcal{B}^*} < \infty\right\}. \tag{1.84}$$

Προκειμένου να δείξουμε την (1.83) για συναρτήσεις στον $C^1_b(\mathcal{B})$, θα χρειαστούμε την εξής μορφή του θεωρήματος μέσης τιμής.

Λήμμα 1.3.2. *Έστω $F \in C^1_b(\mathcal{B})$ και $a, b \in \mathcal{B}$. Υπάρχει $y \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε*

$$F(b) - F(a) = F'(y)(b-a). \tag{1.85}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $s : [0,1] \to \mathcal{B}$ με $s(t) = a + (b-a)t$. Από το θεώρημα μέσης τιμής για την $F\circ s : [0,1] \to \mathbb{R}$ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $F(s(1))-F(s(0)) = (F\circ s)'(\xi)(1-0)$ οπότε η (1.85) έπεται από τον κανόνα της αλυσίδας με την επιλογή $y = s(\xi)$.

□

Πρόταση 1.3.1. *Αν $F, G \in C_b^1(\mathcal{B})$ και $h \in \mathcal{H}$, τότε*

$$\int_{\mathcal{B}} \partial_h F(x)\mu(dx) = \int_{\mathcal{B}} F(x) f_h(x)\mu(dx) \tag{1.86}$$

και

$$\int_{\mathcal{B}} \partial_h F(x) G(x)\mu(dx) = -\int_{\mathcal{B}} F(x)\partial_h G(x)\mu(dx) + \int_{\mathcal{B}} F(x)G(x)f_h(x)\mu(dx). \tag{1.87}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Cameron-Martin 1.2.11 έχουμε

$$\int_{\mathcal{B}} F(x+th)\mu(dx) = \int_{\mathcal{B}} F(x)\exp\left(tf_h(x) - \frac{1}{2}t^2\|h\|_{\mathcal{H}}^2\right)\mu(dx) \tag{1.88}$$

άρα για κάθε $0 < t < 1$ είναι

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{F(x+th) - F(x)}{t}\mu(dx) = \int_{\mathcal{B}} F(x)\left(\frac{\exp\left(tf_h(x) - \frac{1}{2}t^2\|h\|_{\mathcal{H}}^2\right) - 1}{t}\right)\mu(dx). \tag{1.89}$$

Από την (1.85) είναι $F(x+th) - F(x) = F'(y)(th)$ για κάποιο $y \in \mathcal{B}$, και σε συνδυασμό με το Λήμμα 1.2.9 έχουμε ότι

$$\left|\frac{F(x+th) - F(x)}{t}\right| \leq c\|F\|_{C_b^1(\mathcal{B})}\|h\|_{\mathcal{H}}, \tag{1.90}$$

όπου c είναι η νόρμα της ένθεσης $j : \mathcal{B}^* \hookrightarrow L^2(\mathcal{B})$. Επειδή $F \in C_b^1(\mathcal{B})$ η παραπάνω έκφραση είναι φραγμένη άρα και ολοκληρώσιμη. Επίσης για κάθε $0 < t < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\left|\exp\left(tf_h(x) - \frac{1}{2}t^2\|h\|_{\mathcal{H}}^2\right) - 1\right|}{t} &\leq \frac{\left|\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\|h\|_{\mathcal{H}}^2\right)\left(\exp(tf_h(x)) - 1\right)\right|}{t} + \frac{\left|\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\|h\|_{\mathcal{H}}^2\right) - 1\right|}{t}\\ &\leq |f_h(x)|\exp\left(|f_h(x)|\right) + \sup_{0<t<1}\frac{\left|\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\|h\|_{\mathcal{H}}^2\right) - 1\right|}{t}.\end{aligned} \tag{1.91}$$

Όμως η τυχαία μεταβλητή $x \to f_h(x)$ είναι Γκαουσιανή από την Πρόταση 1.2.7, επομένως η συνάρτηση $x \to |f_h(x)|e^{|f_h(x)|}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue στην εξίσωση (1.89) και επειδή $\lim_{t\to 0}\frac{F(x+th)-F(x)}{t} = \partial_h F(x)$ και $\lim_{t\to 0}\frac{\exp\left(tf_h(x) - \frac{1}{2}t^2\|h\|_{\mathcal{H}}^2\right)-1}{t} = f_h(x)$ το αποτέλεσμα είναι η εξίσωση (1.86).

Τώρα η εξίσωση (1.87) έπεται άμεσα από την (1.86) αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση FG στη θέση της F. □

Αν η συνάρτηση $F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ είναι απλά $\mathcal{H}-$διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathcal{B}$ τότε η παράγωγος κατά κατεύθυνση $\partial_h F(x_0)$ υπάρχει για κάθε $h \in \mathcal{H}$ και δίνεται από τη σχέση

$$\partial_h F(x_0) = \langle \nabla_{\mathcal{H}} F(x_0), h\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{1.92}$$

Αν θεωρήσουμε $\{e_i\}_{i\geq 1}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ τότε από την (1.92), είναι

$$\nabla_{\mathcal{H}} F(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \partial_{e_i} F(x_0) e_i, \tag{1.93}$$

όπου η παραπάνω σειρά συγκλίνει στον $\mathcal{H}$.

Χώροι Sobolev πάνω από τον $\mathcal{B}$. Θα περιγράψουμε εδώ δύο διαδικασίες με τις οποίες μπορούμε να ορίσουμε χώρους Sobolev πάνω από έναν αφηρημένο χώρο Wiener $\mathcal{B}$. Η ακριβής κατασκευή θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο σε ένα γενικότερο πλαίσιο.

Στην πρώτη διαδικασία θα μιμηθούμε τη κατασκευή των χώρων Sobolev πάνω από τον $\mathbb{R}^m$ μέσω ασθενών παραγώγων. Θεωρούμε $h \in \mathcal{H}$ και $F \in L^p(\mathcal{B})$ όπου $p \geq 1$. Θα λέμε ότι μία συνάρτηση $G \in L^1(\mathcal{B})$ είναι *ασθενής παράγωγος* της f στη κατεύθυνση h αν για κάθε $\phi \in C_b^1(\mathcal{B})$ είναι

$$\int_{\mathcal{B}} (\partial_h \phi) F d\mu = -\int_{\mathcal{B}} \phi G d\mu + \int_{\mathcal{B}} \phi F f_h d\mu. \tag{1.94}$$

Με $L^p(\mathcal{B};\mathcal{H})$ συμβολίζουμε τις $p-$Bochner ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον $\mathcal{H}$ και ορίζουμε τον χώρο Sobolev $W^{1,p}$ ως

$$\begin{aligned} W^{1,p} = \{\, F \in L^p(\mathcal{B}) : \exists \Psi \in L^p(\mathcal{B};\mathcal{H}) \text{ ώστε } \forall h \in \mathcal{H} \text{ η } \langle \Psi(\cdot), h \rangle_{\mathcal{H}} \\ \text{να είναι η ασθενής παράγωγος της } F \text{ στη κατεύθυνση } h \,\}. \end{aligned}$$

Η δεύτερη διαδικασία είναι η εξής. Θεωρούμε αρχικά τον χώρο $\mathcal{FC}_b^\infty(\mathcal{B})$ των τυχαίων μεταβλητών $X : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ που γράφονται στην μορφή $X = \varphi(f_1, \dots f_N)$ όπου $N \in \mathbb{N}, \varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$ και $f_1, \dots f_N \in \mathcal{B}^*$. Τότε $\mathcal{FC}_b^\infty(\mathcal{B}) \subset C_b^1(\mathcal{B})$ και για κάθε $x_0, \upsilon \in \mathcal{B}$ είναι

$$X'(x_0)(\upsilon) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(f_1(x_0), \dots f_N(x_0)) f_i(\upsilon). \tag{1.95}$$

Επίσης το $\mathcal{FC}_b^\infty(\mathcal{B})$ είναι πυκνό στον $L^p(\mathcal{B})$ για κάθε $p \geq 1$.

Η εξίσωση (1.87) ισχύει για συναρτήσεις στον $\mathcal{FC}_b^\infty(\mathcal{B})$ και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δειχθεί ότι ο τελεστής $\nabla_{\mathcal{H}} : \mathcal{FC}_b^\infty(\mathcal{B}) \subset L^p(\mathcal{B}) \to L^p(\mathcal{B};\mathcal{H})$ είναι closable. Αυτό σημαίνει πως η κλειστότητα του γραφήματος του τελεστή $\nabla_{\mathcal{H}}$ είναι το γράφημα κάποιου άλλου τελεστή που επεκτείνει τον $\nabla_{\mathcal{H}}$. Συμβολίζουμε αυτό τον τελεστή ξανά με $\nabla_{\mathcal{H}}$ και συμβολίζουμε το πεδίο ορισμού του με $\mathbb{D}^{1,p}$.

Προκύπτει πως οι δύο παραπάνω διαδικασίες είναι ισοδύναμες, δηλαδή $W^{1,p} = \mathbb{D}^{1,p}$ και $\Psi = \nabla_{\mathcal{H}}$. Για περισσότερα ως προς αυτές τις διαδικασίες δείτε στις αναφορές [7, 30] και ειδικότερα το Θεώρημα 8.5.1 στο [8].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Λογισμός Malliavin

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε τα βασικά στοιχεία της θεωρίας του λογισμού Malliavin. Κεντρικό ρόλο στη θεωρία κατέχουν οι τελεστές παραγώγισης Malliavin, απόκλισης, και ο τελεστής Ornstein-Uhlenbeck.

2.1 Χάος Wiener

Στην Πρόταση 1.3.1 του προηγούμενου κεφαλαίου, είδαμε τη σχέση ολοκλήρωσης κατά μέρη σε αφηρημένους χώρους Wiener $\mathcal{B}$ και περιγράψαμε τον τρόπο που μπορούμε να κατασκευάσουμε χώρους Sobolev πάνω από τον $\mathcal{B}$. Εδώ θα ακολουθήσουμε ένα διαφορετικό δρόμο και θα δουλέψουμε με ισοκανονικές Γκαουσιανές διαδικασίες.

Θα δούμε πως το κρίσιμο στοιχείο για τον ορισμό αυτών των χώρων Sobolev δεν είναι τόσο η γραμμική δομή του $\mathcal{B}$ αλλά το ότι ο αναπαράγων πυρήνας $\mathcal{R}$ είναι Γκαουσιανός χώρος Hilbert και ειδικότερα ότι ο $\mathcal{R}$ είναι μία $\mathcal{H}-$ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία.

Πρώτα όμως, μία υπενθύμηση από τις πιθανότητες.

Ορισμός 2.1.1 (Γκαουσιανή οικογένεια)**.** Μία οικογένεια $(X_i)_{i\in I}$ τυχαίων μεταβλητών με πραγματικές τιμές, που ορίζονται σε κάποιον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ λέγεται Γκαουσιανή οικογένεια, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $n-$άδα δεικτών του I $i_1, \ldots, i_n$ και κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^n$, η τυχαία μεταβλητή $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_{i_j}$ είναι Γκαουσιανή.

Ορισμός 2.1.2. Έστω H ένας πραγματικός και διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Μία H-ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία $W = \{W(h) : h \in H\}$ είναι ένας Γκαουσιανός χώρος Hilbert που παραμετρικοποιείται από τον H, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση

$$\mathbb{E}(W(h)W(g)) = \langle h, g \rangle_H \quad \forall\, h, g \in H. \tag{2.1}$$

Θα πρέπει φυσικά να δείξουμε πως υπάρχει μία H-ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία W για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H. Αν υποθέσουμε προς στιγμή ότι έχουμε μία τέτοια διαδικασία, τότε η σχέση (2.1) έχει σαν συνέπεια τη γραμμικότητα της απεικόνισης $h \to W(h)$. Πράγματι, αν

$h, g \in H$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\mathbb{E}\left((W(\lambda h + \mu g) - \lambda W(h) - \mu W(g))^2\right) = \mathbb{E}\left(W(\lambda h + \mu g)^2\right) + \lambda^2 \mathbb{E}(W(h)^2) + \mu^2 \mathbb{E}(W(g)^2)$$
$$- 2\lambda \mathbb{E}(W(\lambda h + \mu g) W(h)) - 2\mu \mathbb{E}(W(\lambda h + \mu g) W(g)) + 2\lambda\mu \mathbb{E}(W(h) W(g))$$
$$= \|\lambda h + \mu g\|_H + \lambda^2 \|h\|_H + \mu^2 \|g\|_H - 2\lambda \langle \lambda h + \mu g, h\rangle_H - 2\mu \langle \lambda h + \mu g, g\rangle_H + 2\lambda\mu \langle h, g\rangle_H = 0.$$

Έπεται λοιπόν ότι $W(\lambda h + \mu g) = \lambda W(h) + \mu W(g)$ με πιθανότητα 1. Τελικά δηλαδή η απεικόνιση $h \to W(h)$ είναι μία ισομετρική εμφύτευση $H \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H υπάρχει μία H-ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία W. Τότε παρατηρούμε πως η W εμφυτεύει ισομετρικά τον H στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Ας δούμε όμως ένα σημαντικό παράδειγμα με την κίνηση Brown.

Παράδειγμα 2.1.1 (Κίνηση Brown)**.** Θεωρούμε το χώρο Hilbert $H = L^2((0,\infty), \mathcal{B}(0,\infty), \lambda)$ όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue. Αν W είναι μία H-ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία θέτουμε $B_t = W(\mathbb{1}_{(0,t]})$. Τότε η B_t είναι Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διακύμανση

$$\mathrm{Var}(B_t) = \mathbb{E}[B_t^2] = \mathbb{E}[W(\mathbb{1}_{(0,t]}) W(\mathbb{1}_{(0,t]})] = \langle \mathbb{1}_{(0,t]}, \mathbb{1}_{(0,t]}\rangle_{L^2(0,\infty)} = t.$$

Παρατηρούμε πως αν $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t < t+s$ τότε οι δείκτριες $\mathbb{1}_{(t_0,t_1]}, \ldots, \mathbb{1}_{(t,t+s]}$ είναι κάθετες στον $L^2(0,\infty)$ οπότε οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_1} - B_{t_0} = W(\mathbb{1}_{(t_0,t_1]}), \ldots, B_{t+s} - B_s = W(\mathbb{1}_{(t,t+s]})$ είναι κάθετες στον $L^2(\Omega)$ άρα ασυσχέτιστες. Όμως αυτές οι τυχαίες μεταβλητές αποτελούν Γκαουσιανή οικογένεια οπότε είναι ανεξάρτητες. Συγκεκριμένα η $B_{t+s} - B_s$ είναι ανεξάρτητη από τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u : u \leq t)$. Από το θεώρημα συνέχειας του Kolmogorov (Πρόταση 4.2 στη σελίδα 16 του [60]) μπορούμε να διαπιστώσουμε πως υπάρχει συνεχής τροποποίηση της B_t, την οποία συμβολίζουμε ξανά με B_t. Τότε η B_t είναι τυπική κίνηση Brown. Επίσης, για $f \in L^2((0,\infty), \mathcal{B}(0,\infty), \lambda)$ και $t > 0$ αποδεικνύεται ότι $W(\mathbb{1}_{(0,t]} f) = \int_0^t f(s) dB_s$.

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω H ένας πραγματικός και διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Τότε υπάρχει μία H-ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία $W = \{W(h) : h \in H\}$.*

Απόδειξη. Έστω $\{e_i : i \geq 1\}$ ορθοκανονική βάση του H και $\{Z_i : i \geq 1\}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με πραγματικές τιμές, σε κάποιον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, καθε μία απ τις οποίες έχει την κατανομή $N(0,1)$. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $S_n = \sum_{i=1}^n \langle h, e_i\rangle_H Z_i$ όπου $n \in \mathbb{N}$. Για $m > n$ έχουμε ότι

$$\|S_m - S_n\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \sum_{i=n+1}^m \langle h, e_i\rangle_H Z_i \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{i=n+1}^m \langle h, e_i\rangle_H^2 \mathbb{E}(Z_i^2) = \sum_{i=n+1}^m \langle h, e_i\rangle_H^2.$$

Όμως απ'την ταυτότητα Parseval $\sum_{i=1}^\infty \langle h, e_i\rangle_H^2 = \|h\|_H^2 < \infty$. Έπεται λοιπόν ότι η $\{S_n\}_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $L^2(\Omega)$ άρα συγκλίνει. Πιό ειδικά, υπάρχει τυχαία μεταβλητή $W(h)$ έτσι ώστε $S_n \to W(h)$ κατα πιθανότητα. Επειδή οι $\{Z_i\}_{i\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, το θεώρημα ισοδυναμίας του Lévy (Θεώρημα 5.3.4 στο [13]) δίνει ότι $S_n \to W(h)$ με πιθανότητα 1.

Θα δείξουμε τώρα ότι για την οικογένεια $W = \{W(h) : h \in H\}$ ισχύει η σχέση (2.1). Πράγματι

$$\mathbb{E}(W(h)W(g)) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \langle h, e_i\rangle_H \langle g, e_j\rangle_H \mathbb{E}(Z_i Z_j) = \sum_{i=1}^\infty \langle h, e_i\rangle_H \langle g, e_i\rangle_H = \langle h, g\rangle_H,$$

όπου στη τελευταίο ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη ταυτότητα του Parseval.

Τέλος, θα δείξουμε ότι η $W = \{W(h) : h \in H\}$ είναι Γκαουσιανή οικογένεια. Υπενθυμίζουμε πως αν $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και α ένας πραγματικός πολυδείκτης, τότε $\sum_i \alpha_i X_i \sim N(\sum_i \alpha_i \mu_i, \sum_i (\alpha_i \sigma_i)^2)$ με την προυπόθεση ότι τα αθροίσματα συγκλίνουν απόλυτα. Είδαμε ότι $W(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i \rangle_H Z_i$ άρα $W(h) \sim N(0, \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i \rangle_H) = N(0, \|h\|_H^2)$. Άρα λοιπόν η $W(h)$ είναι Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή για κάθε $h \in H$. Έστω τώρα $n \in \mathbb{N}$, $h_1, h_2, \ldots, h_n \in H$ και $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Τότε λόγω γραμμικότητας έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i W(h_i) = W(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i)$ που είναι Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή. Πράγματι λοιπόν η W είναι Γκαουσιανή οικογένεια. □

Παράδειγμα 2.1.2 (Λευκός θόρυβος)**.** Έστω $(T, \mathcal{G}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Μία οικογένεια Γκαουσιανών τυχαίων μεταβλητών $\{M(A) : A \in \mathcal{G}\}$ που ορίζονται σε κάποιον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, λέγεται Γκαουσιανός λευκός θόρυβος στον $(T, \mathcal{G})$ με μέτρο ελέγχου το μ, αν ισχύει ότι

$$\operatorname{Cov}(M(A)M(B)) = \mathbb{E}[M(A)M(B)] = \mu(A \cap B) \tag{2.2}$$

και $M(A + B) = M(A) + M(B)$ με πιθανότητα 1, όπου $A, B \in \mathcal{G}$. Παρατηρούμε επίσης πως $M(A) \sim N(0, \mu(A))$ και οι $M(A), M(B)$ είναι ανεξάρτητες όταν $A \cap B = \emptyset$. Μπορούμε να μιμηθούμε τη κατασκευή του ολοκληρώματος Itô και να ορίσουμε ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα ως προς το M. Ξεκινώντας απο τις απλές συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, ορίζουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα ως

$$I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i M(A_i). \tag{2.3}$$

Για απλές συναρτήσεις $h, g \in L^2(T, \mathcal{G}, \mu)$, είναι $\mathbb{E}[I(h)I(g)] = \langle h, g \rangle_{L^2(T,\mathcal{G},\mu)}$ και επειδή οι απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^2(T, \mathcal{G}, \mu)$ μπορούμε να επεκτείνουμςε το στοχαστικό ολοκλήρωμα I στον $L^2(T, \mathcal{G}, \mu)$ και να έχουμε τη σχέση $\mathbb{E}[I(h)I(g)] = \langle h, g \rangle_{L^2(T,\mathcal{G},\mu)}$ για κάθε $h, g \in L^2(T, \mathcal{G}, \mu)$. Με αυτό το τρόπο παίρνουμε μία $L^2(T, \mathcal{G}, \mu)-$isonormal Γκαουσιανή διαδικασία $\{I(h) : h \in L^2(T, \mathcal{G}, \mu)$.

Συμπερασματικά, αν έχουμε ένα Γκαουσιανό λευκό θόρυβο στον $(T, \mathcal{G})$ με μέτρο ελέγχου μ, τότε το στοχαστικό ολοκλήρωμα ορίζει μία $L^2(T, \mathcal{G}, \mu)-$ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία.

Και αντίστροφα όμως, αν έχουμε μία $L^2(T, \mathcal{G}, \mu)-$ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία $W = \{W(h) : h \in L^2(T, \mathcal{G}, \mu)\}$ τότε ορίζεται Γκαουσιανός λευκός θόρυβος με μέτρο ελέγχου μ, μέσω της απεικόνισης $A \to W(\mathbb{1}_A)$.

Περισσότερα για το παραπάνω στοχαστικό ολοκλήρωμα θα δούμε στην ενότητα 2.5.

Παράδειγμα 2.1.3. Έστω $\mathcal{B}$ ένας αφηρημένος χώρος Wiener και $\mathcal{H}$ ο αντίστοιχος χώρος Cameron-Martin. Τότε ο αναπαράγων πυρήνας $\mathcal{R} = \{f_h : h \in \mathcal{H}\}$ είναι μία $\mathcal{H}-$ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία και η σχέση (2.1) είναι ακριβώς η (1.41).

Ορισμός 2.1.3. Για μία H-ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία W ορίζουμε το $n-$οστό χάος Wiener $\mathscr{H}_n$ ως

$$\mathscr{H}_n = \overline{\operatorname{span}}\{H_n(W(h)) : h \in H, \|h\|_H = 1\} \tag{2.4}$$

(όπου H_n είναι το $n-$οστό πολυώνυμο Hermite), που είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Παρατήρηση. Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι $\mathscr{H}_n = \overline{\text{span}}\{\tilde{H}_n(W(h)) : h \in H, \|h\|_H = 1\}$ (όπου $\tilde{H}_n$ είναι το $n-$οστό ανηγμένο πολυώνυμο Hermite.

Για $n = 0$ το μηδενικό χάος Wiener $\mathscr{H}_0$ είναι το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων, ενώ $\mathscr{H}_1 = \{W(h) : h \in H\}$ επειδή $H_1(x) = x$ και η W είναι γραμμική. Αν τώρα c είναι μία σταθερά (οπότε $c \in \mathscr{H}_0$) και $W(h) \in \mathscr{H}_1$, τότε $\mathbb{E}[cW(h)] = c\mathbb{E}[W(h)] = 0$. Δηλαδή οι υπόχωροι $\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_1$ είναι κάθετοι στον $L^2(\Omega)$. Τελικά αυτή η ιδιότητα ισχύει για κάθε ζευγάρι $\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_m$ όταν $n \neq m$. Δηλαδή έχουμε το ακόλουθο.

Λήμμα 2.1.2. *Έστω W μία H- ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία. Τότε οι υπόχωροι $\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_m$ του $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ είναι κάθετοι για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \neq m$.*

Απόδειξη. Αν $g, h \in H$ με $\|g\|_H = \|h\|_H = 1$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $W(g), W(h)$ ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$. Επειδή η W είναι Γκαουσιανή οικογένεια, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 1.1.5 και να συμπεράνουμε ότι οι $H_n(W(h)), H_m(W(g))$ είναι κάθετες στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Λόγω γραμμικότητας οι χώροι $\text{span}\{H_n(W(h)) : h \in H, \|h\|_H = 1\}$ και $\text{span}\{H_m(W(h)) : h \in H, \|h\|_H = 1\}$ είναι κάθετοι. Αυτή η σχέση περνάει και στις κλειστότητες αυτών των χώρων και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Τώρα που γνωρίζουμε ότι οι χώροι $\{\mathscr{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κάθετοι μεταξύ τους ανα δύο μπορούμε να αναρωτηθούμε για το ποιο ακριβώς είναι το ευθύ άθροισμα $\oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_n$. Παρατηρούμε πως κάθε στοιχείο του $\oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_n$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως προς τη σ-άλγεβρα $\sigma(W) = \sigma(W(h) : h \in H)$. Αν περιοριστούμε σε αυτή τη σ- άλγεβρα τότε τελικά το ευθύ άθροισμα $\oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_n$ συμπίπτει με τον $L^2(\Omega, \sigma(W), \mathbb{P})$. Αυτή είναι η λεγόμενη διάσπαση σε χάος Wiener, και κατά κάποιο τρόπο αποτελεί το απειροδιάστατο ανάλογο της Πρότασης 1.1.5. Για να το αποδείξουμε αυτό θα χρειαστούμε ένα επιπλέον λήμμα.

Λήμμα 2.1.3. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας , $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^d$ $d-$διάστατη τυχαία μεταβλητή. Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $Xg(Y) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}[Xg(Y)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\nu(dy), \tag{2.5}$$

όπου ν είναι το προσημασμένο μέτρο $\nu(B) = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_B(Y)]$ για κάθε σύνολο Borel B.

Απόδειξη. Δείχνουμε αρχικά ότι το ν είναι πράγματι ένα προσημασμένο μέτρο.

Είναι φανερό πως $\nu(\emptyset) = 0$. Έστω λοιπόν $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένα ανα δύο μετρήσιμα σύνολα. Από το θεώρημα Fubini

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\bigcup B_n}(Y)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X\mathbb{1}_{B_n}(Y)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{B_n}(Y)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n).$$

Το θεώρημα Fubini εφαρμόζεται αφού

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} |X| \cdot \mathbb{1}_{B_n}(Y)\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[|X| \cdot \mathbb{1}_{B_n}(Y)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Y^{-1}(B_n)} |X| d\mathbb{P} \\ &= \int_{Y^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty})} |X| d\mathbb{P} \leq \int_{\Omega} |X| d\mathbb{P} \leq \mathbb{E}[X^2] < \infty.\end{aligned}$$

Προχωράμε τώρα στην απόδειξη της σχέσης (2.5). Αν η g είναι δείκτρια ενός μετρήσιμου συνόλου A τότε η ζητούμενη σχέση έπεται από τον ορισμό του ν. Λόγω γραμμικότητας του ολοκληρώματος η (2.5) ισχύει και για απλές συναρτήσεις.

Έστω τώρα $g : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ συνεχής συνάρτηση και $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία μή αρνητικών, απλών συναρτήσεων που συγκλίνουν κατά σημείο στην g. Τότε

$$\mathbb{E}[X\phi_n(Y)] = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(y)\nu(dy). \tag{2.6}$$

Παρατηρούμε ότι $|X\phi_n(Y)| \leq |Xg(Y)| \in L^1(\Omega)$ λόγω της υπόθεσης. Παίρνουμε τώρα το όριο $n \to \infty$ στη σχέση (2.6).Επειδή το ν έχει πεπερασμένη κύμανση, μπορούμε να εφαρμόσουμε στο αριστερό μέρος το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue και στο δεξί μέρος το θεώρημα μονότονης σύγκλισης. Το αποτέλεσμα είναι η σχέση

$$\mathbb{E}[Xg(Y)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\nu(dy).$$

Άν η g παίρνει πραγματικές τιμές, τότε γράφοντας $g = g^+ - g^-$ και εφαρμόζοντας τα παραπάνω, καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.1.4 (Διάσπαση σε χάος Wiener)**.** *Έστω W μία $H-$ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία και $\mathscr{H}_n$ το $n-$οστό χάος Wiener . Τότε ισχύει η ορθογώνια διάσπαση*

$$L^2(\Omega, \sigma(W), \mathbb{P}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n \tag{2.7}$$

και στον $L^2(\Omega, \sigma(W), \mathbb{P})$ ισχύει ότι $X = \sum_{n=0}^{\infty} J_n X = \mathbb{E}[X] + \sum_{n=1}^{\infty} J_n X$ όπου $J_n X$ η προβολή της X στο $n-$οστό χάος Wiener.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε πως αν $X \in L^2(\Omega, \sigma(W), \mathbb{P})$ έτσι ώστε η X να είναι κάθετη σε κάθε $\mathscr{H}_n$ τότε $X = 0$.

Έστω λοιπόν $X \in L^2(\Omega, \sigma(W), \mathbb{P})$ ώστε $\mathbb{E}[XH_n(W(h))] = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $h \in H$ με $\|h\|_H = 1$. Απο τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και απ'το γεγονός ότι τα πολυώνυμα Hermite αποτελούν βάση για τον διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων, έχουμε ότι $\mathbb{E}[Xp(W(h))] = 0$ για κάθε πολυώνυμο p και για κάθε $h \in H$ με $\|h\|_H = 1$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες ανισότητες μπορούμε να δούμε ότι $\mathbb{E}[Xp(W(h))] = 0$ για κάθε πολυώνυμο p και για κάθε $h \in H$. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$. Αυτή η ακολουθία πολυωνύμων συγκλίνει κατά σημείο στην εκθετική συνάρτηση οπότε $p_n(W(h)) \to \exp(W(h))$ κατά σημείο για κάθε $h \in H$.

Παρατηρούμε τώρα ότι $|Xp_n(W(h))| \leq |X| \; \exp(|W(h)|)$ και από την ανισότητα Cauchy - Schwarz

$$\left(\int_{\Omega} |X| \cdot \exp\left(|W(h)|\right) d\mathbb{P}\right)^2 \leq \mathbb{E}(X^2) \int_{\Omega} \exp(2|W(h)|) d\mathbb{P} < \infty.$$

Εφαρμόζουμε λοιπόν το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\mathbb{E}[Xp_n(W(h))] = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Xp_n(W(h))] = 0 \implies \mathbb{E}[Xe^{W(h)}] = 0$$

για κάθε $h \in H$.

Παρατηρούμε τώρα πως για κάθε $n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots t_n \in \mathbb{R}, h_1, \ldots, h_n \in H$ είναι

$$\mathbb{E}[Xe^{\sum_{i=1}^{n} t_i W(h_i)}] = \mathbb{E}[Xe^{W(\sum_{i=1}^{n} t_i h_i)}] = 0.$$

Χρησιμοποιούμε το προηγούμενο λήμμα με $\nu(B) = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_B(W(h_1), \dots, W(h_n))]$ και έχουμε ότι

$$0 = \mathbb{E}\left[X \exp\left(\sum_{i=1}^{n} t_i W(h_i)\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} t_i y_i\right) \nu(dy). \tag{2.8}$$

Από την προηγούμενη εξίσωση η συνάρτηση

$$t \to \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} t_i y_i\right) \nu(dy)$$

επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$, η οποία όμως θα είναι η μηδενική λόγω της (2.8) και του θεωρήματος αναλυτικής συνέχισης. Ειδικότερα, το προσημασμένο μέτρο ν έχει πεπερασμένη κύμανση και ο μετασχηματισμός Fourier του ν είναι μηδέν, άρα $\nu = 0$. Συνεπώς $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = 0$ για κάθε σύνολο B που έχει την μορφή $\{(W(h_1), \dots, W(h_n)) \in A\}$ όπου $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Όμως αυτά τα σύνολα παράγουν τη σ-άλγεβρα $\sigma(W)$ οπότε $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = 0$ για κάθε $B \in \sigma(W)$. Τελικά λοιπόν $X = 0$ όπως θέλαμε αρχικά.

Η σχέση $X = \mathbb{E}[X] + \sum_{n=1}^{\infty} J_n X$ έπεται από την (2.7). □

Ορισμός 2.1.4. Έστω W μία $H-$ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία. Με $\mathcal{P}_n^o$ συμβολίζουμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο των τυχαίων μεταβλητών που έχουν την μορφή $X = p(W(h_1), \dots, W(h_k))$ όπου $k \in \{1, \dots, n\}$, p είναι πολυώνυμο σε k μεταβλητές, βαθμού το πολύ n και $h_1, \dots, h_k \in H$. Ορίζουμε το $n-$οστό πολυωνυμικό χάος $\mathcal{P}_n$ να είναι η κλειστότητα του $\mathcal{P}_n^o$ στον $L^2(\Omega, \sigma(W), \mathbb{P})$.

Πρόταση 2.1.1. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $\mathcal{P}_n = \oplus_{k=0}^{n} \mathscr{H}_k$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\oplus_{k=0}^{n} \mathscr{H}_k \subseteq \mathcal{P}_n$. Από το Θεώρημα 2.1.4, για να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό, αρκεί να δείξουμε ότι οι χώροι $\mathcal{P}_n, \mathscr{H}_m$ είναι κάθετοι για κάθε $m > n$. Μάλιστα αρκεί να δείξουμε πως οι χώροι $\mathcal{P}_n^o, \mathscr{H}_m$ είναι κάθετοι για κάθε $m > n$.

Έστω λοιπόν $X = p(W(h_1), \dots, W(h_k)) \in \mathcal{P}_n^o$ και $h \in H$ με $\|h\|_H = 1$. Θέλουμε να δείξουμε ότι για $m > n$

$$\mathbb{E}[XH_m(W(h))] = 0.$$

Επεκτείνουμε το h σε μία ορθοκανονική βάση του $\operatorname{span}\{h, h_1, \dots, h_k\}$, έστω την $\{h, e_1, \dots, e_l\}$. Εκφράζοντας τα $(h_i)_{1 \le i \le k}$ σε αυτή τη βάση, βλέπουμε ότι η X μπορεί να γραφεί στην μορφή $X = q(W(h), W(e_1), \dots, W(e_l))$ για κάποιο πολυώνυμο q που έχει βαθμό το πολύ n.

Οι τυχαίες μεταβλητές $W(h), W(e_1) \dots, W(e_l)$ αποτελούν Γκαουσιανή οικογένεια και είναι κάθετες ανά δύο στον $L^2(\Omega)$ λόγω της (2.1). Κατά συνέπεια είναι και ανεξάρτητες οπότε για $\alpha \in \mathbb{R}^l$ μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}\left[W(e_1)^{\alpha_1} \cdots W(e_l)^{\alpha_l} W(h)^{\beta} H_m(W(h))\right] = \prod_{j=1}^{l} \mathbb{E}[W(e_j)^{\alpha_j}] \cdot \mathbb{E}[W(h)^{\beta} H_m(W(h))].$$

Αν $\beta = 0$, τότε $\mathbb{E}[W(h)^{\beta} H_m(W(h))] = \mathbb{E}[H_0(W(h)) H_m(W(h))] = 0$ από το Λήμμα 1.1.5.
Αν $0 < \beta \le n$ τότε γράφουμε το μονώνυμο x^{β} ως γραμμικό συνδυασμό των πολυωνύμων Hermite, $x^{\beta} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i H_i(x)$ και από το Λήμμα 1.1.5 έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[W(h)^{\beta} H_m(W(h))] = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \mathbb{E}\left[H_i(W(h)) H_m(W(h))\right] = 0.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στη σχέση $\mathbb{E}[XH_m(W(h))] = 0$ για κάθε $m > n$, που ήταν το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια βρούμε μία ορθοκανονική βάση για τους χώρους $\mathscr{H}_n$. Αν λάβουμε υπ'όψιν μας και το Θεώρημα 2.1.4, θα έχουμε μία ορθοκανονική βάση για τον $L^2(\Omega, \sigma(W), \mathbb{P})$. Τώρα θα γίνει φανερό ότι η διάσπαση σε χάος Wiener αποτελεί απειροδιάστατο ανάλογο της Πρότασης 1.1.1. Πρώτα όμως θα εισάγουμε έναν συμβολισμό για τους πολυδείκτες.

Πολυδείκτες. Θα καλούμε πολυδείκτη κάθε ακολουθία α της μορφής $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\alpha_n \in \mathbb{N}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $\alpha_n = 0$ σχεδόν για κάθε n. Δηλαδή $\alpha_n = 0$ για όλα, εκτός από πεπερασμένα το πλήθος n. Για κάθε πολυδείκτη α ορίζουμε τις ποσότητες $|\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ $\alpha! = \prod_{n=0}^{\infty} \alpha_n!$. Παρατηρήστε ότι λόγω των υποθέσεων που έχουμε κάνει, και οι δύο αυτές ποσότητες είναι καλά ορισμένες.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του H. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι τυχαίες μεταβλητές $\{\Phi_\alpha : |\alpha| = n\}$ αποτελούν ορθοκανονική βάση για το $n-$οστό χάος Wiener $\mathcal{H}_n$, όπου*

$$\Phi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \prod_{j=0}^{\infty} H_{\alpha_j}(W(e_j)) = \sqrt{\alpha!} \prod_{j=0}^{\infty} \tilde{H}_{\alpha_j}(W(e_j)). \tag{2.9}$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (2.1) οι τυχαίες μεταβλητές $W(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες . Χρησιμοποιούμε το Λήμμα 1.1.5 και έχουμε την ακόλουθη σχέση ορθογωνιότητας

$$\mathbb{E}[\Phi_\alpha \Phi_\beta] = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \frac{1}{\sqrt{\beta!}} \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[H_{\alpha_i}(W(e_i)) H_{\beta_i}(W(e_i))] = \delta_{\alpha\beta}, \tag{2.10}$$

όπου δ είναι το δέλτα του Kronecker.

Αν $|\alpha| \le n$ τότε $\Phi_\alpha \in \mathcal{P}_n^o \subseteq \mathcal{P}_n$. Από την άλλη, αν $X = p(W(h_1), \ldots, W(h_k)) \in \mathcal{P}_n^o$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο q βαθμού το πολυ n έτσι ώστε η τυχαία μεταβλητή $Y = q(W(e_{i_1}), \ldots, W(e_{i_r}))$ (το r εξαρτάται από το ε , $i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{N}$) να είναι ε κοντά στην X, δηλαδή $\|X - Y\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$. Έπεται λοιπόν ότι $\overline{\text{span}}\{\Phi_\alpha : |\alpha| \le n\} = \mathcal{P}_n$.

Από τη σχέση ορθογωνιότητας που δείξαμε, έπεται επίσης ότι το $\{\Phi_\alpha : |\alpha| = n\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση για το $n-$οστό χάος Wiener $\mathscr{H}_n$. □

2.2 Ο τελεστής παραγώγισης Malliavin

Έστω $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ οι $C^\infty(\mathbb{R}^n)-$συναρτήσεις των οποίων οι παράγωγοι κάθε τάξης έχουν πολυωνυμική αύξηση. Σταθεροποιούμε H ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert και W μία $H-$ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία που ορίζεται στον χώρον πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Θα περιοριστούμε στη συνέχεια στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \sigma(W), \mathbb{P})$ έτσι ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου.

Ορισμός 2.2.1. Συμβολίζουμε με $\mathcal{S}$ το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών X της μορφής

$$X = f\left(W(h_1), \ldots, W(h_n)\right), \tag{2.11}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, $h_1, \ldots, h_n \in H$ και $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$. Τα στοιχεία του $\mathcal{S}$ θα καλούνται λεία τυχαία συναρτησοειδή. Με $\mathcal{S}_b$ θα συμβολίζουμε τα λεία τυχαία συναρτησοειδή για τα οποία $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ στη γραφή (2.11).

Από τη γραφή (2.11) μπορούμε να δούμε πως $\mathcal{S} \subset L^p(\Omega)$ για κάθε $p \ge 1$.

Παρατήρηση. Ο όρος λεία τυχαία συναρτησοειδή, ίσως είναι λίγο παραπλανητικός. Ας θεωρήσουμε έναν αφηρημένο χώρο Wiener $\mathcal{B}$ με αναπαράγοντα πυρήνα $\mathcal{R}$ και χώρο Cameron-Martin $\mathcal{H}$. Ο $\mathcal{R}$ είναι μία $\mathcal{H}-$ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία. Ένα λείο τυχαίο συναρτησοειδές $X \in \mathcal{S}$ θα έχει την μορφή

$$X = F(f_{h_1}, \ldots, f_{h_n}), \tag{2.12}$$

όπου $F \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}$ και $f_{h_1}, \ldots, f_{h_n} \in \mathcal{R}$. Αν θυμηθούμε τον Ορισμό 1.2.6, βλέπουμε πως η απεικόνιση $X : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ εν γένει δεν είναι καν συνεχής, αφού ενδέχεται να είναι $f_{h_i} \notin \mathcal{B}^*$ για κάποια $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Λήμμα 2.2.1. *Το $\mathcal{S}$ είναι πυκνό στον $L^2(\Omega)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πως $\mathcal{P}_n^o \subseteq S$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mathcal{P}_n \subseteq \overline{S}$. Τώρα το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 2.1.1 και το Θεώρημα 2.1.4 . ☐

Μάλιστα ισχύει κάτι ισχυρότερο

Λήμμα 2.2.2. *Το $\mathcal{S}$ είναι πυκνό στον $L^p(\Omega)$ για κάθε $p \geq 1$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε q τέτοιο ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Επειδή $(L^p(\Omega))^* \simeq L^q(\Omega)$ για να δείξουμε ότι ένας γραμμικός υπόχωρος M του $L^p(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$ αρκεί να δείξουμε πως για κάθε $g \in L^q(\Omega)$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\int_\Omega fg d\mathbb{P} = 0 \ \forall \ f \in M \implies g = 0 \text{ με πιθανότητα } 1. \tag{2.13}$$

Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.4, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το επιχείρημα για να δείξουμε ότι ο υπόχωρος $M \subset \mathcal{S}$ με

$$M = \operatorname{span}\{H_n(W(h)) : n \geq 0, h \in H, \|h\|_H = 1\} \tag{2.14}$$

είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$. ☐

Ορισμός 2.2.2. Ορίζουμε τον τελεστή παραγώγισης Malliavin $D : \mathcal{S} \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega; H)$ $(p \geq 1)$ ως τον τελεστή που δρά στα λεία τυχαία συναρτησοειδή $X = f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) \in \mathcal{S}$ με

$$DX = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \ldots, W(h_n))\, h_i. \tag{2.15}$$

Δηλαδή είναι

$$DX(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1)(\omega), \ldots, W(h_n)(\omega))\, h_i \tag{2.16}$$

για κάθε $\omega \in \Omega$. Παραγωγίζουμε δηλαδή τη τυχαία μεταβλητή $X \in \mathcal{S}$ ως προς το ενδεχόμενο $\omega \in \Omega$.

Στις περισσότερες εφαρμογές ο Ω είναι κάποιος χώρος Wiener $\mathcal{W} = C([0,\tau]; \mathbb{R}^d)$ όπου $\tau > 0$. Τότε η παράγωγος Malliavin D είναι ακριβώς η $\mathcal{H}-$κλίση που είδαμε στον Ορισμό 1.3.2, όπου $\mathcal{H}$ είναι ο χώρος Cameron-Martin του $\mathcal{W}$. Εδώ όμως δουλεύουμε σε ένα γενικότερο πλαίσιο καθώς δεν υποθέτουμε πως ο Ω έχει κάποια τοπολογική δομή.

Παρατήρηση. Η παράγωγος Malliavin είναι ένας μή φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $\mathcal{S}$ στις Bochner ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H. Δηλαδή για κάθε $p \geq 1$ και $X \in \mathcal{S}$, είναι

$$\|DX\|_{L^p(\Omega;H)} = \left(\int_\Omega \|DX\|_H^p d\mathbb{P}\right)^{1/p} < \infty. \tag{2.17}$$

Επίσης, λόγω της σχέσης

$$\langle DX, h\rangle_H = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(W(h_1) + t\langle h_1, h\rangle_H, \ldots, W(h_n) + t\langle h_n, h\rangle_H\right) - f\left(W(h_1), \ldots, W(h_n)\right)}{t},$$

η παράγωγος Malliavin μπορεί να λάβει ερμηνεία ως παράγωγος κατά κατεύθυνση.

Σε αναλογία με τη σχέση (1.93) έχουμε την

$$DX(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle DX(\omega), e_i\rangle_H\, e_i \tag{2.18}$$

όπου $\omega \in \Omega$, $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H και η παραπάνω σειρά συγκλίνει στον H.

Επιπλέον, στο πλαίσιο των αφηρημένων χώρων Wiener, αν $X = F(f_{h_1}, \ldots, f_{h_n}))$ είναι λείο τυχαίο συναρτησοειδές, τότε η παράγωγος Malliavin DX είναι ακριβώς η $\mathcal{H}-$κλίση της X.

Δείχνουμε τώρα ότι η παράγωγος Malliavin ενός τυχαίου συναρτησοειδούς $X \in \mathcal{S}$είναι καλά ορισμένη,δηλαδή δεν εξαρτάται από τη γραφή (2.11).

