Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Ηλεκτρονική Τάξη: http://eclass.uoa.gr

Σημειώσεις Φοιτητών

Εαρινό Εξάμηνο 2015-2016

Μάθημα:

241. Πιθανότητες Ι

Διδάσκων: Σ. Τρέβεζας

Ευχαριστούμε για τις σημειώσεις τη Giota

15/2/16

ΜΑΘΗΜΑ 1ο

Διδάσκων: Σάμης Τρέβεζας   email: strevezas@math.uoa.gr

Ώρες γραφείου: Δευτ - Τεταρτ - Παρασκ   11-12

eclass: ΠιΘ Ι (τμήμα Τρέβεζα) + εγγραφή ομάδας χρηστών (εαρινό)

Προαπαιτούμενα: Λίγο παραγώγιση + ολοκλήρωση

Προτεινόμενα: e-class.

Γιατί πιθανότητες?

- όμορφη μαθηματική θεμελίωση (Kolmogorov 1933)
- απεριόριστες εφαρμογές
- χρήσιμες στην καθημερινή ζωή
- η βάση για άλλα μαθήματα

Θεωρία Πιθανοτήτων:

αντικείμενο: διατύπωση και ανάλυση των νόμων της τύχης που διέπουν τα τυχαία (ή στοχαστικά) φαινόμενα

κίνητρα-στόχος: πρόβλεψη / έλεγχος μελλοντικών γεγονότων και λήψη ορθολογικών αποφάσεων.

ιστορικά στοιχεία: Paccioli, Tartaglia, Cardano, Γαλιλαίος (ιταλική σχολή)
Pascal, de Fermat (1654)
Huyghens (1658) → 1ο βιβλίο πιθανοτήτων.
Bernoulli, De Moivre, Gauss, Chebyshev, Markov, Laplace, Kolmogorov.

① Βασικές έννοιες

~ **πείραμα τύχης:** ή τυχαίο πείραμα: φαινόμενο στο οποίο υπεισέρχονται τυχαίοι παράγοντες, δηλαδή παράγοντες που δημιουργούν αβεβαιότητα ως προς την εξέλιξη / έκβαση του φαινομένου

π.χ α) ρίψη ζαριού / νομίσματος

β) κατάσταση του καιρού αύριο σε μια συγκεκριμένη περιοχή

γ) διάρκεια ζωής μιας μηχανής / λαμπτήρα.

δ) αριθμός και το ύψος απαιτήσεων (αποζημιώσεων). Τον επόμενο μήνα σε μια εταιρεία.

όχι π.τ : η ελεύθερη πτώση μιας σφαίρας από 2m.

Δειγματικός χώρος:

Σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενος π.τ.

συμβ : $\underline{\Omega}$, Ω (πλουσιος, σαφής) → διακεκριμένα στοιχεία

Διάκριση δ.χ → πεπερασμένος , $|\Omega|<\infty$, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,..\omega_n\}$
→ αριθμησίμως άπειροι, $|\Omega|=|\mathbb{N}|$, $\Omega=\{\omega_1,...\omega_n,...\}$ ακολουθια διακεκρ. στοιχείων.
→ συνεχής , $|\Omega|>|\mathbb{N}|$
(υπεραριθμήσιμος)

Δειγματικό σημείο: (δ.σ). ένα δυνατό αποτελεσμα $\omega\in\Omega$ (ενα στοιχείο του δ.χ).

Ενδεχόμενο: ενα "κατάλληλο" υποσύνολο του δ.χ (συμβ. A, B, Γ, C)
→ απλό (ή στοιχειώδες) $|A|=1$
→ σύνθετο $|A|>1$.

Πιθανότητα: συνάρτηση που αποδίδει βαθμό βεβαιότητας στα ενδεχόμενα, τιμές στο $[0,1]$.

Παραδείγματα:

α) i) ρίψη 1 ζαριού → $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$
ii) ρίψη 1 νομισματος → $\Omega=\{K,\Gamma\}$
iii) ρίψη 2 ζαριών → $\underline{\Omega}_1=\{(i,j): 1\le i,j\le 6\}$
→ $\underline{\Omega}_2=\{(i,j): 1\le i\le j\le 6\}$
iv) ρίψη 1 νομίσματος μέχρι να φέρω 1η φορα γράμματα , $\Omega=\{\Gamma, K\Gamma, KK\Gamma,...\}$

πεπερασμενος ή αριθμ. απειρος δ.χ λέγεται διακριτός δ.χ.
(ή απαριθμητός, αριθμησιμος)

β) κατάσταση καιρού → $\Omega = \{$ήλιος, μόνο συννεφιά, βροχή, χιόνι, χαλάζι$\}$

γ) Διάρκεια ζωής μηχανής/λαμπτήρα → $\Omega_1 = [0, +\infty)$ (συνεχής δ.χ)
→ $\Omega_2 = \mathbb{N}$

Παρατήρηση:

α) iii)

Προφανώς Ω_1, Ω_2 είναι διαφορετικοί δ.χ. $|\Omega_1| = 36$ και $|\Omega_2| = 21$

π.χ αν παίζω τάβλι ο Ω_2 φαίνεται Μ.Ο φυσιολογικός δ.χ, αφού δεν έχει σημασία η σειρά των ενδείξεων:

ρίχνω 2 ζάρια	Φυσιολογικός δ.χ όταν δεν παίζω τάβλι	Φυσιολ. δ.χ παίζω τάβλι	Βολικός δ.χ
διαδοχικά	Ω_1	Ω_2	Ω_1
μαζί και διακρίνω	Ω_1	Ω_2	Ω_1
μαζί και δεν διακρίνω	Ω_2	Ω_2	Ω_1

* για το $|\Omega_1| = 21$

$(1,1)\ (1,2) \dots (1,6) \to 6$

$(2,2) \dots (2,6) \to 5$

$(3,3) \dots (3,6) \to 4$

$\vdots$

$(6,6) \to 1$

$\frac{6 \cdot (6+1)}{2} = 21$

Ο βολικός δ.χ είναι αυτός που κάνει τα δ.σ ισοπίθανα:

$$P(\text{"να φέρω ασσόδυο"}) = \frac{\#\text{ευνοϊκών περ}}{\#\text{δυνατών περ.}} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Εφαρμόζεται στον Ω_1, αλλά όχι στον Ω_2
(έχει $\frac{1}{21}$ που είναι λάθος)

Προσοχή! Σε διαφορετικούς δ.χ. το ίδιο ενδεχόμενο, μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφορετικά υποσύνολα

π.χ "να φέρω ασσόδυο"

$\Omega_1 \to A_1 = \{(1,2),(2,1)\}$ σύνθετο ενδεχόμενο

$\Omega_2 \to A_2 = \{(1,2)\}$ απλό ενδεχόμενο

Συμπεράσματα:

1) Ο δ.χ. δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος

2) Ο βολικός δ.χ. είναι αυτός που κάνει τα δ.σ. ισοπίθανα (για πεπερ. δ.χ)

3) Ένα ενδεχόμενο μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφορετικά υποσύνολα, όταν έχουμε διαφορετικούς δ.χ.

4) Προσοχή! Το τι παρατηρώ, μπορεί να με βοηθά να βρω ένα δ.χ αλλά μπορεί να υπάρχουν πολλές επιλογές καθορισμού δ.χ ακόμα και με αποτελέσματα που είναι μη παρατηρήσιμα.

③ Διαφορετικές μορφές πιθανότητας

α) Κλασσική πιθανότητα (πιθαν. κατά Laplace)

β) Οριακή σχετική συχνότητα (στατιστική ερμηνεία της πιθανότητας)

γ) Γεωμετρική πιθανότητα

δ) Εμπειρική πιθανότητα

α) Κλασσική πιθανότητα

προϋποθέτει πεπερασμένο και ισοπίθανα δ.σ.

- Αν A ενδεχόμενο, $P(A) = \frac{\#\text{ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\#\text{δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$

(π.χ) 1) $P\left(\text{"να φέρω ασσόδυο"}\right) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

2) $P(\text{"οι ενδείξεις των ζαριών να διαφέρουν κατά 2"}) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$B = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4)\}$

3) $P(\text{"το άθροισμα των ενδείξεων να είναι 6"}) = \frac{|\Gamma|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$

$\Gamma = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

β) Οριακή σχετική συχνότητα

προϋποθέτει ότι το π.τ. μπορεί να επαναληφθεί απεριόριστα

• Αν A ενδεχόμενο $P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n}$

↳ στοχαστική σύγκλιση (θα δούμε αργότερα)

όπου $N_n(A)$: πλήθος φορών που πραγματοποιήθηκε το A σε n-επαναλήψεις του π.τ.

~ Προβλήματα που δημιουργούνται:

1) ∃ π.τ. που είναι πολύ δύσκολο να "επαναληφθούν" (κόστος, χρόνος)
(π.χ. σπάνια ενδεχόμενα: συγκρούσεις αεροπλάνων)

2) ∃ π.τ. που είναι αδύνατο να επαναληφθούν
(δικαστική απόφαση για κάποιο κατηγορούμενο)

3) ∃ το όριο; Αν ναι, το n που πρέπει να σταματήσω;
Τι σφάλμα έκανα; (στατιστικό σφάλμα)

4) Σφάλμα μέτρησης οργάνων ή ερευνητών.

17/2/16

ΜΑΘΗΜΑ 2ο

γ) Γεωμετρική Πιθανότητα

προϋποθέτει ότι ο δ.χ και τα ενδεχόμενα μπορούν να αναπαρασταθούν γραφικά (γεωμετρικά)

π.χ. τυχαία ρίψη ενός νομίσματος σε ένα κυκλικό στόχο.

• Αν A είναι ενδεχόμενο, $P(A) = \frac{\text{εμβαδόν "ευνοϊκής" περιοχής}}{\text{εμβαδόν δ.χ}}$ παράδ. $\frac{\text{εμβαδόν τριγώνου}}{\text{εμβαδόν κύκλου}}$

$P(A) \propto$ εμβαδού A

$P(A) \propto$ μήκους A, εμβαδού A, όγκου A

ανάλογη. διάστ. 1, διάστ. 2, διάστ. 3

δ) Εμπειρική Πιθανότητα

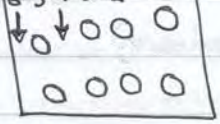
υποκειμενική εκτίμηση της πιθανότητας πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου ή ένα μέτρο της πεποίθησης μας

π.χ 50-50 να πάω εκδρομή

99,9% να πάρει το πρωτάθλημα ο Ολυμπιακός φέτος.

② Ασκήσεις:

Τάβλι:



Ποια είναι η πιθανότητα, όταν είμαι εκτός παιχνιδιού με ένα πούλι, να μπω στο παιχνίδι, όταν ο αντίπαλος μου έχει αυτή τη διάταξη;

~ Διάφοροι τρόποι επίλυσης

α) δεντροδιάγραμμα β) αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού γ) με το A^c (πονηρός)

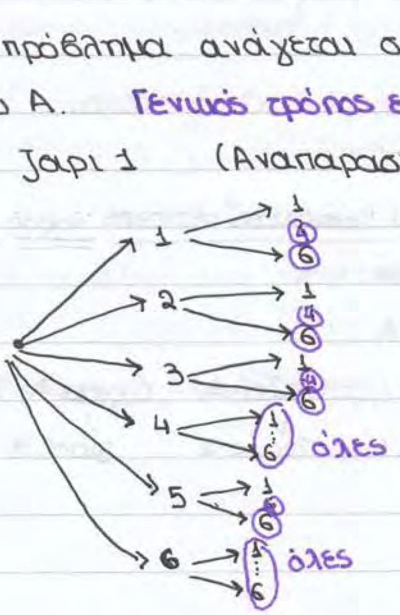
α) με δεντροδιάγραμμα

$\Omega = \{(i,j) : 1 \le i,j \le 6\} \xrightarrow[\text{ισοπίθανα}]{\text{σ.σ}}$ κλασσική πιθανότητα

Άρα $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ με $|\Omega| = 6^2 = 36$

Το πρόβλημα ανάγεται σε ένα πρόβλημα απαρίθμησης στοιχείων του A. Γενικός τρόπος επίλυσης.

Ζάρι 1 (Αναπαράσταση του δ.χ. Ω)



Κάθε διαδρομή από την αρχή μέχρι ένα τελικό ψηφίο, αντιστοιχεί σε ένα δ.σ.

$|A| = ?$ το πλήθος των διαδρομών που έχω κάποια 4 ή 6 σε κάποια επιμέρους διαδρομή

$|A|$ = "να φέρω 4 ή 6" σε κάποιο ζάρι

$|A| = 2+2+2+6+6+2 = 20$

Άρα $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

~Εναλλακτικά, μπορώ να βάλω πιθανότητες πάνω στο δεντροδιάγραμμα

$$P(A) = \sum_{\delta\iota\alpha\delta\rho \in A} P\ (\delta\iota\alpha\delta\rho o\mu\acute{\omega}\nu)$$

$$P(\delta\iota\alpha\delta\rho o\mu\acute{\eta}\varsigma) = \prod_{\#\sigma\tau\alpha\delta\acute{\iota}\omega\nu} P\ (\varepsilon\pi\iota\mu\acute{\varepsilon}\rho o\upsilon\varsigma\ \delta\iota\alpha\delta\rho o\mu\acute{\omega}\nu)$$

παρ. $P(\{1,1\}) = P(\varepsilon\pi\iota\mu(1)) \cdot P(\varepsilon\pi\iota\mu(2)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$\Rightarrow P(A) = |A| \cdot \frac{1}{36} = 20 \cdot \frac{1}{36}$

β) αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού.

A = "να φέρω 4 ή 6, σε κάποιο από τα 2 ζάρια"

= "να φέρω 4 ή 6 στο 1ο ζάρι" ή "να φέρω 4 ή 6 στο 2ο ζάρι"

$= B \cup \Gamma$

B	Γ
(4,1)	(1,4)
(4,2)	⋮
⋮	(4,4)
(4,4)	⋮
(4,6)	(6,4)
(6,1)	(1,6)
(6,2)	⋮
⋮	(4,6)
(6,4)	(6,6)
⋮	
(6,6)	

$|A| = |B \cup \Gamma| = |B| + |\Gamma| - |B \cap \Gamma|$

$B\Gamma = \{(4,4), (4,6), (6,4), (6,6)\}$

$|A| = 12 + 12 - 4 = 20$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20}{36}$

~Εναλλακτική

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|B|}{|\Omega|} + \frac{|\Gamma|}{|\Omega|} - \frac{|B\Gamma|}{|\Omega|}$

$\Rightarrow P(A) = P(B) + P(\Gamma) - P(B\Gamma)$

γ) A^c

A^c = "να μη φέρω 4 ή 6, σε κανένα από τα 2 ζάρια"

"να φέρω 1, 2, 3, ή 5 και στα 2 ζάρια"

Αρα $|A|+|A^c| = |\underline{\Omega}| \Rightarrow |A| = |\underline{\Omega}| - |A^c|$ (*)

Εδω $|A^c| = |\{1,2,3,5\}^2| = 4^2 = 16 \overset{(*)}{\Rightarrow} |A| = 36-16 = 20$

$P(A) = \frac{5}{9}$

(Ασκ.2) Το παράδοξο του Bertrand

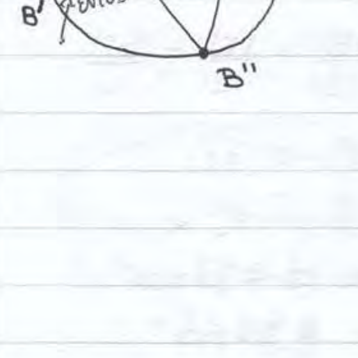
Μια χορδή μοναδιαίου κύκλου επιλέγεται "τυχαία". Ποια είναι η πιθανότητα, ένα ισόπλευρο τρίγωνο που έχει ως βάση αυτή τη χορδή, να περιέχεται εξ'ολοκλήρου μέσα στον κυκλικό δίσκο?

Παρατήρηση: Η άσκηση αυτή μας δείχνει ότι διαφορετικές κατασκευές της "τυχαίας" χορδής μας οδηγεί σε διαφορετικές λύσεις.

Κατασκευές: 1) η χορδή σχηματίζεται (επιλέγοντας τυχαία 2 σημεία πάνω στην περιφέρεια του κύκλου

2) η χορδή σχηματίζεται, επιλέγοντας τυχαία ένα σημείο Η εντος του κυκλικού δισκου που παίζει το ρόλο του μέσου της χορδής της ΑΒ.

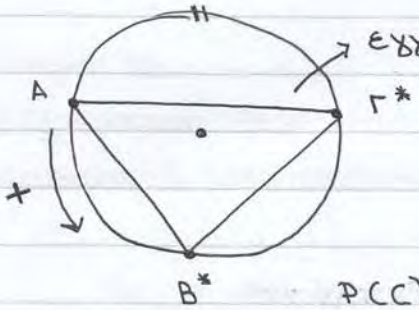
Κατ. 1)



Κοιτάω το ισοπλευρο τρίγωνο, που βρισκεται στο ημιεπίπεδο, που χαρακτηρίζει η ΑΒ, και βρίσκεται το μεγαλύτερο μέρος του κύκλο

Αν C είναι το ενδεχόμενο που μ'ενδιαφέρει επειδή, ο δ.χ είναι πάνω στην περιφερεια του κυκλου, είναι αναλογη του μήκους τοξου, η πιθανότητα. Επίσης, το 1ο δ.σ. είναι αδιαφορο που θα επιλεγεί (λόγω τυχαίας επιλογης) και αρκεί να δούμε τι κάνει $\widehat{AB}$?