Πρόταση 2.2.1. *Έστω $X \in \mathcal{S}$ που έχει τις εκφράσεις*

$$X = f\left(W(h_1), \ldots, W(h_n)\right)$$

και

$$X = g\left(W(e_1), \ldots, W(e_m)\right),$$

όπου $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ορθοκανονικό σύνολο. Τότε

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(W(h_1), \ldots, W(h_n)\right) h_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_j}\left(W(e_1), \ldots, W(e_m)\right) e_j. \tag{2.19}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\operatorname{span}\{h_1, \ldots h_n\} = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_m\}$. Πράγματι, αν αυτό δε συμβαίνει, τότε θέτουμε $h_{n+1} = e_1, \ldots, h_{n+m} = e_m$ και επεκτείνουμε το $\{e_1, \ldots, e_m\}$ σε μία ορθοκανονική βάση του $\operatorname{span}\{h_1, \ldots, h_n, e_1, \ldots, e_m\}$ έστω την $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{m+k}\}$. Στη θέση των f, g θεωρούμε τις $\tilde{f}, \tilde{g}$ που δίνονται ως $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_{n+m}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ $\tilde{g}(x_1, \ldots, x_{m+k}) = g(x_1, \ldots, x_m)$. Τότε τα αθροίσματα στην (2.19) μένουν ίδια αφού $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = 0$ για $i > n$ και $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_j} = 0$ για $j > m$.

Υποθέτουμε λοιπόν πως $\operatorname{span}\{h_1, \ldots h_n\} = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_m\}$. Τότε μπορούμε να γράφουμε $h_i = \sum_{j=1}^{m} \langle h, e_j\rangle_H e_j$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ που δίνεται από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} \langle h_1, e_1\rangle_H & \ldots & \ldots & \langle h_1, e_m\rangle_H \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle h_n, e_1\rangle_H & \ldots & \ldots & \langle h_n, e_m\rangle_H \end{pmatrix}$$

Τότε $T\left(W(e_1), \ldots, W(e_m)\right) = \left(W(h_1), \ldots, W(h_n)\right)$ οπότε

$$(f \circ T)\left(W(e_1), \ldots, W(e_m)\right) = g\left(W(e_1), \ldots, W(e_m)\right). \tag{2.20}$$

Ισχυρισμός. Ισχύει ότι $(f \circ T)(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$.

Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $(f \circ T)(x_0) \neq g(x_0)$ και λόγω συνέχειας υπάρχει $\varepsilon > 0$ και περιόχη U του x_0 έτσι ώστε $|(f \circ T)(x) - g(x)| \geq \varepsilon$ για κάθε $x \in U$. Επειδή το διάνυσμα $(W(e_1), \dots, W(e_m))$ είναι Γκαουσιανό, η πιθανότητα να λάβει αυτό τιμές στην περιοχή U είναι θετική. Υπάρχει λοιπόν $x' \in U$ ώστε $(f \circ T)(x') = g(x')$ και έχουμε άτοπο, οπότε ο ισχυρισμός αληθεύει.
Χρησιμοποιούμε το κανόνα της αλυσίδας και γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_j}(W(e_1), \dots, W(e_m))\, e_j &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial (f \circ T)}{\partial x_j}(W(e_1), \dots, W(e_m))\, e_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(T(W(e_1), \dots, W(e_m)))\, \langle h_i, e_j \rangle_H e_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \dots, W(h_n)) \sum_{j=1}^{m} \langle h_i, e_j \rangle_H e_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \dots, W(h_n))\, h_i.\end{aligned} \tag{2.21}$$

□

Ερχόμαστε τώρα στην ολοκλήρωση κατά μέρη για λεία τυχαία συναρτησοειδή. Ουσιαστικά δείχνουμε την εξίσωση (1.83) σε ένα πιο γενικό πλαίσιο.

Λήμμα 2.2.3. *Για κάθε $X \in \mathcal{S}$ και για κάθε $h \in H$, ισχύει ότι* $\mathbb{E}[\langle DX, h \rangle_H] = \mathbb{E}[XW(h)]$.

Απόδειξη. Έστω $h \in H$. Λόγω της προηγούμενης πρότασης μπορούμε να υποθέσουμε πως η X γράφεται στην μορφή

$$X = f(W(e_1), \dots, W(e_n)),$$

όπου $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $\{e_1, \dots, e_n\}$ ορθοκανονικό σύνολο.

Το Γκαουσιανό διάνυσμα $(W(e_1), \dots, W(e_n))$ έχει την τυπική κανονική κατανομή στον $\mathbb{R}^n$, που έχει πυκνότητα την συνάρτηση

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

Χρησιμοποιώντας τον κλασικό τύπο ολοκλήρωσης κατά μέρη, γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle DX, h \rangle_H] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(W(e_1), \dots, W(e_n))\right] \langle h, e_i \rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle h, e_i \rangle_H}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle h, e_i \rangle_H}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} x_i e^{-|x|^2/2} f(x_1, \dots, x_n) dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[XW(e_i)\langle h, e_i \rangle_H].\end{aligned} \tag{2.22}$$

Επεκτείνουμε τα $(e_i)_{1\le i\le n}$ σε ορθοκανονική βάση του H και γράφουμε $h=\sum_{i=1}^{\infty}\langle h,e_i\rangle_H e_i$. Όμως κάθε $W(e_i)$ έχει μέση τιμή 0 και είναι ανεξάρτητη από την X για κάθε $i>n$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε πως $h\in \operatorname{span}\{e_1,\dots,e_n\}$. Από τον παραπάνω υπολογισμό και λόγω γραμμικότητας της W έχουμε

$$\mathbb{E}[\langle DX,h\rangle_H]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} XW(e_i)\langle h,e_i\rangle_H\right]=\mathbb{E}\left[XW\left(\sum_{i=1}^{n}\langle h,e_i\rangle_H e_i\right)\right]=\mathbb{E}[XW(h)].$$

□

Ολοκλήρωση κατά μέρη στον χώρο Wiener. Αν επιλέξουμε $H=L^2([0,\tau],\mathcal{B}([0.\tau]),\lambda)$ και $X\in\mathcal{S},h\in H$ τότε εφαρμόζοντας το παραπάνω λήμμα έχουμε τη σχέση

$$\mathbb{E}[\langle DX,h\rangle_H]=\mathbb{E}[XW(h)]=\mathbb{E}\left[X\int_0^\tau h(t)dB_t\right]$$

οπότε καταφέραμε να δείξουμε αυστηρά τη σχέση (1.74).

Πόρισμα 2.2.3.1. *Για κάθε $X,Y\in\mathcal{S}$ και για κάθε $h\in H$, είναι*

$$\mathbb{E}[X\langle DY,h\rangle_H]+\mathbb{E}[Y\langle DX,h\rangle_H]=\mathbb{E}[XYW(h)]. \tag{2.23}$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τον κανόνα του Leibniz $D(XY)=YDX+XDY$ και το προηγούμενο λήμμα. □

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο τελεστής παραγώγισης Malliavin είναι closable το οποίο, όπως και στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$, θα μας επιτρέψει να ορίσουμε κατάλληλους χώρους Sobolev. Πρώτα υπενθυμίζουμε τον ορισμό ενός closable τελεστή.

Ορισμός 2.2.3. Έστω E,F δύο χώροι Banach και $L:\operatorname{Dom}L\subset E\to F$ ένας γραμμικός τελεστής. Ο L λέγεται closable αν υπάρχει γραμμικός τελεστής $\overline{L}:\operatorname{Dom}\overline{L}\subset E\to F$ έτσι ώστε το γράφημα του $\overline{L}$ να είναι η κλειστότητα του γραφήματος του L στον $E\times F$. Ισοδύναμα, ο L λέγεται closable αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\ge1}\subset E$ τέτοια ώστε $x_n\to0$ στον E και $Lx_n\to y$ στον F, έπεται ότι $y=0$.

Αν ο γραμμικός τελεστής $L:\operatorname{Dom}L\subset E\to F$ είναι closable τότε το πεδίο ορισμού του $\overline{L}$ είναι

$$\operatorname{Dom}\overline{L}=\left\{x\in E:\exists(x_n)_{n\ge1}\subset E:\lim_{n\to\infty}x_n=x \text{ και } Lx_n \text{ συγκλίνει στον } F\right\} \tag{2.24}$$

και $\overline{L}x=\lim_{n\to\infty}Lx_n$ για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\ge1}\subset E$ τέτοια ώστε $x_n\to x$ στον E .

Πρόταση 2.2.2. *Για κάθε $p\ge1$ ο τελεστής παραγώγισης Malliavin $D:\mathcal{S}\to L^p(\Omega;H)$ είναι closable.*

Απόδειξη. Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathcal{S}$ που συγκλίνει στο 0 στον $L^p(\Omega)$ και $DX_n\to G$ στον $L^p(\Omega;H)$ για κάποια τυχαία μεταβλητή $G\in L^p(\Omega;H)$. Για να δείξουμε ότι ο D είναι closable αρκεί να δείξουμε ότι $G=0$. Θεωρούμε $h\in H,Y\in\mathcal{S}$. Τότε οι τυχαίες μεταβλητές $YW(h),\langle DY,h\rangle_H$ έχουν ροπές κάθε τάξης. Χρησιμοποιούμε την εξίσωση (2.23) και έχουμε

$$\mathbb{E}\left[Y\left\langle G,h\right\rangle_H\right]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[Y\langle DX_n,h\rangle_H]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[YX_nW(h)-X_n\langle DY,h\rangle_H\right]. \tag{2.25}$$

Από την ανισότητα Hölder

$$|\mathbb{E}[X_nYW(h)]| \leq \|X_n\|_{L^p(\Omega)}\|YW(h)\|_{L^q(\Omega)} \to 0 \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Όμοια προκύπτει ότι $\mathbb{E}[X_n\langle DY, h\rangle_H] \to 0$ οπότε τελικά $\mathbb{E}\left[Y\left\langle G, h\right\rangle_H\right] = 0$ για κάθε $h \in H, Y \in \mathcal{S}$. Επειδή το $\mathcal{S}$ είναι πυκνό στον $L^p(\Omega)$ έπεται ότι για κάθε $h \in H$ είναι $\langle G, h\rangle_H = 0$ με πιθανότητα 1. Αν $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονική βάση του H, τότε όλα τα ενδεχόμενα

$$E_n = \{\omega \in \Omega : \langle G(\omega), e_n\rangle_H = 0\} \tag{2.26}$$

έχουν πιθανότητα 1, συνεπώς και η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ έχει πιθανότητα 1. Αυτό σημαίνει ότι $G = 0$ με πιθανότητα 1, όπως ακριβώς θέλαμε. □

Ορισμός 2.2.4 (Γκαουσιανοί χώροι Sobolev)**.** Κάνοντας κατάχρηση συμβολισμού θα συμβολίζουμε ξανά με D την επέκταση του αρχικού D. Το πεδίο ορισμού $\mathrm{Dom}(D) \subset L^p(\Omega)$ θα το συμβολίζουμε με $\mathbb{D}^{1,p}$. Δηλαδή $\mathbb{D}^{1,p}$ είναι η κλειστότητα του $\mathcal{S}$ ως προς τη νόρμα

$$\|X\|_{1,p} = \left(\mathbb{E}[|X|^p] + \mathbb{E}[\|DX\|_H^p]\right)^{1/p}. \tag{2.27}$$

Ο χώρος $\mathbb{D}^{1,p}$ είναι ένας αυτοπαθής χώρος Banach ως ισομετρικά ισόμορφος με κλειστό υπόχωρο του $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega; H)$. Πρόκειται λοιπόν για ένα απειροδιάστατο ανάλογο των χώρων Sobolev που ονομάζεται Γκαουσιανός χώρος Sobolev. Ορίζουμε επίσης

$$\mathbb{D}^{1,\infty} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \mathbb{D}^{1,p}$$

Η περίπτωση όπου $p = 2$ είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς τότε ο $\mathbb{D}^{1,2}$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle X, Y\rangle_{\mathbb{D}^{1,2}} = \left(\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[\langle DX, DY\rangle_H]\right). \tag{2.28}$$

Λήμμα 2.2.4. *Θεωρούμε $p > 1$ και ακολουθία $(X_n) \subset \mathbb{D}^{1,p}$ τέτοια ώστε*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\|DX_n\|_H^p] < \infty \quad \text{και} \quad X_n \to X \text{ στον } L^p(\Omega).$$

Τότε $X \in \mathbb{D}^{1,p}$ και η (DX_n) συγκλίνει ασθενώς στην DX στον $L^p(\Omega; H)$.

Απόδειξη. Επειδή η ακολουθία (X_n) συγκλίνει στον $L^p(\Omega)$ είναι και φραγμένη στον $L^p(\Omega)$. Αυτό, σε συνδυασμό με τη συνθήκη $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\|DX_n\|_H^p] < \infty$, μας δίνει ότι η (X_n) είναι φραγμένη $\mathbb{D}^{1,p}$. Επειδή ο $\mathbb{D}^{1,p}$ είναι αυτοπαθής χώρος Banach έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία X_{n_k} που συγκλίνει ασθενώς σε κάποια τυχαία μεταβλητή $Y \in \mathbb{D}^{1,p}$ (Θεώρημα III.27 στο [65]). Όμως τότε $Y = X$ αφού θα έχουμε ότι $X_n \to Y$ ασθενώς και στον $L^p(\Omega)$.

Βλέπουμε πως κάθε υπακολουθία της (X_n) έχει περαιτέρω υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς στην X στον $\mathbb{D}^{1,p}$ άρα και η ίδια η (X_n) συγκλίνει ασθενώς στην X στον $\mathbb{D}^{1,p}$. Πιό συγκεκριμένα $DX_n \to DX$ ασθενώς στον $L^p(\Omega; H)$, που είναι το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.2.5 (Κανόνας της αλυσίδας)**.** *Θεωρούμε $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση με φραγμένες μερικές παραγώγους και $X = (X_1, \ldots, X_n)$ μία $n-$διάστατη τυχαία μεταβλητή, έτσι ώστε $X_i \in \mathbb{D}^{1,p}$, όπου $p \geq 1$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Τότε $\varphi(X) \in \mathbb{D}^{1,p}$ και*

$$D\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X)DX_i. \tag{2.29}$$

Αν $X_i \in \mathbb{D}^{1,\infty}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ τότε η (2.29) ισχύει για κάθε συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με πολυωνυμική αύξηση.

Απόδειξη. Αν $X_i \in \mathcal{S}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ τότε $\varphi(X) \in \mathcal{S}$ και η (2.29) ισχύει από τον κλασικό κανόνα της αλυσίδας. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο για $p = 2$ που είναι και η πιο σημαντική περίπτωση. Οι άλλες περιπτώσεις έπονται με όμοιο τρόπο.

Έστω λοιπόν $X_i \in \mathbb{D}^{1,2}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και ακολουθία $\left(X_i^{(k)}\right)_{k \geq 1}$ στον $\mathcal{S}$ τέτοια ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, n$ να είναι $X_i^{(k)} \to X_i$ στον $\mathbb{D}^{1,2}$ καθώς $k \to \infty$. Θέλουμε να δείξουμε πως καθώς $k \to \infty$ είναι

$$\begin{aligned}\left\| D\varphi\left(X^{(k)}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X) DX_i \right\|_{L^2(\Omega;H)} &= \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\left(X^{(k)}\right) DX_i^{(k)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X) DX_i \right\|_{L^2(\Omega;H)} \to 0\end{aligned} \tag{2.30}$$

Τότε θα είναι $\varphi(X) \in \mathbb{D}^{1,2}$ και $D\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X) DX_i$. Για να δείξουμε την σύγκλιση (2.30) θα πρέπει να δείξουμε πως τείνουν στο μηδέν, όροι της μορφής

$$a_k = \mathbb{E}\left[\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\left(X^{(k)}\right) \right|^2 \left\| DX_i - D\left(X_i^{(k)}\right) \right\|_H^2 \right] \tag{2.31}$$

και

$$b_k = \mathbb{E}\left[\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\left(X^{(k)}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X) \right|^2 \|DX_i\|_H^2 \right] \tag{2.32}$$

καθώς $k \to \infty$. Επειδή η φ έχει φραγμένες μερικές παραγώγους, και για κάθε $i = 1, \ldots, n$ είναι $X_i^{(k)} \to X_i$ στον $\mathbb{D}^{1,2}$ καθώς $k \to \infty$., έπεται ότι $a_k \to 0$. Για να δείξουμε ότι $b_k \to 0$, μπορούμε να υποθέσουμε πως $X_i^{(k)} \to X_i$ με πιθανότητα 1 (αφού μπορούμε να περάσουμε σε υπακολουθία με αυτή την ιδιότητα) και τότε το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue.

Αν τώρα $X_i \in \mathbb{D}^{1,\infty}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Hölder για να πάρουμε το ζητούμενο για συναρτήσεις $\varphi \in C_p^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Παρατηρήστε πως στις άλλες περιπτώσεις $p > 2$ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Hölder και έτσι η υπόθεση να έχει η φ φραγμένες μερικές παραγώγους είναι κρίσιμη. □

Πρόταση 2.2.3. *Έστω $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση και $X = (X_1, \ldots, X_n)$ $n-$διάστατη τυχαία μεταβλητή, τέτοια ώστε $X_i \in \mathbb{D}^{1,2}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Τότε $\varphi(X) \in \mathbb{D}^{1,2}$ και υπάρχει φραγμένη $n-$διάστατη τυχαία μεταβλητή $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ τέτοια ώστε*

$$D\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n} Y_i DX_i. \tag{2.33}$$

Απόδειξη. Έστω $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ μή αρνητική συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} a(x)dx = 1$. Ορίζουμε $a_k(x) = k^n a(kx)$ και $\varphi_k = a_k * \varphi$. Τότε η ακολουθία $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι ομαλοποιητής, δηλαδή $\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $k \geq 1$ και $\varphi_k \to \varphi$ ομοιόμορφα καθώς $k \to \infty$. Αν M είναι η σταθερά Lipschitz της συνάρτησης φ τότε $|\nabla \varphi_k| \leq M$ για κάθε $k \geq 1$. Από το Θεώρημα 2.2.5 είναι

$$D\varphi_k(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(X) DX_i \tag{2.34}$$

Ισχύει ότι $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(X)=\varphi(X)$ στον $L^2(\Omega)$. Επιπλέον επειδή $|\nabla\varphi_k|\leq M$ για κάθε $k\geq 1$ έπεται ότι η ακολουθία $D\varphi_k(X)$ είναι φραγμένη στον $L^2(\Omega;H)$. Από το Λήμμα 2.2.4 έχουμε ότι $\varphi(X)\in\mathbb{D}^{1,2}$ και η $D\varphi_k(X)$ συγκλίνει στην $D\varphi(X)$ στην ασθενή τοπολογία του $L^2(\Omega;H)$. Επίσης, επειδή η ακολουθία $\nabla\varphi_k(X)$ είναι φραγμένη, υπάρχει υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποια φραγμένη $n-$διάστατη τυχαία μεταβλητή $Y=(Y_1,\dots,Y_n)$ στην ασθενή τοπολογία του $L^2(\Omega;H)$ (Θεώρημα III.27 στο [65]). Επιπλέον η Y είναι φραγμένη από τη σταθερά M. Η απόδειξη ολοκληρώνεται παίρνοντας το όριο $k\to\infty$ στην εξίσωση (2.34). □

Παράγωγοι ανώτερης τάξης Όπως είδαμε προηγουμένως, η παράγωγος Malliavin DX ενός λείου τυχαίου συναρτησοειδούς X, είναι μία τυχαία μεταβλητή $DX:\Omega\to H$. Για να παραγωγίσουμε λοιπόν την DX θα πρέπει να γενικεύσουμε τον ορισμό της παραγώγου έτσι ώστε να καλύπτουμε την περίπτωση που τα λεία τυχαία συναρτησοειδή λαμβάνουν τιμές σε κάποιον διαχωρίσιμο χώρο Hilbert V. Η κατασκευή είναι ανάλογη με την αρχική κατασκευή για την παράγωγο Malliavin.

Έστω V ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert Με $\mathcal{S}(V)$ συμβολίζουμε τα λεία τυχαία συναρτησοειδή X που είναι τυχαίες μεταβλητές της μορφής

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_iv_i \tag{2.35}$$

για κάποιο $n\in\mathbb{N}$ και

$$X_i=f_i\left(W(h_1^i),\dots,W(h_{n_i}^i)\right), \tag{2.36}$$

όπου $f_i\in C_p^\infty(\mathbb{R}^{n_i})$, $h_1^i,\dots,h_{n_i}^i\in H$, $v_i\in V$.

Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ένα θεώρημα που γενικεύει τη διάσπαση σε χάος Wiener

Θεώρημα 2.2.6. *Έστω H,V διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert, W μία $H-$ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία και $\mathscr{H}_n$ το $n-$οστό χάος Wiener. Τότε ισχύει η ακόλουθη ορθογώνια διάσπαση*

$$L^2(\Omega,\sigma(W),\mathbb{P};V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}(\mathscr{H}_n\otimes V). \tag{2.37}$$

Επίσης, αν $\{v_i:i\in\mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση για τον V, τότε το σύνολο $\{\Phi_\alpha\otimes v_i\ :|\alpha|=n,i\in\mathbb{N}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\mathscr{H}_n\otimes V$.

Ορισμός 2.2.5. Έστω $X\in\mathcal{S}(V)$. Τότε το X γράφεται στη μορφή (2.35). Ορίζουμε την παράγωγο Malliavin DX ως την τυχαία μεταβλητή που δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}DX=\sum_{i=1}^{n}(DX_i)\otimes v_i&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(W(h_1^i),\dots,W(h_{n_i}^i)\right)h_j^i\right)\otimes v_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(W(h_1^i),\dots,W(h_{n_i}^i)\right)\right)h_j^i\otimes v_i.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Ορισμός 2.2.6 (Δεύτερη παράγωγος)**.** Αν $X\in\mathbb{D}^{1,p}$ έτσι ώστε $DX\in\mathbb{D}^{1,p}(H)$ τότε γράφουμε $X\in\mathbb{D}^{2,p}$ και $D^2X=D(DX)$. Η δεύτερη παράγωγος λοιπόν είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $H\otimes H$ ή ισοδύναμα, τυχαία μεταβλητή με τιμές στους τελεστές Hilbert - Schmidt $\mathrm{HS}(H,H)$

Αν τώρα $k \geq 1$ ακέραιος, μπορούμε να ορίσουμε αναδρομικά την παράγωγο D^k στα λεία τυχαία συναρτησοειδή $\mathcal{S}$. Με αυτό το τρόπο λαμβάνουμε μία τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $H^{\otimes k}$. Όμοια με την περίπτωση $k = 1$, μπορούμε να δούμε ότι ο D^k είναι closable και να ορίσουμε τον Γκαουσιανό χώρο Sobolev $\mathbb{D}^{k,p}$ για $p \geq 1$ ως την κλειστότητα του $\mathcal{S}$ ως προς τη νόρμα

$$\|X\|_{k,p} = \left(\mathbb{E}[|X|^p] + \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[\|D^i X\|_{H^{\otimes i}}^p \right] \right)^{1/p}. \tag{2.39}$$

Λήμμα 2.2.7. *Ο χώρος* $\mathbb{D}^\infty = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq 1} \mathbb{D}^{k,p}$ *είναι μία άλγεβρα.*

Απόδειξη. Το ζητούμενο έπεται χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας για τη συνάρτηση $\varphi(xy) = xy$ και την ανισότητα Hölder. □

Θεώρημα 2.2.8. *Έστω* $X \in L^2(\Omega)$ *με διάσπαση σε χάος Wiener* $X = \sum_{n=0}^\infty J_n X$. *Τότε* $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ *αν και μόνο αν* $\sum_{n=0}^\infty n\|J_n X\|_2^2 < \infty$. *Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν οι σχέσεις*

$$D(J_n X) = J_{n-1}(DX) \tag{2.40}$$

και

$$\mathbb{E}[\|DX\|_H^2] = \sum_{n=0}^\infty n\|J_n X\|_2^2. \tag{2.41}$$

Απόδειξη. Διαλέγουμε μία ορθοκανονική βάση του H, $\{e_k : k \geq 0\}$ και παρατηρούμε πως για κάθε πολυδείκτη α οι τυχαίες μεταβλητές

$$\Phi_\alpha = \sqrt{\alpha!} \prod_{j=0}^\infty \tilde{H}_{\alpha_j}(W(e_j))$$

είναι λεία τυχαία συναρτησοειδή, δηλαδή ανήκουν στον $\mathcal{S}$. Θέτουμε $\tilde{H}_{-1} = 0$. Παραγωγίζουμε την Φ_α και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\tilde{H}_n' = \tilde{H}_{n-1}$ έχουμε ότι

$$D\Phi_\alpha = \sqrt{\alpha!} \sum_{k=0}^\infty \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^\infty \tilde{H}_{\alpha_j}(W(e_j)) \tilde{H}_{\alpha_k - 1}(W(e_k)) e_k. \tag{2.42}$$

Δηλαδή σκεφτόμαστε ότι παραγωγίσαμε στην α_k θέση. Σταθεροποιούμε τώρα $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε πως $|\alpha| = n$. Από τη σχέση $\alpha_k! = (\alpha_k - 1)!\alpha_k$ βλέπουμε ότι

$$\sqrt{\alpha} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^\infty \tilde{H}_{\alpha_j}(W(e_j)) \tilde{H}_{\alpha_k - 1}(W(e_k)) = \sqrt{\alpha_k} \Phi_{\beta^{(k)}} \tag{2.43}$$

όπου

$$\beta_j^{(k)} = \begin{cases} \alpha_j & j \neq k \\ \alpha_k - 1 & j = k \end{cases}$$

Έχουμε λοιπόν ότι $D\Phi_\alpha = \sum_{k=0}^\infty \sqrt{\alpha_k} \Phi_{\beta^{(k)}} e_k$.

Παρατηρούμε πως για κάθε k είναι $|\beta^{(k)}| = n - 1$, άρα $D\Phi_\alpha \in \mathscr{H}_{n-1}(H) = \mathscr{H}_{n-1} \otimes H$. Επειδή το σύνολο $\{\Phi_\alpha \otimes e_k : |\alpha| = n, k \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\mathscr{H}_{n-1}(H)$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[\|D\Phi_\alpha\|_H^2] = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k = |\alpha| = n. \tag{2.44}$$

Έπεται λοιπόν πως $\mathscr{H}_n \subset \mathbb{D}^{1,2}$ και $D\mathscr{H}_n \subset \mathscr{H}_{n-1}(H)$. Από τον παραπάνω υπολογισμό έπεται επίσης πως για $Y \in \mathscr{H}_n$ είναι $\mathbb{E}[\|DY\|_H^2] = n\mathbb{E}[Y^2]$.

Θεωρούμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} n\|J_n X\|_2^2 < \infty$. Τότε από τη διάσπαση σε χάος Wiener η ακολουθία $X_N = \sum_{n=0}^{N} J_n X$ συγκλίνει στην τυχαία μεταβλητή X στον $L^2(\Omega)$. Επειδή

$$\mathbb{E}[\|DX_N\|_H^2] = \sum_{n=0}^{N} n\|J_n X\|_2^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} n\|J_n X\|_2^2 < \infty \tag{2.45}$$

το Λήμμα 2.2.4 μας δίνει ότι $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ και $DX = \sum_{n=0}^{\infty} D(J_n X)$.

Έστω τώρα ότι $X \in \mathbb{D}^{1,2}$. Από το Θεώρημα 2.2.6 έπεται ότι το σύνολο $\{\Phi_\alpha \otimes e_k : \alpha$ πολυδείκτης $, k \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2(\Omega; H)$. Γράφοντας το DX σε αυτή τη βάση και το X στην βάση των Φ_α, έπεται από τα παραπάνω πως $D(J_n X) = J_{n-1}(DX)$ και $\mathbb{E}[\|DX\|_H^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n\|J_n X\|_2^2 < \infty$. □

Πόρισμα 2.2.8.1. *Αν $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ και $DX = 0$ με πιθανότητα 1, τότε $X = \mathbb{E}X$ με πιθανότητα 1.*

Απόδειξη. Επειδή $X \in \mathbb{D}^{1,2}$, θα είναι

$$\mathbb{E}[\|DX\|_H^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n\|J_n X\|_2^2$$

άρα $J_n X = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Πράγματι λοιπόν $X = \mathbb{E}X$. □

Θεώρημα 2.2.9 (Νόμος $0-1$ στον $\mathbb{D}^{1,2}$). *Έστω $B \in \sigma(W)$. Τότε $\mathbb{1}_B \in \mathbb{D}^{1,2}$ αν και μόνο αν $\mathbb{P}(B) = 0$ ή 1.*

Απόδειξη. Στην περίπτωση που $\mathbb{P}(B) = 0$ ή 1 η δείκτρια $\mathbb{1}_B$ είναι σταθερή συνάρτηση οπότε $\mathbb{1}_B \in \mathscr{H}_0 \subset \mathbb{D}^{1,2}$

Έστω τώρα ότι $\mathbb{1}_B \in \mathbb{D}^{1,2}$. Έστω συνάρτηση $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $\varphi(t) = t^2$ για $t \in [0,1]$. Τότε η φ είναι παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο και ο κανόνας της αλυσίδας μας δίνει ότι

$$D\mathbb{1}_B = D\varphi(\mathbb{1}_B) = \varphi'(\mathbb{1}_B)D\mathbb{1}_B = 2\mathbb{1}_B D\mathbb{1}_B. \tag{2.46}$$

Από την παραπάνω εξίσωση, βλέπουμε πως στο B^c είναι $D\mathbb{1}_B = 0$ και στο B είναι $D\mathbb{1}_B = 2D\mathbb{1}_B$ άρα λοιπόν $D\mathbb{1}_B = 0$ με πιθανότητα 1. Το προηγούμενο πόρισμα μας δίνει ότι $\mathbb{1}_B = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B] = \mathbb{P}(B)$ και το ζητούμενο έπεται. □

2.3 Ο τελεστής απόκλισης

Ορισμός 2.3.1. Ο τελεστής απόκλισης $\delta : \operatorname{Dom}\delta \subset L^2(\Omega; H) \to L^2(\Omega)$ ορίζεται να είναι ο συζυγής του τελεστή παραγώγισης Malliavin $D : \mathbb{D}^{1,2} \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega; H)$. Το πεδίο ορισμού του είναι το

$$\operatorname{Dom}\delta = \left\{u \in L^2(\Omega; H) : \exists\ X \in L^2(\Omega) : \mathbb{E}[\langle DY, u\rangle_H] = \mathbb{E}[YX] \ \ \forall Y \in \mathbb{D}^{1,2}\right\} \tag{2.47}$$

και γράφουμε $\delta(u) = X$.

Ουσιαστικά, από τον παραπάνω ορισμό έχουμε τη σημαντική σχέση δυϊκότητας των τελεστών D, δ, η οποία ονομάζεται και σχέση ολοκλήρωσης κατά μέρη.

$$\mathbb{E}\left[\langle DX, u\rangle_H\right] = \mathbb{E}[X\delta(u)], \tag{2.48}$$

όπου $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ και $u \in \operatorname{Dom}\delta$.

Λήμμα 2.3.1. *Ένα στοιχείο $u \in L^2(\Omega; H)$ ανήκει στο $\operatorname{Dom}\delta$ αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $c \geq 0$ (που εξαρτάται γενικά απ'το u) τέτοια ώστε*

$$|\mathbb{E}[\langle DY, u\rangle_H]| \leq c\|Y\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, Y \in \mathbb{D}^{1,2}. \tag{2.49}$$

Απόδειξη. Αν $u \in \operatorname{Dom}\delta$ τότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$|\mathbb{E}[\langle DY, u\rangle_H]| = |\mathbb{E}[\delta(u)Y]| \leq \|\delta(u)\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|Y\|_{L^2(\Omega)}$$

Διαλέγουμε $c = \|\delta(u)\|_{L^2(\Omega)}$ και έχουμε το ζητούμενο.

Έστω τώρα ότι ισχύει η (2.49). Τότε, επειδή το $\mathbb{D}^{1,2}$ είναι πυκνό στον $L^2(\Omega)$, η απεικόνιση $T : \mathbb{D}^{1,2} \to \mathbb{R}$ με $T(Y) = \mathbb{E}[\langle DY, u\rangle_H]$ επεκτείνεται σε φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει μοναδικό $X \in L^2(\Omega)$ έτσι ώστε $T(Y) = \mathbb{E}[YX]$. Εξισώνουμε τις δύο γραφές για τον T και έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[\langle DY, u\rangle_H] = \mathbb{E}[YX] \quad \forall Y \in \mathbb{D}^{1,2}$$

και κατά συνέπεια $u \in \operatorname{Dom}\delta$ και $\delta(u) = X$. □

Πρόταση 2.3.1. *Έστω $u \in \mathcal{S}(H)$ που έχει την μορφή $u = \sum_{i=1}^n X_i h_i$ όπου $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{S}$ και $h_1, \ldots, h_n \in H$. Τότε $u \in \operatorname{Dom}\delta$ και*

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^n X_i W(h_i) - \sum_{i=1}^n \langle DX_i, h_i\rangle_H. \tag{2.50}$$

Απόδειξη. Λόγω γραμμικότητας των εκφράσεων που εμφανίζονται, μπορούμε να υποθέσουμε πως $n = 1$ και να γράψουμε $u = Xh$ με $X \in \mathcal{S}, h \in H$. Τότε, για κάθε $Y \in \mathcal{S}$, χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.23) και έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\langle DY, u\rangle_H\right] &= \mathbb{E}[X\langle DY, h\rangle_H] \\ &= \mathbb{E}[XYW(h)] - \mathbb{E}[Y\langle DX, h\rangle_H] \\ &= \mathbb{E}[Y(XW(h) - \langle DX, h\rangle_H)]. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Λόγω πυκνότητας του $\mathcal{S}$ στον $\mathbb{D}^{1,2}$, η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$, συνεπώς $\delta(u) = XW(h) - \langle DX, h\rangle_H$. □

Ορισμός 2.3.2 (Παράγωγος κατά κατεύθυνση)**.** Έστω $h \in H$. Ορίζουμε τον τελεστή D_h (παράγωγος Malliavin στην κατεύθυνση h) που δρά στα λεία τυχαία συναρτησοειδή $X \in \mathcal{S}$ ως

$$D_h X = \langle DX, h\rangle_H. \tag{2.52}$$

Παρατηρούμε ότι $D_h X \in L^2(\Omega)$ αφού από την ανισότητα Cauchy-Schwarz είναι

$$\mathbb{E}\left[\langle DX, h\rangle_H^2\right] = \int_\Omega \langle DX, h\rangle_H^2 \, d\mathbb{P} \leq \|h\|_H^2 \int_\Omega \|DX\|_H^2 d\mathbb{P} < \infty.$$

Ο D_h είναι ένας μη φραγμένος γραμμικός τελεστής $D_h : \mathcal{S} \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ο οποίος είναι closable. Συμβολίζουμε τον κλειστό τελεστή που επεκτείνει τον D_h ξανά με D_h, και το πεδίο ορισμού του με $\mathbb{D}^{h,2}$. Βλέπουμε επίσης πως $\mathbb{D}^{1,2} \subset \mathbb{D}^{h,2}$.

Αν η τυχαία μεταβλητή u παίρνει τιμές στον H, τότε πάλι θα γράφουμε $D_h u$ για τη κατευθυνόμενη παράγωγο, όμως εδώ εννοούμε ότι

$$D_h u = Du \cdot h, \tag{2.53}$$

που είναι η δράση του τελεστή Hilbert-Schmidt Du πάνω στο h.

Στο επόμενο λήμμα, σκοπός μας είναι να δείξουμε μία σχέση μετάθεσης τύπου Heisenberg για τους τελεστές D και δ και πιο συγκεκριμένα να δείξουμε ότι

$$D_h \delta - \delta D_h = \langle \cdot, h \rangle_H \tag{2.54}$$

που μας θυμίζει τη σχέση μετάθεσης $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar I$ μεταξύ των τελεστών θέσης και ορμής. Στην παραπάνω εξίσωση το δεύτερο D_h είναι με την έννοια της (2.53).

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο πως αν $x, y, z \in H$, τότε ο στοιχειώδης τανυστής $x \otimes y$ δρα στο z ως $(x \otimes y) \cdot z = \langle x, z \rangle_H y$.

Λήμμα 2.3.2. *Θεωρούμε $u \in \mathcal{S}(H)$ και $h \in H$. Τότε*

$$\langle D\delta(u), h \rangle_H - \delta(Du \cdot h) = \langle u, h \rangle_H. \tag{2.55}$$

Απόδειξη. Λόγω γραμμικότητας των εκφράσεων που εμφανίζονται, μπορούμε να υποθέσουμε πως το u έχει τη μορφή $u = Xz$ όπου $X \in \mathcal{S}, z \in H$. Γράφουμε $X = f(W(e_1), \dots, W(e_n))$ για κάποια $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ και ορθοκανονικό σύνολο $\{e_1, \dots, e_n\}$. Θέτουμε $X_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(e_1), \dots, W(e_n))$, οπότε είναι $DX = \sum_{i=1}^n X_i e_i$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z, h \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $\delta(u) = XW(z) - \langle DX, z \rangle_H$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} D(XW(z)) &= W(z)DX + XDW(z) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i W(z) e_i + Xz \\ &= u + \sum_{i=1}^n X_i W(z) e_i. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Επίσης $\langle DX, z \rangle_H = \sum_{i=1}^n X_i \langle z, e_i \rangle_H$, οπότε $D\langle DX, z \rangle_H = \sum_{i=1}^n DX_i \langle z, e_i \rangle_H$. Έχουμε λοιπόν τη σχέση

$$\langle D\delta(u), h \rangle_H = \langle u, h \rangle_H + \sum_{i=1}^n X_i W(z) \langle h, e_i \rangle_H - \sum_{i=1}^n \langle DX_i, h \rangle_H \langle z, e_i \rangle_H. \tag{2.57}$$

Προχωράμε τώρα στον υπολογισμό του $\delta(Du \cdot h)$. Επειδή $u = Xz$ έχουμε ότι $D(u) \cdot h = \sum_{i=1}^n X_i z \langle h, e_i \rangle_H$, οπότε

$$\begin{aligned} \delta(Du \cdot h) &= \sum_{i=1}^n \delta\left(X_i z \langle h, e_i \rangle_H\right) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i W(z) \langle h, e_i \rangle_H - \sum_{i=1}^n \langle DX_i, z \rangle \langle h, e_i \rangle_H. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (2.57) και (2.58) και έχουμε

$$\langle D\delta(u), h\rangle_H - \delta(Du\cdot h) = \langle u,h\rangle_H + \sum_{i=1}^{n}\langle DX_i, z\rangle_H\langle h, e_i\rangle_H - \sum_{i=1}^{n}\langle DX_i, h\rangle_H\langle z, e_i\rangle_H. \tag{2.59}$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n}\langle DX_i, z\rangle_H\langle h, e_i\rangle_H = \sum_{i=1}^{n}\langle DX_i, h\rangle_H\langle z, e_i\rangle_H. \tag{2.60}$$

Πράγματι, λόγω της ισότητας των μικτών παραγώγων, ισχύει ότι $\langle DX_i, e_j\rangle_H = \langle DX_j, e_i\rangle_H$ και γράφοντας τα z, h ως προς τη βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle DX_i, z\rangle_H\langle h, e_i\rangle_H &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle z, e_j\rangle_H\langle DX_i, e_j\rangle_H\langle h, e_i\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\langle z, e_j\rangle_H\langle DX_j, e_i\rangle_H\langle h, e_i\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n}\langle DX_j, h\rangle_H\langle z, e_j\rangle_H.\end{aligned} \tag{2.61}$$

□

Πρόταση 2.3.2. *Εστω* $X\in\mathbb{D}^{1,2}$ *και* $u\in\operatorname{Dom}\delta$ *με τις ιδιότητες* $Xu\in L^2(\Omega;H)$ *και* $X\delta(u)-\langle DX,u\rangle_H\in L^2(\Omega)$. *Τότε* $Xu\in\operatorname{Dom}\delta$ *και*

$$\delta(Xu) = X\delta(u) - \langle DX, u\rangle_H. \tag{2.62}$$

Απόδειξη. Έστω $X, Y\in\mathcal{S}_b$. Τότε η Y γράφεται στην μορφή $Y = g(W(e_1),\dots,W(e_n))$ όπου $g\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $\{e_1,\dots,e_n\}$ ορθοκανονικό υποσύνολο του H. Θέτουμε $Y_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}(W(e_1),\dots,W(e_n))$ και έχουμε

$$\langle DY, Xu\rangle_H = \sum_{i=1}^{n} Y_i\langle Xu, e_i\rangle_H = \sum_{i=1}^{n} XY_i\langle u, e_i\rangle_H = \langle u, XDY\rangle_H.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle DY, Xu\rangle_H] &= \mathbb{E}[\langle u, XDY\rangle_H] \\ &= \mathbb{E}[\langle u, D(XY) - YDX\rangle_H] \\ &= \mathbb{E}[\delta(u)XY - Y\langle u, DX\rangle_H] \\ &= \mathbb{E}[Y(\delta(u)X - \langle u, DX\rangle_H)].\end{aligned} \tag{2.63}$$

Λόγω πυκνότητας του $\mathcal{S}_b$ στον $\mathbb{D}^{1,2}$ η παραπάνω σχέση ισχύει για $X\in\mathbb{D}^{1,2}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες της υπόθεσης. Έστω $Y\in\mathbb{D}^{1,2}$ τότε θεωρούμε ακολουθία (Y_k) στο $\mathcal{S}_b$ που συγκλίνει στην Y στον $\mathbb{D}^{1,2}$. Τότε $\mathbb{E}[\langle DY_k, Xu\rangle_H]\to\mathbb{E}[\langle DY, Xu\rangle_H]$ καθώς $k\to\infty$ και λόγω της ανισότητας Cauchy-Schwarz

$$|\mathbb{E}[(Y_k - Y)(\delta(u)X - \langle u, DX\rangle_H)]| \le \|Y_k - Y\|_{L^2(\Omega)}\|\delta(u)X - \langle u, DX\rangle_H\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.64}$$

Όμως από την υπόθεση $\|\delta(u)X - \langle u, DX\rangle_H\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ και επειδή $Y_k \to Y$ στον $\mathbb{D}^{1,2}$ έπεται ότι $Y_k \to Y$ στον $L^2(\Omega)$. Κατά συνέπεια $\mathbb{E}[Y_k(\delta(u)X - \langle u, DX\rangle_H)] \to \mathbb{E}[Y(\delta(u)X - \langle u, DX\rangle_H)]$ καθώς $k \to \infty$. Άρα λοιπόν για κάθε $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[\langle DY, Xu\rangle_H] = \mathbb{E}[Y(\delta(u)X - \langle u, DX\rangle_H)], \tag{2.65}$$

και τελικά $\delta(Xu) = X\delta(u) - \langle DX, u\rangle_H$. □

Έστω $u, v \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$. Για την παρακάτω πρόταση, χρειαζόμαστε μία εύχρηστη έκφραση για το ίχνος $\mathrm{tr}(Du \circ Dv)$ όπου $Du \circ Dv$ είναι η σύνθεση των τελεστών Hilbert-Schmidt Du και Dv.

Υπενθυμίζουμε πως για $T, S \in \mathrm{HS}(H, H)$ το ίχνος $\mathrm{tr}(S^*T)$ ορίζεται ως

$$\mathrm{tr}(S^*T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle S^*Te_n, e_n\rangle_H\,, \tag{2.66}$$

όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H και S^* είναι ο συζυγής τελεστής του S. Η παραπάνω έκφραση δεν εξαρτάται από την επιλογής της ορθοκανονικής βάσης. Επίσης η απεικόνιση $(T, S) \to \mathrm{tr}(S^*T)$ δίνει το εσωτερικό γινόμενο του $\mathrm{HS}(H, H)$ αφού

$$\langle T, S\rangle_{\mathrm{HS}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, Se_n\rangle_H = \sum_{n=1}^{\infty} \langle S^*Te_n, e_n\rangle_H = \mathrm{tr}(S^*T). \tag{2.67}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι για κάθε $h \in H$ είναι

$$D\,\langle u, h\rangle_H = Du^* \cdot h \tag{2.68}$$

με πιθανότητα 1.

Πράγματι, αν $\xi \in H$, τότε

$$\begin{aligned} &D_\xi\langle u, h\rangle_H = \langle D\langle u, h\rangle_H, \xi\rangle_H = \langle Du, \xi \otimes h\rangle_{H\otimes H} = \langle Du, \xi \otimes h\rangle_{\mathrm{HS}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle Du \cdot e_n, \xi \otimes h \cdot e_n\rangle_H = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Du \cdot e_n, \langle \xi, e_n\rangle_H h\rangle_H = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Du \cdot e_n, h\rangle_H \langle \xi, e_n\rangle_H \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle Du^* \cdot h, e_n\rangle_H \langle \xi, e_n\rangle_H \end{aligned} \tag{2.69}$$

άρα λόγω της ταυτότητας Parseval, είναι $D_\xi\langle u, h\rangle_H = \langle Du^* \cdot h, \xi\rangle_H$. Επειδή το $\xi \in H$ ήταν αυθαίρετο, βλέπουμε ότι ισχύει η (2.68).