(οριακό τρίγωνο)



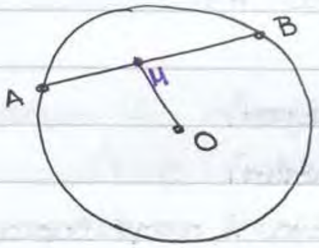
εγγεγραμμένο στον κύκλο

$$C = \left\{ B : 0 \le \widehat{AB} \le \frac{2\pi}{3} \text{ ή } \frac{4\pi}{3} \le \widehat{AB} \le 2\pi \right\}$$

$$P(C) = P\left(0 \le \widehat{AB} \le \frac{2\pi}{3}\right) + P\left(\frac{4\pi}{3} \le \widehat{AB} \le 2\pi\right)$$

$$= \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} + \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Κατασκ. 2



M μέσο της χορδής AB $\Leftrightarrow$ $OM \perp AB$

Είναι μοναδική η αντιστοιχία μεταξύ των M και των χορδών AB, εκτός του M=O $\Rightarrow$ το εξαιρώ το O.

$P(C)$ $\propto$ εμβαδού της περιοχής C στον κυκλ. δίσκο.

(εδώ, υπάρχουν τα οριακά M)

$\rho^* = \frac{1}{2}$

ρ^* : μικρού κύκλου

$\rho = (OM)$

Αν $\rho < \rho^* \Rightarrow$ το τρίγωνο είναι εκτός

Αν $\frac{1}{2} \le \rho < 1 \Rightarrow$ το τρίγωνο είναι εντός.

C

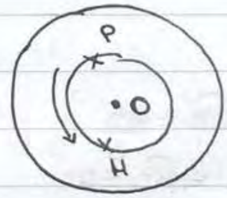
ακτίνα $\rho^* = \frac{1}{2}$

$$P(C^c) = 1 - P(C) = 1 - \frac{\text{εμβαδόν μικρού κύκλου}}{\text{εμβαδόν μεγάλου κύκλου}} = 1 - \frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi \cdot 1^2}$$

$\rho = 1$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Κατασκ. 3: Επιλέγουμε πρώτα στην τύχη μια ακτίνα ρ, $0 < \rho < 1$ και πάνω στην περιφέρεια του κύκλου με ακτίνα ρ, επιλέγουμε σημείο M που να παίζει πάλι το ρόλο του μέσου της χορδής AB.



③ Ορισμοί και πράξεις μεταξύ ενδεχομένων

Ενδεχόμενα:

$\emptyset$: αδύνατο

Ω : βέβαιο

A^c : συμπληρωματικό (πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A)

Πράξεις:

$(A,B) \rightarrow A \cup B$ ή (ένωση 2 ενδεχομένων)

$(A,B) \rightarrow A \cap B$ ή (τομή 2 ενδεχομένων)

Παρατήρηση: Αν τα $AB = \emptyset$ τότε τα λέμε ξένα ή ασυμβίβαστα.

Αν $\{A_i\}_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια ενδεχομένων και αν $A_iA_j = \emptyset$ $\forall\, i \neq j$, τότε λέμε οικογένεια ξένων ανά 2 ή ασυμβίβαστων.

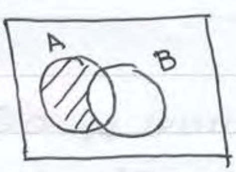
~ Η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση των άλλων

3) $(A,B) \rightarrow A \setminus B$ ή $A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ και $\omega \notin B\}$

(η διαφορά των ενδεχομένων του B από το A

η διαφορά των ενδεχομένων A από το B)

Διαγράμματα Venn: (για αναπαράσταση πράξεων)



$A \setminus B = AB^c$

Τύποι De Morgan

$(A \cup B)^c = A^c B^c$

$(AB)^c = A^c \cup B^c$

19/2/2016

ΜΑΘΗΜΑ 3ο

① Αξιωματική Θεμελίωση (Kolmogorov, 1933)

μαθηματική μοντελοποίηση ενός πειράματος τύχης

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ⇝ χώρος πιθανότητας

- Ω: δειγματικός χώρος (αυθαίρετο σύνολο) → περιέχει τα δ.σ.
- $\mathcal{A}$: συλλογή υποσυνόλων (σ-άλγεβρα) που ικανοποιεί 3 ιδιότητες → περιέχει τα ενδεχόμενα
- P: πραγματική συνολοσυνάρτηση $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ (ικανοποιεί 3 αξιώματα) ↳ αποδίδει πιθανότητα στα ενδεχόμενα.

Ορισμός: Μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω, λέγεται σ-άλγεβρα (επί του Ω)

i) $\phi \in \mathcal{A}$ (μη-κενή)

ii) αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}$ (κλειστή στα συμπληρώματα)

iii) αν $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ $(n \geq 1)$ είναι μια ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{A}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις)

<u>π.χ.</u>/α) $\mathcal{A} = \{\phi, \Omega\}$ (η πιο μικρή σ-άλγεβρα)

β) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (το δυναμοσύνολο του Ω δηλ. "το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων) μεγαλύτερη σ-αλγ.

γ) αν $|\Omega| \geq 2$, και $\phi \subsetneq A \subsetneq \Omega$, τότε
$\mathcal{A} = \{\phi, A, A^c, \Omega\}$ → σ-άλγεβρα

δ) $\Omega = \{1, 2\}$, επιλέγουμε $B = \{\phi, \{1\}, \Omega\}$
αυτό, δεν είναι σ-άλγεβρα, διότι $\{1\}^c = \{2\} \notin B$.

Παρατηρήσεις:

1) Στις Πιθανότητες, τα στοιχεία μιας σ-άλγεβρας λέγονται **ενδεχόμενα**.

2) Σε διακριτούς δ.χ, συνήθως επιλέγουμε $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ στο χώρο πιθανότητας.

Ορισμός:

Μια πραγματική συνολοσυνάρτηση $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται πιθανότητα αν:

Αξίωμα 1: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$ (μη-αρνητική συνολοσυνάρτηση)

Αξίωμα 2: $P(\underline{\Omega}) = 1$ (κανονικοποιημένη)

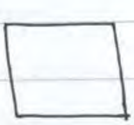
Αξίωμα 3: Αν (A_n) μια ακολουθία ασυμβίβαστων ενδεχομένων, τότε ($A_iA_j = \emptyset \quad i \neq j$)

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$ (σ-προσθετική συνολοσυνάρτηση)

↳ αριθμήσιμα προσθετική

Ιδιότητες:

1) $P(\emptyset) = 0$



$\underline{\Omega}$ς αξίωμα: Μια επιφάνεια που έχει συνολική μάζα 1

~ Η μάζα του τίποτα είναι 0

Αφού,

$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset \cup \ldots$ (τα κενά ακολουθία ασυμβίβαστων)

Άρα, από Αξ. 3

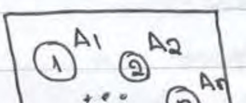
$P(\cancel{\emptyset}) = P(\cancel{\emptyset}) + P(\emptyset) + \ldots + \ldots \xRightarrow{P(\emptyset) \geq 0}$

$0 = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots + P(\emptyset)$

Όμως, $P(\emptyset) \geq 0$, αν $P(\emptyset) > 0$, άτοπο! $\Rightarrow P(\emptyset) = 0$

2) Αν $A_1, A_2, \ldots A_n$ ασυμβίβαστα ενδεχόμενα τότε:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$ (ιδιότητα πεπερ. προσθετική της πιθανότητας)



Η μάζα n-κομματιών $= \sum_{i=1}^{n}$ μαζών (i)

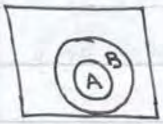
~ Απόδειξη:

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$ Λόγω ότι $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ είναι ασυμβίβαστα, το ίδιο συμβαίνει, αν συμπληρωθούν με κενά.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{(*)\,Αξ.3}{=} P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \underset{0}{P(\emptyset)} + P(\emptyset) + \ldots$$

$$\overset{ιδ.1}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3) Αν $A \subset B$ τότε $P(A) \le P(B)$ $\left[\Rightarrow \text{μάζα του μέρους} \le \text{μάζα του όλου}\right]$



$B = A \cup (B\setminus A)$ και $A(B\setminus A)=\emptyset$

άρα, από ιδ.2 $P(B)=P(A)+P(B\setminus A) \ge P(A)$

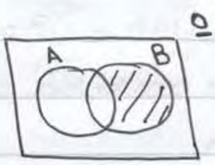
$(P(B\setminus A)\ge 0)$

4) $0\le P(A)\le 1$

• $0\le P(A)$ αξ.1

• $P(A)\le 1$ αφού $A\subset \Omega \overset{(3)}{\Longrightarrow} P(A)\le P(\Omega)=1$

5) $P(B\setminus A)=P(B)-P(AB)$



Έχουμε $B=(B\setminus A)\cup BA$ (ένωση ξένη)

$P(B)\overset{ιδ.2}{=}P(B\setminus A)+P(AB)$

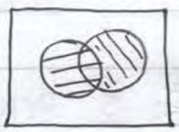
$\Rightarrow P(B\setminus A)=P(B)-P(AB)$

6) $P(A^c)=1-P(A)$

Απόδειξη

$A^c=\Omega\setminus A \Rightarrow P(A^c)=P(\Omega\setminus A)\overset{ιδ5}{=}P(\Omega)-P(A\Omega)=1-P(A)$

7) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

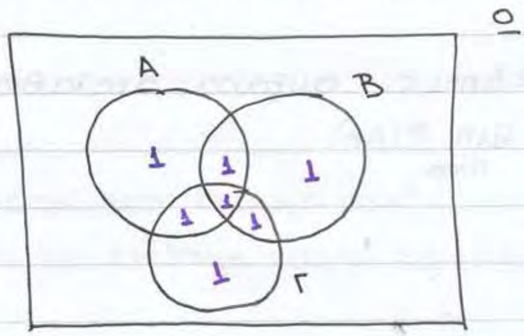


$A\cup B = A\cup(B\setminus A)$ (ξένη ένωση)

$\overset{ιδ.2}{\Longrightarrow} P(A\cup B)=P(A)+P(B\setminus A)\overset{ιδ.5}{=}P(A)+P(B)-P(AB)$

8) γενίκευση για n-πλήθος (αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού)

$P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(AB)-P(A\Gamma)-P(B\Gamma)+P(AB\Gamma)$



Τύπος του Poincaré

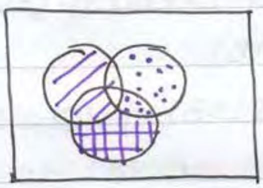
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) = P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n) - P(A_1A_2) - \dots - P(A_{n-1}A_n)$$
$$+P(A_1A_2A_3)+\dots+P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \dots + (-1)^{n+1}P(A_1A_2\dots A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2\dots A_n)$$

Επαγωγή στο n.

9) α) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (ιδιότητα υπο σ-προσθετικότητας της πιθανότητας)
↳ αριθμήσιμη

για $(A_n)_{n\geq 1}$ για οποιαδήποτε ακολουθία ενδεχομένων

Απόδειξη:



Ιδέα: γράφουμε (i) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ και (ii) $(B_n)_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία ασυμβίβαστων ενδεχομένων

~Ανάλογα την (A_n)

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$

$\vdots$

$B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1})$

Μπορείτε ν.δ.ο ότι αυτή η (B_n) ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii)

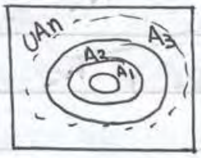
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{(i)}{=} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \overset{\sigma\text{-προσθ.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) \overset{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

$(*)$ $B_n \subset A_n \Rightarrow P(B_n) \leq P(A_n) \quad \forall n = 1, 2, \dots$

10) Αν $A_1 \subset A_2 \subset \dots A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ αύξουσα ακολουθία ενδεχομένων

τότε, $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Απόδειξη:



Για αύξουσα ακολουθία: $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$

Παρατήρηση:

αν $\lim_{n\to+\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Θα μπορούσα να πω:

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \overset{B_k \text{ ξένα } 1\le k\le n}{=} \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ αύξουσα A_n.

11) Αν $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$ φθίνουσα ακολουθία ενδεχομένων, τότε $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Υπόδειξη: Υπολογίστε $P\left[\left(\bigcap A_n\right)^c\right]$ και $\{A_n\}^c$ είναι αύξουσα.

② Παράδοξο - Το δίλημμα του Monty-Hall

3 κουτιά

Το παιχνίδι χωρίζεται σε 2 φάσεις

φάση 1: διαλέγει ο παίκτης ένα κουτί

φάση 2: αφού ο παίκτης επιλέξει ο παρουσιαστής θα του ανοίξει ένα από τα 2 κουτιά που δεν έχει επιλεχθεί (1 με γίδα).

∃ ένα κουτί → αμάξι

στα άλλα 2 γίδες.

Δίλημμα:

Σ_1: "μένει πιστός στην επιλογή του"

Σ_2: "αλλάζει την επιλογή του, με το κουτί που μένει"

Ποιο τον συμφέρει: Σ_1 ή Σ_2;

ΚΕΡΔΙΖΩ ΟΤΑΝ:

$P_1 = P($"ο παικτης να κερδίσει κάτω απο Σ_1"$)$ $\xleftarrow{}$ A_1 : όταν 1η θεση→1

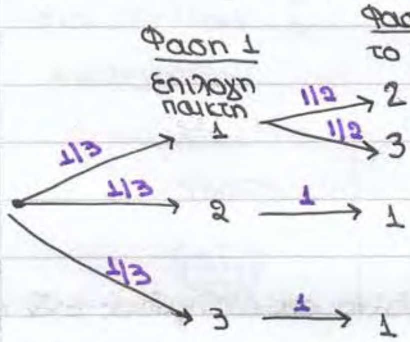
$P_2 = P($" ο » » » » Σ_2"$)$ $\xleftarrow{}$ A_2 : όταν 2η θεση→

$P_1 < P_2$, $P_1 = P_2$, $P_1 > P_2$

"πλεον.

Λύση 1: δωρο

2,3: γίδες



Φαση 2:
το κουτί που θα αφήσει ο παρ.

$\Omega = \{(1,2), (1,3), (2,1), (3,1)\}$

$\downarrow$ $\frac{1}{6}$, $\downarrow$ $\frac{1}{6}$, $\downarrow$ $\frac{1}{3}$, $\downarrow$ $\frac{1}{3}$

$A_1 = \{(1,2), (1,3)\} \Rightarrow P(A_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$A_2 = \{(2,1), (3,1)\} \Rightarrow P(A_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Άρα $P_1 = P(A_1) < P(A_2) = P_2$.

~Παραλλαγές:

1) Ορίζω Σ_3: "επιλέγω ισοπιθανα κάποιο από τα 2 κουτια;")

A_3: "να κερδίσω κάτω από την Σ_3"

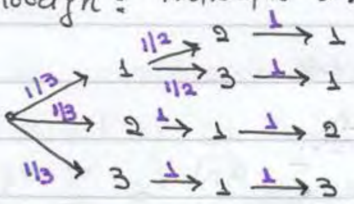
$P_3 = P(A_3)$?

2) Αν $\Sigma(p)$ = "επιλέγω με πιθανότητα p, το κουτί που αρχικά διάλεξα"

A_p = "να κερδίσω κάτω απο $\Sigma(p)$"

Να βρεθεί το p, που μεγιστοποιεί την πιθανότητα μου να κερδίσω"

Υπόδειξη: καινούριο δ.χ., π.χ. η Σ_1 αντιστοιχεί στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα.



ΜΑΘΗΜΑ 4ο 22/12/16

① Κλασσική πιθανότητα.

Υπενθύμιση:

προϋποθέσεις: πεπερασμένος δ.χ. + ισοπίθανα δ.σ.

Αν Α ενδεχόμενο τότε $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Μάλιστα, αν $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{|\{\omega_i\}|}{\Omega} = \frac{1}{n} \quad i = 1, \dots, n$$ (πράγματι δ.σ. ισοπίθανα)

Πρόταση:

Η κλασσική πιθανότητα είναι πράγματι πιθανότητα (κατά Kolmogorov)

Θεωρούμε ως χ.π $(\Omega, \mathcal{A}, P) \to$ συνολοσυνάρτηση που καθορίζεται από την κλασσική πιθανότητα

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

(i) $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \geq 0$ προφανές

(ii) $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$ ✓

(iii) Αν $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ασυμβίβαστων ενδεχομένων πρέπει:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολ. ασυμβίβαστων ενδεχομένων

Θεωρώ $N = \{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \emptyset\}$. Το N είναι πεπερασμένο. Πράγματι, (άπειρη)

Αν υποθέσουμε ότι είναι άπειρο, τότε μπορώ να φτιάξω μια ακολουθία διακεκριμένων στοιχείων $\omega_{n_k} \in A_{n_k}$ $k = 1, 2, \dots$

(το διακεκριμένο έρχεται από την υπόθεση ότι είναι ασυμβίβαστα)

Άρα, ο Ω έχει άπειρα στοιχεία → άτοπο!

Άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n\in N} A_n$, N πεπερασμένο

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \frac{\left|\bigcup_{n\in N} A_n\right|}{|\Omega|} \overset{\text{αρχή αθρ.}}{\underset{(*)}{=}} \frac{\sum_{n\in N}|A_n|}{|\Omega|} = \sum_{n\in N}\frac{|A_n|}{|\Omega|}$$

$$= \sum_{n\in N} P(A_n) = \sum_{n\in N} P(A_n) + \sum_{n\in N^c} \underbrace{P(\phi)}_{=0} = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

② Αρχές Συνδυαστικής – Βασικές αρχές απαρίθμησης

Ⓐ Αρχή του αθροίσματος

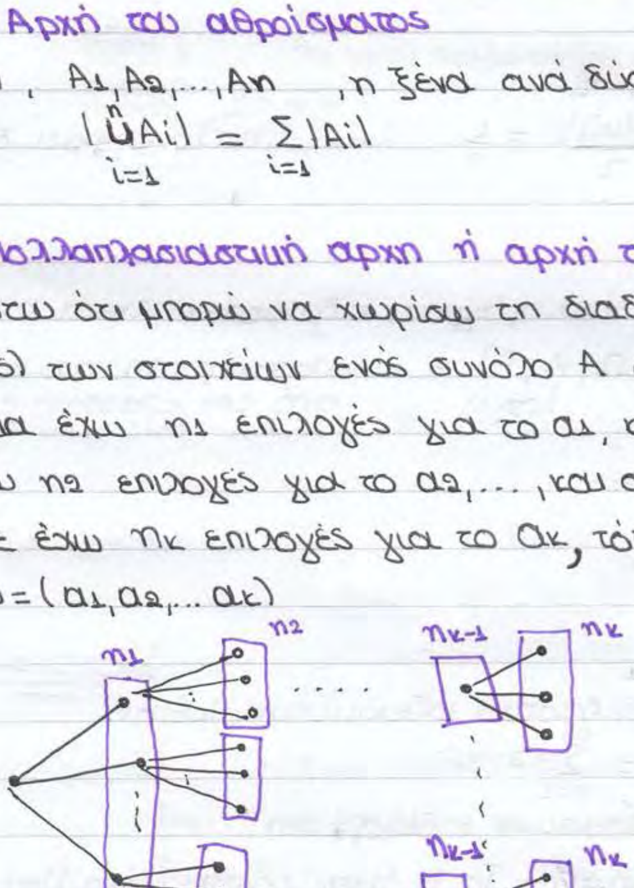
Αν, $A_1, A_2, \dots, A_n$, n ξένα ανά δύο σύνολα

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1} |A_i|$$

Ⓑ Πολλαπλασιαστική αρχή ή αρχή του γινομένου.

Έστω ότι μπορώ να χωρίσω τη διαδικασία καταγραφής (απαρίθμησης) των στοιχείων ενός συνόλου A σε κ-βήματα, όπου στο 1º βήμα έχω n_1 επιλογές για το a_1, και ∀ μια επιλογή του a_1 έχω n_2 επιλογές για το $a_2, \dots$, και αν έχω καθορίσει τα $a_1, \dots, a_{k-1}$ τότε έχω n_k επιλογές για το a_k, τότε συνολικά: $|A| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$

$\omega = (a_1, a_2, \dots a_k)$

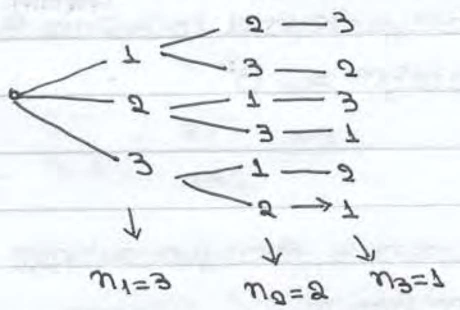


Βήμα	1	2	κ-1	κ
στοιχεία	a_1	a_2	a_{k-1}	a_k
# διαδρομών μέχρι βήμα i	n_1	$n_1 n_2$	$n_1 n_2 \dots n_{k-1}$	$n_1 n_2 \dots n_k$

π.χ # μεταθέσεων 3 στοιχείων?

$\omega = (a_1, a_2, a_3)$

$3 \times 2 \times 1 = 6$



μεταθέσεις 3 στοιχείων

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

μεταθέσεων.

Παρατήρηση:
Σε κάθε βήμα αρκεί να έχω το ίδιο πλήθος επιλογών, χωρίς κατ'ανάγκη να αντιστοιχεί στο ίδιο σύνολο επιλογών

③ Διατάξεις - Μεταθέσεις

Ορισμ: Λέμε **διατάξεις** των n-στοιχείων ανά k, κάθε τοποθέτηση k-στοιχείων από τα n σε μια σειρά (χωρίς επανάληψη)

διατάξεων n ανά k $= (n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

π.χ $\{1,2,3\}$, διατάξεις των 3 ανά 2

$(3)_2 = 3 \cdot 2 = 6$

12 31
13 32
23
21

Ορισμ: Λέμε **μετάθεση** n-στοιχείων, κάθε τοποθέτηση n-στοιχείων σε σειρά (χωρίς επανάληψη)

μεταθέσεων n-στοιχείων $= n!$.

Ειδικότερα, διατάξεις των n ανά $k=n$, όπου $(n!) = (n)_n$

Ορισμ: Λέμε **διάταξη με επανάληψη** των n-στοιχείων ανά k (ή επαναληπτική διάταξη), κάθε τοποθέτηση k-στοιχείων από τα n σε μια σειρά με δυνατότητα επανάληψης

επαν. διατάξεων n ανά k $= n^k$

π.χ 8 αθλητές στίβου τρέχουν στο στίβο

\# διαφορετικών σειρών κατάταξης = ? 8! (μεταθέσεις)

\# διαφορετικών τριάδων νικητών = ? #σε ← $(8)_3 = 8\cdot 7\cdot 6$ ↳# επιλ

1 αθλητής συμμετέχει σε 3 αγωνίσματα (συνολικά 8 διαγ.)

\# διαφορετικών σειρών κατάταξης = 8^3

④ Συνδυασμός:

Ορισμ: **Συνδυασμός** των n-στοιχείων ανά κ, είναι μια συλλογή κ-στοιχείων από τα n (χωρίς επανάληψη)

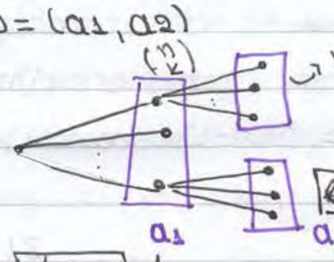
$$\#\text{ συνδυασμών } n \text{ ανά } \kappa = \binom{n}{\kappa} = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!} = \frac{(n)_\kappa}{\kappa!} = \frac{n(n-1)\dots(n-\kappa+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot \kappa}$$

(συλλογή ≡ επιλογή χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά)

~ Απόδειξη:

$\Omega = \{\text{διάταξη των } n \text{ ανά } \kappa\}$

$\omega = (a_1, a_2)$



επιλογή κ-στοιχείων από τα n (χωρίς σειρά, χωρίς επανάληψη)

$$|\Omega| = (n)_\kappa \overset{\text{πολλαπλ.}}{\underset{\text{αρχή}}{=}} \binom{n}{\kappa}\kappa!$$

$$\Rightarrow \binom{n}{\kappa} = \frac{(n)_\kappa}{\kappa!}$$

Ορισμ: **Επαναληπτικός συνδυασμός** των n στοιχείων ανά κ, είναι μια επιλογή κ-στοιχείων από τα n με δυνατότητα επανάληψης, χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης.

$$\#\text{ επαναληπτικών συνδυασμών των } n \text{ ανά } \kappa \overset{\text{συμβ}}{=} \left[\begin{matrix} n \\ \kappa \end{matrix}\right] = \binom{n+\kappa-1}{\kappa}$$

$$= \frac{n(n+1)\dots(n+\kappa-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot \kappa}$$

Παραδείγματα:

- # διαφορετικών αποτελεσμάτων όταν ρίχνουμε τα ζάρια στο τάβλι ?

  στοιχεία $\{1,2,\dots,6\}$

  πλήθος στοιχείων $n=6$ $\xrightarrow{\text{επανάληψη}}$ ΝΑΙ → επαναληπτικούς

  πλήθος επιλογών $k=2$ $\xrightarrow{\text{σειρά}}$ ΟΧΙ → συνδυασμούς

$$\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix} = \frac{6\cdot7}{1\cdot2} = 21$$

- # διαφορετικών εξάδων στο LOTTO ?

  στοιχεία $\{1,2,\dots 49\}$

  πλήθος στοιχείων $n=49$ $\xrightarrow{\text{επαν.}}$ ΟΧΙ

  » επιλογών $k=6$ $\xrightarrow{\text{σειρά}}$ ΟΧΙ

  $\Big\}$ απλοί συνδυασμοί $\binom{n}{k}=\binom{49}{6}$

- # διαφορετικών κατανομών μεταλλίων σε 4 αγωνίσματα ενός αθλητή;

  στοιχεία $\{Χρ, Αρ, Χα\}$

  # στοιχείων $n=3$ $\xrightarrow{\text{επαν}}$ ΝΑΙ

  # επιλογών $k=4$ $\xrightarrow{\text{σειρα}}$ ΟΧΙ

  $\Big\}$ ⇒ επαναληπτικοί συνδυασμο.

$$\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 15$$

Συνοπτικά:

στοιχείων n, # επιλογών k

1ο) $\xrightarrow{\text{επαν}}$ ΟΧΙ, $\xrightarrow{\text{σειρ.}}$ ΝΑΙ → διατάξεις

2ο) $\xrightarrow{\text{επαν}}$ ΟΧΙ, → ΟΧΙ → συνδυασμοί

3ο) $\xrightarrow{\text{επαν}}$ ΝΑΙ, $\xrightarrow{\text{σειρ.}}$ ΝΑΙ → επαναλ. διατάξεις

4ο) $\xrightarrow{\text{επαν}}$ ΝΑΙ, ΟΧΙ → επαναλ. συνδυασ

(5) Ασκήσεις.

1) Προβλήματα στο Λόττο

$\{1,2,\dots 49\}$

↳ φτιάχνω $6^{\underline{\underline{άδες}}}$

Σε 1 στήλη α) P ("να πιάσω $6^{αρι}$")

β) P ("να πιάσω $5^{αρι}$")

Άσκηση σπίτι.

γ) Πόσο πιο πιθανό είναι να πιάσω $5^{αρι}$ από $6^{αρι}$?

δ) Πόσο πιο πιθανό είναι να πιάσω $4^{αρι}$ από $5^{αρι}$?

ε) P ("να μην κερδίσουμε τίποτα")?

ζ) Τι είναι πιο πιθανό να μην πιάσουμε τίποτα, ή να πιάσουμε ένα?

η) Τι είναι πιο πιθανό, να μην πιανουμε τίποτα ή να πιάσουμε τουλάχιστον 1?

Λύση:

$\underline{Ω} = \{$συνδυασμός των 49 ανα 6$\}$ ή $\{$διαταξη των 49 ανα 6$\}$

$|\underline{Ω}| = \binom{49}{6}$ → έχω ισοπίθανα δ.σ. (επιτρέπει να χρησιμοπ. την κλασσική πιθ)

α) A = "να πιάσω $6^{αρι}$"

$|A| = 1$, όταν παίζω μια στήλη

$$P(A) = \frac{|A|}{|\underline{Ω}|} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

β) B = "να πιάσω $5^{αρι}$"

$$|B| \overset{\text{πολλ/ση}}{\underset{\text{αρχη}}{=}} \underbrace{\binom{6}{5}}_{\substack{\#\text{τρόπων}\\ \text{που μπορώ}\\ \text{να πιάσω}\\ 5}} \times \underbrace{\binom{43}{1}}_{\substack{\#\text{τρόπων}\\ \text{που μπορώ να}\\ \text{χάσω } 1}}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\underline{Ω}|} = \frac{\binom{6}{5} 43}{\binom{49}{6}}$$

2) Φυλλ. 1 → Ασκ. 8

(i) Αν $(A_n)_{n\geq 1}$: $P(A_n)=0$, $\forall\, n\geq 1$ τότε $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=0$

(ii) Αν $(A_n)_{n\geq 1}$: $P(A_n)=1$, $\forall\, n\geq 1$ τότε $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)=1$

Λύση:

(i) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \overset{\text{υπο σ-προσθ.}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 0$, διότι $P(A_n)=0$, $\forall\, n\geq 1$

ii) $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right]$ (1)

Όμως $P(A_n^c) = 1 - P(A_n) = 0$ (2)

Από (1) και (2) + λόγω της ιδιοτ (i), έχουμε $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)=0$

$\Rightarrow P(\bigcap A_n)=1.$

24/2/16

ΜΑΘΗΜΑ 5ο

Ασκήσεις φυλλαδίου

Ασκ.1 (πρόβλημα γενεθλίων)

Θέτουμε $p_n = P($" $\exists$ τουλάχιστον 2 άτομα μεταξύ n
που έχουν γενέθλια ίδια μέρα")

Να βρεθεί το ελάχιστο n : $p_n \geq 0{,}5$

(ο χρόνος έχει 365 μέρες, ισοπίθανα κάθε μέρα από τις 365, είναι μέρα γενεθλίων)

ΠΡΟΣΟΧΗ!
Δεν παίρνω συνδυασμό γιατί οι επαναληπτικοί συνδυασμοί → όχι ισοπιθ.
⇓
διατάξεις.

Λύση

n άτομα → n μέρες γενεθλίων

Πρώτη σκέψη είναι να πάω σε επαναληπτικούς συνδυασμούς (έχω δυνατότητα επανάληψης και δεν με ενδιαφέρει η σειρά επιλογής)

Δεν μπορώ να πάω με κλασσική πιθανότητα, άρα πάω με διατάξεις.

$\Omega = \{1, 2, \dots, 365\}^n$, επαναληπτικές διατάξεις των 365 ανά n, και άρα $|\Omega| = 365^n$

A = " $\exists$ τουλάχιστον 2 άτομα... μέρα" $P(A) = ?$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

A^c = " Τα n-άτομα έχουν γενέθλια σε διαφορετικές μέρες"

$\omega \in A^c$ $\quad \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 365 & 364 & 365-n+1 \end{array}$$ πολλαπλ. αρχή.

Είναι $|A^c| = (365)_n$ → απλές διατάξεις.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{(365)_n}{365^n} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots (365-n+1)}{365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365}$$

$2 \leq n \leq 365$

Προκύπτει για $n = 23$ $\quad P_{23} \approx 0{,}507$

Ασκ3 (πρόβλημα Γαλιλαίου)

Αν A_i : " το άθροισμα των ενδείξεων 3 ζαριών είναι i "

(i) $P(A_9) = ?$ (ii) $P(A_{10}) = ?$ (iii) Να συγκριθούν οι $P(A_{10})$ και $P(A_{11})$ χωρίς να υπολογισθούν.

Λύση:

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^3$ ισοπίθανα δ.σ.

$|\Omega| = 6^3 = 216$

~καταγραφή:

(i) $A_9 = \begin{cases} (1,2,6),\ (1,3,5),\ (1,4,4),\ (1,5,3),\ (1,6,2) \\ (2,1,6),\ (2,2,5),\ (2,3,4),\ (2,4,3),\ (2,5,2),\ (2,6,1) \\ (3,1,5),\ (3,2,4),\ (3,3,3),\ (3,4,2),\ (3,5,1) \\ (4,1,5),\ (4,2,3),\ (4,3,2),\ (4,4,1) \\ (5,1,3),\ (5,5,2),\ (5,3,1) \\ (6,1,2),\ (6,2,1) \end{cases}$

$|A_9| = 5+6+5+4+3+2 = 25$

ο πιο έξυπνος τρόπος: [Δεν με νοιάζει η σειρά εδώ]

- $[1, 2, 6] \to 6 \to \frac{3!}{1!1!1!}$
- $[1, 3, 5] \to 6$ (εμπεριέχεται το $[1,5,3]$)
- $[1, 4, 4] \to 3 = \frac{3!}{2!1!}$ (έχω 2 όμοια άρα σκέφτομαι τη θέση του άσσου)
- $[2, 2, 5] \to 3$
- $[2, 3, 4] \to 6$
- $[3, 3, 3] \to 1$

Ουσιαστικά για την αρίθμηση:

ℓ είδη στοιχείων, όπου

$\sim k_1 + k_2 + \dots + k_\ell = k$

$\downarrow$ # επαναλ του $1^{ου}$ είδους

επιλογών $\dots \Rightarrow \dfrac{k!}{k_1!\,k_2!\dots k_\ell!}$

$|A_9| = 6+6+3+3+6+1 = 25$

$P(A_9) = \dfrac{|A_9|}{|\Omega|} = \dfrac{25}{216}$

[1,3,6] → 6
[1,4,5] → 6
[2,2,6] → 3
[2,3,5] → 6
[2,4,4] → 3
[3,3,4] → 3

Τελικά $|A_{10}| = 6+6+3+6+3+3 = 27$

Άρα $P(A_{10}) = \dfrac{27}{216}$

(iii) Ορίζουμε $f: A_{10} \to A_{11}$

$$(x_1, x_2, x_3) \to (7-x_1, 7-x_2, 7-x_3)$$

Η f είναι καλά ορισμένη, "1-1" και επί

Καλά ορισμένη

αν $(x_1,x_2,x_3) \in A_{10}$, τότε $x_1+x_2+x_3 = 10 \Rightarrow$

$$(7-x_1)+(7-x_2)+(7-x_3) = 21-(x_1+x_2+x_3) = 21-10 = 11$$

$$\Rightarrow f(x_1,x_2,x_3) = (7-x_1, 7-x_2, 7-x_3) \in A_{11}$$

και εύκολα βγαίνει "1-1" και επί. Άρα $|A_{10}| = |A_{11}|$

$$\Rightarrow P(A_{10}) = \frac{|A_{10}|}{|\Omega|} = \frac{|A_{11}|}{|\Omega|} = P(A_{11})$$

Ασκ.6) Σε μια προφορική εξέταση, ο φοιτητής οφείλει να απαντήσει σε 8/10 ερωτήσεις:

α) Πόσες επιλογές έχει;

β) » » », αν υποχρεούται να απαντήσει τις 5 πρώτες;

γ) » » », » » τουλάχιστον 4 από τις 5 πρώτες;

Λύση:

(α) $\binom{10}{8}$ επιλογές (όχι σειρά, όχι επανάληψη)

(β) $\underline{1,2,3}$ $\quad$ $\underline{4-10}$

$1 \times \binom{7}{5}$ $\quad$ Πολλαπλασιαστική αρχή

(γ) $\underline{1-5}$ $\quad$ $\underline{6-10}$

απαντά στις 5 πρώτες ερωτήσεις.