Μπορούμε τώρα να πάρουμε μία έκφραση για το ίχνος $\mathrm{tr}(Du \circ Dv)$ την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην παρακάτω πρόταση. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\mathrm{tr}(Du \circ Dv) = \sum_{i,j=1}^{\infty} D_{e_i}\langle u, e_j\rangle_H D_{e_j}\langle v, e_i\rangle_H. \tag{2.70}$$

Πράγματι, με τη βοήθεια της ταυτότητας Parseval και της σχέσης (2.68), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(Du \circ Dv) &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle Du^* \cdot e_j, Dv \cdot e_j\rangle_H = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle Du^* \cdot e_j, e_i\rangle_H \langle Dv \cdot e_j, e_i\rangle_H \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle Du^* \cdot e_j, e_i\rangle_H \langle Dv^* \cdot e_i, e_j\rangle_H = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle D\langle u, e_j\rangle_H, e_i\rangle_H \langle D\langle v, e_i\rangle_H, e_j\rangle_H \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} D_{e_i}\langle u, e_j\rangle D_{e_j}\langle v, e_i\rangle_H. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Πρόταση 2.3.3. *Έστω $u, v \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$. Θεωρούμε $\{e_i : i \geq 1\}$ ορθοκανονική βάση του H. Τότε $u, v \in \operatorname{Dom}\delta$, άρα $\mathbb{D}^{1,2}(H) \subset \operatorname{Dom}\delta$ και*

$$\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] = \mathbb{E}[\langle u, v\rangle_H] + \mathbb{E}[\operatorname{tr}(Du \circ Dv)]. \tag{2.72}$$

Πιό ειδικά, αν $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$, τότε

$$\mathbb{E}[\delta(u)^2] \leq \mathbb{E}[\|u\|_H^2] + \mathbb{E}[\|Du\|_{H\otimes H}^2]. \tag{2.73}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε πως $u, v \in \mathcal{S}(H)$. Λόγω της δυϊκότητας των τελεστών D, δ είναι $\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] = \mathbb{E}[\langle v, D\delta(u)\rangle_H]$. Γράφουμε $v = \sum_{i=1}^{\infty}\langle v, e_i\rangle_H e_i$ και έχουμε ότι

$$\langle v, D\delta(u)\rangle_H = \sum_{i=1}^{\infty}\langle v, e_i\rangle_H D_{e_i}(\delta(u)). \tag{2.74}$$

Από το Λήμμα 2.3.2 έχουμε $\langle e_i, D\delta(u)\rangle_H = \langle u, e_i\rangle_H + \delta(Du \cdot e_i)$, άρα

$$\langle v, D\delta(u)\rangle_H = \sum_{i=1}^{\infty}\langle v, e_i\rangle_H\langle u, e_i\rangle_H + \sum_{i=1}^{\infty}\langle v, e_i\rangle_H\delta(D_{e_i}u).$$

Από τη ταυτότητα του Parseval $\langle u, v\rangle_H = \sum_{i=1}^{\infty}\langle v, e_i\rangle_H\langle u, e_i\rangle_H$, άρα

$$\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] = \mathbb{E}[\langle u, v\rangle_H] + \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\langle v, e_i\rangle_H\delta(D_{e_i}u)\right]. \tag{2.75}$$

Χρησιμοποιούμε ξανά τη δυϊκότητα των τελεστών D, δ και γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\langle v, e_i\rangle_H\delta(D_{e_i}u)\right] &= \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\langle D\langle v, e_i\rangle_H, D_{e_i}\langle u, e_j\rangle_H e_j\rangle_H\right]\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[D_{e_i}\langle u, e_j\rangle_H\langle D\langle v, e_i\rangle_H, e_j\rangle_H\right]\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[D_{e_i}\langle u, e_j\rangle_H D_{e_j}\langle v, e_i\rangle_H\right].\end{aligned} \tag{2.76}$$

Συνδυάζουμε τα παραπάνω και έχουμε την (2.72) για $u, v \in \mathcal{S}(H)$. Στην περίπτωση που $v = u \in \mathcal{S}(H)$, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[\delta(u)^2] \leq \mathbb{E}[\|u\|_H^2] + \mathbb{E}[\|Du\|_{H\otimes H}^2] = \|u\|_{\mathbb{D}^{1,2}}. \tag{2.77}$$

Θεωρούμε τώρα $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$ και ακολουθία (u_k) στον $\mathcal{S}(H)$ τέτοια ώστε $u_k \to u$ στον $L^2(\Omega; H)$ και $Du_k \to Du$ στον $L^2(\Omega; H \otimes H)$. Τότε από την (2.77) βλέπουμε ότι η ακολουθία $\delta(u_k)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $L^2(\Omega)$ άρα συγκλίνει σε κάποιο $X \in L^2(\Omega)$. Για κάθε $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[\langle DY, u\rangle_H] = \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}[\langle DY, u_k\rangle_H] = \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}[Y\delta(u_k)] = \mathbb{E}[YX] \tag{2.78}$$

συνεπώς $u \in \operatorname{Dom}\delta$ με $\delta(u) = X$. Άρα η σχέση (2.77) ισχύει για κάθε $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$. Τέλος, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα πολικότητας, βλέπουμε ότι ισχύει η (2.72) για κάθε $u, v \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$. □

Σκοπός μας στη συνέχεια είναι να δείξουμε την Πρόταση 2.3.4, η οποία μας πληροφορεί πως το Λήμμα 2.3.2 ισχύει για περισσότερες τυχαίες μεταβλητές. Αυτό θα μας βοηθήσει σε επόμενες ενότητες όπου θα δουλεύουμε στο πλαίσιο του λευκού θορύβου.

Πρώτα όμως χρειαζόμαστε ένα τεχνικό λήμμα.

Λήμμα 2.3.3. *Έστω $X \in L^2(\Omega)$ τέτοια ώστε να υπάρχει $Y \in L^2(\Omega)$ με την ιδιότητα*

$$\mathbb{E}[YF] = \mathbb{E}[X\delta(Fh)] \quad \text{για κάθε } F \in \mathbb{D}^{1,2}. \tag{2.79}$$

Τότε $X \in \mathbb{D}^{h,2}$ και $D_h X = Y$.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[YF] = \mathbb{E}[X\delta(Fh)] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}[J_n X\delta(Fh)] &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}[\langle D(J_n X), Fh\rangle_H] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[F D_h(J_n X)].\end{aligned} \tag{2.80}$$

Άρα $J_{n-1}Y = D_h(J_n X)$. Θεωρούμε τώρα τις τυχαίες μεταβλητές $(X_N)_{N=1}^{\infty}$ με $X_N = \sum_{n=0}^{N} J_n X$. Τότε, καθώς $N \to \infty$, είναι $X_N \to X$ στον $L^2(\Omega)$, και

$$D_h(X_N) = \sum_{n=0}^{N} D_h(J_n X) = \sum_{n=1}^{N} J_{n-1}Y = \sum_{n=0}^{N-1} J_n Y \to Y \tag{2.81}$$

στον $L^2(\Omega)$. Επειδή ο D_h είναι κλειστός τελεστής έπεται ότι $X \in \mathbb{D}^{h,2}$ και $D_h X = Y$. □

Πρόταση 2.3.4. *Έστω $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$ έτσι ώστε $D_h u \in \operatorname{Dom}\delta$. Τότε $\delta(u) \in \mathbb{D}^{h,2}$ και*

$$D_h\delta(u) - \delta(D_h u) = \langle u, h\rangle_H. \tag{2.82}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $(e_n : n \in \mathbb{N})$ ορθοκανονική βάση του H και γράφουμε $u = \sum_{n=0}^{\infty}\langle u, e_n\rangle_H e_n$. Τότε είναι $Du = \sum_{n=0}^{\infty} D(\langle u, e_n\rangle_H) \otimes e_n$, άρα

$$Du \cdot h = \sum_{n=0}^{\infty}\langle D(\langle u, e_n\rangle_H), h\rangle_H e_n. \tag{2.83}$$

Για κάθε $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ έχουμε από την παραπάνω σχέση ότι

$$D(Fh)\cdot e_j = \sum_{n=0}^{\infty}\langle D\langle Fh, e_n\rangle_H, e_j\rangle_H e_n = \sum_{n=0}^{\infty}\langle DF, e_j\rangle_H \langle h, e_n\rangle_H e_n = \langle DF, e_j\rangle_H h. \tag{2.84}$$

Με τη βοήθεια της ταυτότητας Parseval και της παραπάνω σχέσης, γράφουμε

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(Du \circ D(Fh)) = \sum_{j=1}^{\infty}\langle Du^* \cdot e_j, D(Fh)\cdot e_j\rangle_H &= \sum_{j=1}^{\infty}\langle Du^*\cdot e_j, h\rangle_H \langle DF, e_j\rangle_H \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\langle Du\cdot h, e_j\rangle_H \langle DF, e_j\rangle_H \\ &= \langle D_h u, DF\rangle_H.\end{aligned} \tag{2.85}$$

Από την παραπάνω εξίσωση σε συνδυασμό με την εξίσωση (2.72) έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[\delta(u)\delta(Fh)] = \mathbb{E}[F\langle u, h\rangle_H] + \mathbb{E}[\langle D_h u, DF\rangle_H] = \mathbb{E}[(\langle u, h\rangle_H + \delta(D_h u))F], \tag{2.86}$$

και τώρα το ζητούμενο έπεται από το προηγούμενο λήμμα. □

2.4 Ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck

Στο κεφάλαιο 1 είδαμε πως από τη στοχαστική ανέλιξη Ornstein-Uhlenbeck προκύπτει μία ημιομάδα τελεστών, η ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck, και υπολογίσαμε το γεννήτορά της L. Στο πλαίσιο που δουλεύουμε, θα πρέπει να ορίσουμε την ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck λίγο διαφορετικά προκειμένου να αποφύγουμε να εργασθούμε με απειροδιάστατες ανελίξεις διάχυσης. Θα μιμηθούμε το τρόπο που δρα η μονοδιάστατη ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck στον $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$.

Ας θυμηθούμε πρώτα κάποιους βασικούς ορισμούς για ημιομάδες τελεστών.

Ορισμός 2.4.1. Έστω E χώρος Banach και $B(E)$ το σύνολο των φραγμένων γραμμικών τελεστών $E \to E$. Μία ισχυρά συνεχής ημιομάδα στον E είναι μία απεικόνιση $T : \mathbb{R}_+ \to B(E)$ έτσι ώστε

1. $T_0 = \mathrm{id}_E$.
2. Για κάθε $t, s \geq 0$ είναι $T_{t+s} = T_t \circ T_s$.
3. Για κάθε $x \in E$ είναι $\lim\limits_{t \to 0} \|T_t x - x\| = 0$.

Ορισμός 2.4.2. Ο γεννήτορας A της ημιομάδας T είναι ο τελεστής $A : \mathrm{Dom}\, A \subset E \to E$ που ορίζεται ως

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T_t x - x}{t}. \tag{2.87}$$

και το πεδίο ορισμού $\mathrm{Dom}\, A$ του A αποτελείται από τα $x \in E$ έτσι ώστε να υπάρχει το παραπάνω όριο.

Ορισμός 2.4.3 (Ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck)**.** Ορίζουμε την ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck ως την ημιομάδα τελεστών $(P_t)_{t \geq 0}$ έτσι ώστε για κάθε $t \geq 0$ η δράση του τελεστή P_t να είναι

$$P_t X = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} J_n X \quad \forall\ X \in L^2(\Omega), \tag{2.88}$$

όπου $J_n : L^2(\Omega) \to \mathscr{H}_n$ η προβολή στο $n-$οστό χάος Wiener.

Το παρακάτω λήμμα μας λέει πως η ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck είναι μία ισχυρά συνεχής ημιομάδα αυτοσυζυγών τελεστών στον $L^2(\Omega)$.

Λήμμα 2.4.1. *Η ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck έχει τις εξής ιδιότητες:*

1. *Για κάθε $t \geq 0$ ο τελεστής P_t είναι συστολή στον $L^2(\Omega)$ και αυτοσυζυγής.*
2. *$P_0 = \mathrm{id}_{L^2(\Omega)}$ και $P_{t+s} = P_t \circ P_s$.*
3. *Για κάθε $X \in L^2(\Omega)$ είναι $P_t X \to X$ στον $L^2(\Omega)$ καθώς $t \to 0$.*

Απόδειξη.

1. Για κάθε $X \in L^2(\Omega)$ και $t \geq 0$, έχουμε

$$\|P_t X\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nt} \|J_n X\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|J_n X\|^2_{L^2(\Omega)} = \|X\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.89}$$

άρα κάθε P_t είναι συστολή στον $L^2(\Omega)$.

Για να δείξουμε ότι ο P_t είναι αυτοσυζυγής, παρατηρούμε πως η εικόνα του προβολικού τελεστή J_n είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του πυρήνα του. Δηλαδή είναι

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathscr{H}_k = \left(\bigoplus_{k \neq n} \mathscr{H}_k \right) \oplus \mathscr{H}_n = \ker J_n \oplus \operatorname{im} J_n. \tag{2.90}$$

Κατά συνέπεια ο J_n είναι αυτοσυζυγής, και για $X, Y \in L^2(\Omega)$ έχουμε

$$\mathbb{E}\left[P_t X Y\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \mathbb{E}\left[J_n X Y\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \mathbb{E}\left[X J_n Y\right] = \mathbb{E}\left[X P_t Y\right]. \tag{2.91}$$

2. Η ιδιότητα $P_0 = \mathrm{id}_{L^2(\Omega)}$ προέρχεται από τον ορισμό του P_t Έστω τώρα $s, t \geq 0$. Υπολογίζουμε

$$P_t(P_s X) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} J_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ks} J_k X \right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(t+s)} J_n X = P_{t+s} X. \tag{2.92}$$

3. Για $X \in L^2(\Omega)$ γράφουμε

$$\|P_t X - X\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-nt} - 1 \right) J_n X \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-nt} - 1 \right)^2 \|J_n X\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{2.93}$$

Επειδή $\left(e^{-nt} - 1\right)^2 \leq 1$ και $\lim_{t \to 0} \left(e^{-nt} - 1\right)^2 = 0$, παίρνουμε το όριο $t \to 0$ στην παραπάνω εξίσωση και εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Τότε έπεται ότι $\lim_{t \to 0} P_t X = X$ στον $L^2(\Omega)$.

□

Ορισμός 2.4.4. Ο γεννήτορας L της ημιομάδας $(P_t)_{t \geq 0}$ θα λέγεται τελεστής Ornstein-Uhlenbeck.

Η διάσπαση σε χάος Wiener θα μας επιτρέψει να εξάγουμε πληροφορίες για το πεδίο ορισμού του L καθώς και για τη δράση του.

Πρόταση 2.4.1. *Το πεδίο ορισμού του τελεστή Ornstein-Uhlenbeck L είναι το*

$$\operatorname{Dom} L = \left\{ X \in L^2(\Omega) : \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \|J_n X\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty \right\} \tag{2.94}$$

και $LX = \sum_{n=0}^{\infty} (-n) J_n X$ για κάθε $X \in \operatorname{Dom} L$.

Απόδειξη. Θα συμβολίσουμε με A τον γεννήτορα της ημιομάδας Ornstein-Uhlenbeck και θα θεωρήσουμε ως L τον τελεστή που δρά με τον τρόπο που γράφεται στην πρόταση. Θα δείξουμε ότι $A = L$.

Υποθέτουμε πως $X \in \operatorname{Dom} A$ και θέτουμε $Y = AX$. Δηλαδή

$$Y = \lim_{t \to 0^+} \frac{P_t X - X}{t}.$$

Επειδή ο προβολικός τελεστής J_n είναι φραγμένος και μετατίθεται με τον P_t για κάθε $t \geq 0$, έχουμε

$$J_nY = \lim_{t\to 0^+} J_n \frac{P_tX - X}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{P_tJ_nX - J_nX}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-nt}-1}{t} J_nX = -nJ_nX. \tag{2.95}$$

Όμως $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \|J_nX\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|J_nY\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty$, οπότε $X \in \operatorname{Dom} L$, άρα $\operatorname{Dom} A \subseteq \operatorname{Dom} L$ και $AX = Y = LX$.

Έστω τώρα ότι $X \in \operatorname{Dom} L$. Τότε

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{P_tX - X}{t} - LX\right|^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-nt}-1}{t} + n\right)^2 \|J_nX\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.96}$$

Επειδή $\left|\frac{e^{-nt}-1}{t}\right| \leq n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \|J_nX\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισής του Lebesgue και να πάρουμε ότι

$$\lim_{t\to 0^+} \mathbb{E}\left[\left|\frac{P_tX - X}{t} - LX\right|^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t\to 0^=} \left(\frac{e^{-nt}-1}{t} + n\right)^2 \|J_nX\|^2_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{2.97}$$

Συνεπώς $\lim_{t\to 0^+} \frac{P_tX - X}{t} = LX$ για κάθε $X \in \operatorname{Dom} L$, άρα $X \in \operatorname{Dom} A$ και $AX = LX$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα, το οποίο λέει πως οι τρείς βασικοί τελεστές του λογισμού Malliavin D, δ και L συνδέονται μέσω της σχέσης $L = -\delta D$. Δηλαδή ο $-L$ ισούται με την απόκλιση της κλίσης, πράγμα που μας θυμίζει τη Λαπλασιανή Δ του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω $X \in L^2(\Omega)$. Τότε $X \in \operatorname{Dom} L$ αν και μόνο αν $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ και $DX \in \operatorname{Dom} \delta$. Σε αυτή την περίπτωση $LX = -\delta(DX)$.*

Απόδειξη. Αν $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ και $DX \in \operatorname{Dom} \delta$ τότε για κάθε $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[Y\delta(DX)] = \mathbb{E}[\langle DY, DX\rangle_H]. \tag{2.98}$$

Από την ταυτότητα πολικότητας και το Θεώρημα 2.2.8 έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[\langle DY, DX\rangle_H] = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}[J_nYJ_nX] = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}[YJ_nX] \tag{2.99}$$

άρα $\mathbb{E}[Y\delta(DX)] = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}[YJ_nX]$.

Ισχυριζόμαστε ότι $J_n(\delta(DX)) = nJ_nX$. Πράγματι , για $Y \in \mathscr{H}_m$ με $m \neq n$ είναι

$$\mathbb{E}[Y(\delta(DX) - nJ_nX)] = \sum_{j\neq n} n\mathbb{E}[YJ_jX] = 0. \tag{2.100}$$

Λόγω γραμμικότητας και συνέχειας η παραπάνω εξίσωση ισχύει για κάθε $Y \in \oplus_{m\neq n}\mathscr{H}_m$. Ο ισχυρισμός αληθεύει λοιπόν.

Μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \|J_nX\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \|J_n\delta(DX)\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty \tag{2.101}$$

συνεπώς $X \in \operatorname{Dom} L$ και

$$\mathbb{E}[Y\delta(DX)] = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}[YJ_nX] = \mathbb{E}\left[Y\sum_{n=0}^{\infty} nJ_nX\right] = \mathbb{E}[Y(-LX)] \tag{2.102}$$

για κάθε $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$. Όμως ο $\mathbb{D}^{1,2}$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2(\Omega)$ οπότε η παραπάνω εξίσωση ισχύει για κάθε $Y \in L^2(\Omega)$ και έτσι βλέπουμε ότι $LX = -\delta(DX)$.

Έστω τώρα ότι $X \in \operatorname{Dom} L$. Τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\|J_nX\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} n^2\|J_nX\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty \tag{2.103}$$

άρα $X \in \mathbb{D}^{1,2}$. Από τον προηγούμενο υπολογισμό $\mathbb{E}[\langle DY, DX\rangle_H] = \mathbb{E}[Y(-LX)]$ για κάθε $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$. Οπότε $DX \in \operatorname{Dom}\delta$ και $LX = -\delta(DX)$. □

Το επόμενο παράδειγμα θα μας χρειαστεί στο τελευταίο κεφάλαιο που θα δούμε κανονικές προσεγγίσεις.

Παράδειγμα 2.4.1. Θεωρούμε τον τελεστή L^{-1} του οποίου η δράση σε κάθε τυχαία μεταβλητή $X \in L^2(\Omega)$ είναι $L^{-1}X = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})J_nX$. Ο L^{-1} παίρνει τιμές στον $\operatorname{Dom} L$ και

$$LL^{-1}X = \sum_{n=0}^{\infty}(-n)J_n(L^{-1}X) = \sum_{n=1}^{\infty}(-n)\left(-\frac{1}{n}\right)J_nX = \sum_{n=1}^{\infty} J_nX = X - \mathbb{E}[X], \tag{2.104}$$

οπότε ο L^{-1} είναι ο αντίστροφος του L για κεντραρισμένες τυχαίες μεταβλητές.

Κλασικοί χώροι Sobolev και Γκαουσιανοί χώροι Sobolev. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}$ τον υπόχωρο του $\mathcal{S}$ έτσι ώστε αν $X \in \mathcal{P}$, τότε $X = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$, όπου f πολυώνυμο, $n \in \mathbb{N}$ και $h_1, \dots, h_n \in H$.

Έστω $p \geq 1$ και $k \geq 1$ θετικός ακέραιος. Με $\tilde{\mathbb{D}}^{k,p}$ συμβολίζουμε τη κλειστότητα του $\mathcal{P}$ ως προς τη νόρμα

$$\|X\|'_{k,p} = \|(I-L)^{k/2}X\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.105}$$

όπου I ο ταυτοτικός τελεστής και L ο τελεστής Ornstein-Uhlenbeck. Συγκεκριμένα ο τελεστής $(I-L)^{k/2}$ ορίζεται ως $(I-L)^{k/2}X = \sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{k/2}J_nX$.

Προκύπτει τώρα το εξής ερώτημα. Ποιά είναι η σχέση των χώρων $\mathbb{D}^{k,p}$ και $\tilde{\mathbb{D}}^{k,p}$; Η απάντηση είναι πως $\mathbb{D}^{k,p} = \tilde{\mathbb{D}}^{k,p}$ όμως η απόδειξη ξεφεύγει απ'τους σκοπούς μας. Να σημειώσουμε πάντως πως στην απόδειξη χρησιμοποιούνται κάποιες ισχυρές εκτιμήσεις που ονομάζονται ανισότητες Meyer. Υπάρχουν διάφορες εκδοχές αυτών των ανισοτήτων, για την ισότητα $\mathbb{D}^{k,p} = \tilde{\mathbb{D}}^{k,p}$ χρησιμοποιούνται οι εξής εκτιμήσεις.

Θεώρημα 2.4.3 (Meyer)**.** *Έστω $p \geq 1$ και $k \geq 1$ θετικός ακέραιος. Τότε υπάρχουν σταθερές $c_{k,p}$και $C_{k,p}$ έτσι ώστε για κάθε $X \in \mathcal{S}$*

$$c_{k,p}\mathbb{E}\left[\|D^kX\|^p_{H^{\otimes k}}\right] \leq (\|X\|'_{k,p})^p \leq C_{k,p}\|X\|^p_{k,p}. \tag{2.106}$$

Ας δούμε τώρα μία αναλογία με τους κλασικούς χώρους Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ όπου $s \in \mathbb{R}$ οι οποίοι μπορούν να ορισθούν ως

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in S'(\mathbb{R}^n) : (I-\Delta)^s u \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}, \tag{2.107}$$

όπου $S'(\mathbb{R}^n)$ ο χώρος των tempered κατανομών στο $\mathbb{R}^n$, Δ η Λαπλασιανή και I ο ταυτοτικός τελεστής. Θέτουμε $A = I - \Delta$. Ας θυμηθούμε πως ορίζεται ο $A^s = (I - \Delta)^s$.

Το σύμβολο του A είναι $1 + |\xi|^2$ και ο A^s είναι ο ψευδοδιαφορικός τελεστής που έχει πυρήνα Schwarz

$$K(x, y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}(1 + |\xi|^2)^s d\xi \tag{2.108}$$

που σημαίνει ότι ο A^s δρά στις συναρτήσεις $u \in S(\mathbb{R}^n)$ ως

$$A^s u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}(1 + |\xi|^2)^s u(y) dy d\xi. \tag{2.109}$$

Ο A^s δρά στις tempered κατανομές με δυϊκότητα και η νόρμα στον $H^s(\mathbb{R}^n)$ είναι η $\|(I-\Delta)^s u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Βλέπουμε κι εδώ λοιπόν, πως ο τελεστής Onrstein-Uhlenbeck μοιάζει με ένα απειροδιάστατο ανάλογο της Λαπλασιανής Δ του $\mathbb{R}^n$.

2.5 Στοχαστική ανάλυση σε λευκό θόρυβο

2.5.1 Πολλαπλό ολοκλήρωμα Wiener-Itô

Έστω $(T, \mathcal{G}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, με το μ να είναι μή ατομικό μέτρο. Κατά συνέπεια για κάθε $A \in \mathcal{G}$ με $\mu(A) > 0$ και για κάθε $r \in (0, 1)$, υπάρχει $B \subseteq A$ με $B \in \mathcal{G}$ και $\mu(B) = r\mu(A)$ (Δείτε για παράδειγμα την Άσκηση 2.14 στο [59])

Σε αυτή την ενότητα, θα εφαρμόσουμε τον λογισμό Malliavin στην περίπτωση που ο διαχωρίσιμος χώρος Hilbert H είναι ο $L^2(T, \mathcal{G}, \mu)$ Αυτό θα μας επιτρέψει να έχουμε επιπλέον πληροφορίες για τη δράση των τελεστών D, δ. Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε πως $H = L^2(T, \mathcal{G}, \mu)$ και σταθεροποιούμε μία $L^2(T, \mathcal{G}, \mu)-$ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία W που ορίζεται σε κάποιον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \sigma(W), \mathbb{P})$. Επειδή οι απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στον H η $H-$ισοκανονική Γκαουσιανή διαδικασία W καθορίζεται από τις τυχαίες μεταβλητές $\{W(\mathbb{1}_A) : A \in \mathcal{G}, \mu(A) < \infty\}$. Θέτουμε $W(A) = W(\mathbb{1}_A)$ και παρατηρούμε πως η απεικόνιση $W : A \to W(A)$ ορίζει Γκαουσιανό λευκό θόρυβο με μέτρο ελέγχου το μ.

Θέτουμε επίσης $\mathcal{G}_0 = \{A \in \mathcal{G} : \mu(A) < \infty\}$.

Ορισμός 2.5.1. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{A}_n$ τον υπόχωρο του $L^2(T^n, \mathcal{G}^{\otimes n}, \mu^n)$ που αποτελείται από τις συναρτήσεις f της μορφής

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{N} a_{i_1,\ldots,i_n} \mathbb{1}_{A_{i_1}}(t_1) \cdots \mathbb{1}_{A_{i_n}}(t_n), \tag{2.110}$$

όπου $N \in \mathbb{N}$, $a_{i_1,\ldots,i_n} = 0$ όποτε τουλάχιστον δύο από τους δείκτες $i_1, \ldots, i_n$ είναι ίσοι, και $A_1, \ldots, A_N$ είναι ξένα ανα δύο σύνολα του $\mathcal{G}_0$. Τις συναρτήσεις του $\mathcal{A}_n$ θα τις λέμε στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Εισάγουμε τώρα το πολλαπλό ολοκλήρωμα Wiener-Itô για στοιχειώδης συναρτήσεις.

Ορισμός 2.5.2. Για $f \in \mathcal{A}_n$, ορίζουμε το $n-$οστό πολλαπλό ολοκλήρωμα Wiener-Itô $I_n(f)$ της f ως

$$I_n(f) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{N} a_{i_1,\ldots,i_n} W(A_{i_1}) \cdots W(A_{i_n}) \tag{2.111}$$

Παρατηρούμε πως το πολλαπλό ολοκλήρωμα Wiener-Itô είναι μία τυχαία μεταβλητή και επειδή $a_{i_1,\dots,i_n} = 0$ όποτε τουλάχιστον δύο από τους δείκτες $i_1,\dots,i_n$ είναι ίσοι, ισχύει ότι $\mathbb{E}[I_n(f)] = 0$ για κάθε $f \in \mathcal{A}_n$.

Προκειμένου να επεκτείνουμε το πολλαπλό ολοκλήρωμα Wiener-Itô στον $L^2(T^n)$, θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.5.1. *Ο $\mathcal{A}_n$ είναι πυκνός στον $L^2(T^n, \mathcal{G}^{\otimes n}, \mu^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Αν δείξουμε πως κάθε δείκτρια $\mathbb{1}_B$, όπου $B = A_1 \times \cdots \times A_n$ με $A_i \in \mathcal{G}_0$ για κάθε $i = 1,\dots,n$, περιέχεται στην $L^2(T^n)$ κλειστότητα του $\mathcal{A}_n$, τότε θα έχουμε το ζητούμενο καθώς οι απλές συναρτήσεις, στα μετρήσιμα ορθογώνια, είναι πυκνές στον $L^2(T^n)$.

Έστω λοιπόν B ένα τέτοιο σύνολο και $\varepsilon > 0$. Επειδή το μ είναι μή ατομικό μέτρο , μπορούμε να βρούμε ξένα ανα δύο μετρήσιμα σύνολα $E_1,\dots,E_N$ τέτοια ώστε κάθε A_jνα γράφεται ως ένωση κάποιων συνόλων από τα E_i , και $\mu(E_i) \le \varepsilon$ για κάθε $i = 1,\dots,n$.

Υποθέτουμε πως $\cup_{i=1}^N E_i = \cup_{i=1}^n A_i$ και θέτουμε $m = \mu(\cup_{i=1}^N E_i) = \mu(\cup_{i=1}^n A_i)$.

Υπάρχουν συντελεστές $a_{i_1,\dots,i_n} \in \{0,1\}$ έτσι ώστε

$$\mathbb{1}_B = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{N} a_{i_1,\dots,i_n} \mathbb{1}_{E_{i_1}} \cdots \mathbb{1}_{E_{i_n}} \tag{2.112}$$

Αν I είναι το σύνολο των $n-$άδων $(i_1,\dots,i_n)$ έτσι ώστε οι δείκτες να είναι διαφορετικοί ανα δύο , και J είναι το σύνολο των υπόλοιπων $n-$άδων, τότε θέτουμε

$$\mathbb{1}_C = \sum_{i_1,\dots,i_n \in I} a_{i_1,\dots,i_n} \mathbb{1}_{E_{i_1}} \cdots \mathbb{1}_{E_{i_n}} \tag{2.113}$$

και τότε

$$\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C = \sum_{i_1,\dots,i_n \in J} a_{i_1,\dots,i_n} \mathbb{1}_{E_{i_1}} \cdots \mathbb{1}_{E_{i_n}} \tag{2.114}$$

Από τον τρόπο ορισμού της δείκτριας $\mathbb{1}_C$ έπεται ότι $C \subseteq B$ και $\mathbb{1}_C \in \mathcal{A}_n$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C\|^2_{L^2(T^n)} &= \sum_{i_1,\dots,i_n \in J} a_{i_1,\dots,i_n} \mu(E_{i_1}) \cdots \mu(E_{i_n}) \\ &\le \binom{n}{2} \sum_{j=1}^{N} \mu(E_j)^2 \left(\sum_{j=1}^{N} \mu(E_j) \right)^{n-2} \end{aligned} \tag{2.115}$$

Όμως $\mu(E_j) \le \varepsilon$ για κάθε $j = 1,\dots,N$ άρα

$$\sum_{j=1}^{N} \mu(E_j)^2 \le \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \mu(E_j)$$

και τελικά $\|\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C\|^2_{L^2(T^n)} \le \binom{n}{2} m^{n-1} \varepsilon$ που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια εισάγουμε τη συμμετρικοποίηση σε στοιχειώδεις συναρτήσεις και αποδεικνύουμε ένα λήμμα που θα μας επιτρέψει να επεκτείνουμε το πολλαπλό ολοκλήρωμα Wiener-Itô στον $L^2(T^n)$. Η συμμετρικοποίηση είναι μία πολύ σημαντική αλγεβρική τεχνική που έχει συνέπειες σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών. Θυμηθείτε πως τέτοια επιχειρήματα οδηγούν σε βασικά θεωρήματα της θεωρίας Galois καθώς και στο θεώρημα Maschke. Επίσης η συμμετρικοποίηση προκύπτει κατά τρόπο φυσιολογικό στη κβαντομηχανική ταυτόσημων σωματιδίων και συγκεκριμένα στον μποζονικό χώρο Fock.

Ορισμός 2.5.3. Έστω $f \in \mathcal{A}_n$. Θα συμβολίζουμε με $\tilde{f}$ τη συμμετρικοποίηση της f, που ορίζεται ως

$$\tilde{f}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}) \tag{2.116}$$

Λήμμα 2.5.2. *Έστω $f \in \mathcal{A}_n$ και $g \in \mathcal{A}_k$. Τότε:*

1. $I_n(f) = I_n(\tilde{f})$
2. $\mathbb{E}[I_n(f)I_k(g)] = n!\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2(T^n)} \delta_{nk}$ *όπου δ_{nk} το δέλτα του Kronecker.*

Απόδειξη.

1. Λόγω γραμμικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f = \mathbb{1}_{A_1} \cdots \mathbb{1}_{A_n}$ όπου τα $A_1, \dots, A_n$ είναι ξένα ανα δύο. Τότε όμως $W(A_1) \cdots W(A_n) = W(A_{\sigma(1)}) \cdots W(A_{\sigma(n)})$ για κάθε $\sigma \in S_n$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

2. Έστω ότι
$$f = \sum_{i_1, \dots, i_n = 1}^{N'} a_{i_1, \dots, i_n} \mathbb{1}_{A'_{i_1} \times \cdots \times A'_{i_n}}$$
και
$$g = \sum_{j_1, \dots, j_k = 1}^{N''} b_{j_1, \dots, j_k} \mathbb{1}_{A''_{j_1} \times \cdots \times A''_{j_k}}$$
Μπορούμε να υποθέσουμε πως στην αναπαράσταση των f, g, τα σύνολα $A'_{i_1}, \dots, A'_{i_n}$ και $A''_{j_1}, \dots, A''_{j_k}$ προέρχονται από μία οικογένεια ξένων ανά δύο συνόλων $A_1, \dots, A_N$. Μπορούμε να πάρουμε μία τέτοια οικογένεια θεωρώντας τις μή κενές τομές των $A'_i \cap A''_j$. Λόγω του μέρους 1 θα θεωρήσουμε ότι οι f, g είναι συμμετρικές και λόγω γραμμικότητας αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για τις δείκτριες συναρτήσεις.

   Αν $k \neq n$ και στα σύνολα $\{i_1, \dots, i_n\}, \{j_1, \dots, j_k\}$ δεν έχουμε επαναλαμβανόμενους δείκτες, τότε
$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[I_n(\mathbb{1}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n}}) I_n(\mathbb{1}_{A_{j_1} \times \cdots \times A_{j_k}})\right] \\ &\qquad = \mathbb{E}\left[W(A_{i_1}) \cdots W(A_{i_n}) \cdot W(A_{j_1}) \cdots W(A_{j_k})\right] = 0 \end{aligned} \tag{2.117}$$
καθώς περισσεύει τουλάχιστον ένας δείκτης.

   Έστω τώρα ότι $k = n$. Αν τα σύνολα $\{i_1, \dots, i_n\}, \{j_1, \dots, j_k\}$ δε συμπίπτουν (χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξη) τότε
$$\mathbb{1}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n}} \cdot \mathbb{1}_{A_{j_1} \times \cdots \times A_{j_n}} = 0$$
οπότε
$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[I_n(\mathbb{1}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n}}) I_n(\mathbb{1}_{A_{j_1} \times \cdots \times A_{j_n}})\right] \\ &\qquad = \mathbb{E}\left[W(A_{i_1}) \cdots W(A_{i_n}) \cdot W(A_{j_1}) \cdots W(A_{j_n})\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Μένει λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση που τα σύνολα $\{i_1, \ldots, i_n\}, \{j_1, \ldots, j_k\}$ συμπίπτουν, δηλαδή το $\{j_1, \ldots, j_k\}$ είναι μετάθεση του $\{i_1, \ldots, i_n\}$. Τότε οι $f = \mathbb{1}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n}}$ και $g = \mathbb{1}_{A_{j_1} \times \cdots \times A_{j_k}}$ έχουν την ίδια συμμετρικοποίηση, άρα

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2(T^n)} &= \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in S_n} \mu(A_{i_{\sigma(1)}}) \cdots \mu(A_{i_{\sigma(n)}}) \\ &= \frac{1}{n!} \mu(A_{i_1}) \cdots \mu(A_{i_n}). \end{aligned} \tag{2.119}$$

Όμως από το μέρος 1

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_n(\tilde{f}) I_n(\tilde{g})] = \mathbb{E}[I_n(f)^2] &= \mathbb{E}\left[W(A_{i_1})^2 \cdots W(A_{i_n})^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[W(A_{i_1})^2\right] \cdots \mathbb{E}\left[W(A_{i_n})^2\right] \\ &= \mu(A_{i_1}) \cdots \mu(A_{i_n}) \end{aligned} \tag{2.120}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Από το παραπάνω λήμμα και τη τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[I_n(f)^2] = n! \|\tilde{f}\|_{L^2(T^n)} \le n! \|f\|_{L^2(T^n)}, \tag{2.121}$$

το οποίο δείχνει ότι ο $I_n : \mathcal{A}_n \to L^2(\Omega)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και επειδή οι στοιχειώδεις συναρτήσεις $\mathcal{A}_n$ είναι πυκνές στον $L^2(T^n, \mathcal{G}^{\otimes n}, \mu^n)$, ο I_n επεκτείνεται σε φραγμένο γραμμικό τελεστή $I_n : L^2(T^n) \to L^2(\Omega)$. Κάνοντας κατάχρηση συμβολισμού, συμβολίζουμε επίσης με I_n αυτή την επέκταση. Δίνουμε λοιπόν τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.5.4 (Πολλαπλό ολοκλήρωμα Wiener-Itô)**.** Για $f \in L^2(T^n)$ ορίζουμε το $n-$οστό πολλαπλό ολοκλήρωμα Wiener-Itô της f ως

$$\int_{T^n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dW(t_1) \cdots dW(t_n) := I_n(f). \tag{2.122}$$

Από τον ορισμό του πολλαπλού ολοκλήρωματος Wiener-Itô και από το Λήμμα 2.5.2, έχουμε την ακόλουθη πρόταση που δίνει σχέσεις ορθογωνιότητας μεταξύ των πολλαπλών ολοκληρωμάτων Wiener-Itô.

Πρόταση 2.5.1. *Έστω $n, k \in \mathbb{N}$ και $f \in L^2(T^n), g \in L^2(T^k)$. Τότε*

$$\mathbb{E}\left[I_n(f) I_k(g)\right] = 0 \qquad \text{για } n \neq k \tag{2.123}$$

και

$$\mathbb{E}\left[I_n(f) I_n(g)\right] = n! \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2(T^n)} \qquad \text{για } n = k. \tag{2.124}$$

Ορισμός 2.5.5. Θεωρούμε $p, q \geq 1$ ακέραιους και $r \in \{1, \ldots, p \wedge q\}$. Έστω επίσης $f \in L^2(T^p)$ και $g \in L^2(T^q)$. Ορίζουμε την $r-$συστολή $f \otimes_r g$ ως το στοιχείο του $L^2\left(T^{p+q-2r}\right)$ που δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} (f \otimes_r g)(t_1, \ldots, t_{p+q-2r}) = \int_{T^r} & f(t_1, \ldots, t_{p-r}, x_1, \ldots, x_r) \cdot \\ & g(t_{p-r+1}, \ldots, t_{p+q-2r}, x_1, \ldots, x_r) \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_r). \end{aligned} \tag{2.125}$$

Θέτουμε επίσης $(f \otimes_0 g)(t_1, \ldots, t_{p+q}) = (f \otimes g)(t_1, \ldots, t_{p+q}) = f(t_1, \ldots, t_p)g(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})$.

Παρατηρήστε ότι η $r-$συστολή $f \otimes_r g$ είναι πράγματι στοιχείο του $L^2(T^{p+q-2r})$ αφού από την ανισότητα Cauchy-Schwarz είναι

$$\|f \otimes_r g\|_{L^2(T^{p+q-2})} \leq \|f\|_{L^2(T^p)} \|g\|_{L^2(T^q)}. \tag{2.126}$$

Λήμμα 2.5.3. *Έστω $g \in L^2(T)$ και $f \in L^2(T^n)$ συμμετρική συνάρτηση. Τότε*

$$I_n(f)I_1(g) = I_{n+1}(f \otimes g) + nI_{n-1}(f \otimes_1 g). \tag{2.127}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του πολλαπλού ολοκληρώματος Wiener-Itô και λόγω γραμμικότητας, αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για δείκτριες συναρτήσεις.

Έστω $f = \tilde{\mathbb{1}}_{A_1 \times \cdots \times A_n}$ και $g = \mathbb{1}_B$ όπου $A_1, \ldots A_n, B \in \mathcal{G}_0$.

Αν είναι $A_i \cap B = \emptyset$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, τότε βλέπουμε πως $f \otimes g \in \mathcal{A}_{n+1}$ και $f \otimes_1 g = 0$ και γράφουμε

$$I_n(f)I_1(g) = W(A_1) \cdots W(A_n)W(B) = I_{n+1}(f \otimes g) \tag{2.128}$$

που δείχνει ότι το λήμμα ισχύει σε αυτή την περίπτωση.

Αν τώρα το B τέμνει κάποιο από τα A_i, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B = A_1$ και να γράψουμε

$$\begin{aligned}
f \otimes_1 g &= \int_T \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbb{1}_{A_{\sigma(1)}}(t_1) \cdots \mathbb{1}_{A_{\sigma(n-1)}}(t_{n-1}) \cdot \mathbb{1}_{A_{\sigma(n)}}(x) \cdot \mathbb{1}_{A_1}(x)\ \mu(dx) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbb{1}_{A_{\sigma(1)}}(t_1) \cdots \mathbb{1}_{A_{\sigma(n-1)}}(t_{n-1}) \int_T \mathbb{1}_{A_{\sigma(n)}}(x) \cdot \mathbb{1}_{A_1}(x)\ \mu(dx) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=1}} \mathbb{1}_{A_{\sigma(1)}}(t_1) \cdots \mathbb{1}_{A_{\sigma(n-1)}}(t_{n-1}) \cdot \mu(A_1) \\
&= \frac{1}{n}\mu(A_1) \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=1}} \mathbb{1}_{A_{\sigma(1)}}(t_1) \cdots \mathbb{1}_{A_{\sigma(n-1)}}(t_{n-1}) \\
&= \frac{1}{n}\mu(A_1)\tilde{\mathbb{1}}_{A_2 \times \cdots \times A_n}.
\end{aligned} \tag{2.129}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το $I_n(f)I_1(g)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή το μ είναι μή ατομικό μέτρο, μπορούμε να βρούμε ξένα ανα δύο μετρήσιμα σύνολα $B_1, \ldots, B_N$ με $A_1 = \cup_{j=1}^N B_j$ και $\mu(B_i) < \varepsilon$ για κάθε $j = 1, \ldots, N$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h_\varepsilon = \sum_{i \neq j} \mathbb{1}_{B_i \times B_j \times A_2 \times \cdots \times A_n}. \tag{2.130}$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
I_n(f)I_1(g) &= W(A_1)^2 W(A_2) \cdots W(A_n) \\
&= \left(\sum_{j=1}^N W(B_j)\right)^2 W(A_2) \cdots W(A_n) \\
&= \sum_{j=1}^N W(B_j)^2 W(A_2) \cdots W(A_n) + \sum_{i \neq j} W(B_i)W(B_j)W(A_2) \cdots W(A_n).
\end{aligned} \tag{2.131}$$

Με προσθαφαίρεση έχουμε

$$\sum_{j=1}^{N} W(B_j)^2 W(A_2)\cdots W(A_n) = \mu(A_1)W(A_2)\cdots W(A_n) - \sum_{j=1}^{N}\left(W(B_j)^2-\mu(B_j)\right)W(A_2)\cdots W(A_n). \tag{2.132}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mu(A_1)W(A_2)\cdots W(A_n) = nI_{n-1}(f\otimes_1 g)$$

και

$$\sum_{i\neq j} W(B_i)W(B_j)W(A_2)\cdots W(A_n) = I_{n+1}(h_\varepsilon)$$

οπότε

$$I_n(f)I_1(g) = nI_n(f\otimes_1 g) + I_{n+1}(h_\varepsilon) + R_\varepsilon, \tag{2.133}$$

όπου $R_\varepsilon = \sum_{j=1}^{N}\left(W(B_j)-\mu(B_j)\right)W(A_2)\cdots W(A_n)$. Τα $B_1,\ldots,B_N$ είναι ξένα ανα δύο οπότε οι τυχαίες μεταβλητές $W(B_1),\ldots,W(B_N)$ είναι ανεξάρτητες. Επίσης $W(B_j)\sim N(0,\mu(B_j))$ οπότε $\mathbb{E}\left[W(B_j)^4\right]=3\mu(B_j)^2$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_\varepsilon^2] &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Cov}(W(B_i),W(B_j))\mu(A_2)\cdots\mu(A_n)\\
&= \sum_{j=1}^{N}\mathrm{Var}(W(B_j)^2)\mu(A_2)\cdots\mu(A_n)\\
&= \sum_{j=1}^{N}\left(\mu(B_j)^2-\mu(B_j)^2\right)\mu(A_2)\cdots\mu(A_n)\\
&= 2\sum_{j=1}^{N}\mu(B_j)^2\mu(A_2)\cdots\mu(A_n)\\
&\leq 2\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\mu(B_j)\mu(A_2)\cdots\mu(A_n)\\
&= 2\varepsilon M,
\end{aligned} \tag{2.134}$$

όπου $M=\mu(A_1)\cdots\mu(A_n)$. Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\tilde{h}_\varepsilon - f\tilde{\otimes} g\|_{L^2(T^{n+1})} &= \|\tilde{h}_\varepsilon - \tilde{\mathbb{1}}_{A_1\times A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}\|_{L^2(T^{n+1})}\\
&\leq \|h_\varepsilon - \mathbb{1}_{A_1\times A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}\|_{L^2(T^{n+1})}\\
&= \sum_{j=1}^{N}\mu(B_j)^2\mu(A_2)\cdots\mu(A_n)\\
&\leq \varepsilon M.
\end{aligned} \tag{2.135}$$

Παίρνουμε τώρα $\varepsilon\to 0^+$ και έχουμε ότι $R_\varepsilon\to 0$ στον $L^2(\Omega)$ και $\tilde{h}_\varepsilon\to f\tilde{\otimes} g$ στον $L^2(T^{n+1})$. Το ζητούμενο έπεται από την εξίσωση (2.133). □

Λήμμα 2.5.4. *Έστω $\tilde{H}_n$ το $n-$οστό ανηγμένο πολυώνυμο Hermite και συνάρτηση $h \in L^2(T)$ τέτοια ώστε $\|h\|_{L^2(T)} = 1$. Τότε για κάθε $n \geq 1$ είναι*

$$\int_{T^n} h(t_1) \cdots h(t_n)\, dW(t_1) \cdots dW(t_n) = n! \tilde{H}_n(W(h)). \tag{2.136}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε ισχυρή επαγωγή στο n.

Για $n = 1$ είναι $\int_T h(t)\, dW(t) = W(h) = \tilde{H}_1(W(h))$ οπότε η (2.136) ισχύει.

Έστω τώρα $n \geq 2$. Από το προηγούμενο λήμμα και το Λήμμα 1.1.4 έχουμε

$$\begin{aligned} I_{n+1}\left(h^{\otimes(n+1)}\right) &= I_{n+1}\left(h^{\otimes n} \otimes h\right) \\ &= I_n(h^{\otimes n}) I_1(h) - n I_{n-1}\left(h^{\otimes n} \otimes_1 h\right) \\ &= I_n(h^{\otimes n}) I_1(h) - n I_{n-1}\left(h^{\otimes(n-1)}\right) \\ &= n! \tilde{H}_n\left(W(h)\right) W(h) - n(n-1)! \tilde{H}_{n-1}\left(W(h)\right) \\ &= n! \left(\tilde{H}_n\left(W(h)\right) W(h) - \tilde{H}_{n-1}\left(W(h)\right)\right) \\ &= n!(n+1) \tilde{H}_{n+1}\left(W(h)\right) \\ &= (n+1)! \tilde{H}_{n+1}\left(W(h)\right), \end{aligned} \tag{2.137}$$

όπου στη τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\begin{aligned} (h^{\otimes n} \otimes_1 h)(t_1, \ldots, t_{n-1}) &= \int_T h(t_1) \cdots h(t_{n-1}) h(x) h(x) \mu(dx) \\ &= h(t_1) \cdots h(t_{n-1}) \|h\|^2_{L^2(T)} \\ &= h(t_1) \cdots h(t_{n-1}) = h^{\otimes(n-1)}(t_1, \ldots, t_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.138}$$

□

Πρόταση 2.5.2. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε ο τελεστής I_n του πολλαπλού ολοκληρώματος Wiener-Itô απεικονίζει τον $L^2_s(T^n)$ στο $n-$οστό χάος Wiener $\mathscr{H}_n$.*

Απόδειξη. Έστω $L^2_s(T^n)$ ο χώρος των συμμετρικών συναρτήσεων στον $L^2(T^n)$. Ισχυριζόμαστε ότι ο $L^2_s(T^n)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $L^2(T^n)$. Πράγματι, είναι άμεσο ότι είναι υπόχωρος και αν $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στον $L^2_s(T^n)$ που συγκλίνει σε κάποια $f \in L^2(T^n)$, τότε

$$\|\tilde{f} - f\|_{L^2(T^n)} \leq \|\tilde{f} - f_k\|_{L^2(T^n)} + \|f - f_k\|_{L^2(T^n)} \leq 2\|f - f_k\|_{L^2(T^n)} \to 0 \tag{2.139}$$

καθώς $k \to \infty$. Δηλαδή $\tilde{f} = f$ στον $L^2(T^n)$, οπότε $f \in L^2_s(T^n)$ και ο ισχυρισμός αληθεύει.

Από την Πρόταση 2.5.1 έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[I_n(f)^2\right] = n! \|f\|_{L^2(T^n)} \quad \forall\, f \in L^2_s(T^n) \tag{2.140}$$

συνεπώς ο I_n είναι 1-1 στον $L^2_s(T^n)$ και ο $I_n\left(L^2_s(T^n)\right)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $L^2(\Omega)$. Από το προηγούμενο λήμμα, αν $h \in L^2(T)$ με νόρμα 1 τότε $\tilde{H}_n\left(W(h)\right) \in I_n\left(L^2_s(T^n)\right)$. Έπεται λοιπόν πως το $n-$οστό χάος Wiener περιέχεται στον $I_n\left(L^2_s(T^n)\right)$, δηλαδή

$$\mathscr{H}_n = \overline{\operatorname{span}}\left\{\tilde{H}_n\left(W(h)\right) : \|h\|_{L^2(T)} = 1\right\} \subseteq I_n\left(L^2_s(T^n)\right). \tag{2.141}$$

Αν τώρα $k \neq n$ και $g \in L^2(T^k)$, τότε $I_n(f) \perp I_k(g)$ στον $L^2(\Omega)$ άρα

$$I_n\left(L_s^2(T^n)\right) \perp \bigoplus_{k\neq n} \mathscr{H}_k \tag{2.142}$$

και κατά συνέπεια $I_n\left(L_s^2(T^n)\right) \subseteq \mathscr{H}_n$. Τελικά λοιπόν $I_n\left(L_s^2(T^n)\right) = \mathscr{H}_n$. □

Από τα παραπάνω βλέπουμε πως το θεώρημα διάσπασης σε χάος Wiener λαμβάνει την εξής μορφή.

Θεώρημα 2.5.5. *Για κάθε $X \in L^2(\Omega, \sigma(W), \mathbb{P})$ υπάρχουν μοναδικές συμμετρικές συναρτήσεις $f_n \in L_s^2(T^n)$ έτσι ώστε*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) = \mathbb{E}[X] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n). \tag{2.143}$$

Δηλαδή η X γράφεται ως σειρά πολλαπλών ολοκληρωμάτων Wiener-Itô. Εδώ $f_0 = \mathbb{E}[X]$ και I_0 είναι η ταυτοτική συνάρτηση στις σταθερές.

2.5.2 Δράση των τελεστών D, δ

Η παράγωγος Malliavin ως ανέλιξη. Όπως πριν, ο διαχωρίσιμος χώρος Hilbert H θα είναι ο $H = L^2(T, \mathcal{G}, \mu)$, όπου $(T, \mathcal{G}, \mu)$ είναι χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και το μ είναι μή ατομικό μέτρο. Αν $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ τότε $DX : \Omega \to H$ και $DX \in L^2(\Omega; H)$. Στην περίπτωση που $H = L^2(T, \mathcal{G}, \mu)$ μπορούμε να ταυτίσουμε τον $L^2(\Omega; H)$ με τον $L^2(T \times \Omega)$, καθώς και οι δύο αυτοί χώροι είναι ισόμορφοι με τον $L^2(T) \otimes L^2(\Omega)$, και να θεωρήσουμε την παράγωγο Malliavin DX ως ανέλιξη $\{D_t X : t \in T\}$ όπου η $D_t X$ ορίζεται $\mu \times \mathbb{P}-$σχεδόν παντού. Σε αυτό το πλαίσιο, ο τελεστής απόκλισης δ είναι ο συζυγής του τελεστής παραγώγισης Malliavin $D : L^2(\Omega) \to L^2(T \times \Omega)$, δηλαδή είναι ένας τελεστής $\delta : L^2(T \times \Omega) \to L^2(\Omega)$ που δέχεται ως ορίσματα στοχαστικές ανελίξεις του $L^2(T \times \Omega)$. Σε αυτό το πλαίσιο καλούμε επίσης τον δ ολοκλήρωμα Skorohod και γράφουμε

$$\delta(u) = \int_T u(t, \omega) \delta W(t) \quad \text{για } u \in \operatorname{Dom} \delta \tag{2.144}$$

καθώς ο δ συμπίπτει με το ολοκλήρωμα Skorohod. Μπορείτε να βρείτε μια εισαγωγή στο ολοκλήρωμα Skorohod ανεξάρτητη από το λογισμό Malliavin στις αναφορές [27] και στο [61].

Στην επόμενη ενότητα, θα δούμε πως το ολοκλήρωμα Skorohod αποτελεί γενίκευση του ολοκληρώματος Itô που γνωρίζουμε από τον στοχαστικό λογισμό.

Έστω $k \geq 1$ ακέραιος αριθμός και $X \in \mathbb{D}^{1,2}$. Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος $D^k X : \Omega \to H^{\otimes k}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $H^{\otimes k}$ και είναι στοιχείο του $L^2(\Omega; H^{\otimes k})$ που μπορεί να ταυτιστεί με τον $L^2(T^k \times \Omega)$. Μπορούμε δηλαδή να δούμε την $D^k X$ ως μία $k-$παραμετρική στοχαστική ανέλιξη $\{D^k_{t_1,\ldots,t_k} X : t_i \in T\ , i = 1, \ldots, k\}$. Από τον ισομορφισμό $L^2(\Omega; H^{\otimes k}) \simeq L^2(T^k \times \Omega)$, έπεται άμεσα η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.5.3. *Έστω $k \geq 1$ ακέραιος αριθμός και $X \in \mathbb{D}^{1,2}$. Τότε $X \in \mathbb{D}^{k+1,2}$ αν και μόνο αν $D^k_{t_1,\ldots,t_k} X \in \mathbb{D}^{1,2}$ για σχεδόν κάθε $(t_1, \ldots, t_k)$ ως προς το μέτρο μ^k και η συνάρτηση $t \to \left(\mathbb{E}\left[\|D_t D^k_{t_1,\ldots,t_k} X\|^2_{L^2(T^k)}\right]\right)^{1/2}$ είναι στον $L^2(T)$. Τότε συμπεραίνουμε πως $D_t D^k_{t_1,\ldots,t_k} X = D^{k+1}_{t,t_1,\ldots,t_k} X$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε την πρόταση για $k=1$. Η γενική περίπτωση έπεται με επαγωγή.

Έστω $X \in \mathcal{S}$, δηλαδή υπάρχουν $n \in \mathbb{N}, f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $h_1, \ldots, h_n \in H$ έτσι ώστε $X = f\left(W(h_1), \ldots, W(h_n)\right)$. Τότε είναι

$$DX = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(W(h_1), \ldots, W(h_n)\right) h_i$$

και

$$D^2 X = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(W(h_1), \ldots, W(h_n)\right) h_i \otimes h_j$$

Από την ταύτιση $L^2(T) \otimes L^2(T) = L^2(T \times T)$ γράφουμε

$$D_t X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(W(h_1), \ldots, W(h_n)\right) h_i(t)$$

και

$$D_s D_t X = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(W(h_1), \ldots, W(h_n)\right) h_i(t) h_j(s)$$

και

$$\mathbb{E}\left[|X|^2 + \|DX\|_H^2 + \|D^2 X\|_{H \otimes H}^2\right] = \mathbb{E}\left[|X|^2 + \|D_t X\|_{L^2(T)} + \|D_s D_t X\|_{L^2(T^2)}^2\right]. \tag{2.145}$$

Από αυτή την εξίσωση και την πυκνότητα του $\mathcal{S}$ στον $\mathbb{D}^{1,2}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα χρησιμοποιήσουμε τη διάσπαση σε χάος Wiener για να εξετάσουμε τη δράση του τελεστή παραγώγισης Malliavin και του τελεστή απόκλισης, στην περίπτωση που $H = L^2(T, \mathcal{G}, \mu)$.

Θεώρημα 2.5.6. *Έστω $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ με ανάπτυγμα σε χάος Wiener $X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$, όπου $f_n \in L_s^2(T^n)$ για κάθε $n \geq 0$. Τότε*

$$D_t X = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}\left(f_n(\cdot, t)\right) \tag{2.146}$$

και

$$\mathbb{E}\left[\|D_t X\|_{L^2(T)}^2\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n!) \|f_n\|_{L^2(T^n)}^2. \tag{2.147}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.2.8, αρκεί να δείξουμε πως $D_t I_n(f_n) = n I_{n-1}\left(f_n(\cdot, t)\right)$ όπου $f_n \in L_s^2(T^n)$. Παρατηρούμε πως στο $I_{n-1}\left(f_n(\cdot, t)\right)$ δεν παίζει ρόλο το ποια μεταβλητή παραλείπεται από την ολοκλήρωση καθώς η f_n είναι συμμετρική.

Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για τις συμμετρικές συναρτήσεις του $\mathcal{A}_n$. Έστω λοιπόν $f_n \in \mathcal{A}_n$ συμμετρική. Η f_n έχει τη μορφή

$$f_n = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{N} a_{i_1, \ldots, i_n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n}}, \tag{2.148}$$

όπου $N \in \mathbb{N}, a_{i_1,\ldots,i_n} = 0$ όποτε τουλάχιστον δύο από τους δείκτες $i_1, \ldots, i_n$ είναι ίσοι, και $A_1, \ldots, A_N$ είναι ξένα ανα δύο στοιχεία του $\mathcal{G}_0$. Επειδή

$$I_n(f_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{N} a_{i_1,\ldots,i_n} W(A_{i_1}) \cdots W(A_{i_n})$$

βλέπουμε ότι $I_n(f_n) \in \mathcal{S}$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} DI_n(f_n) &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{N} a_{i_1,\ldots,i_n} D\left(W(A_{i_1}) \cdots W(A_{i_n})\right) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{N} a_{i_1,\ldots,i_n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_{i_j}} \prod_{k\neq j} W(A_{j_k}). \end{aligned} \tag{2.149}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το $nI_{n-1}\left(f_n(\cdot,t)\right)$ και θα δούμε πως είναι ίσο με $DI_n(f_n)$. Η συμμετρικοποίηση της $\mathbb{1}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_n}}$ είναι

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{1}}_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_n}}(t_1,\ldots,t_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_{i_{\sigma(k)}}}(t_k) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_{i_j}}(t_n) \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(j)=n}} \prod_{k\neq j} \mathbb{1}_{A_{i_{\sigma(k)}}}(t_k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_{i_j}}(t_n) \tilde{\mathbb{1}}_{\prod_{k\neq j} A_{i_k}}(t_1,\ldots,t_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.150}$$

Άρα λοιπόν

$$nI_{n-1}\left(f_n(\cdot,t)\right) = nI_{n-1}(\tilde{f}_n(\cdot,t)) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{N} a_{i_1,\ldots,i_n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_{i_j}}(t) \prod_{k\neq j} W(A_{j_k}) = DI_n(f_n), \tag{2.151}$$

που αποδεικνύει το πρώτο μέρος του θεωρήματος.

Το δεύτερο μέρος είναι άμεσο από το Θεώρημα 2.2.8 και την Πρόταση 2.5.1 αφού

$$\mathbb{E}\left[\|D_t X\|^2_{L^2(T)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\|I_n(f_n)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} nn!\|f_n\|^2_{L^2(T^n)}. \tag{2.152}$$

□

Θεωρούμε τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_A = \sigma\left(W(B) : B \in \mathcal{G}_0, B \subseteq A\right)$. Σκοπός μας στη συνέχεια είναι να δείξουμε το εξής θεώρημα που έχει τοπικό χαρακτήρα

Θεώρημα 2.5.7. *Θεωρούμε $A \in \mathcal{G}$. Αν η $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ είναι $\mathcal{F}_A-$μετρήσιμη τότε $D_t X = 0$ $\mu \otimes \mathbb{P}-$σχεδόν παντού στο $A^c \times \Omega$.*

Θα δείξουμε δύο προτάσεις που οδηγούν άμεσα σε απόδειξη αυτού του θεωρήματος, αλλά έχουν και ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Πρόταση 2.5.4. *Έστω $A \in \mathcal{G}$ και $X \in L^2(\Omega)$ με ανάπτυγμα σε χάος Wiener $X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$, όπου $f_n \in L_s^2(T^n)$ για κάθε $n \geq 0$. Τότε*

$$\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_A\right] = \sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(f_n \mathbb{1}_A^{\otimes n}\right). \tag{2.153}$$

Απόδειξη. Όπως και στο Θεώρημα 2.5.6 αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για μια τυχαία μεταβλητή X της μορφής $X = I_n(f_n), f_n \in \mathcal{A}_n$. Επίσης λόγω γραμμικότητας, αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για $f_n = \mathbb{1}_{A_1} \cdots \mathbb{1}_{A_n}$ όπου τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ξένα ανα δύο σύνολα του $\mathcal{G}_0$.

Παρατηρούμε πως επειδή τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ξένα ανα δύο, οι τυχαίες μεταβλητές $W(A_1 \cap A), \ldots, W(A_n \cap A)$ είναι ανεξάρτητες. Είναι και $\mathcal{F}_A$ μετρήσιμες. Επίσης οι τυχαίες μεταβλητές $W(A_1 \cap A^c), \ldots, W(A_n \cap A^c)$ είναι ανεξάρτητες και κάθε μία απο αυτές είναι ανεξάρτητη από τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_A$. Από τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_A\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \left(W(A_i \cap A) + W(A_i \cap A^c)\right) \;\middle|\; \mathcal{F}_A\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} W(A_i \cap A) \\
&= I_n\left(\mathbb{1}_{(A_i \cap A)} \cdots \mathbb{1}_{(A_n \cap A)}\right) \\
&= I_n\left(f_n \mathbb{1}_A^{\otimes n}\right)
\end{aligned} \tag{2.154}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.5.5. *Αν $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ και $A \in \mathcal{G}$ τότε $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_A\right] \in \mathbb{D}^{1,2}$ και*

$$D_t \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_A\right] = \mathbb{E}\left[D_t X|\mathcal{F}_A\right] \mathbb{1}_A. \tag{2.155}$$

Απόδειξη. Έστω $X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ το ανάπτυγμα σε χάος Wiener της X. Από το Θεώρημα 2.5.6 και την προηγούμενη πρόταση, έχουμε

$$\begin{aligned}
D_t \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_A\right] &= D_t \sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(f_n \mathbb{1}_A^{\otimes n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}\left(f_n(\cdot, t) \mathbb{1}_A^{\otimes n}(\cdot, t)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}\left(f_n(\cdot, t) \mathbb{1}_A^{\otimes (n-1)}(\cdot)\right) \mathbb{1}_A(t) \\
&= \mathbb{E}\left[D_t X|\mathcal{F}_A\right] \mathbb{1}_A(t).
\end{aligned} \tag{2.156}$$

Επειδή η τελευταία σειρά συγκλίνει στον $L^2(\Omega)$ έπεται ότι $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_A\right] \in \mathbb{D}^{1,2}$. □

Από αυτή την πρόταση βλέπουμε πως πράγματι ισχύει το Θεώρημα 2.5.7 το οποίο θα μας βοηθήσει στην επόμενη ενότητα στην οποία θα δούμε μία σύνδεση με το ολοκλήρωμα Itô.

Αν η συνάρτηση $f_n \in L^2(T^{n+1})$ είναι συμμετρική στις πρώτες n μεταβλητές, τότε βλέπουμε πως η συμμετρικοποίησή της ως προς τις $n+1$ μεταβλητές δίνεται από τη σχέση

$$\tilde{f}_n(t_1, \ldots, t_n, t) = \frac{1}{n+1}\left(f_n(t_1, \ldots, t_n, t) + \sum_{i=1}^{n} f_n(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots t_n, t_i)\right). \tag{2.157}$$

Θεώρημα 2.5.8. *Έστω $u \in L^2(T \times \Omega)$ με ανάπτυγμα σε χάος Wiener $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t))$ όπου $f_n \in L^2(T^{n+1})$ συμμετρική στις πρώτες n μεταβλητές για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $u \in \operatorname{Dom}\delta$ αν και μόνο αν $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\|\tilde{f}_n\|^2_{L^2(T^{n+1})} < \infty$ και σε αυτή την περίπτωση είναι*

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n). \tag{2.158}$$

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $Y = I_n(g)$ όπου $g \in L^2_s(T^n)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\langle u, DY\rangle_{L^2(T)}\right] &= \mathbb{E}\left[\int_T u(t) D_t Y \mu(dt)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_T n\mathbb{E}\left[I_k(f_k(\cdot, t)) I_{n-1}(g(\cdot, t))\right] \mu(dt) \\
&= n \int_T \mathbb{E}\left[I_{n-1}(f_{n-1}(\cdot, t)) I_{n-1}(g(\cdot, t))\right] \mu(dt) \\
&= n(n-1)! \int_T \langle f_{n-1}(\cdot, t), g(\cdot, t)\rangle_{L^2(T^{n-1})} \mu(dt) \\
&= n! \langle f_{n-1}, g\rangle_{L^2(T^n)} = n! \left\langle \tilde{f}_{n-1}, g\right\rangle_{L^2(T^n)} \\
&= \mathbb{E}\left[I_n(\tilde{f}_{n-1}) I_n(g)\right] = \mathbb{E}\left[I_n(\tilde{f}_{n-1}) Y\right].
\end{aligned} \tag{2.159}$$

Έστω ότι $u \in \operatorname{Dom}\delta$. Τότε από τον παραπάνω υπολογισμό έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\delta(u) Y\right] = \mathbb{E}\left[\langle u, DY\rangle_{L^2(T)}\right] = \mathbb{E}\left[I_n(\tilde{f}_{n-1}) Y\right]$$

για κάθε $Y \in \mathscr{H}_n$. Αυτό σημαίνει ότι $J_n\delta(u) = I_n(\tilde{f}_{n-1})$ οπότε $\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_{n-1})$. Επειδή αυτή η σειρά συγκλίνει στον $L^2(\Omega)$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\delta(u)^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[I_{n+1}(\tilde{f}_n)^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \|\tilde{f}_n\|_{L^2(T^{n+1})} < \infty. \tag{2.160}$$

Υποθέτουμε τώρα πως $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\|\tilde{f}_n\|_{L^2(T^{n+1})} < \infty$. Τότε η σειρά $S = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$ συγκλίνει στον $L^2(\Omega)$. Έστω $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$ με $Y = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(g_n)$ όπου $g_n \in L^2_s(T^n)$. Θέτουμε $Y_N = \sum_{n=0}^{N} I_n(g_n)$ όπου $N \geq 1$. Επειδή $Y_N \in \oplus_{n=0}^{N} \mathscr{H}_n$ έχουμε από την εξίσωση (2.159) ότι

$$\mathbb{E}\left[\langle u, DY_N\rangle_{L^2(T)}\right] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}\left[I_n(\tilde{f}_{n-1}) I_n(g_n)\right]. \tag{2.161}$$

Έχουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}\left[\langle u, DY_N\rangle_{L^2(T)}\right]| &\leq \sum_{n=1}^{N} \left|\mathbb{E}\left[I_n(\tilde{f}_{n-1}) I_n(g_n)\right]\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \|I_n(\tilde{f}_{n-1})\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|I_n(g_n)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N} \|I_n(\tilde{f}_{n-1})\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} \|I_n(g_n)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \\
&\leq \|S\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|Y_N\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.162}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε δύο φορές την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Επειδή , καθώς $N \to \infty$, είναι $Y_N \to Y$ στον $L^2(\Omega)$ και $DY_N \to DY$ στον $L^2(\Omega; L^2(T))$ παίρνουμε το όριο $N \to \infty$ στην παραπάνω ανισότητα και έχουμε ότι $|\mathbb{E}\left[\langle u, DY\rangle_{L^2(T)}\right]| \leq \|S\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|Y\|_{L^2(\Omega)}$. Συνεπώς $u \in \operatorname{Dom}\delta$ όπως θέλαμε. □

Πρόταση 2.5.6. *Έστω $A \in \mathcal{G}_0$ και $X \in L^2(\Omega)$ μία $\mathcal{F}_{A^c}-$ μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Τότε $X\mathbb{1}_A \in \operatorname{Dom}\delta$ και $\delta\left(X\mathbb{1}_A\right) = XW(A)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά πως $X \in \mathbb{D}^{1,2}$. Τότε από το Θεώρημα 2.5.7 είναι $DX = 0$ στον $A \times \Omega$. Οι τυχαίες μεταβλητές $X, W(A)$ είναι ανεξάρτητες οπότε $\mathbb{E}\left[X^2 W(A)^2\right] = \mathbb{E}[X^2] \cdot \mu(A) < \infty$, δηλαδή $XW(A) \in L^2(\Omega)$. Από την Πρόταση 2.3.2 είναι $X\mathbb{1}_A \in \operatorname{Dom}\delta$ και

$$\delta(X\mathbb{1}_A) = X\delta(\mathbb{1}_A) - \langle DX, \mathbb{1}_A\rangle_{L^2(T)} = XW(A) - \int_T D_t X \cdot \mathbb{1}_A(t)\mu(dt) = XW(A).$$

Έστω τώρα $X \in L^2(\Omega)$ και ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ στον $\mathbb{D}^{1,2}$ τέτοια ώστε $X_n \to X$ στον $L^2(\Omega)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε πως οι X_n είναι $\mathcal{F}_{A^c}-$μετρήσιμες (αν χρειάζεται αντικαθιστούμε τις X_n με τις $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{A^c}]$). Τότε καθώς $n \to \infty$ είναι $X_n\mathbb{1}_A \to X\mathbb{1}_A$ στον $L^2(T\times\Omega)$ και $\delta(X_n\mathbb{1}_A) = X_n W(A) \to XW(A)$ στον $L^2(\Omega)$. Όμως ο δ είναι κλειστός τελεστής (είναι ο συζυγής του κλειστού τελεστή D), οπότε $X\mathbb{1}_A \in \operatorname{Dom}\delta$ και $\delta\left(X\mathbb{1}_A\right) = XW(A)$. □

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα εξετάσουμε την μορφή που παίρνουν στο πλαίσιο του λευκού θορύβου κάποιες προτάσεις που έχουμε ήδη αποδείξει. Για ευκολία θέτουμε $\mathbb{L}^{1,2} = \mathbb{D}^{1,2}(H) = \mathbb{D}^{1,2}\left(L^2(T, \mathcal{G}, \mu)\right)$. Ο $\mathbb{L}^{1,2}$ αποτελείται από ανελίξεις $u \in L^2(T \times \Omega)$ τέτοιες ώστε $u(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$ με πιθανότητα 1 και $D_s u(t) \in L^2(T^2 \times \Omega)$. Ο $\mathbb{L}^{1,2}$ είναι χώρος Hilbert με νόρμα

$$\|u\|^2_{\mathbb{L}^{1,2}} = \|u\|^2_{L^2(T\times\Omega)} + \|Du\|^2_{L^2(T^2\times\Omega)}.$$

Για κάθε $u, v \in \mathbb{L}^{1,2}$ η εξίσωση (2.72) παίρνει την μορφή

$$\mathbb{E}\left[\delta(u)\delta(v)\right] = \mathbb{E}\left[\int_T u(t)v(t)\mu(dt)\right] + \mathbb{E}\left[\int_T\int_T D_s u(t) D_t v(s)\mu(dt)\mu(ds)\right]. \tag{2.163}$$

Πράγματι, είναι

$$\operatorname{tr}(Du \circ Dv) = \langle Dv, Du^*\rangle_{\mathrm{HS}} = \langle Dv, Du^*\rangle_{L^2(T)\otimes L^2(T)} = \langle Dv, Du^*\rangle_{L^2(T^2)} \tag{2.164}$$

και επειδή $(f \otimes g)^* = g \otimes f$, κατά τη ταύτιση $L^2(T) \otimes L^2(T) = L^2(T^2)$ ο συζυγής αντιστοιχεί σε ανταλλαγή των μεταβλητών.

Από την Πρόταση 2.3.4 έπεται η ακόλουθη πρόταση που δίνει τη σχέση μετάθεσης των τελεστών D, δ στο πλαίσιο του λευκού θορύβου.

Πρόταση 2.5.7. *Έστω $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ τέτοια ώστε μ σχεδόν για κάθε t η ανέλιξη $(D_t u(s) : s \in T)$ να ανήκει στο $\operatorname{Dom}\delta$ και να υπάρχει εκδοχή της $\left(\delta\left(D_t u(s)\right) : t \in T\right)$ που ανήκει στον $L^2(T \times \Omega)$. Τότε $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$ και $D_t(\delta(u)) - \delta\left(D_t u\right) = u(t)$.*

2.6 Ολοκλήρωμα Itô και ο τύπος των Clark-Ocone

Σε αυτή την ενότητα θα κοιτάξουμε μία ακόμα πιο ειδική, αλλά σημαντική περίπτωση, την περίπτωση όπου $T = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ και $\mu = \lambda$ είναι το μέτρο Lebesgue. Δηλαδή ο διαχωρίσιμος χώρος Hilbert H είναι ο $H = L^2(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. Αν W είναι μία $H-$ισοκανονική διαδικασία, τότε γνωρίζουμε πως η $B_t = W(\mathbb{1}_{(0,t]})$ είναι μία κίνηση Brown. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε τη διήθηση που παράγει αυτή η κίνηση Brown, δηλαδή θεωρούμε τη διήθηση $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ όπου $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{(0,t]} = \sigma(B_s : s \leq t)$ και έτσι αναγόμαστε στον συνήθη φορμαλισμό του στοχαστικού λογισμού. Όπως πριν θέτουμε $\mathbb{L}^{1,2} = \mathbb{D}^{1,2}(H)$. Από την εξίσωση (2.163) με $v = u$ έπεται η ακόλουθη ταυτότητα «ενέργειας», η οποία φαίνεται να είναι κάποια γενίκευση της ισομετρίας Itô.

$$\mathbb{E}\left[\delta(u)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty u^2(t)dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \int_0^\infty D_s u(t) D_t u(s) dt ds\right]. \tag{2.165}$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ η οποία είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, τότε το Θεώρημα 2.5.7 μας δίνει ότι $D_s u(t) = 0$ για κάθε $s > t$ άρα $D_s u(t) D_t u(s) = 0$ με πιθανότητα 1. Η παραπάνω εξίσωση λαμβάνει τώρα τη μορφή

$$\mathbb{E}\left[\delta(u)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty u^2(t)dt\right]. \tag{2.166}$$

Εάν αληθεύει ότι $\delta(u) = \int_0^\infty u(t)dB_t$, τότε η παραπάνω εξίσωση είναι ακριβώς η ισομετρία Itô.

Συμβολίζουμε με $L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ το σύνολο των μετρήσιμων και προσαρμοσμένων στοχαστικών ανελίξεων του $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$. Υπενθυμίζουμε πως αυτός είναι ένας χώρος Hilbert (δείτε στο [63]). Το ακόλουθο θεώρημα μας λέει πως στον $L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ το ολοκλήρωμα Skorohod δ συμπίπτει με το ολοκλήρωμα Itô.

Θεώρημα 2.6.1. *Για κάθε $u \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ είναι $u \in \operatorname{Dom}\delta$ και $\delta(u) = \int_0^\infty u(t)dB_t$.*

Απόδειξη. Θα λέμε ότι η $u \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ είναι μία *απλή ανέλιξη* αν η u έχει τη μορφή

$$u = \sum_{i=1}^n F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}, \tag{2.167}$$

όπου $0 \leq t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ και $F_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P})$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Το σύνολο των στοιχειωδών ανελίξεων είναι πυκνό στον $L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ (για την απόδειξη δείτε στο [63]).

Από τη γραμμικότητα του δ και την Πρόταση 2.5.6 έχουμε ότι $\delta(u) = \sum_{i=1}^n F_i(B_{i+1} - B_i) = \int_0^\infty u(t)dB_t$.

Έστω τώρα $u \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ και ακολουθία $(u_k)_{k\geq 1}$ απλών ανελίξεων που συγκίνει στην u στον $L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$. Γνωρίζουμε από τον στοχαστικό λογισμό (δείτε ξανά στο [63]) πως $\delta(u_k) \to \int_0^\infty u(t)dB_t$ στον $L^2(\Omega)$ καθώς $k \to \infty$. Όμως ο δ είναι κλειστός τελεστής (είναι ο συζυγής του κλειστού τελεστή D) οπότε $u \in \operatorname{Dom}\delta$ και $\delta(u) = \int_0^\infty u(t)dB_t$. □

Η εξίσωση (2.168), στο ακόλουθο θεώρημα, αποτελεί ένα στοχαστικό ανάλογο του τύπου του Leibniz για παραγώγιση ολοκληρώματος.

Θεώρημα 2.6.2. *Έστω $u \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ και $X = \int_0^\infty u(s)dB_s$ το ολοκλήρωμα Itô της ανέλιξης u. Τότε $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ αν και μόνο αν $u \in \mathbb{L}^{1,2}$. Σε αυτή την περίπτωση, η ανέλιξη $(D_t u(s) : s > 0)$ ανήκει στον $L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ και*

$$D_t X = u(t) + \int_t^\infty D_t u(s)\ dB_s \quad \text{για κάθε} \ \ t > 0. \tag{2.168}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά πως $u \in \mathbb{L}^{1,2}$. Τότε $D_t u(s) \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}^2_+ \times \Omega)$ και επειδή η u είναι προσαρμοσμένη έχουμε από το Θεώρημα 2.5.7 ότι $D_t u(s) = 0$ για $t \geq s$. Από το Θεώρημα 2.5.6 και την Πρόταση 2.5.4 έπεται ότι η τυχαία μεταβλητή $D_t u(s)$ είναι $\mathcal{F}_s$−μετρήσιμη για $t \leq s$. Έχουμε λοιπόν πως η ανέλιξη $s \to D_t u(s)$ ανήκει στον $L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ άρα το Θεώρημα 2.6.1 μας δίνει πως $D_t u(s) \in \mathrm{Dom}\,\delta$ για $t > 0$ σταθερό και $\delta(D_t u(s)) = \int_0^\infty D_t u(s) dB_s = \int_t^\infty D_t u(s) dB_s$. Τώρα η Πρόταση 2.5.7 μας δίνει ότι $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ και

$$D_t X = u(t) + \int_t^\infty D_t u(s)\; dB_s \quad \text{για κάθε} \;\; t > 0.$$

Έστω τώρα ότι $X \in \mathbb{D}^{1,2}$. Αν $u_n(t)$ είναι η προβολή της $u(t)$ στον υπόχωρο $\mathcal{P}_n = \oplus_{k=0}^n \mathscr{H}_k$ τότε η u_n είναι προσαρμοσμένη, $u_n(t) \to u(t)$ στον $L^2(\Omega)$ και από το Θεώρημα 2.5.8 η $X_n = \int_0^\infty u_n(s) dB_s$ είναι η προβολή της X στον $\mathcal{P}_{n+1}$. Κατά συνέπεια $X_n \to X$ στον $\mathbb{D}^{1,2}$ καθώς $n \to \infty$ και ειδικότερα

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\|DX_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right] < \infty.$$

Επειδή η τυχαία μεταβλητή $\int_t^\infty D_t u_n(s) dB_s$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_t$ θα είναι ανεξάρτητη και από την $u_n(t)$ άρα

$$\mathbb{E}\left[u_n(t) \int_t^\infty D_t u_n(s) dB_s\right] = \mathbb{E}\left[u(t)\right] \cdot \mathbb{E}\left[\int_t^\infty D_t u_n(s) dB_s\right] = 0.$$

Από το πρώτο μέρος της απόδειξης έχουμε ότι

$$D_t X_n = u_n(t) + \int_t^\infty D_t u_n(s) dB_s.$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|DX_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty (D_t X_n)^2 dt\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \left(u_n(t) + \int_t^\infty D_t u_n(s) dB_s\right)^2 dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty u_n^2(t) dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \int_t^\infty (D_t u_n(s))^2 ds dt\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \int_t^\infty (D_t u_n(s))^2 ds dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \int_0^s (D_t u_n(s))^2 dt ds\right],
\end{aligned} \tag{2.169}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα Fubini. Συνεπώς είναι

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\|Du_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}\right] = \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \int_0^s (D_t u_n(s))^2 dt ds\right] \leq \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\|DX_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right] < \infty. \tag{2.170}$$

Από το Λήμμα 2.2.4 έπεται ότι $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ και κατά συνέπεια ισχύει η εξίσωση (2.168). □

Παράδειγμα 2.6.1. Έστω $b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις που έχουν φραγμένη παράγωγο. Ας υπολογίσουμε την παράγωγο Malliavin της λύσης της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t. \tag{2.171}$$

Θεωρούμε την αρχική συνθήκη $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ και σταθεροποιούμε $t > 0$. Τότε είναι

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s.$$

Εφαρμόζουμε τώρα την εξίσωση (2.168) και τον κανόνα της αλυσίδας 2.2.5 και έχουμε ότι για κάθε $0 \le r \le t$, είναι

$$\begin{aligned} D_r X_t &= D_r \int_0^t b(X_s)ds + D_r \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \\ &= \int_r^t b'(X_s)D_r X_s ds + \sigma(X_r) + \int_r^t \sigma'(X_s)D_r X_s dB_s. \end{aligned} \tag{2.172}$$

Αυτή είναι μία γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση για την παράγωγο Malliavin και η λύση της είναι (δείτε στο [63] για τη λύση γραμμικών στοχαστικών εξισώσεων)

$$D_r X_t = \sigma(X_t) \exp\left(\int_r^t b'(X_s) - \frac{1}{2}\left(\sigma'(X_s)\right)^2 ds + \int_r^t \sigma'(X_s)dB_s \right). \tag{2.173}$$

Θεωρούμε τώρα $\tau > 0$ και $T = [0, \tau]$. Τότε $B_t = W(\mathbb{1}_{(0,t]})$ είναι μία κίνηση Brown στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Θεωρούμε τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\tau]}$ που παράγεται από αυτήν την κίνηση Brown, δηλαδή $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : 0 \le s \le t)$.

Ένα θεώρημα αναπαράστασης του Itô λέει πως αν $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\tau, \mathbb{P})$ τότε υπάρχει μοναδική (ως προς το μέτρο $dt \times \mathbb{P}$) στοχαστική ανέλιξη $u \in L^2_{\mathbb{F}}([0, \tau] \times \Omega)$ τέτοια ώστε

$$X = \mathbb{E}[X] + \int_0^\tau u(t)dB_t. \tag{2.174}$$

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος έχει υπαρξιακό χαρακτήρα και δεν δίνεται κάποια επιπλέον πληροφορία για τη στοχαστική ανέλιξη u (δείτε στο [60] για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος). Ο υπολογισμός της u, εκτός από θεωρητικό ενδιαφέρον, έχει και συνέπειες στα χρηματοοικονομικά καθώς δίνει τη στρατηγική με την οποία επενδύουμε. Για τυχαίες μεταβλητές $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ η στοχαστική ανέλιξη u δίνεται από τον λεγόμενο τύπο των Clark-Ocone.

Θεώρημα 2.6.3 (Clark-Ocone)**.** *Με τον παραπάνω συμβολισμό, αν $X \in \mathbb{D}^{1,2} \cap L^2(\Omega, \mathcal{F}_\tau, \mathbb{P})$ τότε*

$$X = \mathbb{E}[X] + \int_0^\tau \mathbb{E}[D_t X|\mathcal{F}_t]dB_t. \tag{2.175}$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}[X] = 0$. Από το θεώρημα αναπαράστασης Itô υπάρχει $u \in L^2_{\mathbb{F}}([0, \tau] \times \Omega)$ τέτοια ώστε $X = \int_0^\tau u(t)dB_t$. Θέτουμε

$$a(t) = \mathbb{E}\left[D_t X|\mathcal{F}_t\right],$$

και παρατηρούμε ότι $a \in L^2_{\mathbb{F}}([0, \tau] \times \Omega)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $u(t) = a(t)$ με πιθανότητα 1 στο $[0, \tau] \times \Omega$.

Αν $v \in L^2_{\mathbb{F}}([0, \tau] \times \Omega)$ τότε από το Θεώρημα 2.6.1 και την ισομετρία Itô έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\delta(v)X\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau v(t)dB_t \int_0^\tau u(t)dB_t\right] = \int_0^\tau \mathbb{E}\left[v(t)u(t)\right]dt. \tag{2.176}$$

Από τη δυϊκότητα των D, δ έχουμε

$$\mathbb{E}\left[\delta(v)X\right] = \mathbb{E}\left[\langle v(t), D_t X\rangle_{L^2(0,\tau)}\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau v(t) D_t X dt\right] = \int_0^\tau \mathbb{E}\left[v(t)\mathbb{E}\left[D_t X|\mathcal{F}_t\right]\right] dt, \quad (2.177)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε ότι η $v(t)$ είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη επειδή η ανέλιξη v είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ όπου $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{(0,t]} = \sigma(B_s : s \leq t)$. Η ανέλιξη $v \in L^2_{\mathbb{F}}\left([0,\tau] \times \Omega\right)$ ήταν αυθαίρετη, οπότε οι παραπάνω εξισώσεις μας δίνουν ότι

$$\langle v, u - a\rangle_{L^2_{\mathbb{F}}([0,\tau]\times\Omega)} = 0 \quad (2.178)$$

για κάθε $v \in L^2_{\mathbb{F}}\left([0,\tau] \times \Omega\right)$. Άρα λοιπόν $u(t) = a(t) = \mathbb{E}\left[D_t X|\mathcal{F}_t\right]$ με πιθανότητα 1 όπως θέλαμε. □

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι η ακόλουθη ανισότητα «τύπου» Poincare.

Πόρισμα 2.6.3.1. *Αν $X \in \mathbb{D}^{1,2} \cap L^2(\Omega, \mathcal{F}_\tau, \mathbb{P})$ τότε*

$$\mathrm{Var}(X) \leq \|DX\|^2_{L^2(\Omega;L^2(0,\tau))}. \quad (2.179)$$

Απόδειξη. Από τον τύπο των Clark-Ocone είναι $X - \mathbb{E}[X] = \int_0^\tau \mathbb{E}\left[D_t X|\mathcal{F}_t\right] dB_t$ άρα

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau \mathbb{E}\left[D_t X|\mathcal{F}_t\right] dB_t\right)^2\right] \\ &= \int_0^\tau \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[D_t X|\mathcal{F}_t\right]\right)^2\right] dt \\ &\leq \int_0^\tau \mathbb{E}\left[(D_t X)^2\right] dt \\ &= \|DX\|^2_{L^2(\Omega;L^2(0,\tau))},\end{aligned} \quad (2.180)$$

όπου στη τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ισομετρία Itô και στην ανισότητα το ότι ο τελεστής της δεσμευμένης μέσης τιμής είναι συστολή στον $L^2(\Omega)$. □

Συγκρίνετε το παραπάνω Πόρισμα με την Πρόταση 1.1.2. Βλέπουμε πως η παράγωγος Malliavin, DX, της X ελέγχει κατά κάποιο τρόπο την τυχαιότητα της X.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ομαλότητα και το θεώρημα Hörmander

Σταθεροποιούμε έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H και μία $H-$ισοκανονική διαδικασία W που ορίζεται στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \sigma(W), \mathbb{P})$. Στην πρώτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου θα χρησιμοποιήσουμε τον λογισμό Malliavin, που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για να αποδείξουμε κάποια αποτελέσματα ομαλότητας κατανομών τυχαίων μεταβλητών που ανήκουν σε κατάλληλο Γκαουσιανό χώρο Sobolev. Το πιο σημαντικό από αυτά είναι το Θεώρημα 3.1.1 το οποίο ανοίγει το δρόμο για μία πιθανοθεωρητική προσέγγιση στο θεώρημα του Hörmander.

Στις επόμενες ενότητες χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.1.1 για να δείξουμε με πιθανοθεωρητικό τρόπο κάποια σημαντικά αποτελέσματα ομαλότητας για λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

3.1 Ομαλότητα κατανομών

Αν στο Πόρισμα 2.2.8.1 (ή στο Πόρισμα 2.6.3.1) υποθέσουμε ότι $DX = 0$ με πιθανότητα 1, τότε $X = \mathbb{E}[X]$ με πιθανότητα 1 οπότε η κατανομή της X είναι σημειακή, συνεπώς δεν είναι απολύτως συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue. Στην περίπτωση που $DX \neq 0$ με πιθανότητα 1, έχουμε τα ακόλουθα θετικά αποτελέσματα.