Αν A ενδεχόμενο $|A| = |A_1| + |A_2|$ αφού $A = A_1 \cup A_2$ $\quad A_1 A_2 = \phi$

σε ακριβώς σε 4/5 πρώτες

όπου $|A_1| = \binom{5}{4} \times \binom{5}{4}$ (1-5, 6-10)

$|A_2| = \underbrace{\binom{5}{5}}_{=1} \times \binom{5}{3}$

Ασκ. 10) Έστω ότι έχουμε n διακεκριμένα σημεία πάνω σε μια ευθεία γραμμή.

(i) Επιλέγουμε 2 σημεία $(n \geq 2)$ και ζητάμε πιθανότητα να είναι γειτονικά.

(ii) (Γενίκευση): Ποια είναι η πιθανότητα να είναι γειτονικά, επιλέξουμε τυχαία k-από αυτά $(2 \leq k \leq n)$

(iii) Υπολογίστε την πιθανότητα αυτή, αν τα σημεία βρίσκονται σε κύκλο

Λύση

i) $1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n$ $\quad$ Δεν έχω δυνατότητα επανάληψης.

$\Omega = \{(i,j) \in \{1,2,\ldots n\} : i \neq j\}$ (διατάξεις) [μπορούμε και με συνδυασμούς]

$$A = \{\omega \in \Omega : |j-i| = 1\} = \left\{ \begin{matrix} (2,1), (3,2), \ldots (n, n-1) \\ (1,2), (2,3), \ldots (n-1, n) \end{matrix} \right\}$$

Τελικά $|A| = 2(n-1)$

$$P(A) = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

(ii) $\Omega = \{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \{1,2,\dots,n\} : 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n\}$ (π.χ. με συνδυασμούς)

$|\Omega| = \binom{n}{k}$ $\quad |A| = (n-k+1)$

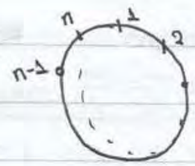
$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}$$

$\omega = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$n-k+1 \quad 1 \quad 1$

για $k=2$, $\dfrac{n-1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \dfrac{2}{n}$ (επαλήθευση του (i))

iii) 

$$P(A) = \frac{\#\text{ γειτόνων}}{\#\text{ σημείων που απομένουν}} = \frac{2}{n-1} > \frac{2}{n}$$

Τύπος

~ Διωνυμικός του Νεύτωνα ~

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Απόδειξη: $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1$

$$(x+y)^n = \underset{1}{(x+y)}\underset{2}{(x+y)}\dots\underset{n}{(x+y)} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k}$$

$k = \#$ φορών που επέλεξα το x.

$a_k = \binom{n}{k}$ οι συνδυασμοί των n ανά k

$\#$ δυνατών υποσυνόλων του $\{1,2,\dots,n\}$ με k-στοιχεία

Απλές ιδιότητες:

(1) τρίγωνο Pascal

1	$\to (x+y)^0$
1 1	$\to x+y$
1 2 1	$\to (x+y)^2$
1 3 3 1	$\to (x+y)^3$
1 4 6 4 1	$\to (x+y)^4$

(2) $\binom{n}{0}=1$ $\quad\binom{n}{n}=1$ Γενικότερα $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$ (και από τρίγωνο Pascal)

(3) $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

↓

$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot 1^{n-k}$

$$\left[\begin{array}{l}\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}=0\\ (1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}=0\\ (-1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}=0\end{array}\right]$$

ΜΑΘΗΜΑ 6ο

26/2/16

① Κατανομές σφαιριδίων σε κελιά.

Περιπτώσεις: Έχουμε k-σφαιρίδια να τοποθετήσουμε σε n-κελιά

\# διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης ?

a) Τα σφαιρίδια είναι διακεκριμένα (μας ενδιαφέρει η σειρά)

(i) Τα κελιά έχουν απεριόριστη χωρητικότητα

(ii) Έχουν χωρητικότητα 1.

(i) Τα n-σφαιρίδια → n-κελιά

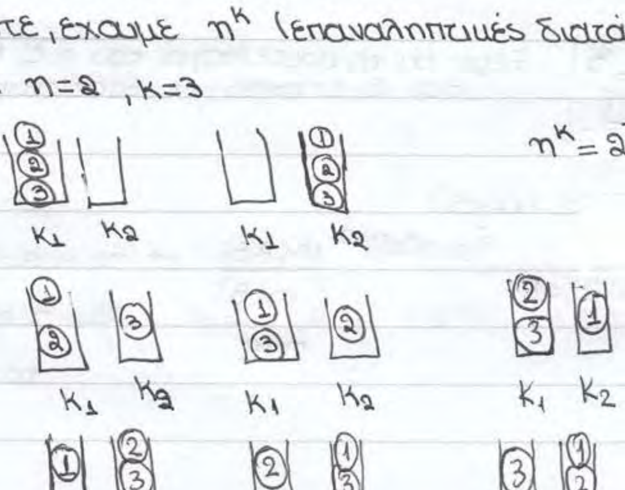
Με κάθε τοποθέτηση, επιλέγω ένα κελί.

απεριόριστη χωρητικότητα ⇒ ∃ δυνατότητα επανάληψης

Τότε, έχουμε n^k (επαναληπτικές διατάξεις) τρόπους τοποθέτησης

π.χ $n=2$, $k=3$

$n^k=2^3=8$ διαφορετικούς τρόπους



(ii) δεν υπάρχει δυνατότητα επανάληψης $k \leq n$

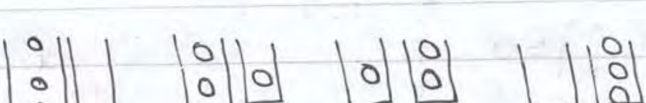
$\# \text{τρόπων} = (n)_k$

β) Τα σφαιρίδια είναι όμοια (δεν μας ενδιαφέρει η σειρά)

(i) έχω απεριόριστη χωρητικότητα ($\exists$ διατάξεις επαν.)

π.χ $n=2$, $k=3$ $\qquad \# \text{τρόπων} = \left[{n \atop k} \right]$

$$\left[{2 \atop 3} \right] = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 4}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}} = 4$$



(μη αριθμημένα ⇒ απλά με ενδιαφέρει πόσα σφαιρίδια έχει το κάθε κελί)

(ii) έχω χωρητικότητα 1

$\# \text{τρόποι} = \binom{n}{k}$

Δεσμευμένη Πιθανότητα:

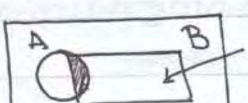
① Κίνητρο και Διαισθητικές ερμηνείες.

Ας υποθέσουμε ότι:

(i) Έχουμε μοντελοποιήσει ένα π.ε. με ένα χ.π. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, με σκοπό να αποδώσουμε βαθμό βεβαιότητας στα ενδεχόμενα

(ii) μια πληροφορία καταφθάνει, η οποία εκφράζεται, μέσα από την πραγματοποίηση κάποιου ενδεχομένου B (κάποιο γεγονός έγινε γνωστό)

Τότε, ο βαθμός βεβαιότητας του A μεταβάλλεται από $P(A)$ σε $P(A|B)$, και θα το λέμε δεσμευμένη πιθανότητα του A, δοθέντος του B.



Ξέρω ότι το αποτέλεσμα του π.ε. βρίσκεται στο B (πρέπει να εστιάσουμε στο B)

άρα (εκφράζω με μάζες)

$$\underbrace{m(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)=1}}_{\text{αρχικά}} \xrightarrow{\text{διαισθητικά}} \underbrace{\frac{m(AB)}{m(B)}}_{\text{τώρα}}$$

→ το ποσοστό της μάζας του B που καταλαμβάνει το A.

Παρατήρηση:

Είτε η πραγματοποίηση του B εκφράζει κάποιο πραγματικό γεγονός (παρατήρηση), είτε εκφράζει μια σκέψη "αν πραγματοποιηθεί το B".

~Παράδειγμα:

P ("ντόρτια" | "άθροισμα των 2 ζαριών είναι 8")

P ("χρόνος ζωής μηχανής >10" | "έχει λειτουργήσει ήδη 5 χρ")

P ("έγκυος" | "το πρώτο τεστ βγήκε θετικό")

P ("να περάσω πιθανότητες 1" | "παρακολουθώ συστηματικά το μάθημα")

P (" ο κλέφτης να βρίσκεται στο A" | "βρίσκεται στο B")

② Ορισμός και Σχόλια

Ορισμ: Έστω B ενδεχόμενο με $P(B)>0$. Αν A ενδεχόμενο τότε ορίζουμε

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Παρατηρήσεις

1) $P(\emptyset|B)=0$, $P(\Omega|B)=1$, $P(B|B)=1$, $P(B^c|B)=0$

2) $(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow[B,\,P(B)>0]{} (\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot|B))$ είναι κανονικός χώρος πιθανότητας

αποδεικνύεται εύκολα ότι η $P(\cdot|B)$ είναι πράγματι συνάρτηση πιθ.

⇓

ισχύουν οι ιδιότητες που ισχύουν για την πιθανότητα

3) Γενικά $P(A|B) \neq P(B|A)$ (δεν είναι συμμετρικός ο ρόλος των A και B)

③ Παραδείγματα

(i) P ("ντορτια" | "άθροισμα των ενδείξεων είναι 8")

$\downarrow$ A $\qquad \downarrow$ B

$\Omega = \{(i,j): 1 \leq i,j \leq 6\}$ → κάνει τα δ.σ ισοπίθανα

$A = \{(4,4)\}$ $\quad B = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$

$P(B) = \frac{5}{36}$ $\quad P(A) = \frac{1}{36}$

$P(AB) = P(\{4,4\}) = \frac{1}{36}$

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1}{5}$

~ Παρατηρήσεις:

1) Αν υπολόγιζα $P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

(εδώ γνωρίζω πλήρως το αποτέλεσμα του π.τ)

2) Σε προβλήματα που ανάγονται σε κλασσική πιθανότητα,

$$P(A|B) = \frac{|AB|}{|B|}$$

3) Στρίβουμε ένα νόμισμα 2 φορές. Αν υποθέσουμε ότι τα 4 δ.σ. του $\Omega = \{(K,K), (K,\Gamma), (\Gamma,K), (\Gamma,\Gamma)\}$ είναι ισοπίθανοι, ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε Κ και στις 2 ρίψεις, με δεδομένο

(α) στο 1ο στρίψιμο του νομίσματος έχουμε Κ

(β) τουλάχιστον σε ένα στρίψιμο έχουμε Κ.

Λυση:

α) $A = \{(K,K)\}$ $\quad B = \{(K,K)\ (K,\Gamma)\}$

Άρα $P(A|B) = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{1}{2}$

β) $\Gamma = \{(K,K), (\Gamma,K), (K,\Gamma)\}$

$$P(A|\Gamma) = \frac{|A\Gamma|}{|\Gamma|} = \frac{1}{3}$$

④ Υπολογιστικές τεχνικές για δεσμευμένη πιθανότητα

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(B)\cdot P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(A)\cdot P(B|A)$$

~για $n=3$:

$$P(AB\Gamma) = P(A)\cdot P(B|A)P(\Gamma|AB) \overset{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}}{=} \cancel{P(A)}\,\frac{\cancel{P(AB)}}{\cancel{P(A)}}\cdot\frac{P(AB\Gamma)}{\cancel{P(AB)}}$$

i) πολλικός νόμος των πιθανοτήτων

Αν $P(A_1A_2\ldots A_n) > 0$

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

~Παρατήρηση:

Έχουμε $A_1A_2\ldots A_k \supset A_1A_2\ldots A_{n-1}$, $\forall\ 1\le k\le n-1$

$\Rightarrow P(A_1A_2\ldots A_k) \geq P(A_1A_2\ldots A_{n-1}) > 0$ ορίζονται καλά όλες οι δεσμευμένες πιθανότητες.

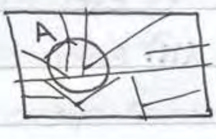
(ii) Θεώρημα ολικής πιθανότητας.

Έστω $(B_i)_{i\in I}$ αριθμήσιμη διαμέριση του Ω (αρκεί να μας καλύπτει το A, όχι απαραίτητα διαμέριση του Ω)

$\left(\bigcup_{i\in I} B_i = \Omega,\ B_iB_j=\emptyset\ \ i\neq j,\ I:\text{ το πολύ αριθμήσιμο}\right)$

με $P(B_i)>0\ \forall\ i\in I$. Τότε: $P(A) = \sum_{i\in I} P(B_i)\cdot P(A|B_i)$

Ω



$$P(A) = \sum_{i\in I} P(AB_i) = \sum_{i\in I} P(B_i)P(A|B_i)$$

• Ειδικότερα, αν I είναι πεπερασμένο, $I=\{1,2,\ldots n\}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

• Εάν $I=\{1,2,3,\ldots\}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A|B_i)$$

(ii) Θεώρημα Bayes:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A)\,P(B|A)}{P(B)}}$$

~ Αποδείξεις:

(i) $P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$

$$\Leftrightarrow$$

$$P(A_1A_2A_n) = \cancel{P(A_1)}\cdot \frac{P(A_2\cancel{A_1})}{\cancel{P(A_1)}} \cdots \frac{P(A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n)}{P(A_1\cancel{A_2\ldots A_{n-1}})} \quad \checkmark$$

(ii) $P(A) = P(A\Omega) = P\left(A\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)\right) = P\left[\bigcup_{i\in I} AB_i\right] \overset{*}{\underset{\sigma\text{-προσθ}}{=}} \sum_{i\in I} P(AB_i) = \sum P(B_i)\cdot P(A|B_i)$

$(AB_i)(AB_j) = AB_iB_j \subset B_iB_j = \phi$ γιατί $i \neq j$

(iii) $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$

Παράδειγμα (απλή εφαρμογή)

Μια ασφαλιστική εταιρεία μελετά την ενδεχόμενη αλλαγή στα ασφάλιστρα αυτοκινήτου. Απότιμα τον κίνδυνο ατυχημάτων, ως συνάρτηση παλαιότητας διπλωμάτων οδήγησης. Γνωρίζουμε ότι:

- το 20% των ασφαλισμένων έχουν το δίπλωμα λιγότερο από 5 χρόνια. Η μελέτη έδειξε ότι η πιθανότητα να έχει κάποιος ατύχημα σε 1 χρόνο, όταν είναι νέος οδηγός (N) είναι 0,4 και όταν είναι παλιός (Π) 0.125. Επιλέγουμε 1 ασφαλισμένο στην τύχη

i) P("νέος και ατύχημα") N A

ii) P("ατύχημα")

iii) P("νέος | ατύχημα)

Λύση:

→ Από εκφώνηση $P(N)=0.2$ και $P(\Pi)=0.8$

$P(A|N)=0.4$, $P(A|\Pi)=0.125$

(i) $P(NA) \overset{\text{πολλ/κός}}{=} P(N)P(A|N) = 0.2 \times 0.4 = 0.08$

(ii) $P(A) \underset{\text{θοπ}}{=} P(N)P(A|N) + P(\Pi)P(A|\Pi) = 0.08 + 0.8 \times 0.125 = 0.08 + 1 =$ 0.18

(iii) $P(N|A) \xrightarrow{\text{ορισμ.}} \frac{P(AN)}{P(A)} \overset{(ii)}{=} \frac{0.08}{0.18} = \frac{4}{9}$

$\xrightarrow{\text{Bayes}} \frac{P(N)P(A|N)}{P(A)} = \frac{4}{9}$

Ασκ. 51 Φυλλαδίου

Μια κάλπη περιέχει 1000 σφαιρίδια, 25 μαύρα, 30 άσπρα, 945 κόκκινα. Επιλέγουμε τυχαία 15 από την κάλπη.

Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει:

(α) ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια;

(β) ακριβώς 2 μαύρα σφαιρίδια και 3 άσπρα;

(γ) μόνο κόκκινα, αν ξέρουμε ότι δεν επιλέχτηκαν τα μαύρα;

Λύση

(α) α' τρόπος: (συνδυαστική) αρίθμηση $\underbrace{1,2,\dots,945}_{\text{κόκκινα}}, \underbrace{946,\dots,970}_{\text{μαύρα}}, \underbrace{971\dots1000}_{\text{άσπρα}}$

$|\Omega| = \binom{1000}{15}$, όχι σειρά, όχι επανάληψη.

A = "ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια" = "3 κόκκινα και 12 όχι κόκκινα")

$\omega \in A \quad \omega = (a_1, a_2)$

a_1: τριάδες κόκκινα, a_2: δωδεκάδες από μη-κόκκινα

$|A| = \binom{945}{3} \times \binom{55}{12} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{945}{3} \times \binom{55}{12}}{\binom{1000}{15}}$

β' τρόπος (μας ενδιαφέρει η σειρά)

Θεωρώ ότι κάνω 15 επιλογές, το ένα μετά το άλλο (διαδοχικά) και έστω K_i: ενδεχόμενο στην i-εκλογή να είναι κόκκινο.

Τότε: $P(A) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 15} P$ ("να επιλέξω κόκκινο στις i_1, i_2, i_3 δοκιμές και όχι κόκκινο στις υπόλοιπες")

$$= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 15} P(K_{i_1} K_{i_2} K_{i_3} K_{j_1}^c K_{j_2}^c \dots K_{j_{12}}^c)$$

όπου $\{j_1, j_2, \dots j_{12}\} = \{1, 2, \dots 15\} \setminus \{i_1, i_2, i_3\}$

$P(K_{i_1} K_{i_2} K_{i_3} K_{j_1}^c \dots K_{j_{12}}^c) = P(K_1 K_2 K_3 K_4^c \dots K_{12}^c)$

Τελικά, $P(A) = \binom{15}{3} P(K_1) P(K_2 | K_1) P(K_3 | K_2 K_1) \dots P(K_{12}^c | \dots)$

$$= \binom{15}{3} \frac{945}{1000} \times \frac{944}{999} \times \frac{943}{998} \times \frac{55}{997} \times \frac{54}{996} \dots \times \frac{44}{986} =$$

$$= \binom{15}{3} = \frac{(945)_3 \times (55)_{12}}{(1000)_{15}} = \frac{15!}{3!\,12!} \cdot \frac{(945)_3 \times (55)_{12}}{(1000)_{15}} =$$

$$= \frac{\frac{(945)_3}{3!} \times \frac{(55)_{12}}{12!}}{\frac{(1000)_{15}}{15!}} = \frac{\binom{945}{3}\binom{55}{12}}{\binom{1000}{15}}$$

29/8/16

ΜΑΘΗΜΑ 7ο

Ασκ. 5 | Φυλλ (...συνέχεια)

β) P("ακριβώς 2 μαύρα και 3 άσπρα")

B: "2 μαύρα, 3 άσπρα, 10 κόκκινα"

πολλ/κή αρχή: χωρίζω σε 3 φάσεις $|B| = \binom{25}{2} \times \binom{30}{3} \times \binom{945}{10}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{25}{2} \times \binom{30}{3} \times \binom{945}{10}}{\binom{1000}{15}}$$

γ) P("ακριβώς 4 κοκκ, και τουλάχιστον 2 μαύρα")

Γ: "ακριβώς 4 κόκκινα και τουλάχιστον 2 μαύρα"

Δ: "ακριβώς 4 κόκκινα"

E: "το πολύ 1 μαύρο" $\Rightarrow$ E^C: "τουλάχιστον 2 μαύρα"

$P(\Gamma) = P(\Delta E^C) = P(\Delta \setminus E) = P(\Delta) - P(\Delta E)$ (1)

$E = E_0 \cup E_1$ όπου E_i: "ακριβώς i-μαύρα" $i = 0, 1, \ldots$

Τότε $P(\Delta E) = P(\Delta(E_0 \cup E_1)) = P(\Delta E_0 \cup \Delta E_1) \underset{\Delta E_0 \cap \Delta E_1 \neq \emptyset}{=\!=\!=} P(\Delta E_0) + P(\Delta E_1)$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow P(\Gamma) = P(\Delta) - P(\Delta E_0) - P(\Delta E_1)$ (3)

$$P(\Delta) = P(\text{"ακριβώς 4 κόκκινα"}) = \frac{\binom{945}{4}\binom{55}{11}}{\binom{1000}{15}}$$

$$P(\Delta E_0) = P(\text{"ακριβώς 4 κόκκινα, 0 μαύρα, 11 άσπρα"}) = \frac{\binom{945}{4}\cdot\binom{30}{11}}{\binom{1000}{15}}$$

P(ΔE_1) = P("ακριβώς 4 κόκκινα, 1 μαύρο, 10 άσπρα")

$$= \frac{\binom{945}{4} \times \binom{25}{1} \times \binom{30}{10}}{\binom{1000}{15}} \quad (6)$$

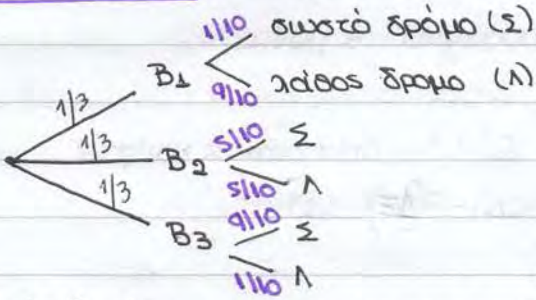
$$\text{Από (4), (5), (6)} \quad P(\Gamma) = \frac{\binom{945}{4}\left[\binom{55}{11} - \binom{30}{11} - 25\binom{30}{10}\right]}{\binom{1000}{15}}$$

δ) P("μόνο κόκκινα" | "δεν επιλέχθηκαν μαύρα") =

$$= \frac{P(\text{"μόνο κόκκινα και δεν επιλέχθηκαν μαύρα"})}{P(\text{"δεν επιλέχθηκαν μαύρα"})}$$

$$= \frac{P(\text{"ακριβώς 15 κόκκινα"})}{P(\text{"ακριβώς 15 άσπρα ή κόκκινα"})} = \frac{\dfrac{\binom{945}{15}}{\binom{1000}{15}}}{\dfrac{\binom{975}{15}}{\binom{1000}{15}}} = \frac{\binom{945}{15}}{\binom{975}{15}}$$

Ασκ. 3 | Φυλλ. 2 |



$P(B_i|\Sigma) = ?$ και γνωρίζουμε $P(\Sigma|B_i) = \frac{4i-3}{10}$, $i=1,2,3$

$$P(B_i|\Sigma) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(B_i)P(\Sigma|B_i)}{\underset{\substack{\text{Θεώρημα} \\ \text{ολικής} \\ \text{πιθανότητας}}}{P(\Sigma) \longrightarrow}} = \frac{P(B_i)P(\Sigma|B_i)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(\Sigma|B_i)}$$

$$= \frac{4i-3}{\sum_{i=1}^{3}(4i-3)} = \frac{4i-3}{1+5+9} = \frac{4i-3}{15} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{i=1} \frac{1}{15} \\ \xrightarrow{i=2} \frac{5}{15} \\ \xrightarrow{i=3} \frac{9}{15} \end{matrix}$$

Ασκ. 4 | Φυλλ. 2 - Θέμα εξετάσεων (Ιουλ. 11)

5 λαχνούς

① ②	
③	
⋮	
⑤	

Επιλέγουμε στην τύχη ένα λαχνό και ρίχνουμε τόσες φορές το νόμισμα, όσες η ένδειξη του λαχνού

i) P ("εμφάνισης τουλ. 1 φορά γράμματα")

ii) P ("να έγιναν κ-ρίψεις του νομίσματος αν σε μια επανάληψη του π.τ. δεν εμφανίστηκε η ένδειξη γράμματα?")

Λύση:

i) A = "καμία φορά γράμματα" = "όλες οι ενδείξεις κορώνα")
A^c = "τουλάχιστον 1 φορά γράμματα")
Άρα $P(A^c) = 1 - P(A)$

Έστω Λ_i ενδεχόμενο να τραβήξω i στην α' φάση του τ.π.
Τότε τα $\{\Lambda_i\}_{1 \le i \le 5}$ διαμερίζουν το δ.χ και έχουμε:

$P(A) = \sum_{i=1}^{s} P(\Lambda_i) P(A|\Lambda_i) = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{1}{s}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^i =$

Γεωμετρ. σειρά

$$= \frac{1}{s} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1} - \left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - 1} \quad \left(\sum_{i=a}^{\beta} \theta^i \overset{\theta\neq 1}{=} \frac{\theta^{\beta+1}-\theta^a}{\theta-1}\right)$$

$$= \frac{1}{s} \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{s+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{s} \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^s \right]$$

Διαφορετικά: $\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{s-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i\right) = \cancel{\frac{1}{2}}\cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^s}{\cancel{1-\frac{1}{2}}}$

Αντικαθιστούμε στην (1) $\Rightarrow P(A^c) = 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\left(\frac{1}{2}\right)^s = \frac{s-1}{s} + \frac{1}{s} \left(\frac{1}{2}\right)^s$

ii) $P(\Lambda_k|A) \overset{Bayes}{=} \frac{P(\Lambda_k)P(A|\Lambda_k)}{P(A)} \overset{(i)}{=} \frac{\frac{1}{s} \left(\frac{1}{2}\right)^k}{\frac{1}{s}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^s\right]} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^s}, \ 1\le k\le s$

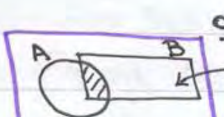
Στοχαστική Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

① Κίνητρο και Διαισθητικές Ερμηνείες.

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow[P(B)>0]{\text{πληρ. } B} (\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot|B))$$

↓ αρχικός χ.π.   ↓ καινούριος χ.π.

$A \mapsto P(A|B)$



ξέρω ότι το αποτέλεσμα του π.π. είναι εδώ.

Παρατηρήσεις:

1) (ενδεχόμενα, πληροφορία) $\Delta P = P(A|B) - P(A)$

(A , B) → 0 μηδενική επίδραση

→ $\neq 0$ → >0 (θετική επίδραση)

→ <0 (αρνητική επίδραση).

2) Όταν $\Delta P = 0$, δηλαδή $P(A|B) = P(A)$, τότε καθορίζαμε μια σημαντική σχέση ενδεχομένων, που λέγεται ανεξαρτησία ενδεχομένων.

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \overset{\substack{\text{αν} \\ P(A)>0}}{\Longleftrightarrow} \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Longleftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

B μηδενική επίδραση στο A $\Leftrightarrow$ A μηδενική επίδραση στο B.

ομοίως : θετική θετική

αρνητική αρνητική

3) $P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow \dfrac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

Είναι αυτή η σχέση που θα χρησιμοποιήσουμε για να ορίσαμε τα ανεξάρτητα ενδεχομ.

Ορισμός: Δύο ενδεχόμενα A και B ανεξάρτητα αν

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Σε αντίθετη περίπτωση, λέγονται (στοχαστικά) εξαρτημένα.

Παράδειγμα:

τυχαία ρίψη ενός νομίσματος 2φορές δ.σ.

$\Omega = \{(K,K), (K,\Gamma), (\Gamma,K), (\Gamma,\Gamma)\}$ ισοπίθανα

A: "να φέρω κορώνα στην 1η ρίψη" $= \{(K,K), (K,\Gamma)\}$

B: "να φέρω κορώνα στην 2η ρίψη" $= \{(\Gamma,K), (K,K)\}$

Γ: "να φέρω κορώνα και στις 2 ρίψεις" $= \{(K,K)\}$

~Τα A και B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

$AB = \{(\kappa,\kappa)\} = \Gamma$ και άρα $P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A)\cdot P(B) \to$ Ισχύει!

Όμως, τα A και Γ δεν είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Πράγματι:

$A\Gamma = \{(\kappa,\kappa)\} = \Gamma$ και $P(A\Gamma) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = P(A)\cdot P(\Gamma)$.

Ιδιότητες:

1) $A \perp\!\!\!\perp B \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} P(AB) = P(A)P(B) \underset{P(A)>0}{\overset{P(B)>0}{\Longleftrightarrow}}$ $P(A|B) = P(A)$ / $P(B|A) = P(B)$, $\Updownarrow$ $P(A), P(B) > 0$

2) $A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow A \perp\!\!\!\perp B^c \Leftrightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B^c \Leftrightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B$

3) $P(A) \in \{0,1\} \Leftrightarrow A \perp\!\!\!\perp A \Leftrightarrow A \perp\!\!\!\perp B$ $\forall$ ενδεχόμενο B.

4) $AB = \emptyset \underset{0<P(A),P(B)<1}{\Longrightarrow} A \not\perp\!\!\!\perp B$

(ασυμβίβαστα $\overset{0<P(A),P(B)<1}{\Rightarrow}$ εξαρτημένα)

5) $A \perp\!\!\!\perp B \underset{0<P(A),P(B)<1}{\Longrightarrow} AB \neq \emptyset$

(ανεξάρτητα $\overset{0<P(A),P(B)<1}{\Rightarrow}$ συμβιβαστά)

Αποδείξεις:

2) Θ.δ.ο. $\boxed{A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B^c \quad (*)}$

$P(AB^c) = P(A \setminus B) = P(A) - P(AB) \overset{A\perp\!\!\!\perp B}{=\!=} P(A) - P(A)P(B) = P(A)\cdot(1-P(B)) = P(A)\cdot P(B^c)$

Τώρα θ.δ.ο.

$A \perp\!\!\!\perp B \overset{(*)}{\Rightarrow} A \perp\!\!\!\perp B^c \Rightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B^c \Rightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B$. Πράγματι,

$A \perp\!\!\!\perp B^c \overset{\text{συμμ.}}{\Longrightarrow} B^c \perp\!\!\!\perp A \overset{(*)}{\Longrightarrow} B^c \perp\!\!\!\perp A^c \overset{\text{συμμ.}}{\Longrightarrow} A^c \perp\!\!\!\perp B^c \Rightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B \overset{\text{συμμ.}}{\Longrightarrow}$

$B \perp\!\!\!\perp A^c \Rightarrow B \perp\!\!\!\perp A \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B$

3) Θ.δ.ο $A \perp\!\!\!\perp B \ \forall B \overset{\text{Προφανής}}{\Rightarrow} A \perp\!\!\!\perp A \Rightarrow P(A) \in \{0,1\} \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B \ \forall B$

Απόδειξη:

Αν $A \perp\!\!\!\perp A \Rightarrow P(AA)=P(A)P(A) \Rightarrow P(A)=P^2(A) \Rightarrow P(A)(1-P(A))=0$

$\Rightarrow P(A) \in \{0,1\}$

Υποθέτουμε ότι $P(A) \in \{0,1\}$ (α) $P(A)=0$, (β) $P(A)=1$

Αν $P(A)=0$, τότε $0 \le P(AB) \overset{(AB \subset A)}{\le} P(A)=0 = \underset{0}{\underset{\|}{P(A)P(B)}} \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B, \forall B$

(β) Αν $P(A)=1 \Rightarrow P(A^c)=0 \overset{(α)}{\Longrightarrow} A^c \perp\!\!\!\perp B \ \forall$ ενδ. $B \overset{\text{ιδ.2}}{\Longrightarrow} A \perp\!\!\!\perp B$

$\forall$ ενδ. B.

Το 5) βγαίνει από το 4) αντιθετοαντιστροφή $(p \Rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

4) $\left.\begin{array}{l} P(AB) \overset{AB=\phi}{=\!=} P(\phi)=0 \\ 0 < P(A), P(B) < 1 \Rightarrow 0 < P(A)P(B) < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(AB) \neq P(A)P(B)$ και άρα $A \not\perp\!\!\!\perp B$

Σχόλιο:

Γενικά: $AB=\phi \not\Rightarrow A \not\perp\!\!\!\perp B$

δηλαδή υπάρχουν ασυμβίβαστα και ανεξάρτητα ενδεχόμενα A, B

π.χ.1) αν $A=\phi$ και B οποιοδήποτε τότε $P(\phi B)=P(\phi)=0$

και $\underset{0}{\underset{\|}{P(\phi)}}P(B)=0$ και $\phi \cap B = \phi$ άρα ασυμβίβαστα και ανεξάρτητα.

π.χ.2) Έστω $A : P(A)=0$. Τότε $A \perp\!\!\!\perp B \ \forall B$, και άρα και για $B=A^c$

Επιπλέον, $AA^c=\phi$, δηλ. A, A^c ασυμβίβαστα και ανεξάρτητα.

2/3/16

ΜΑΘΗΜΑ 8ο

① Παρατηρήσεις στη σχέση ανεξαρτησίας

i) $A \not\perp\!\!\!\perp A$, αν $0<P(A)<1$ (δεν είναι αυτοπαθής)

ii) αν $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow B \perp\!\!\!\perp A$ (συμμετρική ιδιότητα)

iii) αν $A \perp\!\!\!\perp B$ και $B \perp\!\!\!\perp \Gamma \not\Rightarrow A \perp\!\!\!\perp \Gamma$ (δεν είναι μεταβατική)

π.χ: παίρνουμε A, B: $0<P(A), P(B)<1$ και $A \perp\!\!\!\perp B$

Αν ήταν μεταβατική $A \perp\!\!\!\perp B$ και $B \perp\!\!\!\perp A \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp A$ (αδύνατο, αφού $0<P(A)<1$)

② Ανεξαρτησία περισσότερων ενδεχομένων.

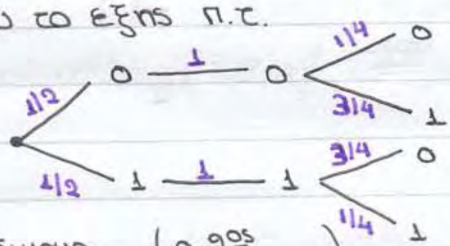
Σκέψη 1: Έστω A, B και Γ

Μπορώ να πω $\{A,B,\Gamma\}_{\perp\!\!\!\perp}$ (είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα)

ΟΧΙ αν, $P(AB\Gamma) = P(A) \cdot P(B) P(\Gamma)$?

Αντιπαράδειγμα: $K \to 0$, $\Gamma \to 1$

Έστω το εξής π.τ.



(δίκαιο νόμισμα)

(ο 2ος χρίζει το νόμισμα του από την πλευρά του 1ου)

(ο 3ος έχει 2 κίβδηλα νομίσματα)

$A =$ "Στην 1η δοκιμή ήρθε 1" $= \{(1,1,0), (1,1,1)\}$

$B =$ "Στην 2η δοκιμή ήρθε 1" $= \{(1,1,0), (1,1,1)\}$

$\Gamma =$ "Στην 3η δοκιμή ήρθε 1" $= \{(0,0,1), (1,1,1)\}$

$$\Omega = \{ \underset{\frac{1}{8}}{(0,0,0)}, \underset{\frac{3}{8}}{(0,0,1)}, \underset{\frac{3}{8}}{(1,1,0)}, \underset{\frac{1}{8}}{(1,1,1)} \}$$

$AB = \{(1,1,0),(1,1,1)\} = A = B$

$A\Gamma = \{(1,1,1)\} = B\Gamma$

$AB\Gamma = \{(1,1,1)\}$

Παρατηρούμε ότι $P(AB\Gamma) = P\{(1,1,1)\} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma)$

αφού, $P(A) = P(B) = \underset{\parallel}{P\{(1,1,1),(1,1,0)\}}$

$$P\{(1,1,1)\} + P\{(1,1,0)\} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

$P(\Gamma) = P\{(0,0,1),(1,1,1)\} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

Όμως, $\left.\begin{array}{l} P(AB) = P(A) = \frac{1}{2} \\ P(A)P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(AB) \neq P(A)P(B) \\ A \not\perp\!\!\!\perp B \quad (A \not\perp\!\!\!\perp A) \end{array}$

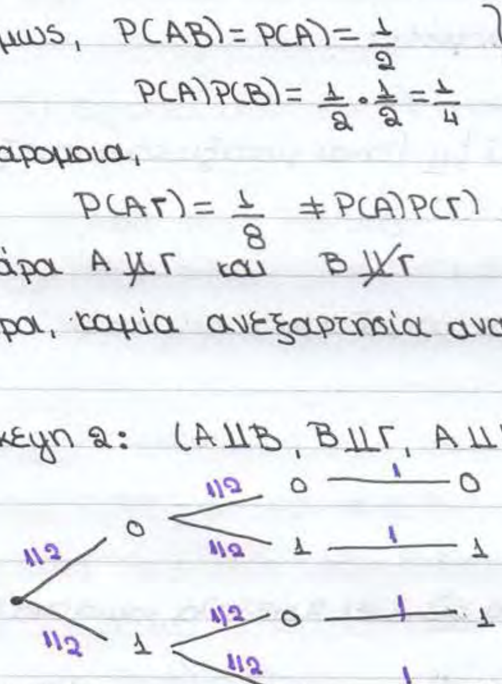
Παρομοια,

$$P(A\Gamma) = \frac{1}{8} \neq P(A)P(\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

άρα $A \not\perp\!\!\!\perp \Gamma$ και $B \not\perp\!\!\!\perp \Gamma$

Αρα, καμία ανεξαρτησία ανα δύο! (δεν είναι καθε ζευγη ανεξαρτητα.)