Πρόταση 3.1.1. *Έστω $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ τέτοια ώστε $\|DX\|_H > 0$ με πιθανότητα 1. Τότε η κατανομή της X είναι απολύτως συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue.*

Απόδειξη. Έστω $X_*\mathbb{P}$ η κατανομή της X και λ το μέτρο Lebesgue. Αν $A \subset \mathbb{R}$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο τότε

$$(X_*\mathbb{P})(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_\Omega \mathbb{1}_{\{X \in A\}} d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(X)\right]. \tag{3.1}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε πως αν $A \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$ τότε $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(X)\right] = 0$.

Αντικαθιστώντας την X με την $\arctan X$ αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε πως η X λαμβάνει τιμές στο $(-1,1)$. Έστω λοιπόν $A \subset (-1,1)$ με $\lambda(A) = 0$.

Από το θεώρημα Lusin (δείτε στο [59] σελίδες 89-90) υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $(f_k)_{k\geq 1}$ στο $[-1,1]$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = \mathbb{1}_A$ σχεδόν παντού στο $(-1,1)$ ως προς το μέτρο $X_*\mathbb{P}+\lambda$.

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε πως οι συναρτήσεις $(f_k)_{k\geq 1}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες και έχουν στήριγμα στο $[-1,1]$.

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία συναρτήσεων $(\phi_k)_{k\geq 1}$ με $\phi_k(x) = \int_{-1}^{x} f_k(t)dt$. Τότε κάθε ϕ_k είναι συνεχώς παραγωγίσιμη οπότε ο κανόνας της αλυσίδας 2.2.5 μας δίνει ότι $\phi_k(X) \in \mathbb{D}^{1,2}$ και

$$D\phi_k(X) = f_k(X)DX. \tag{3.2}$$

Επειδή $f_k \to \mathbb{1}_A$ σχεδόν παντού ως προς το λ, καθώς $k \to \infty$, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue δίνει ότι

$$\phi_k(x) = \int_{-1}^{x} f_k(t)dt \to \int_{-1}^{x} \mathbb{1}_A(t)dt = 0 \quad \text{για κάθε } x \in [-1,1]. \tag{3.3}$$

Άρα $\phi_k(X) \to 0$ καθώς $k \to \infty$ με πιθανότητα 1. Ξανά από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έπεται ότι $\phi_k(X) \to 0$ στον $L^2(\Omega)$. Επειδή $f_k \to \mathbb{1}_A$ σχεδόν παντού ως προς το $X_*\mathbb{P}$, έπεται ότι $f_k(X) \to \mathbb{1}_A(X)$ με πιθανότητα 1. Άρα λοιπόν

$$D\phi_k(X) = f_k(X)DX \to \mathbb{1}_A(X)DX \tag{3.4}$$

με πιθανότητα 1 και από μία ακόμα εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, $D\phi_k(X) \to \mathbb{1}_A(X)DX$ στον $L^2(\Omega; H)$. Επειδή ο τελεστής παραγώγισης Malliavin D είναι κλειστός, συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{1}_A(X)DX = 0$ με πιθανότητα 1 και λόγω της υπόθεσής μας, είναι τελικά $\mathbb{1}_A(X) = 0$ με πιθανότητα 1 και το ζητούμενο έπεται από την εξίσωση (3.1). □

Ας δούμε ένα πρώτο αποτέλεσμα για τυχαίες μεταβλητές, που βρίσκονται σε κάποιο σταθερό χάος Wiener $\mathscr{H}_q^B$, όπου εδώ B είναι κίνηση Brown και $H = L^2(\mathbb{R}_+)$. Συγκεκριμένα, το ακόλουθο αποτέλεσμα που έδειξε ο Shigekawa στο [48], μας λέει πως κάθε μη μηδενική τυχαία μεταβλητή που ανήκει σε κάποιο χάος Wiener $\mathscr{H}_q^B$ έχει πυκνότητα.

Πρόταση 3.1.2 (Shigekawa). *Έστω τυχαία μεταβλητή $F = I_q^B(f) \in \mathscr{H}_q^B$, όπου $f \in L_s^2(\mathbb{R}_+^q)$ με $f \neq 0$. Τότε η F έχει πυκνότητα.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο q.

Για $q = 1$ χρησιμοποιούμε το Λήμμα 1.1.6 και έχουμε ότι

$$F = I_1(f) = \int_0^\infty f(t)dB_t \sim N\left(0, \int_0^\infty f^2(t)dt\right)$$

και λόγω της υπόθεσης για την f είναι $\int_0^\infty f^2(t)dt > 0$. Άρα η F έχει πυκνότητα.

Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση ισχύει για τον $q-1$ και θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει και για τον q.

Επειδή η $f \in L_s^2(\mathbb{R}_+^q)$ δεν είναι το μηδενικό στοιχείο, υπάρχει $h \in L_s^2(\mathbb{R}_+)$ έτσι ώστε η απεικόνιση

$$y \to \int_0^\infty f(y,t)h(t)dt \quad \text{όπου } y \in \mathbb{R}_+^{q-1}$$

να είναι ένα μή μηδενικό στοιχείο του $L_s^2(\mathbb{R}_+^{q-1})$. Η παράγωγος Malliavin της F είναι $D_tF = qI_{q-1}(f(\cdot,t))$, άρα

$$\int_0^\infty D_tFh(t)dt = qI_{q-1}\left(\int_0^\infty f(\cdot,t)h(t)dt\right) \tag{3.5}$$

που είναι μία τυχαία μεταβλητή που έχει πυκνότητα λόγω της επαγωγικής υπόθεσης.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_0^\infty D_t F h(t)dt\right)^2 \le \int_0^\infty (D_t F)^2 dt \int_0^\infty h^2(t)dt$$

έπεται ότι $\{\int_0^\infty (D_t F)^2 dt = 0\} \subseteq \{\int_0^\infty D_t F h(t)dt = 0\}$, συνεπώς

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty (D_t F)^2 dt = 0\right) \le \mathbb{P}\left(\int_0^\infty D_t F h(t)dt = 0\right) = 0. \tag{3.6}$$

Συμπεραίνουμε ότι $\int_0^\infty (D_t F)^2 dt > 0$ με πιθανότητα 1, άρα η F έχει πυκνότητα λόγω της Πρότασης 3.1.1. □

Με λίγη παραπάνω πληροφορία μπορούμε να έχουμε και μία έκφραση για την πυκνότητα.

Πρόταση 3.1.3. *Έστω τυχαία μεταβλητή $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ τέτοια ώστε $\|DX\|_H \ne 0$ με πιθανότητα 1 και $\frac{DX}{\|DX\|_H^2} \in \operatorname{Dom}\delta$. Τότε η κατανομή της X είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue και έχει πυκνότητα p που δίνεται από τον τύπο*

$$p(t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X>t\}}\delta\left(\frac{DX}{\|DX\|_H^2}\right)\right]. \tag{3.7}$$

Απόδειξη. Έστω $f \in C_c(\mathbb{R})$ και $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Τότε η φ είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο οπότε από το Θεώρημα 2.2.5 είναι $\varphi(X) \in \mathbb{D}^{1,2}$ και $D\varphi(X) = f(X)DX$. Κατά συνέπεια

$$f(X) = \left\langle D\varphi(X), \frac{DX}{\|DX\|_H^2}\right\rangle_H.$$

Επειδή ο τελεστής απόκλισης δ είναι ο συζυγής του τελεστή παραγώγισης Malliavin D και επειδή $\delta\left(\frac{DX}{\|DX\|_H^2}\right) \in L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X)] &= \mathbb{E}\left[\left\langle D\varphi(X), \frac{DX}{\|DX\|_H^2}\right\rangle_H\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\varphi(X)\delta\left(\frac{DX}{\|DX\|_H^2}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^X f(t)dt\ \delta\left(\frac{DX}{\|DX\|_H^2}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^\infty \mathbb{1}_{\{X>t\}} f(t)dt\delta\left(\frac{DX}{\|DX\|_H^2}\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^\infty \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X>t\}}\delta\left(\frac{DX}{\|DX\|_H^2}\right)\right] f(t)dt,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Fubini.

Έστω τώρα B φραγμένο σύνολο Borel του $\mathbb{R}$. Τότε, όπως και στην Πρόταση 3.1.1 (θεώρημα Lusin), υπάρχει θετική σταθερά $C > 0$ και ακολουθία συναρτήσεων $(f_k)_{k\ge1}$ του $C_c(\mathbb{R})$ έτσι ώστε

$|f_k| \leq C$ για κάθε $k \geq 1$ και $\lim_{k\to\infty} f_k = \mathbb{1}_B$ σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε την εξίσωση (3.8) για τις f_k και παίρνουμε το όριο $k \to \infty$. Τότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\mathbb{P}(B) = \int_B \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X>t\}}\delta\left(\frac{DX}{\|DX\|_H^2}\right)\right] dt \tag{3.9}$$

που δείχνει το ζητούμενο. Παρατηρούμε επίσης πως από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έπεται ότι η $p(t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X>t\}}\delta\left(\frac{DX}{\|DX\|_H^2}\right)\right]$ είναι συνεχής συνάρτηση του t. □

Θέλουμε να εξετάσουμε τώρα τυχαία διανύσματα $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ και να εξάγουμε ένα θεώρημα που να μας δίνει κατάλληλες συνθήκες έτσι ώστε η κατανομή της X να έχει C^∞ πυκνότητα. Στο νου μας έχουμε ότι η λύση X_t μίας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι γενικά ένα τυχαίο διάνυσμα, οπότε αν θέλουμε να προσεγγίσουμε με πιθανοθεωρητικό τρόπο το θεώρημα Hörmander ένα τέτοιο θεώρημα είναι απαραίτητο.

Στις προηγούμενες προτάσεις, έπαιξε κρίσιμο ρόλο η συνθήκη $\|DX\|_H > 0$ με πιθανότητα 1. Σε περισσότερες διαστάσεις το αντικείμενο που παίρνει τη θέση του $\|DX\|_H$ είναι ο λεγόμενος πίνακας Malliavin.

Ορισμός 3.1.1 (Πίνακας Malliavin)**.** Έστω ένα πραγματικό τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, \dots, X_n)$ με συνιστώσες στον $\mathbb{D}^{1,2}$. Ο πίνακας Malliavin του X ορίζεται να είναι ο $\mathscr{M} = \left(\langle DX_i, DX_j\rangle_H\right)_{i,j=1}^n$.

Παρατήρηση. Αν $\{h_k, k \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H τότε μπορούμε να δούμε κάθε DX_i ως ένα άπειρο διάνυσμα του H και τότε είναι

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} \langle DX_1, DX_1\rangle_H & \langle DX_1, DX_2\rangle_H & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ \langle DX_n, DX_1\rangle_H & & \langle DX_n, DX_n\rangle_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DX_1 \\ \vdots \\ DX_n \end{pmatrix} \cdot (DX_1, \dots, DX_n). \tag{3.10}$$

Δηλαδή ο πίνακας Malliavin είναι ένας πίνακας Gram και κατά συνέπεια είναι θετικά ημιορισμένος.

Το επόμενο θεώρημα είναι το κύριο αποτέλεσμα ομαλότητας αυτής της ενότητας και θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του θεωρήματος ελλειπτικής ομαλότητας και Hörmander στις επόμενες ενότητες.

Θεώρημα 3.1.1 (Malliavin)**.** *Έστω $X = (X_1, \dots, X_n)$ $n-$διάστατο τυχαίο διάνυσμα με $X_i \in \mathbb{D}^\infty$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Αν ο πίνακας Malliavin $\mathscr{M}$ του X είναι αντιστρέψιμος με πιθανότητα 1 και επιπλέον $(\det \mathscr{M})^{-1} \in \cap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$, τότε το τυχαίο διάνυσμα X έχει πυκνότητα ως προς το $n-$διάστατο μέτρο Lebesgue η οποία ανήκει στον χώρο του Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$.*

Τα επόμενα αποτελέσματα, παρ'ότι έχουν ανεξάρτητο ενδιαφέρον, έχουν ως στόχο την απόδειξη του θεωρήματος 3.1.1.

Λήμμα 3.1.2. *Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο Radon στον $\mathbb{R}^n$ για το οποίο υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \leq n+1$ και $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ να είναι*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha \varphi(x)\mu(dx) \right| \leq C\|\varphi\|_\infty, \tag{3.11}$$

όπου $\partial_x^\alpha \varphi = \dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$. *Τότε το* μ *έχει συνεχή πυκνότητα ως προς το* $n-$*διάστατο μέτρο Lebesgue.*

Απόδειξη. Βλέπουμε το μέτρο μ ως μία tempered κατανομή, δηλαδή $\mu \in S'(\mathbb{R}^n)$, όπου $S(\mathbb{R}^n)$ είναι ο χώρος του Schwartz. Ο μετασχηματισμός Fourier του μέτρου μ είναι $\mathscr{F}(\mu)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\mu(dx)$. Γράφουμε

$$|\xi^\alpha|\cdot|\mathscr{F}(\mu)(\xi)| = \left|(-i\xi)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\mu(dx)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^\alpha e^{-i\xi\cdot x}\mu(dx)\right| \le C, \tag{3.12}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (3.11) με $\varphi_\xi(x) = e^{-i\xi\cdot x}$. Επομένως υπάρχει θετική σταθερά $\beta(n)$ τέτοια ώστε $(1+|\xi|^{n+1})\,|\mathscr{F}(\mu)(\xi)| \le \beta(n)C$. Άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\mathscr{F}(\mu)(\xi)|\,d\xi \le \beta(n)C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|\xi|^{n+1}}d\xi. \tag{3.13}$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|\xi|^{n+1}}d\xi &= \int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{1}{1+|yr|^{n+1}}\sigma(dy)\right)r^{n-1}dr\\ &= \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^\infty\frac{r^{n-1}}{1+r^{n+1}}dr.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση $\frac{r^{n-1}}{1+r^{n+1}}$ είναι καλά ορισμένη στο 0, οπότε το $\int_0^1\frac{r^{n-1}}{1+r^{n+1}}dr$ είναι μία σταθερά, έστω $c_1(n)$. Τότε είναι

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{r^{n-1}}{1+r^{n+1}}dr &= c_1(n)+\int_1^\infty\frac{r^{n-1}}{1+r^{n+1}}dr\\ &= c_1(n)+\int_1^\infty\frac{1}{r^2}\cdot\frac{r^n}{r^{-2}+r^n}dr\\ &\le c_1(n)+\int_1^\infty\frac{1}{r^2}dr<\infty.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Όμως γενικά αν $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ και $\mathscr{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε από το θεώρημα αντιστροφής του Fourier έπεται ότι $u \in C_b(\mathbb{R}^n)$ και $\|u\|_\infty \le (2\pi)^{-n}\|\mathscr{F}(u)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Από την ανισότητα (3.13) προκύπτει λοιπόν ότι $\mathscr{F}(\mu) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ οπότε έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 3.1.3. *Έστω* $M = (M_{ij})$ *ένας* $n\times n$ *τυχαίος πίνακας με στοιχεία στον* $\mathbb{D}^\infty$. *Υποθέτουμε πως ο* M *είναι αντιστρέψιμος με πιθανότητα 1 και ότι* $(\det M)^{-1} \in L^p(\Omega)$ *για κάθε* $p \ge 1$. *Τότε ο αντίστροφος πίνακας* $M^{-1} = ((M^{-1})_{ij})$ *έχει στοιχεία στον* $\mathbb{D}^\infty$ *και*

$$D(M^{-1})_{ij} = -\sum_{k,l=1}^n (M^{-1})_{ik}(M^{-1})_{lj}DM_{kl} \quad \text{για κάθε } i,j = 1,\ldots,n. \tag{3.16}$$

Απόδειξη. Από τον τύπο του Cramer για την επίλυση γραμμικών συστημάτων έπεται ότι τα στοιχεία του πίνακα

$$A = (\det M)M^{-1}$$

είναι πολυώνυμα στα στοιχεία του πίνακα M, άρα από τον κανόνα της αλυσίδας 2.2.5 είναι στοιχεία του $\mathbb{D}^\infty$. Παρατηρούμε πως η τυχαία μεταβλητή $\det M$ είναι επίσης πολυώνυμο στα στοιχεία του M άρα $\det M \in \mathbb{D}^\infty$ ξανά από τον κανόνα της αλυσίδας 2.2.5.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\det M > 0$ με πιθανότητα 1 (εξ' άλλου θέλουμε να εφαρμόσουμε το λήμμα για $M = \mathscr{M}$). Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε τον τυχαίο πίνακα

$$M_\varepsilon^{-1} = \frac{\det M}{\det M + \varepsilon} M^{-1} = (\det M + \varepsilon)^{-1} A. \tag{3.17}$$

Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x+\varepsilon}, x > 0$ μπορεί να επεκταθεί σε $C_p^\infty(\mathbb{R})$ συνάρτηση. Τότε η τυχαία μεταβλητή $(\det M + \varepsilon)^{-1}$ είναι σύνθεση μίας $C_p^\infty(\mathbb{R})$ συνάρτησης και της τυχαίας μεταβλητής $\det M \in \mathbb{D}^\infty$. Από τον κανόνα της αλυσίδας 2.2.5 έπεται ότι $(\det M + \varepsilon)^{-1} \in \mathbb{D}^\infty$. Επειδή ο $\mathbb{D}^\infty$ είναι άλγεβρα, η εξίσωση (3.17) δίνει ότι ο πίνακας M_ε^{-1} έχει στοιχεία στον $\mathbb{D}^\infty$. Επίσης,καθώς $\varepsilon \to 0$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$ έχουμε $(M_\varepsilon^{-1})_{ij} \to (M^{-1})_{ij}$ κατά σημείο και στον $L^p(\Omega)$ για κάθε $p \geq 1$ και για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$.

Έστω τώρα $k \in \mathbb{N}, p \geq 1$ σταθερά. Επειδή $(M_\varepsilon^{-1})_{ij} \in \mathbb{D}^\infty$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$, η εξίσωση (3.17) μαζί με τον κανόνα του Leibniz μας δίνει ότι

$$\begin{aligned} D^k \left((M_\varepsilon^{-1})_{ij} \right) &= D^k \left((\det M + \varepsilon)^{-1} (\det M) (M^{-1})_{ij} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} D^l (\det M + \varepsilon)^{-1} D^{k-l} \left((\det M)(M^{-1})_{ij} \right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Οι υποθέσεις μας και η παραπάνω εξίσωση, δίνουν ότι $\sup_{\varepsilon>0} \left\| (M_\varepsilon^{-1})_{ij} \right\|_{\mathbb{D}^{k,p}} < \infty$. Από το Λήμμα 2.2.4 συμπεραίνουμε ότι $(M_\varepsilon^{-1})_{ij} \in \mathbb{D}^{k,p}$. Όμως τα $k \in \mathbb{N}, p \geq 1$ ήταν τυχαία οπότε $(M_\varepsilon^{-1})_{ij} \in \mathbb{D}^\infty$.

Για να δείξουμε την (3.16) χρησιμοποιούμε την εξίσωση (3.17) μαζί με τον κανόνα του Leibniz και έχουμε

$$M \cdot M_\varepsilon^{-1} = \frac{\det M}{\det M + \varepsilon} I \implies DM_\varepsilon^{-1} \cdot M + M_\varepsilon^{-1} \cdot DM = D \left(\frac{\det M}{\det M + \varepsilon} I \right). \tag{3.19}$$

Στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε το όριο $\varepsilon \to 0$ και χρησιμοποιούμε το ότι ο τελεστής παραγώγισης D είναι κλειστός. Καταλήγουμε έτσι στην εξίσωση

$$DM^{-1} \cdot M + M^{-1} DM = 0 \implies DM^{-1} = -M^{-1} \cdot DM \cdot M^{-1} \tag{3.20}$$

που είναι η εξίσωση (3.16) σε μορφή πινάκων. □

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι συνέπεια των ανισοτήτων Meyer και για την απόδειξή του παραπέμπουμε στο [39] (σελίδες 78 − 79).

Πρόταση 3.1.4. *Για κάθε $u \in \mathbb{D}^\infty(H)$ ισχύει ότι $u \in \operatorname{Dom} \delta$ και $\delta u \in \mathbb{D}^\infty$.*

Στο επόμενο λήμμα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\partial^{e_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Λήμμα 3.1.4. *Έστω $X = (X_1, \ldots, X_n)$ n-διάστατο τυχαίο διάνυσμα με $X_i \in \mathbb{D}^\infty$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Αν ο πίνακας Malliavin $\mathscr{M}$ της X είναι αντιστρέψιμος με πιθανότητα 1 και $(\det \mathscr{M})^{-1} \in L^p(\Omega)$ για κάθε $p \geq 1$, τότε για κάθε πολυδείκτη α και για κάθε τυχαία μεταβλητή $Y \in \mathbb{D}^\infty$, υπάρχει τυχαία μεταβλητή $U_\alpha = U_\alpha(X, Y) \in \mathbb{D}^\infty$, έτσι ώστε*

$$\mathbb{E}\left[(\partial^\alpha \varphi)(X) Y \right] = \mathbb{E}\left[\varphi(X) U_\alpha \right] \tag{3.21}$$

για κάθε $\varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Έστω $\varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$. Από τον κανόνα της αλυσίδας 2.2.5 έχουμε ότι $\varphi(X) \in \mathbb{D}^\infty$ και $D\varphi(X) = \sum_{j=1}^n (\partial^{e_j}\varphi)(X)DX_j$. Παίρνουμε τώρα εσωτερικά γινόμενα με την DX_i και έχουμε

$$\langle DX_i, D\varphi(X)\rangle_H = \sum_{j=1}^n (\partial^{e_j}\varphi)(X)\langle DX_i, DX_j\rangle_H. \tag{3.22}$$

Θέτουμε $b = (\langle DX_i, D\varphi(X)\rangle_H)_{1\leq i\leq n}$. Τότε η παραπάνω εξίσωση λέει ότι $b = \mathscr{M}\cdot\nabla\varphi(X)$ και επειδή από την υπόθεση ο $\mathscr{M}$ είναι αντιστρέψιμος με πιθανότητα 1, έχουμε ότι $\nabla\varphi(X) = \mathscr{M}^{-1}\cdot b$.

Ειδικότερα, έχουμε

$$\partial^{e_i}\varphi(X)Y = \sum_{j=1}^n Y(\mathscr{M}^{-1})_{ij}\left\langle DX_j, D\varphi(X)\right\rangle_H = \left\langle D\varphi(X), \sum_{j=1}^n Y(\mathscr{M}^{-1})_{ij}DX_j\right\rangle_H. \tag{3.23}$$

Από το Λήμμα 3.1.3 έχουμε ότι $(\mathscr{M}^{-1})_{ij} \in \mathbb{D}^\infty$ και κατά συνέπεια $\sum_{j=1}^n Y(\mathscr{M}^{-1})_{ij}DX_j \in \mathbb{D}^\infty(H)$. Η Πρόταση 3.1.4 μας δίνει ότι $\sum_{j=1}^n Y(\mathscr{M}^{-1})_{ij}DX_j \in \operatorname{Dom}\delta$ και $\delta\left(\sum_{j=1}^n Y(\mathscr{M}^{-1})_{ij}DX_j\right) \in \mathbb{D}^\infty$. Για $\alpha = e_i$ θέτουμε $U_{e_i} = \delta\left(\sum_{j=1}^n Y(\mathscr{M}^{-1})_{ij}DX_j\right)$. Από τη δυϊκότητα των D, δ έχουμε

$$\mathbb{E}\left[\partial^{e_i}\varphi(X)Y\right] = \mathbb{E}\left[\left\langle D\varphi(X), \sum_{j=1}^n Y(\mathscr{M}^{-1})_{ij}DX_j\right\rangle_H\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(X)U_{e_i}\right], \tag{3.24}$$

που είναι ακριβώς η (3.21) για $\alpha = e_i$. Επειδή στο παραπάνω επιχείρημα όλες οι τυχαίες μεταβλητές που εμφανίζονται ανήκουν στον $\mathbb{D}^\infty$ ή στον $\mathbb{D}^\infty(H)$, αυτό μπορεί να εφαρμοστεί διαδοχικά και έτσι η απόδειξη ολοκληρώνεται με επαγωγή στο μήκος του πολυδείκτη α. □

Απόδειξη για το Θεώρημα 3.1.1. Έστω $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \leq n+1$ η εξίσωση (3.21) για $Y = 1$ δίνει ότι

$$\mathbb{E}\left[(\partial^\alpha\varphi)(X)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(X)U_\alpha\right] \tag{3.25}$$

για κάποια $U_\alpha \in \mathbb{D}^\infty$. Γράφουμε

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\partial^\alpha\varphi(x)(X_*\mathbb{P})(dx)\right| = \left|\mathbb{E}\left[(\partial^\alpha\varphi)(X)\right]\right| \leq \|\varphi\|_\infty \sup_{|\alpha|\leq n+1}\mathbb{E}\left[|U_\alpha|\right]. \tag{3.26}$$

Βλέπουμε λοιπόν πως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Λήμματος 3.1.2 με $C = \sup_{|\alpha|\leq n+1}\mathbb{E}\left[|U_\alpha|\right]$. Επομένως η κατανομή της X έχει συνεχή πυκνότητα ως προς το μέτρο Lebesgue, έστω την p.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi_\xi(x) = e^{-i\xi\cdot x}$ και τον τελεστή Laplace Δ στον $\mathbb{R}^n$. Ο μετασχηματισμός Fourier της p είναι

$$\mathscr{F}(p)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\xi(x)p(x)dx = \mathbb{E}\left[\varphi_\xi(X)\right].$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\Delta_x^k\varphi_\xi(x) = (-1)^k|\xi|^{2k}\varphi_\xi(x)$ άρα $|\xi|^{2k}\mathscr{F}(p)(\xi) = \mathbb{E}\left[|\xi|^{2k}\varphi_\xi(X)\right] = \mathbb{E}\left[(-1)^k\Delta_x^k\varphi_\xi(X)\right]$ και από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει $U \in \mathbb{D}^\infty$ έτσι ώστε $\mathbb{E}\left[(-1)^k\Delta_x^k\varphi_\xi(X)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi_\xi(X)U\right]$. Άρα

$$|\xi|^{2k}\left|\mathscr{F}(p)(\xi)\right| \leq \mathbb{E}\left[|U|\right]$$

και έτσι βλέπουμε ότι η p φθίνει πιο γρήγορα από κάθε πολυώνυμο.

Έστω τώρα q ένα πολυώνυμο σε n μεταβλητές. Τότε $\int_{\mathbb{R}^n} q(x)p(x)dx = \mathbb{E}\left[q(X)\right]$. Επειδή $X_i \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ αν $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ τότε από τη γενικευμένη ανισότητα Hölder είναι $\mathbb{E}\left[\prod_{i\in I} |X_i|^{\beta_i}\right] < \infty$ οπότε $\mathbb{E}\left[q(X)\right] < \infty$ και έτσι βλέπουμε ότι τα πολυώνυμα σε n μεταβλητές είναι ολοκληρώσιμα ως προς τη συνάρτηση p. Παραγωγίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της p και έχουμε $\partial_\xi^\alpha \mathscr{F}(p)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x)\partial_\xi^\alpha \varphi_\xi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} p(x)(-ix)^\alpha \varphi_\xi(x)dx$. Άρα

$$
\begin{aligned}
|\xi|^{2k}\partial_\xi^\alpha \mathscr{F}(p)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} p(x)(-ix)^\alpha |\xi|^{2k}\varphi_\xi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} p(x)(-ix)^\alpha (-1)^k \Delta_x^k \varphi_\xi(x)dx \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\Delta_x^k \varphi_\xi(X)\right)(-1)^k(-iX)^\alpha\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\varphi_\xi(X)\tilde{U}\right],
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (3.21) για κατάλληλη τυχαία μεταβλητή $\tilde{U} \in \mathbb{D}^\infty$. Από την παραπάνω εξίσωση έπεται ότι $|\xi|^{2k}\left|\partial_\xi^\alpha \mathscr{F}(p)(\xi)\right| \leq \mathbb{E}\left[|\tilde{U}|\right]$ συνεπώς όλες οι μερικές παράγωγοι της $\mathscr{F}(p)$ φθίνουν πιο γρήγορα από κάθε πολυώνυμο, άρα $\mathscr{F}(p) \in S(\mathbb{R}^n)$. Γνωρίζουμε όμως ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ισομορφισμός $\mathscr{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ οπότε τελικά $p \in S(\mathbb{R}^n)$. □

3.2 Ελλειπτική ομαλότητα

Μία απεικόνιση $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ θα λέγεται λεία αν έχει C^∞ συνιστώσες, και με ∂U θα συμβολίζουμε τον πίνακα με στοιχεία $(\partial U)_{kl} = \frac{\partial}{\partial x_l} U^k$, δηλαδή

$$
\partial U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U^1}{\partial x_1} & \frac{\partial U^1}{\partial x_2} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial U^m}{\partial x_1} & & \frac{\partial U^m}{\partial x_m} \end{pmatrix}. \tag{3.28}
$$

Έστω τώρα $A, V_1, \dots V_d$ λείες απεικονίσης με φραγμένες μερικές παραγώγους κάθε τάξης. Μπορούμε να βλέπουμε αυτές τις απεικονίσεις και ως διανυσματικά πεδία ή ισοδύναμα ως διαφορικούς τελεστές πρώτης τάξης με τη γραφή

$$
A = \sum_{i=1}^m A^i \frac{\partial}{\partial x_i}
$$

και αντίστοιχα για τα V_j.

Αν θεωρήσουμε το πεδίο

$$
V_0 = A - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \partial V_j \cdot V_j \tag{3.29}
$$

τότε η στοχαστική διαφορική εξίσωση Itô

$$
dX_t^{x_0} = A(X_t^{x_0})dt + \sum_{j=1}^d V_j(X_t^{x_0})dB_t^j \tag{3.30}
$$

γράφεται σε μορφή Stratonovich ως

$$dX_t^{x_0} = V_0(X_t^{x_0})dt + \sum_{j=1}^{d} V_j(X_t^{x_0}) \circ dB_t^j. \tag{3.31}$$

Επειδή οι συναρτήσεις $A, V_1, \ldots, V_d$ έχουν φραγμένες μερικές παραγώγους, η στοχαστική διαφορική εξίσωση (3.30) έχει μοναδική λύση η οποία ικανοποιεί τις εκτιμήσεις

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le \tau} |X_t^{x_0}|^p\right] < \infty \tag{3.32}$$

για κάθε $p \geq 1, \tau > 0$.

Έστω τώρα $\tau > 0$. Αν $\mathcal{W} = C([0,\tau];\mathbb{R}^d)$ είναι $d-$διάστατος χώρος Wiener, τότε ο αντίστοιχος χώρος Cameron-Martin $\mathcal{H}$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^2([0,\tau];\mathbb{R}^d)$(Δείτε και την (1.72) στο πρώτο κεφάλαιο).

Το πρώτο βήμμα για να δείξουμε αποτελέσματα ομαλότητας για τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (3.30) είναι να δείξουμε ότι $X_t^i \in \mathbb{D}^\infty$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Συγκεκριμένα, έχουμε την ακόλουθη πρόταση για την οποία θα δώσουμε την ιδέα της απόδειξης. Για περισσότερα δείτε το Θεώρημα 2.2.2 στο [39].

Πρόταση 3.2.1. *Έστω $A, V_j \in C_b^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ και X_t η λύση της (3.30). Τότε $X_t^i \in \mathbb{D}^\infty$ για κάθε $t \in [0,\tau]$, $i = 1, \ldots, m$ και*

$$D_r^j X_t^i = V_j^i(X_r) + \sum_{k=1}^{m} \int_r^t \partial_k A^i(X_s) D_r^j X_s^k ds + \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{d} \int_r^t \partial_k V_\ell^i(X_s) D_r^j X_s^k dB_s^\ell \tag{3.33}$$

για κάθε $r \leq t$, όπου $D_r^j X_t^i$ είναι η $j-$συνιστώσα της παραγώγου Malliavin $D_r X_t^i$ για κάθε $j = 1, \ldots, d$.

Ιδέα της απόδειξης. Θεωρούμε τις προσεγγίσεις Picard $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζονται αναδρομικά ως εξής. Για $n = 0$ θέτουμε $X_0 = x_0$ που είναι το αρχικό σημείο της εξίσωσης (3.30), και

$$X_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t A(X_n(s))ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t V_j(X_n(s))dB_s^j \tag{3.34}$$

Τότε $X_n(t) \to X_t$ σε κάθε L^p καθώς $n \to \infty$.

Με επαγωγή προκύπτει ότι $\mathbb{D}^{1,p}$ για κάθε $p \geq 1$. Στη συνέχεια θέτουμε

$$\Psi_n(t) = \sup_{0\le r\le t} \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[r,t]} |D_r X_n(s)|^p\right] \tag{3.35}$$

και δείχνουμε ότι $\Psi_n(t) < \infty$ και ότι υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε

$$\Psi_{n+1}(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \Psi_n(s)ds.$$

Από αυτό θα προκύψει ότι η ακολουθία $\|X_n\|_{\mathbb{D}^{1,p}}$ είναι φραγμένη, άρα από το Λήμμα 2.2.4 $X_t^i \in \mathbb{D}^{1,p}$ για κάθε $p \geq 1$. Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα προκύπτει ότι $X_t^i \in \mathbb{D}^\infty$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$.

Τέλος, η εξίσωση (3.33), προκύπτει εφαρμόζοντας την παράγωγο Malliavin στην εξίσωση (3.30), σε συνδυασμό με την (2.168) και τον κανόνα της αλυσίδας. □

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω, υπάρχει ένα τεχνικό θέμα που πρέπει να ξεπεραστεί. Αν θεωρήσουμε τον πίνακα Malliavin $\mathscr{M}$ του τυχαίου διανύσματος X_t, τότε είναι

$$\mathscr{M}_{ij}(t) = \left\langle DX_t^i, DX_t^j \right\rangle_{L^2([0,\tau];\mathbb{R}^d)} = \sum_{\ell=1}^{d} \int_0^t D_r^\ell X_t^i D_r^\ell X_t^j dr \tag{3.36}$$

Αν σκεφτούμε να αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις (3.33) στην παραπάνω σχέση, τότε θα έχουμε ολοκληρωτέες ποσότητες που δε γνωρίζουμε αν είναι προσαρμοσμένες και αυτό μπορεί να δημιουργήσει πρόβλημα, καθώς θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε εργαλεία από τον στοχαστικό λογισμό.

Θα αναζητήσουμε τώρα μία καλή έκφραση για τον πίνακα Malliavin $\mathscr{M}$ που θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε εργαλεία από τον στοχαστικό λογισμό.

Ο τύπος του Itô σε intrinsic μορφή. Θεωρούμε E έναν διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, και την στοχαστική ανέλιξη $X = (X_t)_{t\geq 0}$ που λαμβάνει τιμές στον E και δίνεται από τον τύπο

$$X_t = x_0 + \int_0^t \phi(s)ds + \sum_{j=1}^{d} \Phi_j(s)dB_s^j, \tag{3.37}$$

όπου $\phi, \Phi_j \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega; E)$. Αν $f: E \to F$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση όπου F είναι κάποιος άλλος χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε η παράγωγος f' λαμβάνει τιμές στους φραγμένους γραμμικούς τελεστές $L(E,F)$. Φυσικά, αν σταθεροποιήσουμε βάσεις σε αυτούς τους χώρους, τότε η f' αναπαρίσταται από τον αντίστοιχο πίνακα Jacobi. Η δεύτερη παράγωγος f'' λαμβάνει τιμές στον $L(E, L(E,F))$ που ως γνωστόν μπορεί να ταυτιστεί με τις διγραμμικές μορφές $E \times E \to F$. Υπό αυτήν την οπτική, ο τύπος του Itô παίρνει την εξής μορφή

$$\begin{aligned} f(X_t) = x_0 + \int_0^t f'(X_s)\phi(s)ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t f'(X_s)\Phi_j(s)dB_s^j \\ + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \int_0^t f''(X_s)\left(\Phi_j(s), \Phi_j(s)\right) ds. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Στοχαστική γραμμικοποίηση. Έστω τώρα Y_t στοχαστική ανέλιξη που λαμβάνει τιμές στους $m \times m$ πίνακες και δίνεται από την εξίσωση

$$Y_t = I_m + \int_0^t \partial A(X_s)Y_s ds + \sum_{j=1}^{d} \partial V_j(X_s)Y_s dB_s^j \tag{3.39}$$

η οποία προκύπτει από την διαφόριση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (3.30) ως προς το αρχικό σημείο x. Δηλαδή

$$Y_t = \frac{\partial X_t^{x_0}}{\partial x},$$

που είναι ο πίνακας Jacobi της $X_t^{x_0}$ αρχικό σημείο x_0. Κατά κάποιο τρόπο η (3.39) αποτελεί γραμμικοποίηση της αρχικής εξίσωσης (3.30).(Μπορείτε να δείτε το Θεώρημα 2.2 στο [33]).

Αν ο πίνακας Y_t είναι αντιστρέψιμος με πιθανότητα 1, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Itô (3.38) για την απεικόνιση $f(C) = C^{-1}$ που ορίζεται στους αντιστρέψιμους πίνακες και έχει παραγώγους που δίνονται από τις σχέσεις $f'(C)M = -C^{-1}MC$ και $f''(C)(M_1, M_2) = 2C^{-1}M_1C^{-1}M_2C^{-1}$. Τότε με την επιλογή $\phi(s) = \partial A(X_s)Y_s$ και $\Phi_j(s) = \partial V_j(X_s)Y_s$, γράφουμε

$$\begin{aligned} Y_t^{-1} = I_m - \int_0^t Y_s^{-1}\partial A(X_s)Y_sY_s^{-1}ds - \sum_{j=1}^d Y_s^{-1}\partial V_j(X_s)Y_sY_s^{-1}dB_s^j \\ + \sum_{j=1}^d \int_0^t Y_s^{-1}\partial V_j(X_s)Y_sY_s^{-1}\partial V_j(X_s)Y_sY_s^{-1}ds \end{aligned} \tag{3.40}$$

που μετά τις απλοποιήσεις παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} Y_t^{-1} = I_m - \int_0^t \left[Y_s^{-1}\partial A(X_s) - \sum_{j=1}^d Y_s^{-1} \left(\partial V_j(X_s)\right)^2 \right] ds \\ - \sum_{j=1}^d \int_0^t Y_s^{-1}\partial V_j(X_s)dB_s^j. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Για να διακαιολογήσουμε τα παραπάνω αυστηρά, χρησιμοποιούμε το εξής επιχείρημα. Θεωρούμε Z_t τη λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{aligned} Z_t = I_m - \int_0^t \left[Y_s^{-1}\partial A(X_s) - \sum_{j=1}^d Y_s^{-1} \left(\partial V_j(X_s)\right)^2 \right] ds \\ - \sum_{j=1}^d \int_0^t Z_s\partial V_j(X_s)dB_s^j \end{aligned} \tag{3.42}$$

η οποία μάλιστα έχει μοναδική λύση καθώς οι συντελεστές έχουν φραγμένες μερικές παραγώγους.

Εφαρμόζουμε τον τύπου του Itô για το γινόμενο Z_tY_t, με κάποια προσοχή όμως καθώς ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι μεταθετικός εν γένει. Γράφουμε λοιπόν

$$d(Z_tY_t) = dZ_t \cdot Y_t + Z_tdY_t + dZ_t \cdot dY_t \tag{3.43}$$

και αντικαθιστώντας τα στοχαστικά διαφορικά

$$\begin{aligned} d(Z_tY_t) = &- Z_t\partial A(X_t)Y_tdt + \sum_{j=1}^d Z_t\left(\partial V_j(X_t)\right)^2 Y_tdt - \sum_{j=1}^d Z_t\partial V_j(X_t)Y_tdB_t^j \\ &+ Z_t\partial A(X_t)Y_tdt + \sum_{j=1}^d Z_t\partial V_j(X_t)Y_tdB_t^j - \sum_{j=1}^d Z_t\left(\partial V_j(X_t)\right)^2 Y_tdt. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Παρατηρούμε ότι στο δεξί μέλος της ισότητας διαγράφονται τα πάντα, οπότε λόγω των αρχικών συνθηκών $Z_tY_t = I_m$. Με όμοιο τρόπο έπεται ότι $Y_tZ_t = I_m$ άρα $Z_t = Y_t^{-1}$ και καταφέραμε να δικαιολογήσουμε αυστηρά την (3.41).

Η σημαντική παρατήρηση τώρα είναι η εξής. Από την εξίσωση (3.39) έχουμε για $r \leq t$

$$Y_t - Y_r = \int_r^t \partial A(X_s)Y_sds + \sum_{j=1}^d \int_r^t \partial V_j(X_s)Y_sdB_s^j$$

οπότε είναι

$$\begin{aligned}
&V_j(X_r) + \int_r^t \partial A(X_s) Y_s Y_r^{-1} V_j(X_r) ds + \sum_{j=1}^d \int_r^t \partial V_j(X_s) Y_s Y_r^{-1} V_j(X_r) dB_s^j \\
&= V_j(X_r) + \left(\int_r^t \partial A(X_s) Y_s ds + \sum_{j=1}^d \int_r^t \partial V_j(X_s) Y_s dB_s^j \right) Y_r^{-1} V_j(X_r) \\
&= V_j(X_r) + (Y_t - Y_r) Y_r^{-1} V_j(X_r) \\
&= Y_t Y_r^{-1} V_j(X_r).
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Από την παραπάνω εξίσωση και την (3.33) βλέπουμε πως η $Y_t Y_r^{-1} V_j(X_r)$ λύνει την ίδια στοχαστική διαφορική εξίσωση με την $D_r^j X_t$, άρα

$$D_r^j X_t = Y_t Y_r^{-1} V_j(X_r) \tag{3.46}$$

με πιθανότητα 1.

Ανηγμένος πίνακας Malliavin. Από τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}(t) = \sum_{j=1}^d \int_0^t \left(D_r^j X_t \right) \left(D_r^j X_t \right)^T dr &= \sum_{j=1}^d \int_0^t Y_t Y_r^{-1} V_j(X_r) V_j(X_r)^T (Y_r^{-1})^T Y_t^T dr \\
&= Y_t \sum_{j=1}^d \int_0^t Y_r^{-1} V_j(X_r) V_j(X_r)^T (Y_r^{-1})^T dr Y_t^T \\
&= Y_t C(t) Y_t^T,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

όπου

$$C(t) = \sum_{j=1}^d \int_0^t Y_r^{-1} V_j(X_r) V_j(X_r)^T (Y_r^{-1})^T dr \tag{3.48}$$

ή ισοδύναμα

$$C(t) = \int_0^t Y_r^{-1} a(X_r) (Y_r^{-1})^T dr, \tag{3.49}$$

όπου $a = VV^T$ και V είναι ο $m \times d$ πίνακας $V = \left(V_j^i \right)_{i,j=1}^{m,d}$. Ο $C(t)$ ονομάζεται ανηγμένος πίνακας Malliavin. Το σημαντικό είναι πως οι εκφράσεις που βρίσκονται μέσα στο ολοκλήρωμα είναι προσαρμοσμένες ανελίξεις και επιπλέον

$$\mathbb{E} \left[\left| \det Y_t^{-1} \right|^p + \left| \det Y_t \right|^p \right] < \infty \tag{3.50}$$

για κάθε $p \geq 2$.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα που αποτελεί μία πιθανοθεωρητική έκδοση του θεωρήματος ελλειπτικής ομαλότητας.

Θεώρημα 3.2.1. *Υποθέτουμε ότι ο πίνακας $a = VV^T$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη ομοιόμορφης ελλειπτικότητας*

$$v^T a(x) v \geq \theta |v|^2 \tag{3.51}$$

για κάποιο $\theta > 0$ και για κάθε $x, v \in \mathbb{R}^m$. Τότε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^m$ και $t > 0$, η λύση $X_t^{x_0}$ της εξίσωσης (3.30) έχει πυκνότητα που ανήκει στον χώρο του Schwartz $S(\mathbb{R}^m)$.

Απόδειξη. Λόγω της σχέσης (3.50), και του Θεωρήματος 3.1.1, αρκεί να δείξουμε ότι ο ανηγμένος πίνακας Malliavin $C(t)$ είναι αντιστρέψιμος με πιθανότητα 1 και ότι $(\det C(t))^{-1} \in \cap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$. Για κάθε $v \in \mathbb{R}^m$, χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.51) και έχουμε

$$\left((Y_r^{-1})^T v\right)^T a(X_r)(Y_r^{-1})^T v \geq \theta \left\langle (Y_r^{-1})^T v, (Y_r^{-1})^T v\right\rangle = \theta v^T \left(Y_r^{-1}(Y_r^{-1})^T\right) v \tag{3.52}$$

συνεπώς

$$C(t) \geq \theta \int_0^t Y_r^{-1}(Y_r^{-1})^T dr, \tag{3.53}$$

όπου με την ανισότητα εννοούμε πως η διαφορά των παραπάνω πινάκων είναι ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας. Από αυτό έπεται πως ο $C(t)$ αντιστρέφεται με πιθανότητα 1.