Σκεψη 2: $(A \perp\!\!\!\perp B,\ B \perp\!\!\!\perp \Gamma,\ A \perp\!\!\!\perp \Gamma \overset{\text{ίσως}}{\Longrightarrow} \{A,B,\Gamma\}_{\perp\!\!\!\perp}$ (θα δουμε πως όχι)



$A =$ "1 στην $1^{\underline{η}}$ δοκιμη" $= \{(1,0,1),(1,1,0)\}$

$B =$ "1 στην $2^{\underline{η}}$ δοκιμή" $= \{(0,1,1),(1,1,0)\}$

$\Gamma =$ "1 στην $3^{\underline{η}}$ δοκιμη" $= \{(0,1,1),(1,0,1)\}$

$$\Omega = \{\underset{\frac{1}{4}}{\underset{\downarrow}{(0,0,0)}},\ \underset{\frac{1}{4}}{\underset{\downarrow}{(0,1,1)}},\ \underset{\frac{1}{4}}{\underset{\downarrow}{(1,1,0)}},\ \underset{\frac{1}{4}}{\underset{\downarrow}{(1,1,1)}}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB=\{(1,1,0)\} \\ A\Gamma=\{(1,0,1)\} \\ B\Gamma=\{(0,1,1)\} \\ AB\Gamma=\phi \end{array}\right\}$$ άρα $\Rightarrow$ $P(AB)=\frac{1}{4}=P(A\Gamma)=P(B\Gamma)$

$P(AB\Gamma)=P(\phi)=0$

Άρα: $P(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)\cdot P(B)$

αντίστοιχα: $P(A\Gamma)=P(A)\cdot P(\Gamma)$

$P(B\Gamma)=P(B)\cdot P(\Gamma)$

$\Downarrow$

(κατά ζεύγη): $A \perp\!\!\!\perp B$, $B \perp\!\!\!\perp \Gamma$, $A \perp\!\!\!\perp \Gamma$

Όμως, $P(AB\Gamma)=0\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)\cdot P(\Gamma)$

Άρα, A,B,Γ δεν είναι ανεξάρτητα

$$P(AB\Gamma)\overset{\text{πολλιός}}{\underset{\text{νόμος}}{=\!=}}P(A)P(B|A)P(\Gamma|\cancel{A}B)\overset{\text{μια λογική}}{\underset{\text{ανεξαρτησία}}{=\!=\!=}}P(A)\cdot P(B)P(\Gamma)$$

Συμπέρασμα:

Για να είναι 3 ενδεχόμενα ανεξάρτητα μεταξύ τους πρέπει:

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$, $P(A\Gamma)=P(A)P(\Gamma)$, $P(B\Gamma)=P(B)\cdot P(\Gamma)$

και $P(AB\Gamma)=P(A)P(B)P(\Gamma)$

Επιπλέον κατά ζεύγη ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ αμοιβαία ανεξάρτητα.

Ορισμός: Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \dots, A_n$ (πεπερασμένα το πλήθος), λέγονται (αμοιβαία) ανεξάρτητα, αν $\forall\ J\subset I=\{1,2,\dots,n\}$ με $|J|\geq 2$, ισχύει $P(\bigcap_{i\in J} A_i)=\prod_{i\in J} P(A_i)$

Ορισμα: $\forall\ k$: $2\leq k\leq n$ και $1\leq i_1<i_2<\dots<i_k\leq n$

$P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})$.

Μια ακολουθία ενδεχομένων $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ λέγεται ανεξάρτητη ακολουθία, αν $\forall J\subset\{1,2,\dots\}$ με πεπερασμένο το πλήθος των στοιχείων $P(\bigcap_{i\in J} A_i)=\prod_{i\in J} P(A_i)$

~ Επεκτείνεται και για οποιαδήποτε οικογένεια ενδεχομένων $\{A_i\}_{i\in I}$ με τον ίδιο τρόπο.

Παρατήρηση:

$$\{A,B,\Gamma\}_{\perp\!\!\!\perp} \Leftrightarrow \{A^c,B,\Gamma\}_{\perp\!\!\!\perp} \Leftrightarrow \{A^c,B^c,\Gamma\}_{\perp\!\!\!\perp} \Leftrightarrow \ldots$$

$\{A,B,\Gamma\}_{\perp\!\!\!\perp} \Leftrightarrow \{\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3\}_{\perp\!\!\!\perp}$ όπου $\Delta_1 \in \{A,A^c\}$

$\Delta_2 \in \{B,B^c\}$

$\Delta_3 \in \{\Gamma,\Gamma^c\}$

Επίσης: $\{A,B,\Gamma\}_{\perp\!\!\!\perp}$ τότε $A \perp\!\!\!\perp B\Gamma$ ή $B \perp\!\!\!\perp A\Gamma^c$, $A \perp\!\!\!\perp B\cup\Gamma, \ldots$

Εφαρμογές Ανεξαρτησίας:

① Ανεξαρτησία πειραμάτων τύχης

Ορισμ: Έστω ότι ένα π.τ. Π μπορεί να αναλυθεί ως μια σειρά από n-π.τ. Π_i, όπου τα αποτελέσματά τους δεν αλληλοεπηρεάζονται $\left[\Pi_i \xrightarrow[\text{πιθαν.}]{\text{χώρος}} (\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)\right]$

Τότε, λέμε ότι το π.τ. Π είναι σύνθετο και αναλύεται σε n-διαδοχικά ανεξάρτητα π.τ. Μπορούμε να πάρουμε δ.χ $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2 \times \ldots \times \underline{\Omega}_n$, και αν $A_i \in \mathcal{A}_i$ $i=1,2,\ldots,n$ (ενδεχόμενα που προέρχονται από το Π), τότε $P(A_1 \times A_2 \times \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2) \ldots \cdot P(A_n)$ (καταχρηστικά εξισώνουμε P ~~γ~~ τις πιθανότητες P_i)

Παρατηρήσεις:

1) Οι ιδέες αυτές επεκτείνονται για ακολουθίες ανεξάρτητων π.τ., με κατάλληλες τροποποιήσεις, π.χ.

$P(A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n}) = P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_n})$ για n-διακεκριμένους δείκτες $i_1, i_2, \ldots i_n$

2) Όταν $(\underline{\Omega}_1, \mathcal{A}_1, P_1) = (\underline{\Omega}_2, \mathcal{A}_2, P_2) = \ldots (\underline{\Omega}_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ τότε έχουμε ανεξάρτητες επαναλήψεις ενός π.τ. και σε αυτή την περίπτωση, μια επανάληψη λέγεται δοκιμή.

Παράδειγμα:

1) Σε 3 ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος

$$P(\{(\kappa,\kappa,\kappa)\}) = P(\{\kappa\}) \cdot P(\{\kappa\}) \cdot P(\{\kappa\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$\underline{\Omega} = \underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2 \times \underline{\Omega}_3$, $\underline{\Omega}_i = \{(\kappa, \Gamma)\}$ $i = 1, 2, 3$.

$A_1 = \{\kappa\}$, $A_2 = \{\kappa\}$, $A_3 = \{\kappa\}$

2) Σε 2 ρίψεις ενός τίμιου ζαριού

$$\underline{\Omega} = \{1, 2, \dots 6\}^2$$

~ Ποια είναι η πιθανότητα ("να φέρω άρτιο και μετά περιττό")

$= P$ ("άρτιος στο $1^{\underline{o}}$") $\cdot$ P("περιττό στο $2^{\underline{o}}$) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

~ P ("να φέρω ένα άρτιο και ένα περιττό")

$=$ P ("να φέρω άρτιο και μετά περιττό") + P ("να φέρω περιττό και μετά άρτιο")

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3) Ακολουθία ρίψεων ενός τίμιου ζαριού.

P ("να φέρω 6 για $1^{\underline{\eta}}$ φορά στην $10^{\underline{\eta}}$ ρίψη") $=$

$=$ P ("να φέρω από 1-5 στην $1^{\underline{\eta}}$ δοκιμή", "....", "να φέρω 1-5 στη $9^{\underline{\eta}}$", "να φέρω 6 στην $10^{\underline{\eta}}$ ρίψη") $= \left(\frac{5}{6}\right)^9 \cdot \frac{1}{6}$

② Δεσμευμένη Ανεξαρτησία

Ορισμ: Έστω A, B και Γ, 3 ενδεχόμενα ενός π.π με $P(\Gamma) > 0$. Λέμε ότι τα A και B είναι δεσμευμένα ανεξάρτητα, δοθέντος του Γ, αν ισχύει ότι: $P(AB|\Gamma) = P(A|\Gamma)\, P(B|\Gamma)$ δηλαδή αν τα A, B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα στον χ.π.

$$(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot|\Gamma))$$

Παρατηρήσεις:

(i) ανεξάρτητα $\overset{\text{γενικά}}{\not\Rightarrow}$ δεσμευμένα ανεξάρτητα

(ii) δεσμευμένα ανεξάρτητα $\underset{\text{γενικά}}{\not\Rightarrow}$ ανεξάρτητα

~ Αντιπαράδειγμα: ~

(i) Έστω A, B, Γ με $0 < P(A), P(B), P(\Gamma) < 1$ και $A, B \subset \Gamma$ (π.χ $\Gamma = A \cup B$)

Υποθέτουμε ότι $A \perp\!\!\!\perp B$

$$P(AB|\Gamma) = \frac{P(AB\Gamma)}{P(\Gamma)} \overset{AB\subset\Gamma}{=\!=} \frac{P(AB)}{P(\Gamma)} = \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(\Gamma)}$$

$$= P(\Gamma)\cdot\frac{P(A)}{P(\Gamma)}\,\frac{P(B)}{P(\Gamma)} = P(\Gamma)\,\frac{P(A\Gamma)}{P(\Gamma)}\,\frac{P(B\Gamma)}{P(\Gamma)} = P(\Gamma)P(A|\Gamma)P(B|\Gamma)$$

$$\overset{0<P(\Gamma)<1}{<} P(A|\Gamma)P(B|\Gamma) \Rightarrow A, B \text{ δεσμευμένα εξαρτημένα δοθέντος του } \Gamma.$$

π.τ ρίψεις 2 δίκαιων νομισμάτων

$A = \{$"να φέρω K στην $1^{\underline{η}}$ ρίψη"$\}$

$B = \{$"να φέρω K στην $2^{\underline{η}}$ ρίψη"$\}$

Τα $A \perp\!\!\!\perp B$

$\Gamma = \{$"τουλάχιστον 1 κορώνα"$\}$ $(\Gamma = A \cup B)$

$$P(AB|\Gamma) = \frac{1}{3} \neq P(A|\Gamma)\cdot P(B|\Gamma) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

(ii) δεσμευμένα ανεξάρτητα $\overset{\text{γενικά}}{\not\Rightarrow}$ ανεξάρτητα

Σε ένα π.τ με 3 ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος

A: "κορώνα στις 2 πρώτες ρίψεις"

B: "κορώνα στις 2 τελευταίες ρίψεις"

Γ: "τουλάχιστον 2 κορώνες"

Θ.δ.ο A, B είναι δεσμευμένα ανεξάρτητα, δοθέντος του Γ αλλά, A και B όχι ανεξάρτητα.

$AB=\{(\kappa,\kappa,\kappa)\} \Rightarrow P(AB)=\frac{1}{8}$

$A=\{(\kappa,\kappa,\Gamma),(\kappa,\kappa,\kappa)\} \Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}$

$B=\{(\Gamma,\kappa,\kappa),(\kappa,\kappa,\kappa)\} \Rightarrow P(B)=\frac{1}{4}$

Άρα: $P(AB)=\frac{1}{8} \neq \frac{1}{16}=P(A)\cdot P(B)$ άρα $A \not\perp\!\!\!\perp B$.

$\Gamma=\{(\kappa,\kappa,\Gamma),(\kappa,\Gamma,\kappa),(\Gamma,\kappa,\kappa),(\kappa,\kappa,\kappa)\}$

$$P(A|\Gamma)=\frac{P(A\Gamma)}{P(\Gamma)}=\frac{P(A)}{P(\Gamma)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

Όμως, $P(B|\Gamma)=\frac{P(B\Gamma)}{P(\Gamma)}=\frac{P(B)}{P(\Gamma)}=\frac{1}{2}$

$$P(AB|\Gamma)=\frac{P(AB\Gamma)}{P(\Gamma)}=\frac{P(AB)}{P(\Gamma)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

δηλ. $P(AB|\Gamma)=P(A|\Gamma)\cdot P(B|\Gamma)$, άρα A και B δεσμ. ανεξάρτητα δοθέντος του Γ.

4/3/16

ΜΑΘΗΜΑ 9ο

Ασκήσεις:

1) Ν.δ.ο αν i) $P(\Gamma)=1$, τότε $A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow A \perp\!\!\!\perp_\Gamma B$

ii) αν $\{A,B,\Gamma\}_{\perp\!\!\!\perp} \xRightarrow{P(\Gamma)>0} A \perp\!\!\!\perp_\Gamma B$

Λύση:

i) αν $P(\Gamma)\in\{0,1\}$, τότε $\Gamma \perp\!\!\!\perp \Delta$, από οποιοδήποτε ενδεχόμενο Δ.
Ειδικά, για $P(\Gamma)=1$, έχουμε ότι $\Gamma \perp\!\!\!\perp \Delta$, από κάθε ενδεχόμενο Δ, άρα $P(\Delta|\Gamma)=P(\Delta)$ $(*)$

$A \perp\!\!\!\perp_\Gamma B \overset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} P(AB|\Gamma)=P(A|\Gamma)P(B|\Gamma) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} P(AB)=P(A)P(B) \overset{\text{ορσ.}}{\Leftrightarrow} A \perp\!\!\!\perp B$.

ii) $P(AB|\Gamma) = \dfrac{P(AB\Gamma)}{P(\Gamma)} \overset{\{A,B,\Gamma\} \perp\!\!\!\perp}{=} \dfrac{P(A)P(B)\cancel{P(\Gamma)}}{\cancel{P(\Gamma)}} \overset{\text{κατά ζεύγη ανεξάρτητα}}{=} P(A|\Gamma)P(B|\Gamma)$

$\Rightarrow A \perp\!\!\!\perp_{\Gamma} B$

② (Ασκ. 5 | Φυλ. 2)

10 Κάλπες: $K_1, K_2, \dots, K_{10}$ και κάθε κάλπη έχει 11 σφαιρίδια

$K_1 - K_7$ → • 3 λευκά • 8 μαύρα

$K_8 - K_{10}$ → • 5 λευκά • 6 μαύρα

Επιλέγουμε στην τύχη μια κάλπη (άρα πιθανότητα $\frac{1}{10}$)

Κατόπιν, επιλέγονται με επανάθεση 5 σφαιρίδια

Να υπολογισθούν

(i) η πιθανότητα να επιλεγεί η K_3, τα πρώτα 3 σφαιρίδια λευκά και τα 2 τελευταία μαύρα

Λύση (i)

K_i: το ενδεχόμενο να επιλεχθεί η κάλπη i $(1 \le i \le 10)$

Λ_i: το ενδεχόμενο το i σφαιρίδιο να είναι λευκό

M_i: το ενδεχόμενο το i σφαιρίδιο να είναι μαύρο $1 \le i \le 5$

$P(K_3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 M_4 M_5) \overset{\text{πολλ/κός νόμος}}{=} P(K_3)P(\Lambda_1|K_3)P(\Lambda_2|K_3\Lambda_1)\dots P(M_5|K_3\Lambda_1\dots M_4)$

(λόγω επανάθεσης)

$= P(K_3)P(\Lambda_1|K_3)P(\Lambda_2|K_3)\dots P(M_5|K_3)$

K_3: 3 λευκά, 8 μαύρα

$$\underbrace{\frac{1}{10}}_{\text{κάλπη}} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{11}\right)^3}_{\text{λευκά (3)}} \cdot \underbrace{\left(\frac{8}{11}\right)^2}_{\text{μαύρα (2)}}$$

(ii) η πιθανότητα η κάλπη που θα επιλεχθεί να είναι η K_3, και να εξήχθησαν συνολικά 2 μαύρα και 3 λευκά

συνολικά ⇒ (συνδυασμός, δεν μας νοιάζει η σειρά)

Λύση (ii)

$$P\Bigg(\bigcup_{1\le i_1<i_2<i_3\le 5} K_3\Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_3}M_{j_1}M_{j_2}\Bigg)$$, όπου $\{j_1,j_2\}=\{1,2,3,4,5\}\setminus\{i_1,i_2,i_3\}$ και $j_1<j_2$

$$=\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le 5} P(K_3\Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_3}M_{j_1}M_{j_2}) \overset{*}{=}$$

$$=\binom{5}{3}P(\text{του ερωτημ(i)})=\binom{5}{3}\frac{1}{10}\left(\frac{3}{11}\right)^3\left(\frac{8}{11}\right)^2$$

Αφού, $P(K_3\Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_3}M_{j_1}M_{j_2})=P(K_3)\cdot P(\Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_3}M_{j_1}M_{j_2}\mid K_3)$

↳ επανάληψη ενός π.τ μέσα στην

$=P(K_3)P^3(\Lambda\mid K_3)P^2(M\mid K_3)=\frac{1}{10}\left(\frac{3}{11}\right)^3\left(\frac{8}{11}\right)^2.$ K_3 (δεσμευμένη ανεξαρτησία + ίσες πιθ.)

(iii) η πιθανότητα όλα τα σφαιρίδια που εξήχθησαν να είναι λευκά;

Λύση (iii)

$$P(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5)\overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=}\sum_{i=1}^{10}P(K_i)P(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5\mid K_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{10}P(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5\mid K_i)+\sum_{i=8}^{10}\frac{1}{10}P(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5\mid K_i)$$

$$=\frac{7}{10}\cdot\left(\frac{3}{11}\right)^5+\frac{3}{10}\left(\frac{5}{11}\right)^5.$$

Θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει Θ.Ο.Π. $\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{7}K_i}_{=A},\ \underbrace{\bigcup_{i=8}^{10}K_i}_{=A^c}\Big).$

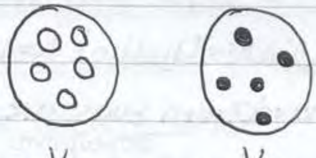
(iv) η δεσμευμένη πιθανότητα η κάλπη που επιλέχθηκε να είναι η 3 δεδομένου ότι όλα τα σφαιρίδια που εξήχθησαν ήταν λευκά.

Λύση (iv)

$$P(K_3|\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(K_3)P(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5|K_3)}{P(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5)}$$

$$= \frac{\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3}{11}\right)^5}{\frac{7}{10}\left(\frac{3}{11}\right)^5+\frac{3}{10}\left(\frac{5}{11}\right)^5}$$

Παρατήρηση:



K_1 K_2

$$P(\Lambda_1\Lambda_2) \overset{?}{=} P(\Lambda_1)P(\Lambda_2)$$

$$||$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{P(\Lambda_1\Lambda_2|K_1)}_{1}+\frac{1}{2}\underbrace{P(\Lambda_1\Lambda_2|K_2)}_{0}=\frac{1}{2}$$

$$P(\Lambda_1)=\frac{1}{2}P(\Lambda_1|K_1)+\frac{1}{2}P(\Lambda_1|K_2)=\frac{1}{2}$$

$$P(\Lambda_2)=\frac{1}{2} \Rightarrow P(\Lambda_1\Lambda_2)\neq P(\Lambda_1)P(\Lambda_2)$$

$$\Rightarrow \Lambda_1 \not\perp\!\!\!\perp \Lambda_2$$

Ενώ, $P(\Lambda_1\Lambda_2|K_1)=P(\Lambda_1|K_1)P(\Lambda_2|K_1)$. , άρα $\Lambda_1 \perp\!\!\!\perp_{K_1} \Lambda_2$

~Να λυθεί, η άσκηση χωρίς επανάθεση.

Ασκ. 3 | Ασκ. 9 Φυλλ. 2

πτ: ακολουθία ρίψεων 2 ζαριών, μέχρι να φέρω άθροισμα 6 ή 7.

α) $P_n = P$("να σταματήσουμε στη δοκιμή n") $=?$

β) P("να φέρουμε άθροισμα 6, πριν φέρουμε άθροισμα 7")

γ) P("να φέρουμε άθροισμα 7, πριν φέρουμε άθροισμα 6")

δ) P("να σταματήσει το παιχνίδι") $=?$

Λύση $\boxed{α)}$ $\underline{Ω} = \{ E, AE, AAE, \dots, \overset{?}{AAA\dots} \}$

$E = E_6 \cup E_7$ όπου E_i: το ενδεχόμενο να φέρω άθροισμα i, στα 2 ζάρια

$A = E^c$

Ψάχνω: $P(\underbrace{A\dots A}_{n-1}E) \underset{\text{ανεξ. πτ ριψεις ζαριού.}}{=} (P(A))^{n-1} P(E) \overset{(1)\,(2)}{=} \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \cdot \frac{11}{36}$

$P(E) = P(E_6 \cup E_7) = \underset{\text{έχει 5 στοιχεία}}{P(E_6)} + \underset{\text{έχει 6 στοιχ.}}{P(E_7)} = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{11}{36}$ (2)

και άρα $P(A) = P(E^c) = \frac{25}{36}$ (1)

$\boxed{β)}$ $\underline{Ω} = \{ E_6, E_7, AE_6, AE_7, AAE_6, AAE_7, \dots \overset{(AA\dots A)^c}{} \}$

α' τρόπος: $r \overset{\text{Θολ}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \underbrace{P(\text{να φέρω 6 πριν από 7} \mid \text{"σταματάω στην n-οστή δοκιμή"})}$

Υπολογίζω την ⊛ $= \dfrac{P(\text{"να σταματήσω } \overset{\text{με 6}}{\text{στην}} \text{ n-οστή δοκιμή"})}{P_n}$

$P(\text{"να σταματήσω με 6 στη n-οστή δοκιμή"}) = P(\underbrace{AAA\dots A}_{n-1}E_6) =$

$= (P(A))^{n-1} \cdot P(E_6) = \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \cdot \frac{5}{36}$

$r = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{36} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^{n} = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{25}{36}\right)} = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{11}$

$= \frac{5}{11}$.

Παρατήρηση: Είναι το ίδιο:

$r = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\underbrace{AAA\dots A}_{n-1}E_6)$

β' τρόπος: (ανάλυση 1ου βήματος) → Θ.Ο.Π στην 1η ρίψη

$P(\underbrace{\text{"να φέρω 6 πριν από 7"}}_{A}) = P(E_6) \cdot P(A \mid E_6) + P(E_7) \cdot P(A \mid E_7)$
$+ P(E_0) P(A \mid E_0)$ όπου $E_0: (E_6 \cup E_7)^c$

$r = \frac{5}{36} \cdot 1 + \frac{6}{36} \cdot 0 + \frac{25}{36} r \iff$

$\frac{11}{36} r = \frac{5}{36} \iff r = \frac{5}{11}$

(γ) P("να φέρω 7 πριν φέρω 6") $= \frac{6}{11}$

Επανάληψη του προηγούμενο με $6 \leftrightarrow 7$.

(δ) P("να σταματήσω το παιχνίδι") = P("να φέρω 6 πριν φέρω 7") + P("να φέρω 7 πριν φέρω 6") = 1

Άρα P("να μη σταματήσει το παιχνίδι")

$= 1 - \left(\frac{5}{11} + \frac{6}{11}\right) = 0$

(Από α) ερώτημα $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$)

Ασκ. 2.8

- 0.1% του πληθυσμού πάσχει από ασθένεια X,
- ένα τεστ κάνει λάθος διάγνωση 5%, όταν υπάρχει ασθένεια,
- λάθος 1% στους υγιείς.

Επιλέγουμε ένα άτομο στην τύχη, δεδομένου ότι το τεστ δείχνει ασθένεια, ποια είναι η πιθανότητα, το άτομο να έχει όντως την ασθένεια;

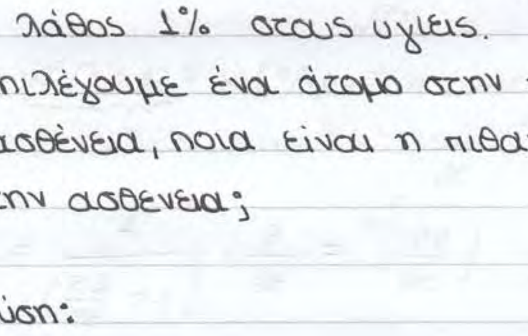
Λύση:

Y_1: άτομο υγιές.

A_1: το άτομο έχει την ασθένεια

Y_2: το τεστ δείχνει ότι το άτομο είναι υγιές.

A_2: » » » » » » είναι ασθενής.



Ψάχνουμε $P(A_1|A_2) = ?$

Με Bayes:

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_2)} \xrightarrow{\theta.o\pi.} = \frac{\frac{1}{1000}\cdot\frac{95}{100}}{P(A_1)P(A_2|A_1)+P(Y_1)P(A_2|Y_1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{1000}\cdot\frac{95}{100}}{\frac{1}{1000}\cdot\frac{95}{100}+\frac{999}{1000}\cdot\frac{1}{100}} = \frac{95}{95+999} = \frac{95}{1094} < 0.1!$$

Ασκ.7|Φυλλ. 1

(i) Αν $P(E)=0.9$ και $P(F)=0.8$. Ν.δ.ο $P(EF) \geq 0.7$

Λύση:

$P(E\cup F) = P(E)+P(F)-P(EF) \Rightarrow$

$P(EF) = P(E)+P(F)-P(E\cup F) \geq P(E)+P(F)-1 = 0.9+0.8-1 \geq 0.7$

(ii) Ν.δ.ο $P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - (n-1)$.

Επαγωγικά,

• ($n=2$ ✓) υποθέτουμε ότι ισχύει $k=2,3,\dots,n$, θα δ.ο ισχύει $n+1$).

7/3/16

ΜΑΘΗΜΑ 10º

Τυχαίες Μεταβλητές

1) Εισαγωγικά:

τυχαία μεταβλητή (τ.μ). : ένα αριθμητικό χαρακτηριστικό που αντιστοιχίζουμε στα δ.σ. ενός π.τ.

Παράδειγμα:

(i) π.τ. : 10 (ανεξάρτητες) ρίψεις ενός νομίσματος

τμ : # ρίψεων που ήρθε κορώνα

ρίψεων που έχουμε κορώνα-γράμματα.

(ii) π.τ : ακολουθία (ανεξάρτητων) ρίψεων 2 ζαριών

τμ : # ρίψεων που έχουμε εξάρες μέχρι την 20η δοκιμή

ρίψεων που συμπίπτουν οι ενδείξεις των ζαριών μέχρι την 100η δοκιμή

ρίψεων που θα φέρω ντόρτια για 1η φορά.

(iii) π.τ : τυχαία επιλογή σημείων σε ευθύγραμμο τμήμα AB

τμ : (AH), δηλαδή το μήκους του ευθυγράμμου τμήματος AH

$\frac{(AH)}{(HB)}$ με $(H \neq B)$

(iv) παρατήρηση της διάρκειας ζωής μιας μηχανής/λαμπτήρα

τμ : διάρκεια ζωής (σε συνεχή χρόνο, σε μέρες)

② Ορισμός τ.μ.

Ορισμός: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας

Κάθε συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$, που ικανοποιεί την ιδιότητα ότι:

$$\{X \le x\} \underset{\text{ορισ.}}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ θα λέγεται τυχαία μεταβλητή (τμ)

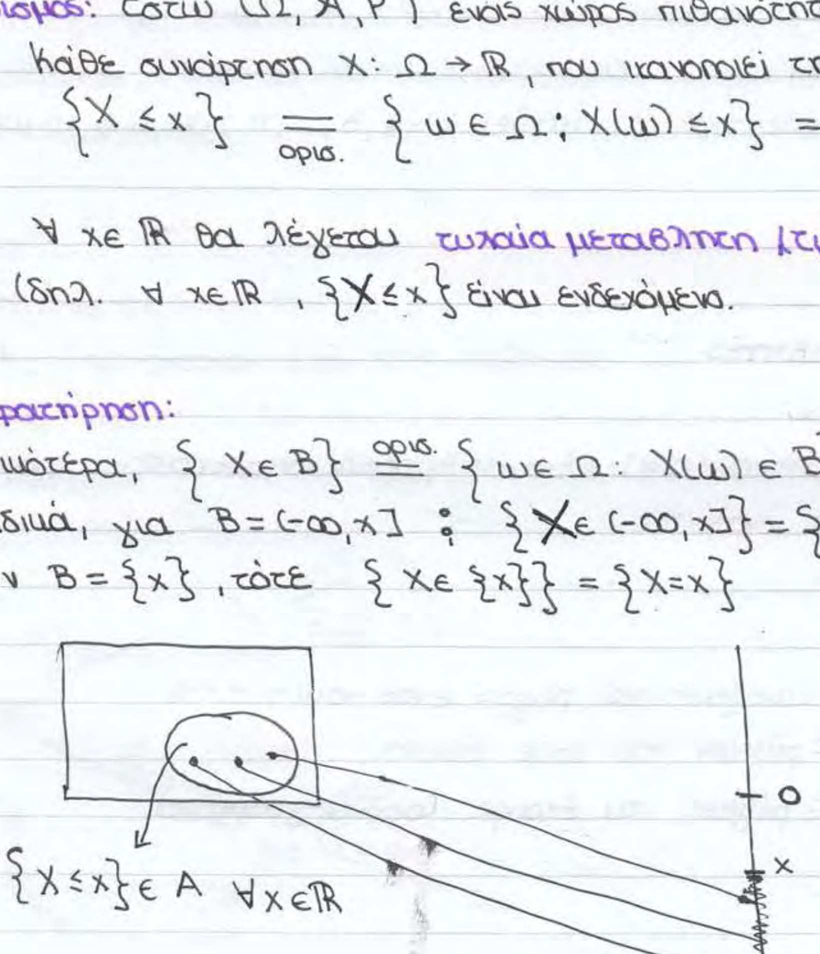
(δηλ. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{X \le x\}$ είναι ενδεχόμενο.

Παρατήρηση:

Γενικότερα, $\{X \in B\} \overset{\text{ορισ.}}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)$

Ειδικά, για $B = (-\infty, x]$: $\{X \in (-\infty, x]\} = \{X \le x\}$

Αν $B = \{x\}$, τότε $\{X \in \{x\}\} = \{X = x\}$



Παράδειγμα:

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\{1,2,\dots,6\}, \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}, \text{κλασσική πιθαν.})$

$A = \{1,3,5\}$ (περιττοί αριθμοί)

Θέτω, $X = 1_A$ όπου $1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

$$\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \begin{cases} \emptyset, & x<0 \\ A^c, & 0 \le x < 1 \\ \Omega, & x \geq 1 \end{cases}$$

άρα, λοιπόν η $X = 1_A$ είναι τ.μ.

Όμως, η $Y(\omega) = \omega$, $\forall\, \omega \in \Omega$ (ταυτοτική συνάρτηση) δεν είναι τ.μ.

γιατί $\{Y \le 1\} = \{1\} \notin \mathcal{A}$

Παρατήρηση:

Σε διακριτούς δ.χ (πεπερασμένος ή αριθμησίμως άπειρος),
μπορώ πάντα να επιλέγω $\mathcal{A} = P(\Omega)$, και τότε προφανώς κάθε συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$, θα είναι τ.μ. Όμως για συνεχείς δ.χ. δεν είναι πάντα εφικτό.

③ Κατανομή μιας τ.μ.

Όταν θεωρούμε τμ, τότε το ενδιαφέρον μας φεύγει από τον αρχικό δ.χ. Ω και από υπολογισμούς πιθανοτήτων τύπου $P(A)$ και εστιάζεται στο $\mathbb{R}$ και σε υπολογισμούς πιθανοτήτων $P(X \in B)$, όπου B κατάλληλο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Έτσι, οδηγούμαστε φυσιολογικά σε έναν καινούριο χ.π.

αρχικός χ.π.

$$(\underbrace{\Omega}_{\text{δ.χ}}, \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{σ-άλγεβρα}}, \underbrace{P}_{\text{αρχική συναρτ. πιθ.}}) \xrightarrow[\text{τ.μ.}]{X : \Omega \to \mathbb{R}} (\mathbb{R}, \underbrace{B(\mathbb{R})}_{\text{σ-άλγεβρα των συνόλων Borel}}, \underbrace{P_X}_{\text{επαγόμενη συναρτηση πιθανότητας}})$$

$P_X(B) = P(X \in B) \quad \forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, στο $\mathbb{R}$,

όπου $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma$ ({ανοιχτά, κλειστά, διαστήματα, αριθμ. ενώσεις και αριθμ. τομές})

$\neq$ $P(\mathbb{R})$ — ελάχιστη σ-άλγεβρα ("καλά" υποσύνολα του $\mathbb{R}$)

Αποδεικνύεται ότι το P_X είναι πράγματι συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.

Οριςμ: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ένας χ.π και $X: \Omega \to \mathbb{R}$ μια τ.μ.
Η επαγόμενη συνάρτηση πιθανότητας $P_X: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$
όπου $P_X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$
λέγεται κατανομή (πιθανότητας) της τ.μ. X

④ Συνάρτηση Κατανομής μιας τ.μ.

Ερώτηση: Μήπως υπάρχει ένας πιο οικονομικός τρόπος να χαρακτηρίσουμε την κατανομή μιας τ.μ., χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε το $P_X(B)$, $\forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Απάντηση: Μπορούμε μέσω της (αθροιστικής) συνάρτησης κατανομής της τ.μ. X.

Ορσ: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ένας χ.π. και $X: \Omega \to \mathbb{R}$ μια τ.μ.
Η συνάρτηση $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$, όπου $F_X(x) = P(X \le x)$
λέγεται (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X.