Αν τώρα f είναι μία θετική συνεχής πραγματική συνάρτηση, βλεπουμε με τη βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz ότι

$$\left(\int_0^t f(s)ds\right)^{-1} \leq \frac{1}{t^2}\int_0^t \frac{1}{f(s)}ds. \tag{3.54}$$

Ισχύει μία ανάλογη ανισότητα σε μορφή πινάκων. Συγκεκριμένα, αν $t \to M_t$ είναι μία συνεχής απεικόνιση με τιμές στους θετικά ορισμένους πίνακες, τότε

$$\left(\int_0^t M_s ds\right)^{-1} \leq \frac{1}{t^2}\int_0^t M_s^{-1} ds. \tag{3.55}$$

Συνδυάζοντας τις ανισότητες (3.53) και (3.55) έχουμε

$$C(t)^{-1} \leq \frac{1}{\theta t^2}\int_0^t Y_r^T Y_r dr. \tag{3.56}$$

Θέτουμε $K(t) = \frac{1}{\theta t^2}\int_0^t Y_r^T Y_r dr$. Τότε ο πίνακας $K(t) - C(t)^{-1}$ είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος και κατά συνέπεια

$$\det C(t)^{-1} \leq \det\left(C(t)^{-1} + K(t) - C(t)^{-1}\right) \implies (\det C(t))^{-1} \leq \det K(t) \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega), \tag{3.57}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (3.50) και το λήμμα που ακολουθεί . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 3.2.2. *Έστω A, B δύο $m \times m$ πραγματικοί και συμμετρικοί πίνακες. Υποθέτουμε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος και ότι ο B είναι θετικά ημιορισμένος. Τότε*

$$\det(A) \leq \det(A+B). \tag{3.58}$$

Απόδειξη. Επειδή ο A είναι θετικά ορισμένος, έχουμε ότι

$$A + B = A^{1/2}(I_m + A^{-1/2}BA^{1/2})A^{1/2}, \tag{3.59}$$

άρα είναι

$$\det(A+B) = \det(A)\det(I_m + A^{-1/2}BA^{1/2}). \tag{3.60}$$

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A^{-1/2}BA^{1/2}$ είναι μη αρνητικές οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα $I_m + A^{-1/2}BA^{1/2}$ είναι μεγαλύτερες ή ίσες από τη μονάδα. Το ζητούμενο έπεται από την παραπάνω εξίσωση οριζουσών. □

3.3 Θεώρημα Hörmander

3.3.1 Συνθήκη και θεώρημα Hörmander

Σε αυτή την παράγραφο θα διατυπώσουμε το θεώρημα του Hörmander και θα προσπαθήσουμε να καταλάβουμε κάποιες γεωμετρικές πτυχές του. Θα εξετάσουμε σύντομα και τη σχέση του με τη διατύπωση της θερμοδυναμικής του Καραθεωδορή. Για βασικά στοιχεία θερμοδυναμικής καθώς και για τη διατύπωση του Καραθεωδορή, μπορείτε να συμβουλευτείτε το [31], ενώ για θέματα διαφορικής γεωμετρίας όπως το θεώρημα Frobenius, το [56].

Εδώ θα συμβολίζουμε με Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Θεωρούμε $Y_0, Y_1, \ldots, Y_d$ λεία διανυσματικά πεδία στον Ω, δηλαδή

$$Y_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{3.61}$$

όπου $b_{ij} \in C^\infty(\Omega)$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, \ldots, d$.

Διατυπώνουμε τώρα το διάσημο θεώρημα του Hörmander. Για την απόδειξη μέσω ψευδοδιαφορικών τελεστών παραπέμπουμε στο Θεώρημα 5.1 του [55].

Θεώρημα 3.3.1 (Hörmander, 1967). *Έστω $Y_0, Y_1, \ldots, Y_d$ λεία διανυσματικά πεδία στον Ω τέτοια ώστε*

$$\mathrm{Lie}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_d) = \mathbb{R}^m \tag{3.62}$$

σε κάθε σημείο του Ω. Τότε ο διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης

$$L = \sum_{j=1}^{d} Y_j^2 + Y_0 + c \tag{3.63}$$

είναι υποελλειπτικός για κάθε $c \in C^\infty(\Omega)$.

Με την (3.62) εννοούμε πως σε κάθε σημείο $x \in \Omega$, τα πεδία $Y_0, Y_1, \ldots, Y_d$ μαζί με κάποια από τα

$$[Y_{j_1}, Y_{j_2}], [Y_{j_1}, [Y_{j_2}, Y_{j_3}]], \ldots, [Y_{j_1}, [Y_{j_2}, [Y_{j_3}, \ldots, Y_{j_k}]]], \ldots,$$

όπου $j_i = 0, 1, \ldots, d$, παράγουν τον εφαπτόμενο χώρο $T_x\Omega = \mathbb{R}^m$. Δηλαδή σε κάθε σημείο του Ω, ανάμεσα στα πεδία $Y_0, Y_1, \ldots, Y_d$ και όλους τους μεταθέτες που μπορούμε να φτιάξουμε, υπάρχουν m από αυτά που είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αυτή η συνθήκη ονομάζεται συνθήκη του Hörmander και οι διαφορικοί τελεστές του Θεωρήματος 3.3.1 ονομάζονται τελεστές Hörmander.

Παράδειγμα 3.3.1. Ας δούμε πως προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα ότι ο τελεστής του Kolmogorov, που είδαμε στην εισαγωγή,

$$K = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}$$

είναι υποελλειπτικός.

Θεωρούμε τα πεδία $Y_0 = x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}$ και $Y_1 = \frac{\partial}{\partial x}$. Τότε $K = Y_1^2 + Y_0$ και

$$[Y_1, Y_0] = Y_1Y_0 - Y_0Y_1 = \frac{\partial}{\partial y}$$

ο πίνακας αυτών των πεδίων είναι

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

που έχει τάξη 3 σε κάθε σημείο, άρα ικανοποιείται το παραπάνω θεώρημα και ο K είναι υποελλειπτικός.

Παράδειγμα 3.3.2. Θεωρούμε τα λεία διανυσματικά πεδία $Y_1 = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t}$ και $Y_2 = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t}$ όπου $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε το διαφορικό τελεστή $L = Y_1^2 + Y_2^2$ και υπολογίζουμε την αγκύλη Lie

$$[Y_1, Y_2] = Y_1Y_2 - Y_2Y_2 = -4\frac{\partial}{\partial t}.$$

Ο πίνακας των πεδίων $Y_1, Y_2, [Y_1, Y_2]$ είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2y & -2x & -4 \end{pmatrix} \tag{3.65}$$

και βλέπουμε πως έχει τάξη 3 σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$. Από το Θεώρημα 3.3.1, ο διαφορικός τελεστής $L = Y_1^2 + Y_2^2$ είναι υποελλειπτικός.

Το Θεώρημα 3.3.1 μπορεί να επεκταθεί και σε λεία διανυσματικά πεδία σε διαφορικές πολλαπλότητες M. Εκεί η συνθήκη του Hörmander παίρνει την μορφή $\mathrm{Lie}(Y_0, \ldots, Y_d)(x) = T_xM$ για κάθε $x \in M$.

Καραθεωδορή και Θερμοδυναμική. Η θερμοδυναμική βασιζόταν μέχρι την εποχή του Καραθεωδορή σε ιδέες από την μηχανική όπως σε θερμικές μηχανές και κύκλους Carnot. Ο φυσικός Max Born παρότρυνε τον Καραθεωδορή να βρεί ένα πιο μαθηματικό πλαίσιο για τα θεμέλια της θερμοδυναμικής.

Στη συνέχεια θα είμαστε λιγότερο αυστηροί καθώς ο σκοπός μας είναι να καταλάβουμε τί σχέση έχουν όλα αυτά με τη συνθήκη και το θεώρημα Hörmander.

Θεωρούμε ένα θερμοδυναμικό σύστημα και συμβολίζουμε με T τη θερμοκρασία και με Q τη θερμότητα. (Ακριβέστερα το ποσό θερμότητας που μεταφέρεται).

Υπάρχει μία διαφορική μορφή ω, την οποία θα συμβολίζουμε και με δQ, έτσι ώστε το ποσό θερμότητας που μεταφέρεται κατά μήκος μίας καμπύλης γ (η καμπύλη γ αντιπροσωπεύει πραγματική μεταβολή του θερμοδυναμικού συστήματος) να δίνεται ως

$$Q = \int_\gamma \delta Q. \tag{3.66}$$

Αυτό το ολοκλήρωμα εξαρτάται από την καμπύλη γ, δηλαδή η διαφορική μορφή δQ δεν είναι ακριβής.

Το 1854 ο Clausius έδειξε πως για κάθε αντιστρεπτή μεταβολή R, είναι

$$\oint_R \frac{\delta Q}{T} = 0. \tag{3.67}$$

Υπάρχει λοιπόν μία συνάρτηση S, που ονομάζεται εντροπία, τέτοια ώστε

$$\delta Q = TdS \tag{3.68}$$

και η παραπάνω σχέση ονομάζεται δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το σύμβολο ω για τη διαφορική μορφή δQ καθώς η συζήτηση θα γίνει γεωμετρική.

Μία αδιαβατική καμπύλη γ είναι τέτοια ώστε να μην υπάρχει μεταφορά θερμότητας κατά την μεταβολή κατά μήκος της γ. Δηλαδή $\int_\gamma \omega = 0$ ή $\omega(\dot{\gamma}) = 0$ όπου $\dot{\gamma}$ είναι το πεδίο ταχυτήτων.

Το 1909 ο Καραθεωδορή βρήκε ένα αξίωμα από το οποίο απορρέει ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής. Αυτό ονομάζεται και αρχή του Καραθεωδορή και είναι το εξής.

Αρχή Καραθεωδορή. Αν $\mathscr{S}$ είναι ο χώρος καταστάσεων ενός θερμοδυναμικού συστήματος, τότε για κάθε $x_0 \in S$ και για κάθε περιοχή U του x_0, υπάρχει $x \in U$ το οποίο δεν είναι προσβάσιμο από το x_0 μέσω αδιαβατικής μεταβολής.

Ο Καραθεωδορή έδειξε πως αν συμβαίνει το παραπάνω, τότε η διαφορική μορφή ω είναι ολοκληρώσιμη. Δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις T, S έτσι ώστε $\omega = TdS$

Για μία αδιαβατική καμπύλη γ, είναι $\omega(\dot{\gamma}) = 0$ το οποίο σημαίνει πως η γ εφάπτεται στην κατανομή $\mathcal{D} = \ker \omega$. Δηλαδή

$$\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)} = \ker \omega_{\gamma(t)}. \tag{3.69}$$

Υποθέτουμε ότι ο χώρος καταστάσεων είναι $\mathscr{S} = \mathbb{R}^m$, και ότι η κατανομή $\mathcal{D}$ είναι διάστασης $r < m$. Δηλαδή $\dim \ker \omega_x = r$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$.

Υποθέτουμε ότι η διαφορική μορφή ω είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή $\omega = TdS$. Τότε θα είναι και ακριβής, $d\omega = 0$. Για δύο διανυσματικά πεδία $Y_1, Y_2 \in \mathcal{D}$, η μαγική φόρμουλα του Cartan παίρνει την μορφή

$$d\omega(Y_1, Y_2) = Y_1\omega(Y_2) - Y_2\omega(Y_1) - \omega\left([Y_1, Y_2]\right). \tag{3.70}$$

Όμως έχουμε υποθέσει ότι $d\omega = 0$ και $Y_1, Y_2 \in \mathcal{D}$, οπότε η παραπάνω εξίσωση μας δίνει ότι $\omega\left([Y_1, Y_2]\right) = 0$ και κατά συνέπεια $[Y_1, Y_2] \in \mathcal{D}$. Η κατανομή $\mathcal{D}$ είναι λοιπόν involutive και από το θεώρημα Frobenius θα είναι ολοκληρώσιμη. Αυτό σημαίνει πως αν ξεκινήσουμε από κάποιο σημείο $x_0 \in \mathscr{S}$, δεν μπορούμε με αδιαβατικές μεταβολές να πάμε σε κάθε άλλο σημείο του $\mathscr{S}$. Αυτό είναι μία ένδειξη πως θα πρέπει να ισχύει κάποια συνθήκη όπως αυτή στην αρχή του Καραθεωδορή.

3.3.2 Δεύτερη ματιά στο θεώρημα Hörmander

Ας υποθέσουμε ότι τα πεδία $Y_0, Y_1, \ldots, Y_d$ που εμφανίζονται στο Θεώρημα 3.3.1 ικανοποιούν τη σχέση

$$\dim \mathscr{L}(x) = r < m \tag{3.71}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ όπου $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_d)$. Τότε η $\mathscr{L}$ είναι μία involutive κατανομή και σύμφωνα με το θεώρημα Frobenius γύρω από κάθε σημείο $p \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει χάρτης $(U, x_1, \ldots, x_m)$ έτσι ώστε

$$\mathscr{L} = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right\} \tag{3.72}$$

σε κάθε σημείο $q \in U$.

Είναι φανερό λοιπόν πως σε αυτή την περίπτωση ο τελεστής $L = \sum_{j=1}^d Y_j^2 + Y_0$ δεν μπορεί να είναι υποελλειπτικός.

Υποελλειπτικότητα του L^*. Αν L είναι ένας διαφορικός τελεστής, τότε ο L^* είναι ο τελεστής με την ιδιότητα

$$\langle \phi, L^* u \rangle = \langle L\phi, u \rangle \tag{3.73}$$

για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ και για κάθε κατανομή $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Πρόταση 3.3.1. *Έστω L ο διαφορικός τελεστής του Θεωρήματος 3.3.1. Τότε και ο L^* είναι υποελλειπτικός.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά πως $Y_j^* = -Y_j + f_j$ όπου $f_j = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} L^* = \sum_{j=1}^d (Y_j^*)^2 + Y_0^* + c &= \sum_{j=1}^d (-Y_j + f_j)^2 - Y_0 + f_0 + c \\ &= \sum_{j=1}^d Y_j^2 - Y_0 + c' - 2\sum_{j=1}^d f_j Y_j \\ &= \sum_{j=1}^d Y_j^2 + Y_0' + c', \end{aligned} \tag{3.74}$$

όπου $Y_0' = -Y_0 - 2\sum_{j=1}^d f_j Y_j$ και $c' = f_0 + c + \sum_{j=1}^d (f_j^2 - Y_j f_j)$. Μπορούμε να δούμε πως τα πεδία $Y_0', Y_1, \ldots, Y_d$ ικανοποιούν επίσης τη συνθήκη του Hörmander οπότε ο L^* είναι υποελλειπτικός από το Θεώρημα 3.3.1. □

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την παραπάνω πρόταση για να δείξουμε την ύπαρξη λείας πυκνότητας για την πιθανότητα μετάβασης της διάχυσης (3.30). Η πιθανότητα μετάβασης $p(t, x_0, dy)$ αποτελεί ασθενή λύση για την εξισώση Fokker-Planck

$$\frac{\partial p}{\partial t} = L_y^* p. \tag{3.75}$$

Κάτω από τη συνθήκη του Hörmander, το Θεώρημα 3.3.1 μαζί με την Πρόταση 3.3.1, μας εξασφαλίζουν συνάρτηση $p(t, x_0, y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$ τέτοια ώστε $p(t, x_0, dy) = p(t, x_0, y)dy$.

3.3.3 Πιθανοθεωρητικό θεώρημα Hörmander

Ένα διανυσματικό πεδίο $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ θα λέγεται λείο αν έχει C^∞ συνιστώσες. Για δύο λεία διανυσματικά πεδία U, V στον $\mathbb{R}^m$, η αγκύλη Lie τους ορίζεται ως

$$[U, V]_x = \partial V(x) \cdot U(x) - \partial U(x) \cdot V(x), \tag{3.76}$$

όπου ο ∂U είναι ο πίνακας με στοιχεία $(\partial U)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} U^i$ και οι παραπάνω πολλαπλασιασμοί είναι πολλαπλασιασμοί πινάκων.

Ορισμός 3.3.1 (Συνθήκη Hörmander)**.** Θεωρούμε το $S_0 = \{V_1, \ldots, V_d\}$ και ορίζουμε το S_k επαγωγικά για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ως

$$S_{k+1} = S_k \cup \{[U, V_j] : U \in S_k, j = 0, \ldots, d\}. \tag{3.77}$$

Θέτουμε επίσης $\mathscr{V}_k(x) = \text{span}\{U(x) : U \in S_k\}$ και λέμε ότι τα $A, V_1, \dots V_d$ ικανοποιούν τη συνθήκη του Hörmander αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ είναι

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathscr{V}_k(x). \tag{3.78}$$

Εμείς θα δείξουμε απευθείας, με λογισμό Malliavin, το ακόλουθο θεώρημα που μπορεί να θεωρηθεί ως μία πιθανοθεωρητική εκδοχή του θεωρήματος Hörmander. Παρατηρήστε πως δεν παίρνουμε πληροφορία για την ομαλότητα ως προς τη χρονική μεταβλητή, όμως κάνουμε την ασθενέστερη υπόθεση ότι ισχύει η συνθήκη του Hörmander μόνο στο αρχικό σημείο x_0.

Θεώρημα 3.3.2 (Πιθανοθεωρητικό Hörmander)**.** *Έστω $m, d \in \mathbb{N}$ και $A, V_1, \cdots, V_d : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ λεία διανυσματικά πεδία έτσι ώστε όλες οι μερικές παράγωγοι να είναι φραγμένες. Έστω επίσης X_t λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$X_t = x_0 + \int_0^t A(X_s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t V_j(X_s)dB_s^j, \tag{3.79}$$

όπου $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

Αν τα πεδία $V_0, V_1, \cdots, V_d$, όπου το V_0 δίνεται από την (3.29), ικανοποιούν τη συνθήκη του Hörmander στο αρχικό σημείο x_0, τότε για κάθε $t > 0$ η κατανομή της X_t έχει πυκνότητα που ανήκει στον χώρο Schwartz $S(\mathbb{R}^m)$.

Ας δούμε ένα παράδειγμα στο οποίο εφαρμόζεται αυτό το θεώρημα.

Παράδειγμα 3.3.3. Έστω $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= dB_t^1 + \sin X_t^2 dB_t^2 \\ dX_t^2 &= 2X_t^1 dB_t^1 + X_t^1 dB_t^2 \end{aligned}$$

με αρχική συνθήκη $X_0 = x_0 = (0, 0)$. Αυτή η στοχαστική διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$dX_t = V_1(X_t^1, X_t^2)dB_t^1 + V_2(X_t^1, X_t^2)dB_t^2$$

όπου $V_1(x, y) = (1, 2x) = \frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y}$ και $V_2 = (\sin y, x) = \sin y \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Στο σημείο $(0, 0)$ είναι $V_1(0, 0) = (1, 0)$ και $V_2(0, 0) = (0, 0)$, όμως

$$[V_1, V_2] = 2x \cos y \frac{\partial}{\partial x} + (1 - 2\sin y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.80}$$

οπότε $[V_1, V_2](0, 0) = (0, 1)$. Άρα λοιπόν $\text{span}\{V_1(0, 0), [V_1, V_2](0, 0)\} = \mathbb{R}^2$ και έτσι η συνθήκη του Hörmander ικανοποιείται στο αρχικό σημείο x_0. Από το Θεώρημα 3.3.2 για κάθε $t > 0$ η X_t έχει πυκνότητα ως προς το 2-διάστατο μέτρο Lebesgue που ανήκει στον χώρο του Schwartz $S(\mathbb{R}^2)$. Παρατηρήστε πως αυτό το αποτέλεσμα το πήραμε ουσιαστικά απλώς κοιτάζοντας τους συντελεστές της εξίσωσης χωρίς να λύσουμε στην πράξη καμία εξίσωση.

Επίσης, μπορούμε να δούμε πως το Θεώρημα 3.2.1 είναι ουσιαστικά ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 3.3.2. Πράγματι, αν ο πίνακας $a = VV^T$ ικανοποιεί τη συνθήκη (3.51), τότε για $v \in \text{span}\{V_1, \dots, V_d\}^\perp$ έχουμε ότι

$$0 = \sum_{j=1}^d \langle v, V_j(x)\rangle^2 = v^T a(x) v, \tag{3.81}$$

συνεπώς $v = 0$. Δηλαδή είναι $\text{span}\{V_1(x), \dots, V_d(x)\} = \mathbb{R}^m$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ και έτσι η συνθήκη του Hörmander ικανοποιείται παντού, δίνοντας το ζητούμενο.

3.3.4 Η απόδειξη μέσω λογισμού Malliavin

Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε την απόδειξη για το Θεώρημα 3.3.2. Η στρατηγική είναι να δείξουμε πως για κάθε $t > 0$, το τυχαίο διάνυσμα X_t που λύνει την εξίσωση (3.79), ικανοποιεί το Θεώρημα 3.1.1.

Ξεκινάμε με το ακόλουθο γενικό λήμμα.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω M ένας συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος $m \times m$ τυχαίος πίνακας, με στοιχεία στον $\cap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$. Υποθέτουμε πως για κάθε $p \geq 2$ υπάρχει σταθερά $C_p > 0$ και κάποιο $\varepsilon_p > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\sup_{|x|=1} \mathbb{P}\left(x^T M x \leq \varepsilon\right) \leq C_p \varepsilon^p \quad \textit{για κάθε } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p). \tag{3.82}$$

Τότε $(\det M)^{-1} \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$.

Απόδειξη. Έστω λ η μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα M. Τότε είναι $\lambda = \inf_{|x|=1} x^T M x$ και $\lambda^m \leq \det M$. Αν λοιπόν δείξουμε ότι $\mathbb{E}\left[\lambda^{-q}\right] < \infty$ για κάθε $q \geq 2$ τότε θα έχουμε το ζητούμενο.

Ισχυρισμός. Αν $p \geq 2$ τότε υπάρχουν σταθερές $c_p, \beta_p > 0$ τέτοια ώστε $\mathbb{P}(\lambda < \varepsilon) \leq c_p \varepsilon^p$ για κάθε $0 < \varepsilon < \beta_p$.

Προχωράμε στην απόδειξη του ισχυρισμού. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να καλύψουμε την μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ με πεπερασμένες το πλήθος μπάλες ακτίνας ε^2. Πιο ειδικά, μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{S}^{m-1}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{S}^{m-1}$ να υπάρχει $k \in \{1, \ldots, n\}$ με $|x - x_k| < \varepsilon^2$. Βλέπουμε επίσης πως υπάρχει σταθερά $c_1 > 0$ ανεξάρτητη του $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $n \leq c_1 \varepsilon^{-2m}$. Επειδή ο πίνακας M είναι συμμετρικός, έχουμε

$$\langle x, Mx \rangle = \langle x_k, Mx_k \rangle + \langle x - x_k, Mx \rangle + \langle x - x_k, Mx_k \rangle \geq \langle x_k, Mx_k \rangle - 2\,|M|\,\varepsilon^2, \tag{3.83}$$

όπου $|M| = \left(\sum_{i,j=1}^m M_{ij}^2\right)^{1/2}$, και από την παραπάνω ανισότητα έπεται ο εγκλεισμός

$$\left\{|M| < \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cap \left(\bigcap_{k=1}^n \{x_k^T M x_k > 3\varepsilon\}\right) \subseteq \left\{x^T M x > \varepsilon, \forall\, x \in \mathbb{S}^{m-1}\right\}. \tag{3.84}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $\{\lambda \leq \varepsilon\} = \left\{\exists\, x \in \mathbb{S}^{m-1} : x^T M x \leq \varepsilon\right\}$ και σε συνδυασμό με την (3.84) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lambda \leq \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(\left\{\exists\, x \in \mathbb{S}^{m-1} : x^T M x \leq \varepsilon\right\}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(|M| \geq \frac{1}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\left(x_k^T M x_k \leq 3\varepsilon\right) \\ &\leq \varepsilon^p \mathbb{E}\left[|M|^p\right] + n \sup_{|x|=1} \mathbb{P}\left(x^T M x \leq 3\varepsilon\right), \end{aligned} \tag{3.85}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Chebychev. Από την (3.82), υπάρχει σταθερά $C_p' > 0$ έτσι ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon_{p+2m}$ να είναι

$$n \sup_{|x|=1} \mathbb{P}\left(x^T M x \leq 3\varepsilon\right) \leq c_1 \varepsilon^{-2m} C_p' \varepsilon^{p+2m} = c_1 C_p' \varepsilon^p. \tag{3.86}$$

Επειδή τα στοιχεία του πίνακα M είναι στον $\cap_{p\geq 1}L^p(\Omega)$ έχουμε ότι $\mathbb{E}\left[|M|^p\right]<\infty$ Με την επιλογή $c_p=\mathbb{E}\left[|M|^p\right]+c_1C_p'$ και $\beta_p=\varepsilon_{p+2m}$ έχουμε ότι $\mathbb{P}\left(\lambda\leq\varepsilon\right)\leq c_p\varepsilon^p$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Για κάθε $q\geq 2$, γράφουμε

$$\mathbb{E}\left[\lambda^{-q}\right]=\int_0^\infty qt^{q-1}\mathbb{P}\left(\lambda^{-1}>t\right)dt=\int_0^\infty qt^{q-1}\mathbb{P}\left(\lambda<\frac{1}{t}\right)dt. \tag{3.87}$$

Από τον ισχυρισμό, για κάθε $q\geq 2$ υπάρχουν $\beta_{q+1},c_{q+1}>0$ έτσι ώστε $\mathbb{P}\left(\lambda<\frac{1}{t}\right)\leq c_{q+1}t^{-q-1}$ για κάθε $t>\beta_{q+1}^{-1}$. Άρα λοιπόν

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\lambda^{-q}\right]&=\int_0^{\beta_{q+1}^{-1}}qt^{q-1}\mathbb{P}\left(\lambda<\frac{1}{t}\right)dt+\int_{\beta_{q+1}^{-1}}^\infty qt^{q-1}\mathbb{P}\left(\lambda<\frac{1}{t}\right)dt\\&\leq\int_0^{\beta_{q+1}^{-1}}qt^{q-1}\mathbb{P}\left(\lambda<\frac{1}{t}\right)dt+qc_{q+1}\int_{\beta_{q+1}^{-1}}^\infty t^{-2}dt<\infty\end{aligned} \tag{3.88}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Συνδυάζοντας το Θεώρημα Malliavin 3.1.1 και το Λήμμα 3.3.3, βλέπουμε πως το πιθανοθεωρητικό θεώρημα Hörmander 3.3.2 έπεται άμεσα αν καταφέρουμε να δείξουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.3.4. *Έστω $C(t)$ ο ανηγμένος πίνακας Malliavin (3.48). Τότε υπό τη συνθήκη του Hörmander, για κάθε $p\geq 2$ υπάρχει σταθερά $C_p>0$ και $\varepsilon_p>0$ με*

$$\sup_{|x|=1}\mathbb{P}\left(x^TC(t)x\leq\varepsilon\right)\leq C_p\varepsilon^p\quad \textit{για κάθε } \varepsilon\in(0,\varepsilon_p). \tag{3.89}$$

Σημείωση. Στο Θεώρημα 3.3.2, όπως και στο παραπάνω θεώρημα, ο τελικός χρόνος t δεν παίζει κάποιο ιδιαίτερο ρόλο και γι αυτό θα δείξουμε το παραπάνω θεώρημα για $t=1$. Έτσι θα μπορούμε να χρησιμοποιούμε το t ως χρονική παράμετρο για τις ανελίξεις που θα εμφανιστούν στη συνέχεια.

Λήμμα 3.3.5. *έστω $\alpha\in(0,1]$ και $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η f' να είναι $\alpha-$Hölder συνεχής με σταθερά Hölder $\|f'\|_\alpha$. Τότε*

$$\|f'\|_\infty\leq 8\|f\|_\infty\max\left\{1,\|f\|_\infty^{-\frac{1}{1+\alpha}}\|f'\|_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\right\}. \tag{3.90}$$

Απόδειξη. Ισχυριζόμαστε αρχικά, πως αν $|f'(x)|\geq A$ για κάθε $x\in I\subset[0,1]$, όπου I διάστημα, τότε υπάρχει κάποιο $t_1\in I$ τέτοιο ώστε

$$|f(t_1)|\geq A\frac{|I|}{2}. \tag{3.91}$$

Πράγματι, αν $|f'(x)|\geq A$ για κάθε $x\in I=[a,b]$, τότε η f' διατηρεί πρόσημο, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε πως $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Αν $|f(a)|\geq\frac{A(b-a)}{2}$ τότε έχουμε τον ισχυρισμό. Αν όχι, τότε $|f(a)|<\frac{A(b-a)}{2}$ και ειδικότερα $f(a)>-\frac{A(b-a)}{2}$. Γράφουμε

$$f(b)=f(a)+\int_a^bf'(x)dx>-\frac{A(b-a)}{2}+A(b-a)=\frac{A(b-a)}{2} \tag{3.92}$$

οπότε ο ισχυρισμός αληθεύει.

Έστω τώρα $t_0 \in [0,1]$ με $|f'(t_0)| = \|f'\|_\infty$. Έστω $t \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$|t - t_0| \leq \left(\frac{\|f'\|_\infty}{2\|f'\|_\alpha}\right)^{1/\alpha} =: r. \tag{3.93}$$

Τότε

$$|f'(t) - f'(t_0)| \leq \|f'\|_\alpha |t - t_0|^\alpha \leq \frac{\|f'\|_\infty}{2}, \tag{3.94}$$

άρα $|f'(t)| \geq \frac{\|f'\|_\infty}{2}$. Θα διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. $r < \dfrac{1}{2}$.

Σε αυτή την περίπτωση, όποια και να είναι η θέση του σημείου t_0 μέσα στο $[0,1]$, μπορούμε να βρούμε διάστημα $I \subset [0,1]$ μήκους r, το οποίο να περιέχει το t_0 και να είναι $|f'(t)| \geq \frac{\|f'\|_\infty}{2}$ για κάθε $t \in I$. Από τον παραπάνω ισχυρισμό, υπάρχει $t_1 \in I$ τέτοιο ώστε

$$|f(t_1)| \geq \frac{\|f'\|_\infty}{2}\frac{r}{2}. \tag{3.95}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty \geq \frac{\|f'\|_\infty}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{\|f'\|_\infty}{2\|f'\|_\alpha}\right)^{1/\alpha} &\implies \|f'\|^{1+\alpha} \leq 2 \cdot 4^\alpha \|f\|_\infty^\alpha \|f'\|_\alpha \\ &\implies \|f'\|_\infty \leq 4\|f\|_\infty^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \|f'\|_\alpha^{\frac{1}{1+\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Περίπτωση 2. $r \geq \dfrac{1}{2}$.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, μπορύμε να βρούμε διάστημα $I \subset [0,1]$ μήκους $\min\{r,1\}$ με $t_0 \in I$, έτσι ώστε

$$\|f\|_\infty \geq \frac{\|f\|'_\infty}{2}\frac{\min\{r,1\}}{2} \geq \frac{\|f'\|_\infty}{2}\frac{1}{4} \implies \|f'\|_\infty \leq 8\|f\|_\infty. \tag{3.97}$$

Συνδυάζουμε τις δύο παραπάνω περιπτώσεις και έχουμε τη ζητούμενη εκτίμηση (3.90). ☐

Θα δούμε τώρα κάποιες χρήσιμες έννοιες που εισήχθησαν στο [20] από τον Martin Hairer.

Θεωρούμε μία οικογένεια ενδεχομένων $A = (A_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$ που εξαρτώνται από την παράμετρο ε. Λέμε ότι η οικογένεια A είναι *σχεδόν αληθής* αν για κάθε $p \geq 1$ υπάρχει θετική σταθερά C_p τέτοια ώστε $\mathbb{P}(A_\varepsilon) \geq 1 - C_p\varepsilon^p$ για κάθε $\varepsilon \in (0,1]$, και *σχεδόν ψευδής* αν για κάθε $p \geq 1$ υπάρχει θετική σταθερά C_p τέτοια ώστε $\mathbb{P}(A_\varepsilon) \leq C_p\varepsilon^p$ για κάθε $\varepsilon \in (0,1]$. Προφανώς η οικογένεια A είναι σχεδόν αληθής αν και μόνο αν η οικογένεια $A^c = (A^c_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$ είναι σχεδόν ψευδής.

Αν έχουμε δύο οικογένειες ενδεχομένων $A = (A_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$ και $B = (B_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$, λέμε ότι η A *σχεδόν συνεπάγεται* την B αν η οικογένεια $A \setminus B = (A_\varepsilon \setminus B_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$ είναι σχεδόν ψευδής, και γράφουμε $A \underset{\varepsilon}{\implies} B$.

Οι παραπάνω έννοιες δεν αλλάζουν με αναπαραμέτρηση της μορφής $\varepsilon \to \varepsilon^\alpha$ όπου $\alpha > 0$. Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα για να εξοικειωθούμε με αυτές τις έννοιες, το οποίο όμως θα μας χρειαστεί στη συνέχεια.

Παράδειγμα 3.3.4. Θεωρούμε τυχαία μεταβλητή $X \in \cap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$ και την οικογένεια ενδεχομένων $A = (A_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$ με $A_\varepsilon = \{|X| \leq \varepsilon^{-\ell}\}$ όπου $\ell \in (0,1)$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebychev έχουμε για κάθε $p \geq 1 > \ell$ ότι

$$\mathbb{P}\left(|X| > \varepsilon^{-\ell}\right) \leq \varepsilon^{\ell p}\mathbb{E}\left[|X|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|X|^p\right]\varepsilon^p.$$

Η οικογένεια A^c είναι λοιπόν σχεδόν ψευδής άρα η οικογένεια A είναι σχεδόν αληθής.

Υπενθυμίζουμε πως η χρονική παράμετρος για τις συναρτήσεις που θεωρούμε, παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$.

Λήμμα 3.3.6. *Έστω B μία $d-$διάστατη κίνηση Brown, a μία προσαρμοσμένη στοχαστική ανέλιξη με τιμές στο $\mathbb{R}$ και b μία προσαρμοσμένη στοχαστική ανέλιξη με τιμές στο $\mathbb{R}^d$ οι οποίες είναι $\alpha-$Hölder συνεχείς για $\alpha = \frac{1}{3}$ και επιπλέον $\|a\|_\alpha, \|b\|_\alpha \in \cap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$. Έστω επίσης η στοχαστική ανέλιξη Z που δίνεται από την εξίσωση*

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t a(s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t b_j(s)dB_s^j.$$

Τότε υπάρχει καθολική σταθερά $\ell \in (0,1)$ τέτοια ώστε να ισχύει η σχεδόν συνεπαγωγή

$$\{\|Z\|_\infty < \varepsilon\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \{\|a\|_\infty < \varepsilon^\ell\} \cap \{\|b\|_\infty < \varepsilon^\ell\}. \tag{3.98}$$

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξουμε μία γενική ανισότητα για συνεχή martingale. Συγκεκριμένα, αν M_t είναι ένα συνεχές martingale με τετραγωνική κύμανση $\langle M\rangle_t$ τότε για κάθε $\varepsilon, \delta > 0$ είναι

$$\mathbb{P}\left(\langle M\rangle_\tau \leq \varepsilon, \sup_{0\leq t\leq\tau} |M_t| \geq \delta\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\varepsilon}\right). \tag{3.99}$$

Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε κατάλληλη κίνηση Brown B, τότε το martingale M_t μπορεί να γραφεί στην μορφή $M_t = B(\langle M\rangle_t)$ και έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\langle M\rangle_\tau \leq \varepsilon, \sup_{0\leq t\leq\tau} |M_t| \geq \delta\right) &= \mathbb{P}\left(\langle M\rangle_\tau \leq \varepsilon, \sup_{0\leq t\leq\tau} |B(\langle M\rangle_t)| \geq \delta\right) \\
&\leq 2\mathbb{P}\left(B(\varepsilon) \geq \delta\right) \\
&= 2\int_{\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&\leq 2\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\varepsilon}\right),
\end{aligned} \tag{3.100}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αρχή της ανάκλασης για την κίνηση Brown και την ανισότητα

$$\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{όπου } x \geq 0.$$

Τώρα για την απόδειξη του λήμματος, θεωρούμε το συνεχές martingale

$$M_t = \int_0^t b(s)dB_s = \sum_{j=1}^d \int_0^t b_j(s)dB_s^j$$

το οποίο έχει τετραγωνική κύμανση $\langle M\rangle_t = \int_0^t |b(s)|^2 ds$. Αν $\|b\|_\infty < \varepsilon$ τότε $\langle M\rangle_\tau \leq \tau\varepsilon^2$ οπότε η (3.99) μας δίνει ότι

$$\mathbb{P}\left(\|b\|_\infty < \varepsilon,\ \sup_{0\leq t\leq\tau}\left\|\int_0^t b(s)dB_s\right\|_\infty \geq \varepsilon^q\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^{2q}}{2\tau\varepsilon^2}\right). \tag{3.101}$$

Για $q \in (0,1)$ το δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας φθίνει εκθετικά προς το 0 καθώς $\varepsilon \to 0^+$, επομένως για $q \in (0,1)$ είναι

$$\{\|b\|_\infty < \varepsilon\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \left\{\left\|\int_0^\cdot b(s)dB_s\right\|_\infty < \varepsilon^q\right\}. \tag{3.102}$$

Ο τύπος του Itô για την Z^2 δίνει την εξίσωση

$$Z_t^2 = Z_0^2 + 2\int_0^t Z_s a(s)ds + 2\int_0^t Z_s b(s)dB_s + \int_0^t |b(s)|^2 ds. \tag{3.103}$$

Έχουμε κάνει την υπόθεση $\|a\|_\alpha \in \cap_{p\geq1}L^p(\Omega)$, κατά συνέπεια $\|a\|_\infty \in \cap_{p\geq1}L^p(\Omega)$. Από το Παράδειγμα 3.3.4, η $\{\|a\|_\infty \leq \varepsilon^{-\frac{1}{4}}\}$ είναι σχεδόν αληθής, επομένως

$$\{\|Z\|_\infty < \varepsilon\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \left\{\left\|\int_0^\cdot Z_s a(s)ds\right\|_\infty \leq \varepsilon^{\frac{3}{4}}\right\}. \tag{3.104}$$

Με όμοιο συλλογισμό και σε συνδυασμό με την (3.102), έχουμε ότι

$$\{\|Z\|_\infty < \varepsilon\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \left\{\left\|\int_0^\cdot Z_s b(s)dB_s\right\|_\infty \leq \varepsilon^{\frac{2}{3}}\right\}. \tag{3.105}$$

Παρατηρούμε επίσης πως αν $s < r$ τότε $\{|X| < \varepsilon^r\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \{|X| < \varepsilon^s\}$.

Από τις πιο πάνω εκτιμήσεις και τη στοχαστική διαφορική εξίσωση για την Z^2, έχουμε ότι

$$\{\|Z\|_\infty < \varepsilon\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \left\{\int_0^1 |b(s)|^2 ds \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right\} \Longrightarrow \left\{\int_0^1 |b(s)| ds \leq \varepsilon^{\frac{1}{4}}\right\}, \tag{3.106}$$

όπου στη τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Άρα λοιπόν η $\|Z\|_\infty < \varepsilon$ σχεδόν συνεπάγεται την εκτίμηση $\int_0^1 |b(s)|ds \leq \varepsilon^{\frac{1}{4}}$. Τώρα το Λήμμα 3.3.5 με την επιλογή $f(t) = \int_0^t |b(s)|ds$, δίνει ότι

$$\|b\|_\infty \leq 8\max\left\{\int_0^1 |b(s)|ds, \left(\int_0^1 |b(s)|ds\right)^{\frac{1}{4}} \|b\|_\alpha^{\frac{3}{4}}\right\}. \tag{3.107}$$

Άρα

$$\|b\|_\infty \leq 8\max\left\{\int_0^1 |b(s)|ds, \left(\int_0^1 |b(s)|ds\right)^{\frac{1}{4}} \|b\|_\alpha^{\frac{3}{4}}\right\} \leq 8\max\left\{\varepsilon^{\frac{1}{4}}, \varepsilon^{\frac{1}{16}}\|b\|_\alpha^{\frac{3}{4}}\right\} \tag{3.108}$$

και επειδή $\|b\|_\alpha \in \cap_{p\geq1}L^p(\Omega)$, η $\{\|b\|_\alpha \leq \varepsilon^{-q}\}$ είναι σχεδόν αληθής για κάθε $q \in (0,1)$, άρα συνολικά η $\|Z\|_\infty < \varepsilon$ σχεδόν συνεπάγεται ότι

$$\|b\|_\infty \leq 8\max\left\{\varepsilon^{\frac{1}{16}}, \varepsilon^{\frac{1}{16}-q\frac{3}{4}}\right\}. \tag{3.109}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\{\|Z\|_\infty < \varepsilon\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \{\|b\|_\infty \leq \varepsilon^s\} \tag{3.110}$$

για $s \leq \frac{1}{17}$. Ας επιλέξουμε $s = \frac{1}{17}$. Τώρα λόγω της (3.102) το παραπάνω σχεδόν συνεπάγεται ότι $\left\{\|\int_0^\cdot b(s)dB_s\|_\infty \leq \varepsilon^{q\frac{1}{17}}\right\}$ για κάθε $q \in (0,1)$ και έτσι προκύπτει η σχεδόν συνεπαγωγή

$$\{\|Z\|_\infty < \varepsilon\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \left\{\left\|\int_0^\cdot b(s)dB_s\right\|_\infty \leq \varepsilon^{\frac{1}{18}}\right\}. \tag{3.111}$$

Χρησιμοποιούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση για την Z σε συνδυασμό με τις παραπάνω εκτιμήσεις και έχουμε την σχεδόν συνεπαγωγή

$$\{\|Z\|_\infty < \varepsilon\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \left\{\left\|\int_0^\cdot a(s)ds\right\|_\infty \leq \varepsilon^{\frac{1}{18}}\right\}. \tag{3.112}$$

Χρησιμοποιούμε ξανά το Λήμμα 3.3.5, αυτή τη φορά με την επιλογή $f(t) = \int_0^t a(s)ds$ και προκύπτει ότι

$$\{\|Z\|_\infty < \varepsilon\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \left\{\|a\|_\infty \leq \varepsilon^{\frac{1}{80}}\right\}, \tag{3.113}$$

συνεπώς έχουμε το ζητούμενο για $\ell = \frac{1}{80}$. □

Σημείωση. Επειδή οι συναρτήσεις $A, V_1, \ldots, V_d$ που εμφανίζονται στη στοχαστική διαφορική εξίσωση (3.79) έχουν φραγμένες μερικές παραγώγους κάθε τάξης, όλες οι ανελίξεις στη συνέχεια έχουν τον ίδιο βαθμό Hölder συνέχειας με την κίνηση Brown. Ειδικότερα θα είναι $\frac{1}{3}$−Hölder συνεχείς και θα έχουν κατάλληλες ιδιότητες ολοκληρωσιμότητας έτσι ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο λήμμα.

Απόδειξη για το Θεώρημα 3.3.4 *(με $t = 1$).* Έστω $x \in \mathbb{S}^{m-1}$ και U λείο διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^m$. Θεωρούμε τη στοχαστική ανέλιξη $Z_U(t) = \left\langle x, Y_t^{-1}U(X_t)\right\rangle$. Τότε είναι

$$\begin{aligned}
x^T C(1) x &= \sum_{j=1}^d \int_0^1 x^T Y_t^{-1} V_j(X_t) V_j(X_t)^T (Y_t^{-1})^T x dt \\
&= \sum_{j=1}^d \int_0^1 x^T Y_t^{-1} V_j(X_t) \left(x^T Y_t^{-1} V_j(X_t)\right)^T dt \\
&= \sum_{j=1}^d \int_0^1 x^T Y_t^{-1} V_j(X_t) x^T Y_t^{-1} V_j(X_t) dt \\
&= \sum_{j=1}^d \int_0^1 \left|Z_{V_j}(t)\right|^2 dt \\
&\geq \sum_{j=1}^d \left(\int_0^1 \left|Z_{V_j}(t)\right| dt\right)^2.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Από τον τύπο του Itô η $Y_t^{-1}U(X_t)$ ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} Y_t^{-1}U(X_t) = U(x_0) &+ \sum_{j=1}^{d}\int_0^t Y_s^{-1}\left(\partial U\cdot V_j - \partial V_j\cdot U\right)(X_s)dB_s^j \\ &+ \int_0^t Y_s^{-1}\left(\partial U\cdot A - \partial A\cdot U\right)(X_s)ds \\ &+ \int_0^t Y_s^{-1}\left(\partial V_j\cdot \partial V_j\cdot U\right)(X_s)ds \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\int_0^t Y_s^{-1}\partial^2 U(X_s)\left[V_j(X_s),V_j(X_s)\right]ds \\ &- \sum_{j=1}^{d}\int_0^t Y_s^{-1}\left(\partial V_j\cdot\partial U\cdot V_j\right)(X_s)ds. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $\partial U\cdot V_j - \partial V_j\cdot U = [V_j,U]$ και $\partial U\cdot A - \partial A\cdot U = [A,U]$. Με αρκετούς υπολογισμούς, έχουμε την εξίσωση

$$[V_0,U]+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}[V_j,[V_j,U]]-[A,U] = \sum_{j=1}^{d}\left(\partial V_j\cdot\partial V_j\cdot U + \frac{1}{2}\partial^2 U[V_j,V_j] - \partial V_j\cdot\partial U\cdot V_j\right). \tag{3.116}$$

Από αυτή την εξίσωση και την (3.115), έπεται ότι

$$d\left(Y_t^{-1}U(X_t)\right) = Y_t^{-1}\left([V_0,U]+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}[V_j,[V_j,U]]\right)(X_t)dt + Y_t^{-1}\sum_{j=1}^{d}[V_j,U]\,(X_t)dB_t^j, \tag{3.117}$$

άρα η Z_U ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dZ_U(t) = Z_{[V_0,U]+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}[V_j,[V_j,U]]}(t)dt + \sum_{j=1}^{d} Z_{[V_j,U]}(t)dB_t^j. \tag{3.118}$$

Θεωρούμε τώρα τα σύνολα S_k και τους διανυσματικούς χώρους $\mathscr{V}_k$ που εμφανίζονται στον Ορισμό 3.3.1, και ορίζουμε τα σύνολα S'_k και $\mathscr{V}'_k$ επαγωγικά ως εξής: $S'_0 = S_0$ και

$$S'_{k+1} = \left\{[V_j,U]\,, j=1,\ldots,d, U\in S'_k : [V_0,U]+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}[V_j,[V_j,U]]\in S'_k\right\}. \tag{3.119}$$

Για σταθεροποιημένο $y\in\mathbb{R}^m$, ορίζουμε $\mathscr{V}'_k(y) = \operatorname{span}\{U(y) : U\in S'_k\}$. Αυτή η αλλαγή γίνεται επειδή χρησιμοποιούμε στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις σε μορφή Itô αντί για μορφή Stratonovich. Το σημαντικό είναι πως $\mathscr{V}'_k(y) = \mathscr{V}_k(y)$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και $y\in\mathbb{R}^m$

Από το Λήμμα 3.3.6 και τη στοχαστική διαφορική εξίσωση για την Z_U, έπεται ότι

$$\{\|Z_U\|_\infty < \varepsilon\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \left\{\|Z_{[V_j,U]}\|_\infty < \varepsilon^\ell\right\}\cap\left\{\|Z_G\|_\infty < \varepsilon^\ell\right\}, \tag{3.120}$$

όπου $G = [V_0,U]+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}[V_j,[V_j,U]]$. Χρησιμοποιούμε ξανά το ίδιο επιχείρημα, αυτή τη φορά για τη στοχαστική διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η Z_G και έχουμε τη σχεδόν συνεπαγωγή

$$\{\|Z_U\|_\infty < \varepsilon\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \left\{\|Z_{[V_j,[V_k,U]]}\|_\infty < \varepsilon^{\ell^2}\right\} \tag{3.121}$$

άρα συνολικά έχουμε τη σχεδόν συνεπαγωγή

$$\{\|Z_U\|_\infty < \varepsilon\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \left\{\left\|Z_{[V_j,U]}\right\|_\infty < \varepsilon^{\ell^2}\right\} \tag{3.122}$$

για κάθε $j = 0, \ldots, d$.

Τώρα από το Λήμμα 3.3.5 και τη σχέση (3.114) έχουμε

$$\left\{x^T C(1)x < \varepsilon\right\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \left\{\|Z_{V_j}\|_\infty < \varepsilon^{\frac{1}{5}}\right\}. \tag{3.123}$$

Από αυτή τη σχεδόν συνεπαγωγή και την (3.122), προκύπτει επαγωγικά ότι

$$\left\{x^T C(1)x < \varepsilon\right\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \bigcap_{U \in \mathscr{V}'_k} \left\{\|Z_U\|_\infty \le \varepsilon^{\ell_k}\right\} \tag{3.124}$$

για κατάλληλη ακολουθία θετικών αριθμών $(\ell_k)_{k\ge 1}$. Αν $x_0 \in \mathbb{R}^m$ όπως στην (3.79), τότε από την συνθήκη του Hörmander υπάρχει κάποιο αρκετά μεγάλο $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mathscr{V}'_k(x_0) = \mathbb{R}^m$, οπότε μπορούμε να βρούμε $U \in \mathscr{V}'_k(x_0)$ τέτοιο ώστε $U(x_0) = x$. Τότε όμως $Z_U(0) = \langle x, x\rangle = 1$ συνεπώς

$$\bigcap_{U \in \mathscr{V}'_k} \left\{\|Z_U\|_\infty \le \varepsilon^{\ell_k}\right\} = \emptyset \tag{3.125}$$

και έτσι έχουμε την σχεδόν συνεπαγωγή

$$\left\{x^T C(1)x < \varepsilon\right\} \underset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \emptyset. \tag{3.126}$$

Αυτό σημαίνει πως η $\left\{x^T C(1)x < \varepsilon\right\}$ είναι σχεδόν ψευδής, οπότε έχουμε το ζητούμενο. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Κανονικές προσεγγίσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ότι ο λογισμός Malliavin αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο στην μελέτη των κανονικών προσεγγίσεων. Θα δούμε, πως σε συνδυασμό με την μέθοδο του Stein μπορούμε να έχουμε μία απόδειξη για το θεώρημα τέταρτης ροπής που απέδειξαν οι Nualart-Peccati στο [42] το 2005. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε είναι πιό σύγχρονη και συνδυάζει επιχειρήματα από την μέθοδο του Stein και το λογισμό Malliavin.

4.1 Πολλαπλό στοχαστικό ολοκλήρωμα ως προς τη κίνηση Brown

Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \sigma(B_t : t \geq 0), \mathbb{P})$ και $f \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$. όπου $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ και $q \in \mathbb{N}$. Στον Ορισμό 2.5.4 έχουμε δώσει νόημα στο ακόλουθο πολλαπλό στοχαστικό ολοκλήρωμα.

$$I_q^B(f) = \int_{\mathbb{R}_+^q} f(t_1, \ldots, t_q) dB_{t_1} \cdots dB_{t_q}$$

Μπορούμε επίσης να δώσουμε νόημα σε αυτό το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τη θεωρία Itô. Για να έχουμε προσαρμοσμένες ανελίξεις μέσα στα ολοκληρώματα, γράφουμε φορμαλιστικά

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^q} f(t_1, \ldots, t_q) dB_{t-1} \cdots dB_{t_q} &= \sum_{\sigma \in S_q} \int_{\mathbb{R}_+^q} f(t_1, \ldots, t_n) \mathbb{1}_{\{t_{\sigma(1)} > \cdots > t_{\sigma(q)}\}} dB_{t_1} \cdots dB_{t_q} \\ &= \sum_{\sigma \in S_q} \int_0^\infty dB_{t_1} \int_0^{t_1} dB_{t_2} \cdots \int_0^{t_{q-1}} dB_{t_q} f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(q)}).\end{aligned} \tag{4.1}$$

Για την περίπτωση της κίνησης Brown, μπορούμε λοιπόν να έχουμε τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός 4.1.1.

1. Έστω $q \geq 1$ ακέραιος αριθμός. Για $f \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$. ορίζουμε το $q-$πολλαπλό ολοκλήρωμα Wiener-Itô $I_q^B(f)$ ως την τυχαία μεταβλητή
$$I_q^B(f) = \sum_{\sigma \in S_q} \int_0^\infty dB_{t_1} \int_0^{t_1} dB_{t_2} \cdots \int_0^{t_{q-1}} dB_{t_q} f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(q)}). \tag{4.2}$$

2. Το σύνολο $\mathscr{H}_q^B = \{I_q^B(f) : f \in L^2(\mathbb{R}_+^q)\}$ θα λέγεται $q-$οστό χάος Wiener της B.

Στο παρακάτω θεώρημα συγκεντρώνουμε μερικές χρήσιμες ιδιότητες οι οποίες έπονται από τις αντίστοιχες, πιο γενικές σχέσεις που είδαμε στο κεφάλαιο 2.

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω $f \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$.*

1. *Αν η f είναι συμμετρική, δηλαδή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της S_q, τότε*
$$I_q^B(f) = q! \int_0^\infty dB_{t_1} \int_0^{t_1} dB_{t_2} \cdots \int_0^{t_{q-1}} dB_{t_q} f(t_1, \ldots, t_q) \tag{4.3}$$

2. *$I_q^B(f) = I_q^B(\tilde{f})$ όπου $\tilde{f}$ συμβολίζει τη συμμετρικοποίηση της f, δηλαδή*
$$\tilde{f}(t_1, \ldots, t_q) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(q)}). \tag{4.4}$$

3. *Για κάθε $p, q \geq 1$ και για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}_+^p), g \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$ ισχύουν οι σχέσεις*
$$\mathbb{E}[I_q^B(g)] = 0 \tag{4.5}$$
και
$$\mathbb{E}[I_p^B(f) I_q^B(g)] = \begin{cases} 0 & p \neq q \\ p! \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^p)} & p = q \end{cases} \tag{4.6}$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι ισχύει η ακόλουθη διάσπαση σε χάος Wiener
$$L^2(\Omega, \sigma(B), \mathbb{P}) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathscr{H}_q^B, \tag{4.7}$$
και κατά συνέπεια κάθε $F \in L^2(\Omega)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή $F = \mathbb{E}[F] + \sum_{q=1}^\infty I_q^B(f_q)$ όπου οι συναρτήσεις $f_q \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$ είναι συμμετρικές και καθορίζονται από την F.

Θεώρημα 4.1.2 (Nelson, 1973)**.** *Έστω $f \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$ όπου $q \geq 1$. Τότε για κάθε $r \geq 2$*
$$\mathbb{E}\left[|I_q^B(f)|^r\right] \leq ((r-1)^q q!)^{r/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^q)}^r < \infty. \tag{4.8}$$

Στην απόδειξη της παραπάνω πρότασης χρησιμοποιείται η υπερσυσταλότητα της ημιομάδας Ornstein-Uhlenbeck (για περισσότερα δείτε στο [36]).

Συστολές. Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρειαστούμε να δούμε την έννοια της $r-$συστολής (που είδαμε στον Ορισμό 2.5.5) σε ένα πιο γενικό πλαίσιο.

Έστω H ένας πραγματικός και διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Θεωρούμε τη βαθμωτή άλγεβρα

$$T(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n} \tag{4.9}$$

η οποία ονομάζεται *τανυστική άλγεβρα* του H. Οι χώροι $(H^{\otimes n} : n \in \mathbb{N})$ ονομάζονται βαθμοί της $T(H)$.

Έστω επίσης $\mathcal{J}$ το αμφίπλευρο ιδεώδες της $T(H)$ που παράγεται από τους τανυστές της μορφής $u \otimes v - v \otimes u$, με $u, v \in H$. Τότε ορίζουμε τη *συμμετρική άλγεβρα* $\mathrm{Sym}(H)$ ως $\mathrm{Sym}(H) = T(H)/\mathcal{J}$. Τότε είναι

$$\mathrm{Sym}(H) \simeq \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n}/(\mathcal{J} \cap H^{\otimes n}), \tag{4.10}$$

άρα η $\mathrm{Sym}(H)$ είναι επίσης μία βαθμωτή άλγεβρα, με βαθμούς $\mathrm{Sym}^n(H) = H^{\otimes n}/(\mathcal{J} \cap H^{\otimes n})$.

Θεωρούμε $(e_n : n \in \mathbb{N})$ ορθοκανονική βάση του H και $p, q \in \mathbb{N}$ με $1 \leq p \leq q$. Για θετικούς ακέραιους αριθμούς $m_1, \ldots, m_p$ και $k_1, \ldots, k_q$και $r = 0, 1, \ldots, p$, ορίζουμε την $r-$συστολή

$$(e_{m_1} \otimes \cdots \otimes e_{m_p}) \otimes_r (e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_q})$$

των στοιχείων $e_{m_1} \otimes \cdots \otimes e_{m_p}$ και $e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_q}$ ως

$$(e_{m_1} \otimes \cdots \otimes e_{m_p}) \otimes_0 (e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_q}) = e_{m_1} \otimes \cdots \otimes e_{m_p} \otimes e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_q} \tag{4.11}$$

και για $r = 1, \ldots, p$ ως

$$(e_{m_1} \otimes \cdots \otimes e_{m_p}) \otimes_r (e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_q}) = \left(\prod_{\ell=1}^{r} \langle e_{m_\ell}, e_{k_\ell} \rangle_H \right) e_{m_{r+1}} \otimes \cdots e_{m_p} \otimes e_{k_{r+1}} \otimes \cdots \otimes e_{k_q}. \tag{4.12}$$

Θέλουμε τώρα να ορίσουμε την $r-$συστολή $f \otimes_r g$ δύο στοιχείων f, g που ανήκουν στους βαθμούς $H^{\otimes p}$ και $H^{\otimes q}$ αντίστοιχα. Υπάρχουν δύο μονοσήμαντα ορισμένες ακολουθίες $(a_{m_1,\ldots,m_p} : m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{N})$ και $(b_{k_1,\ldots,k_q} : k_1, \ldots, k_q \in \mathbb{N})$ τέτοιες ώστε

$$\sum_{m_1,\ldots,m_p=1}^{\infty} a^2_{m_1,\ldots,m_p} < \infty \tag{4.13}$$

$$\sum_{k_1,\ldots,k_q=1}^{\infty} b^2_{k_1,\ldots,k_q} < \infty, \tag{4.14}$$

και επιπλέον

$$f = \sum_{m_1,\ldots,m_p=1}^{\infty} a_{m_1,\ldots,m_p} e_{m_1} \otimes \cdots \otimes e_{m_p} \tag{4.15}$$

και

$$g = \sum_{k_1,\ldots,k_q=1}^{\infty} b_{k_1,\ldots,k_q} e_{k_1} \otimes \cdots e_{k_q}. \tag{4.16}$$

Για $r = 0, 1, \ldots, p$ ορίζουμε την $r-$συστολή $f \otimes_r g$ ως

$$f \otimes_r g = \sum_{m_1,\ldots,m_p=1}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_q=1}^{\infty} a_{m_1,\ldots,m_p} b_{k_1,\ldots,k_q} (e_{m_1} \otimes \cdots \otimes e_{m_p}) \otimes_r (e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_q}). \tag{4.17}$$

Στην περίπτωση που οι f, g είναι συμμετρικές, δηλαδή $f \in \mathrm{Sym}^p(H)$ και $g \in \mathrm{Sym}^q(H)$, είναι

$$f \otimes_r g = \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_r=1}^{\infty} \langle f, e_{\ell_1} \otimes \cdots e_{\ell_r} \rangle_{H^{\otimes r}} \otimes \langle g, e_{\ell_1} \otimes \cdots e_{\ell_r} \rangle_{H^{\otimes r}} . \tag{4.18}$$

Όταν $f \in \mathrm{Sym}^p(H)$ και $g \in \mathrm{Sym}^q(H)$, μπορούμε να γράψουμε τη συστολή $f \otimes_r g$ στην παραπάνω συμπαγή μορφή, καθώς δεν παίζει ρόλο ποιο $r-$τμήματα των τανυστών που παράγουν τις f, g χρησιμοποιούμε στα παραπάνω εσωτερικά γινόμενα.

Στην περίπτωση που $H = L^2(\mathbb{R}_+)$, η εξίσωση (4.17) λαμβάνει τη μορφή που είδαμε στον Ορισμό 2.5.5.

Πιο ειδικά, θεωρούμε $p, q \geq 1$ ακέραιους και $r \in \{1, \ldots, p \wedge q\}$. Έστω επίσης $f \in L^2(\mathbb{R}_+^p)$ και $g \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$. Τότε η $r-$συστολή $f \otimes_r g$ είναι το στοιχείο του $L^2(\mathbb{R}_+^{p+q-2r})$ που δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}(f \otimes_r g)(t_1, \ldots, t_{p+q-2r}) = \int_{\mathbb{R}_+^r} & f(t_1, \ldots, t_{p-r}, x_1, \ldots, x_r) \cdot \\ & g(t_{p-r+1}, \ldots, t_{p+q-2r}, x_1, \ldots, x_r) dx_1 \cdots dx_r.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Επίσης είναι $(f \otimes_0 g)(t_1, \ldots, t_{p+q}) = f(t_1, \ldots, t_p) g(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q})$.

Παρατηρήστε ότι η $r-$συστολή $f \otimes_r g$ είναι πράγματι στοιχείο του $L^2(\mathbb{R}_+^{p+q-2})$ αφού από την ανισότητα Cauchy-Schwarz είναι

$$\|f \otimes_r g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{p+q-2})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^p)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^q)}. \tag{4.20}$$

Για τα πολλαπλά ολοκληρώματα Wiener-Itô ισχύει ο ακόλουθος σημαντικός πολλαπλασιαστικός τύπος.

Θεώρημα 4.1.3 (Shigekawa, 1980). *Έστω $p, q \geq 1$ ακέραιοι και $f \in L^2(\mathbb{R}_+^p), g \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$ δύο συμμετρικές συναρτήσεις. Τότε*

$$I_p^B(f) \cdot I_q^B(g) = \sum_{r=0}^{p \wedge q} r! \binom{p}{r} \binom{q}{r} I_{p+q-2r}^B (f \tilde{\otimes}_r g). \tag{4.21}$$

Το παρακάτω θεώρημα έπεται από το γενικότερο Θεώρημα 2.5.6.

Θεώρημα 4.1.4. *Για $m \geq 1$ ακέραιο, η τυχαία μεταβλητή F, με ανάπτυγμα σε χάος Wiener $F = \mathbb{E}[F] + \sum_{q=1}^{\infty} I_q^B(f_q)$, ανήκει στο Γκαουσιανό χώρο Sobolev $\mathbb{D}^{m,2}$ αν*

$$\sum_{q=1}^{\infty} q^m q! \|f_q\|_{L^2(\mathbb{R}_+^q)}^2 < \infty. \tag{4.22}$$

Όταν ισχύει η παραπάνω σχέση για $m = 1$, τότε η παράγωγος Malliavin $DF = (D_t F)_{t \geq 0}$ είναι το στοιχείο του $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ που δίνεται από τον τύπο

$$D_t F = \sum_{q=1}^{\infty} q I_{q-1}^B (f_q(\cdot, t)) \tag{4.23}$$

και

$$\mathbb{E}\left[\|DF\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2\right] = \sum_{q=1}^{\infty} q q! \|f_q\|_{L^2(\mathbb{R}_+^q)}^2. \tag{4.24}$$

4.2 Μέθοδος Stein και λογισμός Malliavin

Αυτό που ονομάζεται μέθοδος Stein, είναι ένα σύνολο ιδεών που αναπτύχθηκαν από τον Charles Stein το 1972 για προσεγγίσεις κανονικών κατανομών.

Λήμμα 4.2.1 (Stein). *Έστω X τυχαία μεταβλητή, με $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Τότε $X \sim N(0,1)$ αν και μόνο αν*

$$\mathbb{E}\left[f'(X) - Xf(X)\right] = 0 \quad \forall\, f \in C_b^1(\mathbb{R}). \tag{4.25}$$

Απόδειξη. Έστω ότι $X \sim N(0,1)$ και $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ η πυκνότητά της. Τότε για κάθε $f \in C_b^1(\mathbb{R})$ έχουμε

$$\mathbb{E}[f'(X)] = \int_{\mathbb{R}} f'(x)p(x)dx = \int_{\mathbb{R}} xf(x)p(x)dx = \mathbb{E}[Xf(X)]$$

και η (4.25) έπεται.

Έστω τώρα ότι ισχύει η (4.25). Η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι η $\phi_X = \mathbb{E}[e^{iuX}]$. Υπολογίζουμε

$$\phi_X'(u) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi_X(u+t) - \phi_X(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{e^{itX}-1}{t}\right)e^{iuX}\right]$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{t\to 0} \frac{e^{itX}-1}{t} = iX$ και

$$|e^{itX}-1|^2 = (\cos tX - 1)^2 + \sin^2 tX = 2(1-\cos tX) = 4\sin^2\left(\frac{tX}{2}\right) \leq (tX)^2, \tag{4.26}$$

οπότε $\left|\frac{e^{itX}-1}{t}\right| \leq |X|$. Όμως απ' την υπόθεση $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ οπότε εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και έχουμε ότι $\phi_X'(u) = \mathbb{E}\left[iXe^{iuX}\right]$. Από την (4.25) είναι $\mathbb{E}\left[Xe^{iuX}\right] = i\mathbb{E}\left[ue^{iuX}\right]$ οπότε καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$\phi_X'(u) = -u\phi_X(u) \qquad \phi_X(0) = 1 \tag{4.27}$$

που έχει λύση την $\phi_X(u) = e^{-u^2/2}$. Από το θεώρημα μοναδικότητας $X \sim N(0,1)$. □

Η ιδέα για κανονικές προσεγγίσεις που υπάρχει πίσω από αυτό το λήμμα είναι η εξής. Αν η μέση τιμή $\mathbb{E}\left[f'(X) - Xf(X)\right]$ είναι μικρή για αρκετές συναρτήσεις f, τότε αναμένουμε ότι η κατανομή της X θα είναι κοντά σε κανονική κατανομή.

Ορισμός 4.2.1 (Εξίσωση του Stein). Έστω $X \sim N(0,1)$ και $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση με $\mathbb{E}[|h(X)|] < \infty$. Η εξίσωση Stein που αντιστοιχεί στη συνάρτηση h είναι η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$f_h'(x) - xf_h(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(X)] \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.28}$$

Πρόταση 4.2.1. *Η μοναδική, απόλυτα συνεχής, διαφορίσιμη λύση f_h της εξίσωσης του Stein που ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2/2} f_h(x) = 0 \tag{4.29}$$

είναι η

$$f_h(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{x} (h(y) - \mathbb{E}[h(X)])e^{-y^2/2}dy. \tag{4.30}$$

Απόδειξη. Η εξίσωση (4.28) μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$e^{x^2/2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}f_h(x)\right) = h(x) - \mathbb{E}[h(X)]$$

και επειδή $\mathbb{E}\left[|h(X)|\right] < \infty$, η λύση f_h θα έχει την μορφή

$$f_h(x) = ce^{x^2/2} + e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x}\left(h(y) - \mathbb{E}[h(X)]\right)e^{-y^2/2}dy$$

για κάποια πραγματική σταθερά c.

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{x}(h(y) - \mathbb{E}[h(X)])e^{-y^2/2}dy = 0 \tag{4.31}$$

οπότε η συνθήκη (4.29) ικανοποιείται αν και μόνο άν $c = 0$, και το ζητούμενο έπεται. □

Πρόταση 4.2.2. *Έστω $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε η λύση της εξίσωσης του Stein f_h που δίνεται από την (4.30), ικανοποιεί τις εκτιμήσεις*

$$\|f_h\|_\infty \le \frac{\pi}{2} \qquad \|f_h'\|_\infty \le 2. \tag{4.32}$$

Απόδειξη. Όπως είδαμε νωρίτερα $\int_{-\infty}^{\infty}(h(y) - \mathbb{E}[h(X)])e^{-y^2/2}dy = 0$ άρα

$$\int_{-\infty}^{x}(h(y) - \mathbb{E}[h(X)])e^{-y^2/2}dy = -\int_{x}^{\infty}(h(y) - \mathbb{E}[h(X)])e^{-y^2/2}dy. \tag{4.33}$$

Επειδή $X \sim N(0,1)$ και $h(x) \in [0,1]\ \forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $|h(y) - \mathbb{E}[h(X)]| \le 1$. Από την (4.30) και την (4.33) έχουμε ότι

$$|f_h(x)| \le e^{x^2/2}\int_{|x|}^{\infty}e^{-y^2/2}dy \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

διότι η συνάρτηση $e^{x^2/2}\int_{|x|}^{\infty}e^{-y^2/2}dy$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο 0.

Για τη δεύτερη εκτίμηση γράφουμε

$$f_h'(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(X)] - xe^{x^2/2}\int_{x}^{\infty}(h(y) - \mathbb{E}[h(X)])e^{-y^2/2}dy,$$

άρα

$$|f_h'(x)| \le 1 + |x|e^{x^2/2}\int_{|x|}^{\infty}e^{-y^2/2}dy. \tag{4.34}$$

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση $|x|e^{x^2/2}\int_{|x|}^{\infty}e^{-y^2/2}dy$ είναι άρτια, οπότε για να βρούμε την μέγιστη τιμή της αρκεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = xe^{x^2/2}\int_{x}^{\infty}e^{-y^2/2}dy, x \ge 0$. Έχουμε

$$g(x) = e^{x^2/2}\int_{x}^{\infty}xe^{-y^2/2}dy \le e^{x^2/2}\int_{x}^{\infty}ye^{-y^2/2}dy = e^{x^2/2}\int_{x}^{\infty}(-e^{-y^2/2})'dy = e^{x^2/2}\cdot e^{-x^2/2} = 1.$$

Από την (4.34) έπεται λοιπόν ότι $\|f_h'\|_\infty \le 2$. □

Κύμανση μέτρων πιθανότητας. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Stein για να πάρουμε ένα φράγμα για την κύμανση ενός μέτρου πιθανότητας ν από τη τυπική κανονική γ.

Ορισμός 4.2.2. Για δύο μέτρα πιθανότητας ν_1, ν_2 του $\mathbb{R}$, ορίζουμε την κύμανσή τους ως :

$$d_{TV}(\nu_1, \nu_2) = \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |\nu_1(B) - \nu_2(B)|.$$

Θα θεωρήσουμε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και $(Y_n), Y$ τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ με πραγματικές τιμές. Υπενθυμίζουμε ότι η συνθήκη $d_{TV}(\mathbb{P} \circ Y_n^{-1}, \mathbb{P} \circ Y^{-1}) \to 0$ είναι ισχυρότερη από τη σύγκλιση κατά νόμο.

Πρόταση 4.2.3. *Έστω ν ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τον χώρο συναρτήσεων*

$$O_{TV} = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \ : \|f\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} \quad \textit{και} \quad \|f'\|_\infty \leq 2\}.$$

Τότε έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση

$$d_{TV}(\nu, \gamma) \leq \sup_{f \in O_{TV}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f'(x) - xf(x)\nu(dx) \right|. \tag{4.35}$$

Απόδειξη. Έστω $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση και f_h η λύση της εξίσωσης του Stein που αντιστοιχεί στην h. Η f_h ικανοποιεί την εξίσωση

$$h(x) - \mathbb{E}[h(X)] = f_h'(x) - xf_h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{4.36}$$

όπου $X \sim N(0,1)$.Από αυτή την εξίσωση βλέπουμε ότι η f_h έχει συνεχή παράγωγο. Ολοκληρώνουμε τώρα την εξίσωση (4.36) ως προς το μέτρο πιθανότητας ν και έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} h d\nu - \mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} (f'(x) - xf(x)\nu(dx)$$

άρα

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h d\nu - \int_{-\infty}^{\infty} h d\gamma \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f'(x) - xf(x)\nu(dx) \right| \leq \sup_{f \in O_{TV}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f'(x) - xf(x)\nu(dx) \right|.$$

Αν τώρα θεωρήσουμε πως η $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ είναι μετρήσιμη , τότε μπορούμε να την προσεγγίσουμε σχεδόν παντού ως προς το μέτρο $\nu + \gamma$ με συνεχείς συναρτήσεις. Αν επιλέξουμε $h = \mathbb{1}_B$, όπου $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ τότε από τα παραπάνω θα έχουμε το ζητούμενο. □

Έστω $(B_t)_{t \geq 0}$ τυπική κίνηση Brown ορισμένη στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Έστω επίσης $H = L^2(\mathbb{R}_+)$. Το ακόλουθο λήμμα συνδέει τον λογισμό Malliavin με τη μέθοδο Stein.

Λήμμα 4.2.2 (Nourdin-Peccati, 2009). *Έστω $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ τέτοια ώστε $F = \delta(u)$ για κάποιο $u \in \operatorname{Dom} \delta$. Τότε*

$$d_{TV}(\mathbb{P}^F, \gamma) \leq 2\mathbb{E}\left[|1 - \langle DF, u \rangle_H|\right]. \tag{4.37}$$

Αν $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ τέτοια ώστε $\mathbb{E}F = 0$ τότε

$$d_{TV}(\mathbb{P}^F, \gamma) \leq 2\mathbb{E}\left[|1 - \langle DF, -DL^{-1}F \rangle_H|\right]. \tag{4.38}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε την (4.37). Από την (4.35) είναι

$$d_{TV}(\mathbb{P}^F, \gamma) \leq \sup_{\phi \in O_{TV}} \left| \mathbb{E}\left[\phi'(F) - \phi(F)F\right] \right|. \tag{4.39}$$

Θεωρούμε τώρα $\phi \in O_{TV}$ και γράφουμε

$$\mathbb{E}[\phi(F)F] = \mathbb{E}[\phi(F)\delta(u)] = \mathbb{E}[\langle D\phi(F), u\rangle_H] = \mathbb{E}[\phi'(F)\langle DF, u\rangle_H]. \tag{4.40}$$

Άρα

$$|\mathbb{E}[\phi'(F)] - \mathbb{E}[\phi(F)F]| = |\mathbb{E}[\phi'(F)(1 - \langle DF, u\rangle_H)]| \leq 2\mathbb{E}[|1 - \langle DF, u\rangle_H)|]. \tag{4.41}$$

Από την (4.39) και τον παραπάνω υπολογισμό, έπεται ότι ισχύει η (4.37).

Αν τώρα $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ τέτοια ώστε $\mathbb{E}F = 0$ τότε $F = LL^{-1}F$ όπου L ο τελεστής Ornstein-Uhlenbeck (δείτε το Παράδειγμα 2.4.1). Τότε

$$F = LL^{-1}F = -\delta DL^{-1}F = \delta(-DL^{-1}F). \tag{4.42}$$

Με την επιλογή $u = -DL^{-1}F$ στην (4.37) βλέπουμε ότι έπεται η (4.38). □

Λήμμα 4.2.3. *Έστω $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ τέτοια ώστε $F = \delta(u)$ για κάποιο $u \in \operatorname{Dom}\delta$ και $\mathbb{E}[F^2] = \sigma^2 > 0$. Θέτουμε γ_σ να είναι το μέτρο πιθανότητας $N(0, \sigma^2)$. Τότε*

$$d_{TV}(\mathbb{P}^F, \gamma_\sigma) \leq \frac{2}{\sigma^2}\mathbb{E}\left[|\sigma^2 - \langle DF, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}|\right]. \tag{4.43}$$

Απόδειξη. Με τη βοήθεια του προηγούμενου λήμματος έχουμε

$$\begin{aligned} d_{TV}(\mathbb{P}^F, \gamma_\sigma) = d_{TV}(\mathbb{P}^{\frac{1}{\sigma}F}, \gamma) &\leq 2\mathbb{E}\left[\left|1 - \left\langle D\left(\frac{1}{\sigma}F\right), \frac{1}{\sigma}u\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right|\right] \\ &= \frac{2}{\sigma^2}\mathbb{E}\left[|\sigma^2 - \langle DF, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}|\right]. \end{aligned} \tag{4.44}$$

□

4.3 Το θεώρημα τέταρτης ροπής

Λήμμα 4.3.1. *Έστω $q \geq 2$ θετικός ακέραιος αριθμός και $F \in \mathscr{H}_q^B$ και $\mathbb{E}[F^2] = \sigma^2$. Τότε*

$$d_{TV}(\mathbb{P}^F, \gamma_\sigma) \leq \frac{2}{q\sigma^2}\sqrt{\operatorname{Var}(\|DF\|_{L^2(\mathbb{R}_+)})}. \tag{4.45}$$

Απόδειξη. Επειδή $F \in \mathscr{H}_q^B$ υπάρχει $f \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$ συμμετρική συνάρτηση με $F = I_q^B(f)$. Απο τις σχέσεις ορθογωνιότητας έχουμε ότι $\sigma^2 = \mathbb{E}[I_q^B(f)^2] = q!\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^q)}$. Επίσης

$$\mathbb{E}\left[\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right] = qq!\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^q)},$$

οπότε $\mathbb{E}\left[\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right] = q\sigma^2$. Επιπλέον $L^{-1}F = -\frac{1}{q}F$ αφού $F \in \mathscr{H}_q^B$. Χρησιμοποιούμε το προηγούμενο λήμμα με $u = -DL^{-1}F$ και επειδή $\delta(u) = F$ έχουμε

$$\begin{aligned} d_{TV}(\mathbb{P}^F, \gamma_\sigma) &\leq \frac{2}{\sigma^2}\mathbb{E}\left[|\sigma^2 - \langle DF, -DL^{-1}F\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}|\right] \\ &= \frac{2}{\sigma^2}\mathbb{E}\left[|\sigma^2 - \frac{1}{q}\langle DF, DF\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}|\right] \\ &= \frac{2}{q\sigma^2}\mathbb{E}\left[|q\sigma^2 - \|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}|\right] \\ &\leq \frac{2}{q\sigma^2}\sqrt{\mathrm{Var}(\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)})}, \end{aligned} \tag{4.46}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz. □

Λήμμα 4.3.2. *Έστω $q \geq 2$ ακέραιος και $F = I_q^B(f) \in \mathscr{H}_q$ όπου $f \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$ συμμετρική συνάρτηση. Θέτουμε $\sigma^2 = \mathbb{E}[F^2]$ όπως πριν*

Τότε

$$\mathbb{E}\left[\left(\sigma^2 - \frac{1}{q}\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right)^2\right] = \sum_{r=1}^{q-1}\frac{r^2}{q^2}(r!)^2\binom{q}{r}^4(2q-2r)!\|f\tilde{\otimes}_r f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{(2q-2r)})}. \tag{4.47}$$

Απόδειξη. Για κάθε $t \geq 0$ είναι $D_tF = qI_{q-1}^B(f(\cdot,t))$ οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{q}\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} &= q\int_0^\infty \left(I_{q-1}^B(f(\cdot,t))\right)^2 dt \\ &= q\int_0^\infty \sum_{r=0}^{q-1} r!\binom{q-1}{r}^2 I_{2q-2-2r}^B\left(f(\cdot,t)\tilde{\otimes}_r f(\cdot,t)\right)dt \\ &= q\int_0^\infty \sum_{r=0}^{q-1} r!\binom{q-1}{r}^2 I_{2q-2-2r}^B\left(f(\cdot,t)\otimes_r f(\cdot,t)\right)dt \\ &= q\sum_{r=0}^{q-1} r!\binom{q-1}{r}^2 I_{2q-2-2r}^B\left(\int_0^\infty f(\cdot,t)\otimes_r f(\cdot,t)dt\right) \\ &= q\sum_{r=0}^{q-1} r!\binom{q-1}{r}^2 I_{2q-2-2r}^B\left(f\otimes_{r+1} f\right) \\ &= q\sum_{r=1}^{q}(r-1)!\binom{q-1}{r-1}^2 I_{2q-2r}^B(f\otimes_r f) \\ &= q!\|f_q\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^q)} + q\sum_{r=1}^{q-1}(r-1)!\binom{q-1}{r-1}^2 I_{2q-2r}^B(f\otimes_r f), \end{aligned} \tag{4.48}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον πολλαπλασιαστικό τύπο του Shigekawa. Λόγω της σχέσης ορθογωνιότητας είναι $\sigma^2 = \mathbb{E}[F^2] = q!\|f_q\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^q)}$, άρα λοιπόν

$$\sigma^2 - \frac{1}{q}\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} = -q\sum_{r=1}^{q-1}(r-1)!\binom{q-1}{r-1}^2 I_{2q-2r}^B(f\otimes_r f). \tag{4.49}$$

Υψώνουμε αυτή τη σχέση στη δευτέρα, παίρνουμε μέσες τιμές και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις ορθογωνιότητας. Έτσι έπεται η (4.47). □

Λήμμα 4.3.3. *Έστω $q \geq 2$ ακέραιος και $F = I_q^B(f) \in \mathscr{H}_q$ όπου $f \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$ συμμετρική συνάρτηση. Τότε*

$$\mathbb{E}[F^4] - 3\sigma^4 = \frac{3}{q}\sum_{r=1}^{q-1} r(r!)^2 \binom{q}{r}^4 (2q-2r)! \|f\tilde{\otimes}_r f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})} \tag{4.50}$$

$$= \sum_{r=1}^{q-1}(q!)^2\binom{q}{r}^2 \left\{ \|f \otimes_r f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})} + \binom{2q-2r}{q-r}\|f\tilde{\otimes}_r f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})} \right\}. \tag{4.51}$$

Απόδειξη. Επειδή $\mathbb{E}[F] = 0$ είναι $F = -\delta DL^{-1}F$ και από το Θεώρημα Nelson 4.1.2 $\mathbb{E}[F^4] < \infty$. Γράφουμε

$$\mathbb{E}[F^4] = \mathbb{E}[F \cdot F^3] = \mathbb{E}\left[(-\delta DL^{-1}F)\cdot F^3\right] = \mathbb{E}\left[\langle -DL^{-1}F, D(F^3)\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right]. \tag{4.52}$$

Όμως $-L^{-1}F = \frac{1}{q}F$ και από το Θεώρημα Nelson 4.1.2 και τον κανόνα της αλυσίδας 2.2.5, έχουμε ότι $D(F^3) = 3F^2DF$. Άρα

$$\mathbb{E}[F^4] = \mathbb{E}\left[\langle \frac{1}{q}DF, 3F^2DF\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right] = \frac{3}{q}\mathbb{E}\left[F^2\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right]. \tag{4.53}$$

Από τον τύπο πολλαπλασιασμού του Shigekawa έχουμε ότι

$$F^2 = I_q^B(f)^2 = \sum_{r=0}^{q} r!\binom{q}{r}^2 I^B_{2q-2r}(f\tilde{\otimes}_r f) = q!\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^q)} + \sum_{r=0}^{q-1} r!\binom{q}{r}^2 I^B_{2q-2r}(f\tilde{\otimes}_r f). \tag{4.54}$$

Από την εξίσωση (4.48) έχουμε ότι

$$\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} = qq!\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^q)} + q^2\sum_{r=1}^{q-1}(r-1)!\binom{q-1}{r-1}^2 I^B_{2q-2r}(f\tilde{\otimes}_r f). \tag{4.55}$$

Συνδυάζουμε αυτή την εξίσωση με τις (4.53), (4.54) και έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F^4] &= \frac{3}{q}\mathbb{E}\left[F^2\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right] \\ &= 3\sigma^4 + \frac{3}{q}\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{s=0}^{q-1} q^2(r-1)!\binom{q-1}{r-1}^2 s!\binom{q}{s}^2\mathbb{E}\left[I^B_{2q-2s}(f\tilde{\otimes}_s f)I^B_{2q-2r}(f\tilde{\otimes}_r f)\right] \\ &= 3\sigma^4 + \frac{3}{q}\sum_{r=1}^{q-1} r(r!)^2\binom{q}{r}^4(2q-2r)!\|f\tilde{\otimes}_r f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})},\end{aligned} \tag{4.56}$$

το οποίο αποδεικνύει την (4.50).

Προχωράμε τώρα στην απόδειξη της (4.51). Έστω $\sigma \in S_{2q}$. Αν $r \in \{0,\ldots,q\}$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου $\{\sigma(1),\ldots,\sigma(q)\} \cap \{1,\ldots,q\}$ (γράφουμε $|\{\sigma(1),\ldots,\sigma(q)\} \cap \{1,\ldots,q\}| = r$) τότε το σύνολο $\{\sigma(q+1),\ldots,\sigma(2q)\} \cap \{q+1,\ldots,2q\}$ έχει επίσης r στοιχεία και έχουμε

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}_+^{2q}} f(t_1,\ldots,t_q)f(t_{q+1},\ldots,t_{2q})f(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(q)})f(t_{\sigma(q+1)},\ldots,t_{\sigma(2q)})dt_1\cdots dt_{2q} \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}_+^{2q-2r}} (f\otimes_r f)(x_1,\ldots,x_{2q-2r})^2 dx_1\cdots dx_{2q-2r} \\ &\qquad = \|f\otimes_r f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})}.\end{aligned} \tag{4.57}$$

Η συμμετρικοποίηση της $f \otimes f$ είναι

$$f\tilde{\otimes} f(t_1, \dots, t_{2q}) = \frac{1}{(2q)!} \sum_{\sigma \in S_{2q}} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(q)}) f(t_{\sigma(q+1)}, \dots, t_{\sigma(2q)}) \tag{4.58}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\|f\tilde{\otimes} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2q}_+)} &= \frac{1}{(2q)!^2} \sum_{\sigma, \sigma' \in S_{2q}} \int_{\mathbb{R}^{2q}_+} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(q)}) f(t_{\sigma(q+1)}, \dots, t_{\sigma(2q)}) \\
&\times f(t_{\sigma'(1)}, \dots, t_{\sigma'(q)}) f(t_{\sigma'(q+1)}, \dots, t_{\sigma'(2q)})\, dt_1 \cdots dt_{2q} \\
&= \frac{1}{(2q)!} \sum_{\sigma \in S_{2q}} \int_{\mathbb{R}^{2q}_+} f(t_1, \dots t_q) f(t_{q+1}, \dots, t_{2q}) \\
&\times f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(q)}) f(t_{\sigma(q+1)}, \dots, t_{\sigma(2q)})\, dt_1 \cdots dt_{2q} \\
&= \frac{1}{(2q)!} \sum_{r=0}^{q} \sum_{\substack{\sigma \in S_{2q} \\ |\{\sigma(1), \dots, \sigma(q)\} \cap \{1, \dots, q\}| = r}} \int_{\mathbb{R}^{2q}_+} f(t_1, \dots t_q) \\
&\times f(t_{q+1}, \dots, t_{2q}) f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(q)}) f(t_{\sigma(q+1)}, \dots, t_{\sigma(2q)})\, dt_1 \cdots dt_{2q}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Έστω τώρα $r \in \{0, 1, \dots, q\}$ σταθερό. Θα μετρήσουμε τον αριθμό των μεταθέσεων $\sigma \in S_{2q}$ οι οποίες έχουν την ιδιότητα

$$|\{\sigma(1), \dots, \sigma(q)\} \cap \{1, \dots, q\}| = r.$$

Κάθε τέτοια μετάθεση κατασκευάζεται ως εξής:

Βήμα 1. Επιλέγουμε r στοιχεία $u_1, \dots, u_r$ του $\{1, \dots, q\}$.

Βήμα 2. Επιλέγουμε $q - r$ στοιχεία $u_{r+1}, \dots, u_q$ του $\{q + 1, \dots, 2q\}$.

Βήμα 3. Επιλέγουμε $1 - 1$ και επί απεικόνιση $\{1, \dots, q\} \to \{u_1, \dots, u_q\}$.

Βήμα 4. Επιλέγουμε $1 - 1$ και επί απεικόνιση $\{q + 1, \dots, 2q\} \to \{1, \dots, 2q\} \setminus \{u_1, \dots, u_q\}$.

Στο πρώτο βήμα έχουμε $\binom{q}{r}$ τρόπους επιλογής, στο δεύτερο έχουμε $\binom{q}{q-r} = \binom{q}{r}$ τρόπους επιλογής, ενώ στα βήματα 3 και 4 έχουμε $q!$ τρόπους επιλογής. Βλέπουμε λοιπόν πως οι ζητούμενες μεταθέσεις $\sigma \in S_{2q}$ είναι σε πλήθος $(q!)^2 \binom{q}{r}^2$.

Από τις εξισώσεις (4.57) και (4.59) έχουμε ότι

$$(2q)! \|f\tilde{\otimes} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2q}_+)} = 2(q!)^2 \|f\|^4_{L^2(\mathbb{R}^q_+)} + (q!)^2 \sum_{r=1}^{q-1} \binom{q}{r}^2 \|f \otimes_r f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2q-2r}_+)}. \tag{4.60}$$

Οι σχέσεις ορθογωνιότητας σε συνδυασμό με την εξίσωση (4.54) , μας δίνουν

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F^4] &= \sum_{r=0}^{q} (r!)^2 \binom{q}{r}^4 (2q - 2r)! \|f\tilde{\otimes}_r f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2q-2r}_+)} \\
&= (2q)! \|f\tilde{\otimes} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2q}_+)} + (q!)^2 \|f\|^4_{L^2(\mathbb{R}^q_+)} \\
&+ \sum_{r=1}^{q-1} (r!)^2 \binom{q}{r}^4 (2q - 2r)! \|f\tilde{\otimes}_r f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2q-2r}_+)}.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Επειδή $\sigma^4 = \mathbb{E}[F^2]^2 = (q!)^2 \|f\|^4_{L^2(\mathbb{R}^q_+)}$ η προς απόδειξη εξίσωση (4.51) έπεται από τις (4.60) και (4.61). $\square$

Η μέθοδος του Stein σε συνδυασμό με τεχνικές από τον λογισμό Malliavin οδήγησαν στις παραπάνω προτάσεις, οι οποίες αποδεικνύουν αμέσως την ακόλουθη σημαντική εκτίμηση.

Πρόταση 4.3.1. *Έστω $q \geq 2$ ακέραιος αριθμός και $F \in \mathscr{H}_q$. Τότε*

$$\operatorname{Var}\left(\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right) \leq \frac{(q-1)q}{3}\left(\mathbb{E}[F^4] - 3\sigma^4\right) \leq (q-1)\operatorname{Var}\left(\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right). \tag{4.62}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.3.2 είναι

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right) &= \sum_{r=1}^{q-1} r^2 (r!)^2 \binom{q}{r}^4 (2q-2r)! \|f\tilde{\otimes}_r f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})} \\ &\leq (q-1)\sum_{r=1}^{q-1} r (r!)^2 \binom{q}{r}^4 (2q-2r)! \|f\tilde{\otimes}_r f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})} \\ &= \frac{(q-1)q}{3}\left(\mathbb{E}[F^4] - 3\sigma^4\right),\end{aligned} \tag{4.63}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 4.3.3.

Επίσης $\frac{(q-1)q}{3}\left(\mathbb{E}[F^4] - 3\sigma^4\right) \leq (q-1)\operatorname{Var}\left(\|DF\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right)$ το οποίο προκύπτει χρησιμοποιώντας την ανισότητα $r \leq r^2$ για $r \geq 1$ στα αθροίσματα που εμφανίζονται και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Πριν προχωρήσουμε στο θεώρημα τέταρτης ροπής θα χρειαστούμε ένα τεχνικό λήμμα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη (δείτε την Άσκηση 3.2.5 στο [15] καθώς και το Πόρισμα 14.18 στο [64]).

Λήμμα 4.3.4. *Θεωρούμε $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε να υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $|x| > M$, και $\frac{|h(x)|}{g(x)} \to 0$ καθώς $|x| \to \infty$. Θεωρούμε επίσης ακολουθία μέτρων πιθανότητας ν_k, που συγκίνει κατά κατανομή στο μέτρο πιθανότητας ν. Αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}} g(x)\nu_k(dx) \leq C$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)\nu_k(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\nu(dx). \tag{4.64}$$

Έχουμε τώρα όλα τα εργαλεία προκειμένου να αποδείξουμε το θεώρημα τέταρτης ροπής, που αποτελεί ένα από τα κύρια θεωρήματα αυτής της εργασίας.

Θεώρημα 4.3.5 (Θεώρημα τέταρτης ροπής. Nualart, Peccati, Ortiz Latorre)**.** *Έστω $q \geq 2$ ακέραιος αριθμός και ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(F_n)_{n\geq 1}$, $F_n = I_q^B(f_n) \in \mathscr{H}_q$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[F_n^2] = \sigma^2. \tag{4.65}$$

Τότε καθώς $n \to \infty$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i). $F_n \to N(0, \sigma^2)$ *κατά κατανομή.*

(ii). $\mathbb{E}[F_n^4] \to 3\sigma^4$.

(iii). $\|DF_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \to q\sigma^2$ *στον* $L^2(\Omega)$.

(iv). $\|f_n \otimes_r f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})} \to 0$ *για κάθε* $r = 1, \ldots, q-1$.

Απόδειξη. Λόγω της προηγούμενης πρότασης οι συνθήκες (ii) και (iii) είναι ισοδύναμες.

Από την ανισότητα $\|f_n \tilde{\otimes}_r f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})} \leq \|f_n \otimes_r f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})}$ και το λήμμα 4.3.3 οι συνθήκες (ii) και (iv) είναι ισοδύναμες.

Μένει λοιπόν να χειριστούμε τη συνθήκη (i). Έστω λοιπόν ότι ισχύει η (i). Τότε από το Θεώρημα Nelson 4.1.2, την (4.65) και τη σχέση $\mathbb{E}\left[F_n^2\right] = q!\|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^q)}$, έχουμε την εκτίμηση

$$\mathbb{E}\left[F_n^6\right] \leq (5^q q!)^3 \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^6_{L^2(\mathbb{R}_+^q)} < \infty. \tag{4.66}$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.3.4 με $h(x) = x^4$ και $g(x) = x^6$ και να δούμε ότι (i) $\Longrightarrow$ (ii). Τέλος, από το Λήμμα 4.3.1 έχουμε τη συνεπαγωγή (iii) $\Longrightarrow$ (i), που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Από το Λήμμα 1.1.6 έπεται πως αν $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, τότε $\int_0^\infty f(t)dB_t \sim N\left(0, \int_0^\infty f^2(t)dt\right)$. Τώρα που έχουμε δείξει το θεώρημα τέταρτης ροπής, σκεφτόμαστε να το χρησιμοποιήσουμε για να ελέγχουμε κατα πόσο κάποιο πολλαπλό ολοκλήρωμα Wiener-Itô έχει κανονική κατανομή. Συγκεκριμένα, αν $q \geq 2$ ακέραιος αριθμός και θεωρήσουμε τη σταθερή ακολουθία $F_n = F = I_q^B(f)$ όπου $f \in L_s^2(\mathbb{R}_+^q)$, τότε για να δείξουμε πως η F έχει κανονική κατανομή, σύμφωνα με το θεώρημα τέταρτης ροπής, αρκεί να δείξουμε πως $\mathbb{E}\left[F^4\right] = 3\sigma^4$, όπου $\sigma^2 = \mathbb{E}\left[F^2\right]$. Παρ'όλο που αυτό μοιάζει να είναι μία καλή στρατηγική, η παρακάτω πρόταση μας δείχνει πως κανένα πολλαπλό ολοκλήρωμα Wiener-Itô δεν μπορεί να έχει κανονική κατανομή και κατά συνέπεια κανένα χάος Wiener $\mathscr{H}_q$ δεν περιέχει κανονική τυχαία μεταβλητή για $q \geq 2$.

Πρόταση 4.3.2. *Έστω $q \geq 2$ ακέραιος αριθμός και $f \in L_s^2(\mathbb{R}_+^q)$ έτσι ώστε $\mathbb{E}\left[I_q^B(f)^2\right] = \sigma^2 > 0$. Τότε $\mathbb{E}\left[I_q^B(f)^4\right] > 3\sigma^4$.*

Απόδειξη. Από την εξίσωση (4.50) έχουμε $\mathbb{E}\left[I_q^B(f)^4\right] \geq 3\sigma^4$. Έστω προς άτοπο ότι $\mathbb{E}\left[I_q^B(f)^4\right] = 3\sigma^4$. Τότε, ξανά από την εξίσωση (4.50), έχουμε ότι $\|f\tilde{\otimes}_{q-1}f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = 0$.Έστω $(e_n : n \in \mathbb{N})$ ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{R}_+)$. Από τη σχέση (4.18), είναι

$$\begin{aligned} f \otimes_{q-1} f &= \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{q-1}=1}^{\infty} \left\langle f, e_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes e_{\ell_{q-1}} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^{q-1})} \otimes \left\langle f, e_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes e_{\ell_{q-1}} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^{q-1})} \\ &= \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{q-1},i,j=1}^{\infty} \left\langle f, e_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes e_{\ell_{q-1}} \otimes e_i \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^q)} \left\langle f, e_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes e_{\ell_{q-1}} \otimes e_j \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^q)} e_i \otimes e_j. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Παρατηρούμε ότι η $f \otimes_{q-1} f$ είναι συμμετρική, άρα

$$\begin{aligned} 0 &= \|f\tilde{\otimes}_{q-1}f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \\ &= \|f \otimes_{q-1} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left(\sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{q-1}=1}^{\infty} \left\langle f, e_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes e_{\ell_{q-1}} \otimes e_i \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^q)} \left\langle f, e_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes e_{\ell_{q-1}} \otimes e_j \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^q)} \right)^2 \qquad (4.68) \\ &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{q-1}=1}^{\infty} \left\langle f, e_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes e_{\ell_{q-1}} \otimes e_i \right\rangle^2_{L^2(\mathbb{R}_+^q)} \right)^2. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια $\left\langle f, e_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes e_{\ell_{q-1}} \otimes e_i \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^q)} = 0$ για κάθε $\ell_1, \dots \ell_{q-1}, i \in \mathbb{N}$, οπότε $f = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, καθώς $\mathbb{E}\left[I_q^B(f)^2\right] > 0$ από την υπόθεση. □

Δείχνουμε τώρα ένα πολυδιάστατο ανάλογο του θεωρήματος τέταρτης ροπής.

Θεώρημα 4.3.6 (Peccati-Tudor, 2005). *Έστω $d \geq 2$ και $1 \leq q_1 < \cdots < q_d$ ακέραιοι αριθμοί. Έστω επίσης η ακολουθία απο $d-$διάστατες τυχαίες μεταβλητές*

$$F_n = \left(F_n^1, \dots, F_n^d\right) = \left(I_{q_1}^B(f_n^1), \dots, I_{q_d}^B(f_n^d)\right), \tag{4.69}$$

όπου $f_n^i \in L_s^2(\mathbb{R}_+^{q_i})$ για κάθε $i = 1, \dots, d$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε επίσης πως για κάθε $i = 1, \dots, d$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[(F_n^i)^2\right] = \sigma_i^2. \tag{4.70}$$

Τότε καθώς $n \to \infty$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. *$F_n \to N(0, \Sigma)$ κατά κατανομή, όπου ο Σ είναι ο $d \times d$ διαγώνιος πίνακας με $\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$ και $\Sigma_{ij} = 0$ για $i \neq j$.*
2. *$F_n^i \to N(0, \sigma_i^2)$ κατά κατανομή για κάθε $i = 1, \dots, d$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η πρόταση 2 συνεπάγεται την 1.

Λόγω της συνθήκης (4.70) η ακολουθία $(F_n)_{n\geq 1}$ είναι σφιχτή. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε πως κάθε υπακολουθία της $(F_n)_{n\geq 1}$ που συγκλίνει κατά κατανομή, συγκλίνει στην $N(0, \Sigma)$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε πως η $(F_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε κάποια τυχαία μεταβλητή F και μένει να δείξουμε ότι $F_n \sim N(0, \Sigma)$.

Έστω ϕ_n η χαρακτηριστική συνάρτηση του τυχαίου διανύσματος F_n και ϕ η χαρακτηριστική συνάρτηση του τυχαίου διανύσματος F. Για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ είναι $\frac{\partial \phi_n}{\partial t_j}(t) = \frac{\partial}{\partial t_j}\mathbb{E}\left[e^{it\cdot F_n}\right] = i\mathbb{E}\left[F_n^j e^{it\cdot F_n}\right]$. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος τέταρτης ροπής 4.3.5, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 4.3.4 και να δούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial \phi_n}{\partial t_j}(t) = i\mathbb{E}\left[F^j e^{it\cdot F}\right] = \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t). \tag{4.71}$$

Θεωρούμε τον τελεστή Ornstein-Uhlenbeck L και παρατηρούμε ότι $LF_n^j = -q_j F_n^j$. Όμως από το Θεώρημα 2.4.2 $L = -\delta D$ άρα $F_n^j = -\frac{1}{q_j}\left(-\delta D F_n^j\right) = \frac{1}{q_j}\delta D F_n^j$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[F_n^j e^{it\cdot F_n}\right] &= \frac{1}{q_j}\mathbb{E}\left[\delta D F_n^j e^{it\cdot F_n}\right] \\
&= \frac{1}{q_j}\mathbb{E}\left[\left\langle DF_n^j, De^{it\cdot F_n}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right] \\
&= \frac{i}{q_j}\sum_{k=1}^d t_k \mathbb{E}\left[e^{it\cdot F_n}\left(\mathscr{M}_{F_n}\right)_{jk}\right],
\end{aligned} \tag{4.72}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη δυϊκότητα των τελεστών D, δ και $(\mathscr{M}_{F_n})$ είναι ο πίνακας Malliavin του τυχαίου διανύσματος F_n (Ορισμός 3.1.1). Βλέπουμε λοιπόν ότι

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t_j}(t) = -\frac{1}{q_j}\sum_{k=1}^d t_k \mathbb{E}\left[e^{it\cdot F_n}\left(\mathscr{M}_{F_n}\right)_{jk}\right]. \tag{4.73}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$\lim_{n\to\infty} (\mathscr{M}_{F_n})_{jk} = 0 \quad \text{στον } L^2(\Omega) \text{ για } j \neq k \tag{4.74}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} (\mathscr{M}_{F_n})_{jj} = q_j \sigma_j^2 \quad \text{στον } L^2(\Omega). \tag{4.75}$$

Η εξίσωση (4.75) έπεται άμεσα από τη συνθήκη (iii) στο θεώρημα τέταρτης ροπής 4.3.5, οπότε προχωράμε στην απόδειξη της (4.74). Για $j < k$ έχουμε ότι $q_j < q_k$ και

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(\mathscr{M}_{F_n})_{jk}^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left\langle DF_n^j, DF_n^k \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2\right] \\
&= q_j^2 q_k^2 \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty I_{q_j-1}^B(f_n^j(\cdot,t)) I_{q_k-1}^B(f_n^k(\cdot,t))\right)^2\right] \\
&= q_j^2 q_k^2 \mathbb{E}\left[\left(\sum_{r=0}^{q_j-1} \binom{q_j-1}{r}\binom{q_k-1}{r} r! \int_0^\infty I_{q_j+q_k-2-2r}^B\left(f_n^j(\cdot,t) \otimes_r f_n^k(\cdot,t)\right) dt\right)^2\right] \\
&= q_j^2 q_k^2 \mathbb{E}\left[\left(\sum_{r=0}^{q_j-1} \binom{q_j-1}{r}\binom{q_k-1}{r} r! I_{q_j+q_k-2-2r}^B\left(f_n^j \otimes_{r+1} f_n^k\right)\right)^2\right] \\
&= q_j^2 q_k^2 \sum_{r=0}^{q_j-1} \binom{q_j-1}{r}^2 \binom{q_k-1}{r}^2 (r!)^2 (q_j+q_k-2-2r)! \left\| f_n^j \tilde{\otimes}_{r+1} f_n^k \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{q_j+q_k-2-2r})}^2 \\
&\leq q_j^2 q_k^2 \sum_{r=1}^{q_j} \binom{q_j-1}{r-1}^2 \binom{q_k-1}{r-1}^2 ((r-1)!)^2 (q_j+q_k-2r)! \left\| f_n^j \otimes_r f_n^k \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{q_j+q_k-2r})}^2,
\end{aligned} \tag{4.76}$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον πολλαπλασιαστικό τύπο του Shigekawa. Χρησιμοποιούμε διαδοχικά το θεώρημα Fubini και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, και έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left\| f_n^j \otimes_r f_n^k \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{q_j+q_k-2r})}^2 &= \left\langle f_n^j \otimes_{q_j-r} f_n^j, f_n^k \otimes_{q_k-r} f_n^k \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^{2r})} \\
&\leq \left\| f_n^j \otimes_{q_j-r} f_n^j \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2r})} \left\| f_n^k \otimes_{q_k-r} f_n^k \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2r})}.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Όμως $1 \leq q_k - r \leq q_k - 1$, άρα είναι $\lim_{n\to\infty} \left\| f_n^k \otimes_{q_k-r} f_n^k \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2r})} = 0$ από τη συνθήκη (iv) στο Θεώρημα τέταρτης ροπής 4.3.5. Πράγματι λοιπόν ισχύει και η (4.74).

Παίρνουμε τώρα το όριο $n \to \infty$ στην εξίσωση (4.73) και έχουμε ότι

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t) = -\frac{1}{q_j} t_j \mathbb{E}\left[e^{it\cdot F} q_j \sigma_j^2\right] = -t_j \sigma_j^2 \phi(t). \tag{4.78}$$

Από αυτές τις εξισώσεις έπεται ότι η ϕ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής $N(0, \Sigma)$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

4.4 Το θεώρημα Breuer-Major

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε μία απόδειξη για το θεώρημα Breuer-Major που βασίζεται στο Θεώρημα τέταρτης ροπής 4.3.5 και στο Θεώρημα 4.3.6. Ας ξεκινήσουμε με τη διατύπωση του θεωρήματος.

Θεωρούμε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_k)_{k\geq 1}$ τέτοια ώστε κάθε X_k να έχει κατανομή $N(0,1)$. Υποθέτουμε πως υπάρχει συνάρτηση $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(k-m) = \mathbb{E}\left[X_k X_m\right]$ για κάθε $k, m \geq 1$. Δηλαδή η ακολουθία $(X_k)_{k\geq 1}$ είναι ασθενώς στάσιμη. Βέβαια επειδή η ακολουθία $(X_k)_{k\geq 1}$ αποτελείται από ισόνομες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές, είναι και ισχυρά στάσιμη. Συνήθως η ρ καλείται συνάρτηση αυτοσυνδυακύμανσης και θα κρατήσουμε κι εμείς αυτή την ορολογία. Παρατηρήστε επίσης πως $\rho(0) = 1$.

Θεωρούμε τώρα $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, \gamma)$. Από την Πρόταση 1.1.1 μπορούμε να γράψουμε $\varphi(x) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q H_q(x)$ στον $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$, όπου H_q είναι το $q-$οστό πολυώνυμο Hermite και $a_q \in \mathbb{R}$ για κάθε μη αρνητικό ακέραιο q.

Ορισμός 4.4.1. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ έχει βαθμό Hermite $d \in \mathbb{N}$ αν γράφεται ως $\varphi = \sum_{q=d}^{\infty} a_q H_q$ όπου $a_d \neq 0$.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το θεώρημα Breuer-Major.

Θεώρημα 4.4.1 (Breuer-Major, 1983). *Έστω $(X_k)_{k\geq 1}$ στάσιμη Γκαουσιανή ακολουθία με $X_k \sim N(0,1)$ για κάθε $k \geq 1$ και $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ με βαθμό Hermite $d \geq 1$.Υποθέτουμε πως $a_0 = \mathbb{E}[\varphi(X_1)] = 0$ και πως $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\rho(k)|^d < \infty$ όπου ρ είναι η συνάρτηση αυτοσυνδυακύμανσης της $(X_k)_{k\geq 1}$. Τότε καθώς $n \to \infty$ έχουμε*

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \varphi(X_k) \to N(0, \sigma^2) \quad \text{κατά κατανομή,} \tag{4.79}$$

όπου $\sigma^2 = \sum_{q=d}^{\infty} q! a_q^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho(k)^q \in [0, \infty)$.

Σχέση με κεντρικό οριακό θεώρημα. Πριν αποδείξουμε το Θεώρημα 4.4.1 θα κάνουμε κάποια σχόλια. Παρατηρούμε ότι το κεντρικό οριακό θεώρημα είναι μία ειδική περίπτωση του θεωρήματος Breuer-Major.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε $(Y_k)_{k\geq 1}$ μία ακολουθία απο ανεξάρτητες και ισόννομες τυχαίες μεταβλητές, κάθε μία απο τις οποίες έχει μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2. Οι τυχαίες μεταβλητές $(Y_k)_{k\geq 1}$ έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής F_{Y_1}. Θεωρούμε την ψευδοαντίστροφη συνάρτηση $F_{Y_1}^{-1}$ της F_{Y_1} που ορίζεται ως

$$F_{Y_1}^{-1}(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : x \leq F_{Y_1}(y)\}, \ \ x \in (0,1). \tag{4.80}$$

Αν $U \sim \text{Uniform}(0,1)$ τότε $F_{Y_1}^{-1}(U) \overset{d}{=\!=} Y_1$. Συμβολίζουμε με Φ τη συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$. Τότε είναι

$$\Phi(X_1) \sim \text{Uniform}(0,1)$$

οπότε αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = F_{Y_1}^{-1}(\Phi(x))$, τότε $\varphi(X_1) \overset{d}{=\!=} Y_1$. Αν υποθέσουμε σε αυτή την περίπτωση πως οι $(X_k)_{k\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές κάθε μία με την κατανομή $N(0,1)$ τότε $\rho(0) = 1$ και $\rho(k) = 0$ για κάθε $k \neq 0$. Τότε από το θεώρημα Breuer-Major έπεται ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \varphi(X_k) \to N\left(0, \sum_{q=d}^{\infty} q! a_q^2\right), \tag{4.81}$$

όπου η σύγκλιση είναι κατά κατανομή. Όμως από την ταυτότητα του Parseval είναι

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[Y_1^2] = \mathbb{E}[\varphi^2(X_1)] = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = \left\| \sum_{q=d}^{\infty} \sqrt{q!} a_q \frac{H_q}{\sqrt{q!}} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = \sum_{q=d}^{\infty} q! a_q^2 \tag{4.82}$$

οπότε η σχέση (4.81) είναι ακριβώς το κεντρικό οριακό θεώρημα. Φυσικά υπάρχουν πολύ πιο απλές αποδείξεις για το κεντρικό οριακό θεώρημα και η κλασική απόδειξη γίνεται με το θεώρημα συνέχειας του Levy. Όμως η παραπάνω προσέγγιση μας προσφέρει κάποια επιπλέον πληροφορία η οποία είναι πως η υπόθεση της ανεξαρτησίας, δεν είναι κρίσιμη για να έχουμε σύγκλιση σε κανονική κατανομή στο κεντρικό οριακό θεώρημα.

Η αρχική απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1 (δείτε στο [12]) ήταν αρκετά πολύπλοκη καθώς η στρατηγική ήταν να δειχθεί πως όλες οι ροπές της V_n συγκλινουν στις αντίστοιχες ροπές της ζητούμενης κανονικής κατανομής. Αυτό απαιτούσε μεγάλη ικανότητα στη συνδυαστική και χρησιμοποιούσε και θεωρία γραφημάτων. Στην απόδειξη που θα δούμε εμείς, ουσιαστικά θα ελέγξουμε μόνο τη σύγκλιση της δεύτερης και τέταρτης ροπής και αυτό θα είναι αρκετό από το θεώρημα τέταρτης ροπής. Είναι προφανές λοιπόν πως η απόδειξη απλοποιείται δραστικά, κυρίως λόγω της δύναμης των εργαλείων που διαθέτουμε.

Απόδειξη για το Θεώρημα 4.4.1. Πρώτα θα δείξουμε τη σύγκλιση της δεύτερης ροπής. Είναι $V_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \varphi(X_k)$ και $\varphi(X_k) = \sum_{q=d}^\infty a_q H_q(X_k)$ οπότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[V_n^2\right] &= \frac{1}{n} \sum_{k,m=1}^{n} \mathbb{E}\left[\varphi(X_k)\varphi(X_m)\right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{p,q=d}^{\infty} a_p a_q \sum_{k,m=1}^{n} \mathbb{E}\left[H_p(X_k) H_q(X_m)\right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{q=d}^{\infty} a_q^2 \sum_{k,m=1}^{n} q! \mathbb{E}\left[X_k X_m\right]^q \\
&= \frac{1}{n} \sum_{q=d}^{\infty} q! a_q^2 \sum_{k,m=1}^{n} \rho(k-m)^q \\
&= \sum_{q=d}^{\infty} q! a_q^2 \sum_{r \in \mathbb{Z}} \rho(r)^q \left(1 - \frac{|r|}{n}\right) \mathbb{1}_{\{|r|<n\}}.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Αν καταφέρουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue στην παραπάνω εξίσωση, θα μπορέσουμε να δείξουμε τη σύγκλιση της δεύτερης ροπής.

Για σταθερά $q \geq d$, $r \in \mathbb{Z}$ είναι $\lim_{n\to\infty} q! a_q^2 \rho(r)^q \left(1 - \frac{|r|}{n}\right) \mathbb{1}_{\{|r|<n\}} = q! a_q^2 \rho(r)^q$. Παρατηρούμε πως από την ανισότητα Cauchy-Schwarz είναι

$$|\rho(k)| = |\mathbb{E}\left[X_1 X_{k+1}\right]| \leq \left(\mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_{k+1}^2]\right)^{1/2} = 1$$

συνεπώς για $q \geq d$ έχουμε ότι $|\rho(r)|^q \leq |\rho(r)|^d$. Άρα λοιπόν είναι

$$\left| q! a_q^2 \rho(r)^q \left(1 - \frac{|r|}{n}\right) \mathbb{1}_{\{|r|<n\}} \right| \leq q! a_q^2 |\rho(r)|^d. \tag{4.84}$$

Από την υπόθεση είναι $\sum_{r\in\mathbb{Z}} |\rho(r)|^d < \infty$, άρα η κυριαρχούσα συνάρτηση στην παραπάνω ανισότητα είναι ολοκληρώσιμη, αφού

$$\sum_{q=d}^{\infty}\sum_{r\in\mathbb{Z}} q!a_q^2|\rho(r)|^d = \sum_{q=d}^{\infty} q!a_q^2 \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}}|\rho(r)|^d\right) = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)}\left(\sum_{r\in\mathbb{Z}}|\rho(r)|^d\right) < \infty. \tag{4.85}$$

Στην εξίσωση (4.83) παίρνουμε το όριο $n\to\infty$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Καταλήγουμε τότε στη σχέση

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[V_n^2] = \sum_{q=d}^{\infty} q!a_q^2 \sum_{r\in\mathbb{Z}}\rho(r)^q = \sigma^2. \tag{4.86}$$

Άρα λοιπόν έχουμε τη ζητούμενη σύγκλιση της δεύτερης ροπής. Παρατηρούμε επίσης πως τα παραπάνω αποδεικνύουν ότι $\sigma^2 \in [0,\infty)$.

Θα δείξουμε ότι $V_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \varphi(X_k) \to N(0,\sigma^2)$ κατά κατανομή σε 3 βήματα. Στο πρώτο βήμα θα υποθέσουμε πως η φ είναι κάποιο πολυώνυμο Hermite H_q, στο δεύτερο βήμα θα υποθέσουμε πως η φ είναι κάποιο πραγματικό πολυώνυμο, οπότε γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός πολυωνύμων Hermite, και στο τρίτο βήμα θα θεωρήσουμε πως $\varphi \in L^2(\mathbb{R},\gamma)$.

Βήμα 1. $\varphi = H_q$ για κάποιο $q \geq 1$.

Έστω $\mathsf{X} = \overline{\mathrm{span}}\{X_k : k\geq 1\}$ όπου η κλειστότητα λαμβάνεται στον $L^2(\Omega)$. Τότε ο $\mathsf{X} \subseteq L^2(\Omega)$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert που αποτελείται από Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές που έχουν μέση τιμή 0. Είναι δηλαδή ένας Γκαουσιανός χώρος Hilbert. Υποθέτουμε ότι ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^2(\mathbb{R}_+)$ (θα μπορούσε να είναι ισομετρικά ισόμορφος με χώρο πεπερασμένης διάστασης αλλα αυτή είναι πιό απλή περίπτωση και δεν την εξετάζουμε).

Αν $W : L^2(\mathbb{R}_+) \to \mathsf{X}$ είναι ισομετρία, τότε βλέπουμε πως η W είναι μία $L^2(\mathbb{R}_+)-$ισοκανονική διαδικασία. Έστω $(e_k)_{k\geq 1}$ ακολουθία στον $L^2(\mathbb{R}_+)$ τέτοια ώστε $W(e_k) = X_k$. Θυμηθείτε πως σε αυτό το πλαίσιο είναι $W(\mathbb{1}_{(0,t]}) = B_t$ κίνηση Brown και $W(e_k) = \int_0^\infty e_k(s)dB_s$. Επίσης είναι

$$\rho(k-m) = \mathbb{E}[X_kX_m] = \langle e_k, e_m\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty e_k(s)e_m(s)ds. \tag{4.87}$$

Παρατηρούμε ότι $\|e_k\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \mathbb{E}[X_k^2] = 1$ οπότε από το Λήμμα 2.5.4 είναι $\varphi(X_k) = \varphi\left(W(e_k)\right) = H_q\left(W(e_k)\right) = I_q^B\left(e_k^{\otimes q}\right)$. Γράφουμε

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \varphi(X_k) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n I_q^B\left(e_k^{\otimes q}\right) = I_q^B\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n e_k^{\otimes q}\right). \tag{4.88}$$

Θέτουμε $f_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n e_k^{\otimes q}$, οπότε είναι $V_n = I_q^B(f_n)$. Γνωρίζουμε ήδη πως $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[V_n^2] = \sigma^2$, άρα από το θεώρημα τέταρτης ροπής, αρκεί να δείξουμε πως $\lim_{n\to\infty}\|f_n\otimes_r f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})} = 0$ για κάθε $r = 1,\ldots,q-1$.

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} f_n \otimes_r f_n &= \frac{1}{n} \sum_{k,m=1}^{n} e_k^{\otimes q} \otimes_r e_m^{\otimes q} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k,m=1}^{n} \langle e_k, e_m \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}^r \; e_k^{\otimes(q-r)} \otimes e_m^{\otimes(q-r)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k,m=1}^{n} \rho(k-m)^r \; e_k^{\otimes(q-r)} \otimes e_m^{\otimes(q-r)} \end{aligned} \tag{4.89}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \|f_n \otimes_r f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})} &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j,k,m=1}^{n} \rho(i-j)^r \rho(k-m)^r \cdot \left\langle e_i^{\otimes(q-r)} \otimes e_j^{\otimes(q-r)}, e_k^{\otimes(q-r)} \otimes e_m^{\otimes(q-r)} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j,k,m=1}^{n} \rho(i-j)^r \rho(k-m)^r \rho(i-k)^{q-r} \rho(j-m)^{q-r}. \end{aligned} \tag{4.90}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $|\rho(k-m)|^r \cdot |\rho(i-k)|^{q-r} \leq |\rho(k-m)|^q + |\rho(i-k)|^q$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \;\text{ όπου } x_1, x_2 > 0 \text{ και } 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1 \text{ με } \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

με την επιλογή $x_1 = |\rho(k-m)|^q, x_2 = |\rho(i-k)|^q, \alpha_1 = \frac{r}{q}, \alpha_2 = 2 - \frac{r}{q}$, έχουμε

$$\begin{aligned} |\rho(k-m)|^r \cdot |\rho(i-k)|^{q-r} &= \left(|\rho(k-m)|^q\right)^{\frac{r}{q}} \left(|\rho(i-k)|^q\right)^{1-\frac{r}{q}} \\ &\leq \frac{r}{q} |\rho(k-m)|^q + \left(1 - \frac{r}{q}\right) |\rho(i-k)|^q \\ &\leq |\rho(k-m)|^q + |\rho(i-k)|^q \end{aligned} \tag{4.91}$$

που είναι ακριβώς ο ισχυρισμός μας. Χρησιμοποιούμε τώρα αυτή την ανισότητα για να φράξουμε την ποσότητα $\|f_n \otimes_r f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|f_n \otimes_r f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})} &\leq \frac{2}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\rho(k)|^q \sum_{|i| \leq n} |\rho(i)|^r \sum_{|j| \leq n} |\rho(j)|^{q-r} \\ &\leq 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\rho(k)|^d \cdot \left(n^{-1+\frac{r}{q}} \sum_{|i| \leq n} |\rho(i)|^r \right) \cdot \left(n^{-1+\frac{q-r}{q}} \sum_{|j| \leq n} |\rho(j)|^{q-r} \right). \end{aligned} \tag{4.92}$$

Θέτουμε $S_n(r) = n^{-1+\frac{r}{q}} \sum_{|i| \leq n} |\rho(i)|^r$. Τότε είναι

$$\|f_n \otimes_r f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2q-2r})} \leq 2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\rho(k)|^d \right) S_n(r) \cdot S_n(q-r), \tag{4.93}$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{n \to \infty} S_n(r) = 0$ για $r = 1, \ldots, q-1$.

Έστω λοιπόν $r \in \{1, \ldots, q-1\}$. Θεωρούμε $\delta \in (0,1)$ και γράφουμε

$$S_n(r) = S_n^1(r) + S_n^2(r) := n^{-1+\frac{r}{q}} \sum_{|i| \leq [n\delta]} |\rho(i)|^r + n^{-1+\frac{r}{q}} \sum_{[n\delta] \leq |i| \leq n} |\rho(i)|^r.$$

Από την ανισότητα του Hölder έχουμε

$$\begin{aligned} S_n^1(r) &= n^{-1+\frac{r}{q}} \sum_{|i| \leq [n\delta]} |\rho(i)|^r \\ &\leq n^{-1+\frac{r}{q}} \left(\sum_{|i| \leq [n\delta]} 1 \right)^{\frac{q-r}{q}} \cdot \left(\sum_{|i| \leq [n\delta]} (|\rho(i)|^r)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{r}{q}} \\ &= n^{-1+\frac{r}{q}} (2[n\delta]+1)^{1-\frac{r}{q}} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\rho(i)|^q \right)^{\frac{r}{q}} \\ &\leq C\delta^{1-\frac{r}{q}}, \end{aligned} \tag{4.94}$$

όπου C θετική σταθερά, η οποία δεν εξαρτάται από τα n, r.

Ξανά από την ανισότητα του Hölder, έχουμε

$$S_n^2(r) = n^{-1+\frac{r}{q}} \sum_{[n\delta] \leq |i| \leq n} |\rho(i)|^r \leq C' \left(\sum_{|i| \geq [n\delta]} |\rho(i)|^q \right)^{\frac{r}{q}}, \tag{4.95}$$

όπου C' θετική σταθερά. Έχουμε

$$\left(\sum_{|i| \geq [n\delta]} |\rho(i)|^q \right)^{\frac{r}{q}} \leq \sum_{|i| \geq [n\delta]} |\rho(i)|^d \to 0 \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty, \tag{4.96}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $0 < \frac{r}{q} < 1$ και $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\rho(k)|^d < \infty$.

Άρα λοιπόν

$$\lim_{n \to \infty} S_n(r) \leq C\delta^{1-\frac{r}{q}} \tag{4.97}$$

και επειδή το $\delta \in (0,1)$ ήταν αυθαίρετο, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} S_n(r) = 0$. Τώρα το ζητούμενο έπεται από το φράγμα (4.93) .

Βήμα 2. φ είναι πραγματικό πολυώνυμο.

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ακέραιος $N \geq d$ έτσι ώστε η φ να γράφεται στην μορφή $\varphi = \sum_{q=d}^{N} a_q H_q$. Από το βήμα 1 και το Θεώρημα 4.3.6, είναι

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} H_d(X_k), \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} H_N(X_k) \right) \to N(0, \Sigma) \quad \text{κατά κατανομή.} \tag{4.98}$$

όπου Σ είναι ο $N \times d$ διαγώνιος πίνακας με $\Sigma_{qq} = \sigma_q^2 = q! \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho(k)^q$ για $q = d, \ldots, N$. Από το θεώρημα συνεχούς απεικόνισης, είναι

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=d}^{N} a_q \sum_{k=1}^{n} H_q(X_k) \to N\left(0\ ,\ \sum_{q=d}^{N} q! a_q^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho(k)^q \right) \quad \text{κατά κατανομή.} \tag{4.99}$$

Βήμα 3. $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, \gamma)$.

Έστω $N > d$ ακέραιος. Τότε είναι

$$V_n = V_n^N + R_n^N := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=d}^{N} a_q \sum_{k=1}^{n} H_q(X_k) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=N+1}^{\infty} a_q \sum_{k=1}^{n} H_q(X_k). \tag{4.100}$$

Από το βήμα 2 είναι

$$V_n^N \to N\left(0, \sum_{q=d}^{N} q! a_q^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho(k)^q\right) \quad \text{κατά κατανομή καθώς } n \to \infty. \tag{4.101}$$

Επειδή $\mathbb{E}[\varphi^2(X_1)] = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R},\gamma)} = \sum_{q=d}^{\infty} q! a_q^2 < \infty$ έχουμε ότι

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[(R_n^N)^2\right] \leq \sum_{q=N+1}^{\infty} q! a_q^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\rho(k)|^d \to 0 \quad \text{καθώς } N \to \infty. \tag{4.102}$$

Από τις (4.101), (4.102) και το επόμενο λήμμα, έπεται ότι ότι $V_n \to N(0, \sigma^2)$ κατά κατανομή, όπως αρχικά θέλαμε. □

Παραθέτουμε εδώ ένα λήμμα που χρησιμοποιήσαμε στο τελευταίο βήμα της παραπάνω απόδειξης. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε το επόμενο λήμμα με την επιλογή

$$X_N \sim N\left(0, \sum_{q=d}^{N} q! a_q^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho(k)^q\right)$$

και

$$X \sim N\left(0, \sum_{q=d}^{\infty} q! a_q^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho(k)^q\right)$$

και η συνθήκη (4.103) ικανοποιείται λόγω της (4.102). Παραλείπουμε την απόδειξη αυτού του λήμματος, η οποία είναι παρόμοια με αυτή του θεωρήματος Slutsky.

Λήμμα 4.4.2. *Θεωρούμε τυχαίες μεταβλητές $V_n = V_n^N + R_n^N$ με $n, N \in \mathbb{N}$, και τυχαίες μεταβλητές X_N, X έτσι ώστε $V_n^N \to X_N$ κατά κατανομή καθώς $n \to \infty$ και $X_N \to X$ κατά κατανομή καθώς $N \to \infty$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι*

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|R_n^N| > \varepsilon\right) = 0 \quad \text{για κάθε } \varepsilon > 0. \tag{4.103}$$

Τότε $V_n \to X$ κατά κατανομή, καθώς $n \to \infty$.

Βιβλιογραφία

[1] Editors. Davide Barilari, Ugo Boscain, Mario Sigalotti: *Geometry, Analysis and Dynamics on sub-Riemannian Manifolds*, Volume I, European Mathematical Society, 2016.

[2] Editors. Davide Barilari, Ugo Boscain, Mario Sigalotti: *Geometry, Analysis and Dynamics on sub-Riemannian Manifolds*, Volume II, European Mathematical Society, 2016.

[3] Davide Barilari: *From Thermodynamics to Image Reconstruction: an invitation to Sub-Riemannian geometry.* Colloqium Leibniz Universität Hannover Germany, November 2016.

[4] Fabrice Baudoin: *An Introduction to the Geometry of Stochastic Flows.* Imperial College Press 2004.

[5] Fabrice Baudoin: *Diffusion Processes and Stochastic Calculus*, European Mathematical Society, 2014.

[6] Denis R.Bell : *The Malliavin Calculus* , Longman Scientific and Technical , 1987.

[7] Vladimir I.Bogachev: *Gaussian Measures*, American Mathematical Society 1998.

[8] Vladimir I.Bogachev : *Differentiable Measures and the Malliavin Calculus*, American Mathematical Society 2010.

[9] Stefano Bonaccorsi and Enrico Priola: *From Brownian Motion to Stochastic Differential Equations*, 10th Internet Seminar, 2006.

[10] Marco Bramanti: *An invitation to Hypoelliptic Operators and Hörmander's Vector Fields*, SpringerBriefs in Mathematics, 2014.

[11] Marco Bramanti: *On the proof of Hörmander's hypoellipticity theorem.* LE MATHEMATICHE Vol.LXXV-Issue I, pp/ 2-26, doi: 10.4418/2020.75.1.1 2020.

[12] P.Breuer and P.Major :*Central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields*, Journal of Multivariate Analysis 13, 1983.

[13] Kai Lai Chung: *A course in probability theory*, 3rd edition. Academic Press 2001.

[14] Bruce K.Driver: *Probability Tools with Examples*, 2010.

[15] Rick Durrett: *Probability: Theory and Examples*, Version 5, 2019.

[16] Nathaniel Eldredge: *Analysis and Probability on Infinite-Dimensional Spaces*, arXiv: 1607.03591v2, 2016.

[17] R.P Feynman, A.R Hibbs: *Quantum Mechanics and Path Integrals* Emended Edition, Daniel F. Styer, Dover Publications Inc, Mineola, New York 2005.

[18] Peter K.Friz: *An Introduction to Malliavin Calculus*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University 2002.

[19] Martin Hairer: *Introduction to Malliavin Calculus*, 2021.

[20] Martin Hairer: *On Malliavin's proof of Hörmander's theorem*,arXiv : 1103.1998, 2011.

[21] Martin Hairer: *Ergodic theory for Stochastic PDEs*,Mathematics Institute, The University of Warwick 2008.

[22] Martin Hairer: *An introduction to Stochastic PDEs*,The University of Warwick 2009.

[23] Bernard Helffer, Francis Nier: *Hypoelliptic Estimates and Spectral Theory for Fokker-Planck Operators and Witten Laplacians.* Lecture Notes in Mathematics vol. 1862, Springer-Verlang, 2005.

[24] Lars Hörmander: *Hypoelliptic Second order differential operators*, Acta Mathematica 119, 1967

[25] Zhi-yuan Huang and Jia-an Yan: *Introduction to Infinite Dimensional Stochastic Analysis.* Science Press Beijing/New York, Springer Science+Business Media Dordecht 2000.

[26] Joe Jackson: *Notes on Malliavin Calculus*, 2020.

[27] Svante Janson : *Gaussian Hilbert Spaces*, Cambridge University Press, 1997.

[28] Vassili N.Kolokoltsov : *Markov Processes Semigroups and Generators*, De Gruyter, 2011.

[29] Markus Kunze: *An Introduction to Malliavin Calculus*, 2013.

[30] Alessandra Lunardi, Michele Miranda, Diego Pallara : *Infinite Dimensional Analysis* 19th Internet Seminar on Infinite Dimensional Analysis, 2015-2016.

[31] James H.Luscombe: *Thermodynamics.* CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018.

[32] Vigirdas Mackevicius: *Introduction to Stochastic Analysis. Integrals and Differential E-quations*, ISTE Ltd , Wiley, 2011 .

[33] Paul Malliavin: *Stochastic Analysis.* A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag, 1997.

[34] Paul Malliavin with Hélene Airault, Leslie Kay, Gérard Letac: *Integration and Probability.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, Inc. 1995.

[35] Jan van Neerven: *Stochastic Evolution Equations.* ISEM Lecture notes 2008.

[36] Ivan Nourdin , Giovanni Peccati : *Normal Approximations with Malliavin Calculus* Cambridge University Press, 2012.

[37] Ivan Nourdin : *Lectures on Gaussian approximations with Malliavin calculus*, arXiv: 1203.4147v3 , 2012.

[38] Ivan Nourdin : *The Malliavin-Stein approach* 3rd Warsaw Summer School in Probability, 2019.

[39] David Nualart : *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer - Verlang, Berlin , 2006.

[40] David Nualart and Eulalia Nualart : *Introduction to Malliavin Calculus*, Cambridge University Press, 2018.

[41] David Nualart: *Malliavin Calculus and Normal Approximations*, XXIII Brazilian School of Probability, ICMC -USP- Sao Carlos, Brazil, 2019.

[42] David Nualart and Giovanni Peccati: *Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals*, The Annals of Probability, Vol 33, No 1, 177-193, 2005.

[43] D.Nualart, S.Ortiz-Latorre : *Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus*, arXiv: math/0703240v2, 2007.

[44] Keith Patarroyo: *A digression on Hermite polynomials* ,arXiv : 1901.01648v2 2020.

[45] Marta Sanz- Solé : *Malliavin Calculus. With applications to stochastic partial differential equations* EPFL Press, CRC Press, 2005.

[46] Marta Sanz- Solé : *Applications of Malliavin Calculus to stochastic partial differential equations*, Barcelona 2008.

[47] Stefan Schwabik, Ye Guoju: *Topics in Banach space integration.* Series in Real Analysis- Volume 10, World Scientific 2005.

[48] Ichiro Shigekawa: *Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures.* J. Math. Kyoto Univ. 20-2 1980.

[49] Ichiro Shigekawa: *Stochastic Analysis*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2004.

[50] Sam Punshon-Smith: *An introduction to SPDE.* Lecture notes 2019.

[51] Charles Stein. A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2: Probability Theory, 583–602, University of California Press, Berkeley, Calif., 1972. https://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200514239.

[52] Daniel W.Stroock: *The Malliavin Calculus and its Application to Second Order Parabolic Differential Equations. Part I*, Mathematical Systems Theory 14, 25-65 Springer-Verlang New York Inc 1981.

[53] Daniel W.Stroock, Leonard Gross: *Remembering Paul Malliavin*, σελίδες 574-576 στο Notices of the AMS, volume 58, number 4 2011.

[54] Weinan E, Tiejun Li, Eric Vanden-Eijnden : *Applied Stochastic Analysis* American Mathematical Society, 2019.

[55] Jean-François Treves: *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators Volume 1 Pseudodifferential Operators*. University Series in Mathematics, Springer Science+Business Media New York 1980.

[56] Frank W.Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag 1983.

[57] Απόστολος Γιαννόπουλος: Μεταπτυχιακή Ανάλυση II, Σημειώσεις, Αθήνα 2007.

[58] Απόστολος Γιαννόπουλος: Συναρτησιακές ανισότητες και συγκέντρωση του μέτρου, Σημειώσεις, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αθηνών 2012.

[59] Γ. Κουμουλλής , Σ.Νεγρεπόντης :*Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2005.

[60] Ιωάννης Σπηλιώτης : *Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις. Με εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά*, Εκδόσεις Συμεών, 2004

[61] Ιωάννης Σμάϊθ : *Τυχαίες Σειρές Fourier*, Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2019.

[62] Κυριάκος Ταμβάκης : *Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική*, Εκδόσεις Leader Books Αθήνα 2003.

[63] Δημήτρης Χελιώτης: *Εισαγωγή στον Στοχαστικό Λογισμό*, Αθήνα 2020.

[64] Δημήτρης Χελιώτης: *Ένα δεύτερο μάθημα στις πιθανότητες*. Αθήνα 2020.

[65] Haïm Brezis: *Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και εφαρμογές*, Μετάφραση-Επιμέλεια : Δημήτρης Κραββαρίτης, Ίων Χρυσοβέργης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π, Αθήνα 1997.