Παρατηρήσεις:

1) Αποδεικνύεται ότι η σ.κ. F_X μιας τ.μ. X, καθορίζει μονοσήμαντα (χαρακτηρίζει) την κατανομή (πιθανότητας) P_X της X. Δηλ., αν X και Y τ.μ. και $F_X = F_Y$ τότε $P_X = P_Y$

2) Αν για 2 τ.μ. X και Y έχουμε $F_X = F_Y$, τότε λέμε ότι οι X και Y είναι ισόνομες, και γράφουμε $X \overset{d}{=} Y$ (d: distribution)

Προφανώς, όταν $X=Y \Rightarrow X \overset{d}{=} Y$. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά
δηλ. $X \overset{d}{=} Y \not\Rightarrow X=Y$

παράδειγμα:

π.τ. 2 ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος

$$\Omega = \{(\kappa,\kappa), (\kappa,\Gamma), (\Gamma,\kappa), (\Gamma,\Gamma)\}$$

Ορίζουμε X: 0, -1, 1, 0

$P(X=-1)=\frac{1}{4}$, $P(X=0)=\frac{1}{2}$ $P(X=1)=\frac{1}{4}$

Θέτω $Y=-X$ τότε: $P(Y=-1)=P(X=1)=\frac{1}{4}$, $P(Y=0)=\frac{1}{2}$, $P(Y=1)=\frac{1}{4}$,

Άρα $X \overset{d}{=} -X$, όμως $X \neq -X$, αφού $X((\kappa\Gamma)) = -1 \neq -X(\kappa\Gamma)=1$

άρα, λοιπόν ισόνομες, αν και δεν είναι ίσες.

⑤ Παραδείγματα:

Παρ.1| π.τ. : 3 (ανεξάρτητες) ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος

τμ X : # ρίψεων που έχουμε κορώνα

$$\Omega = \{ \underset{\uparrow 0}{(\Gamma,\Gamma,\Gamma)}, \underset{\uparrow 1}{(\Gamma,\Gamma,\kappa)}, \underset{\uparrow 1}{(\Gamma,\kappa,\Gamma)}, \underset{\uparrow 1}{(\kappa,\Gamma,\Gamma)}, \underset{\uparrow 2}{(\kappa,\kappa,\Gamma)}, \underset{\uparrow 2}{(\kappa,\Gamma,\kappa)}, \underset{\downarrow 2}{(\Gamma,\kappa,\kappa)}, \underset{\downarrow 3}{(\kappa,\kappa,\kappa)} \}$$

$X(\omega)$ ορίζουμε:

$A_0 \overset{\text{ορ}}{=} \{X=0\} = \{(\Gamma,\Gamma,\Gamma)\}$

$A_1 \overset{\text{ορ}}{=} \{X=1\} = \{(\Gamma,\Gamma,\kappa), (\Gamma,\kappa,\Gamma), (\kappa,\Gamma,\Gamma)\}$

$A_2 \overset{\text{ορ}}{=} \{X=2\} = \{(\kappa,\kappa,\Gamma), (\kappa,\Gamma,\kappa), (\Gamma,\kappa,\kappa)\}$

$A_3 \overset{\text{ορ}}{=} \{X=3\} = \{(\kappa,\kappa,\kappa)\}$

$$\text{Άρα} \quad \{X=x\} = \begin{cases} A_0 & , x=0 \\ A_1 & , x=1 \\ A_2 & , x=2 \\ A_3 & , x=3 \\ \phi & , x \notin \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

$$\text{Θέτω} \quad p_0 = P(X=0) = P(A_0) = \frac{|A_0|}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$$

$$p_1 = P(X=1) = P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

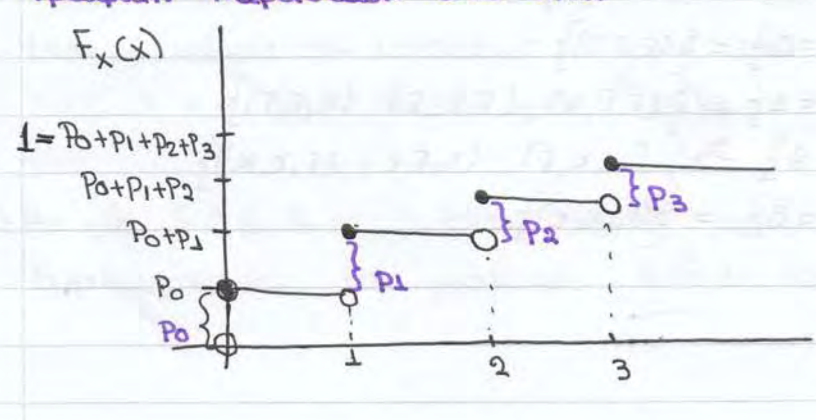
$$p_2 = P(X=2) = P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

$$p_3 = P(X=3) = P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$$

$$\{X \le x\} = \begin{cases} \phi & , x<0 \\ A_0 & , 0 \le x < 1 \\ A_0 \cup A_1 & , 1 \le x < 2 \\ A_0 \cup A_1 \cup A_2 & , 2 \le x < 3 \\ \underbrace{A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3}_{= \Omega} & , x \geq 3 \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ p_0 & , 0 \le x < 1 \\ p_0+p_1 & , 1 \le x < 2 \\ p_0+p_1+p_2 & , 2 \le x < 3 \\ 1 & , x \geq 3 \end{cases}$$

Γραφική Παράσταση της σ.κ.



Παρατηρήσεις:

1) Η F_X είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής, και αν θέτουμε
$F(-\infty) \overset{ορσ}{=} \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ και $F(+\infty) \overset{ορσ}{=} \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

2) Η F_X είναι ασυνεχής εκεί όπου $P(X=x)>0$, δηλαδή για $x=0,1,2,3$

3) Η $f_X(x) = P(X=x)$ λέγεται συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας της τμ X και μας δίνει όλη τη πληροφορία που χρειαζόμαστε για τη σ.κ. F_X

Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε την F_X τότε μπορούμε να βρούμε την f_X

$$f_X(x) = P(X=x) = P(X \le x) - P(X<x) = F_X(x) - \lim_{y\to x^-} F_X(y)$$
$$= F_X(x) - F_X(x^-)$$

<u>παρ.2)</u> π.τ: τυχαία επιλογή ενός σημείου Η, σε ένα ευθύγρ. τμημ. ΑΒ.

τμ Χ: η απόσταση του Η από το Α, δηλαδή το μήκος (ΑΗ).

Ω: 

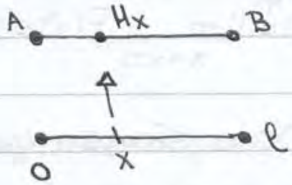
$X: \Omega \to \mathbb{R}$

Αν Γ ενδεχόμενο $P(\Gamma) = \dfrac{\text{μήκος}(\Gamma)}{\text{μήκος}(\Omega)}$ (γεωμετρική πιθανότητα σε διάσταση 1)

9/3/16

ΜΑΘΗΜΑ 11ο

Συνέχεια παραδείγματος.



$$\{X \le x\} = \begin{cases} \emptyset, & x < 0 \\ AM_x, & 0 \le x < \ell \quad \text{όπου } M_x : (AM_x) = x \\ \Omega = AB, & x \geq \ell \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{(AM_x)}{(AB)} = \dfrac{x}{\ell} \ (*), & 0 \le x < \ell \\ 1, & x \geq \ell \end{cases}$$

όπου, θυμίζουμε ότι σε γεωμετρική πιθανότητα, διάστασης 1, αν Γ ενδεχόμενο $P(\Gamma) = \dfrac{\text{μήκος}(\Gamma)}{\text{μήκος}(\Omega)}$ (*)

Γραφική παράσταση:

Παρατηρήσεις:

1) Η F_X είναι αύξουσα, συνεχής και $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

2) Εδώ παρατηρούμε ότι $P(X = x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, και άρα λοιπόν η συνάρτηση $f(x) = P(X = x)$ δεν μας δίνει καμία πληροφορία για την κατανομή της X και άρα για την συνάρτηση κατανομής της.

3) Αν ορίσουμε $f_X(x) = F_X'(x)$, εκεί που ορίζεται, τότε αυτή θα μας δίνει όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε για την κατανομή της X.

Παίρνουμε λοιπόν $f_X(x) = F_X'(x)$, $\forall x \in (0, \ell)$, τότε $f_X(x) = \frac{1}{\ell}$

προφανώς $F_X(x) = \int_0^x f_X(u)\,du = \int_0^x \frac{1}{\ell}\,du = \frac{x}{\ell}$, $0 < x < \ell$.

Η $f_X(x)$, η οποία θα οριστεί παντού στο $\mathbb{R}$, θα λέγεται **συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας** της κατανομής της τ.μ X.

Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε την F_X, θα μπορούμε μέσω παραγώγισης, να παίρνουμε μια σ.π.π.

② Ιδιότητες σ.κ.

1) Η F_X είναι αύξουσα συνάρτηση
2) Η F_X είναι δεξιά συνεχής
3) i) $F_X(-\infty) \overset{\text{ορσ.}}{=} \lim_{x\to-\infty} F_X(x)=0$ <u>και</u> ii) $F_X(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} F_X(x)=1$.

Απόδειξη:

1) Θ.δ.ο, αν $x<y \Rightarrow F_X(x)\leq F_X(y)$.

Εστω $x<y$ τότε $\{X\leq x\}\subset\{X\leq y\} \Rightarrow F_X(x)=P(X\leq x)\overset{\text{μονοτονία}}{\leq} P(X\leq y)=F_X(y)$

2) Θ.δ.ο $\forall\, x_0\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0^+} F_X(x)=F_X(x_0)$

Ισχυρισμός: κάθε συνάρτηση που είναι μονότονη έχει πλευρικά όρια σε κάθε σημείο, άρα και κάθε αύξουσα συνάρτηση.

Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε οποιαδήποτε ακολουθία $(x_n)_{n\geq1}$ με $x_n>x_0$, $\forall\, n\geq1$, που $x_n\to x_0$ και να βρούμε το όριο της $F_X(x_n)$!

Θέτουμε $x_n=x_0+\frac{1}{n}$ $\forall\, n\geq1$ και

$$A_n=\{X\leq x_n\}=\{X\leq x_0+\tfrac{1}{n}\}\quad \forall\, n\geq1.$$

• Η $(A_n)_{n\geq1}$ είναι φθίνουσα και θα δείξουμε $\bigcap_{n\geq1}A_n=\{X\leq x_0\}$

Πράγματι, $\omega\in\bigcap_n A_n \Rightarrow X(\omega)\leq x_0+\frac{1}{n}$ $\forall\, n\geq1$

$\Rightarrow X(\omega)\leq \lim_{n\to\infty}(x_0+\frac{1}{n})=x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega\in\{X\leq x_0\}$.

Άρα, λοιπόν $\bigcap A_n\subset\{X\leq x_0\}$

Επίσης, $\omega\in\{X\leq x_0\} \Rightarrow X(\omega)\leq x_0\leq x_0+\frac{1}{n}$, $\forall\, n\geq1$

$\Rightarrow \omega\in\{X\leq x_0+\frac{1}{n}\}$, $\forall\, n\geq1$

$\Rightarrow \omega\in\bigcap_{n\geq1}A_n$

δηλ. $\{X \le x_0\} \subset \bigcap_{n \geq 1} A_n$. Τελικά, $\{X \le x_0\} = \bigcap_{n\geq 1} A_n$ ⊛

Άρα, $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) \overset{x_n \to x_0^+}{=\!=} \lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \le x_n)$

$= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \overset{(A_n)\downarrow}{=\!=} P(\bigcap_n A_n) \overset{⊛}{=} P(X \le x_0) = F_X(x_0)$

3) i) Θ.δ.ο $F_X(-\infty) = 0$, δηλ. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

Παρομοια, θέτουμε $x_n = -n$,

$A_n = \{X \le -n\}$ και θα το δείξουμε, παρατηρώντας ότι $\bigcap_n A_n = \emptyset$

ii) Θέτουμε $x_n = n$, $A_n = \{X \le n\}$ $(A_n)_{n\geq 1} \uparrow$ και $\bigcup_n A_n = \Omega$

Θεώρημα:

Αν $F: \mathbb{R} \to [0,1]$, συνάρτηση που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1)-(3) (αύξουσα, δεξιά συνεχής, $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$), τότε υπάρχει χώρος πιθανότητας (Ω, A, P) και τ.μ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$, με $F_X = F$.

Λέμε ότι η F είναι συνάρτηση κατανομής.

Επιπλέον Ιδιότητες:

I	$P(X \in \Delta)$	$P(X \in \Delta)$ βαση F_X
$(-\infty, b]$	$P(X \le b)$	$F_X(b)$
$(-\infty, b)$	$P(X < b)$	$F_X(b-)$
$[a, +\infty)$	$P(X \geq a)$	$1 - F_X(a-)$
$(a, +\infty)$	$P(X > a)$	$1 - F_X(a)$
$[a, b]$	$P(a \le X \le b)$	$F_X(b) - F_X(a-)$
$(a, b]$	$P(a < X \le b)$	$F_X(b) - F_X(a)$
$[a, b)$	$P(a \le X < b)$	$F_X(b-) - F_X(a-)$
(a, b)	$P(a < X < b)$	$F_X(b-) - F_X(a)$

$$\{a \le X \le b\} = \{X \le b\} \cap \{X \geq a\} = \{X \le b\} \cap [\{X \geq a\}^c]^c$$

$$= \{X \le b\} \cap \underbrace{\{X < a\}^c}_{\{X<a\} \subset \{X \le b\}} = \{X \le b\} \setminus \{X < a\}$$

$$\Rightarrow P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a-)$$

③ Κατηγορίες τ.μ.

X τ.μ. → $\boxed{\text{διακριτή}}$: όταν $P(X \in A) = 1$ και A αριθμήσιμο.

$\Updownarrow$

συνολικό μέγεθος των αλμάτων της ασυνέχειας F_X είναι 1.

X τ.μ. → $\boxed{\text{συνεχής}}$: $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

F_X είναι συνεχής (στο $\mathbb{R}$)

→ απολυτα συνεχείς

→ (ιδιάζουσα συνεχείς)

→ Απόλυτα συνεχής τ.μ:

$\exists \; f \geq 0 : \; F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ (εδώ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας)

(F_X συνεχής)

→ Ιδιάζουσα συνεχής τ.μ: (F_X συνεχής)

$F_X'(x) = 0$ (σχεδόν παντού) $\Rightarrow \left[\underset{\lambda}{\overset{''}{\text{μήκος}}} \{ F'(x) \text{ δεν υπάρχει ή υπάρχει και } F_X'(x) \neq 0 \} = 0 \right]$

(μέτρο Lebesgue)

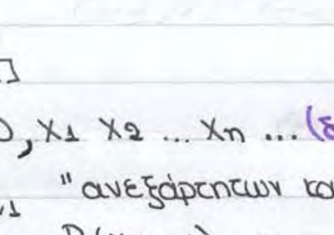
π.χ. $\overset{\cap [0,1]}{X} = 0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$ (δυαδική αναπαράσταση)

$[(x_n)_{n \geq 1}$ "ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ." $x_n \in \{0,1\}]$

$P(x_n = 1) = p, \quad P(x_n = 0) = 1 - p$

Αν $p \neq \frac{1}{2}$ $(0 < p < 1)$ είναι ιδιάζουσα συνεχής τ.μ.

Ειδικά Για $p = \frac{1}{2}$ ομοιόμορφη κατανομή και είναι απόλυτα συνεχής



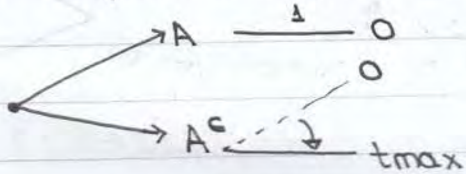
X τ.μ. → διακριτή
X τ.μ. ⇢ μικτή
X τ.μ. → συνεχής → απόλυτα συνεχής
συνεχής → ιδιάζουσα συνεχής

Μικτή τ.μ. συνδυάζει ένα διακριτό και ένα συνεχές κομμάτι αναπαραστασης της σ.κ. της

$$F_X = p F_{X_1} + (1-p) F_{X_2} \quad , 0<p<1$$

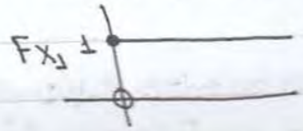
όπου X_1 είναι διακριτή και X_2 συνεχής (απολυτα)
(από'δω και πέρα συνεχης εννοουμε απόλυτα)

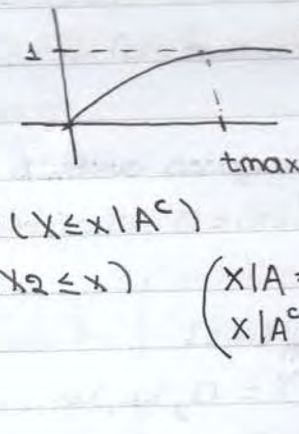
~ Παράδειγμα:
χρόνος αναμονής σε οδοντιατρείο.



στιγμή αφιξης

$X_1 = 0$ με πιθ. 1





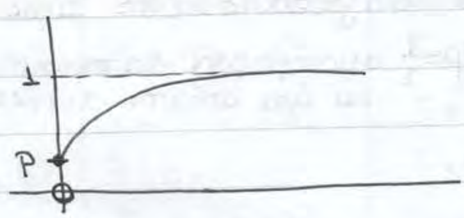
A: να μην περιμένω καθόλου

$$P(X\le x) \overset{\theta.o.\pi}{=\!=} P(A)P(X\le x\,|\,A) + P(A^c)P(X\le x\,|\,A^c)$$

$$\underset{P(A)=p}{=\!=} p\cdot P(X_1\le x) + (1-p)P(X_2\le x) \quad \begin{pmatrix} X|A = X_1 \\ X|A^c = X_2 \end{pmatrix}$$

$$= p\cdot F_{X_1}(x) + (1-p)F_{X_2}(x)$$

Γραφική αναπαρασταση της F_X



$$X = \begin{cases} X_1, & \text{με πιθ. } p \\ X_2, & \text{με πιθ } 1-p \end{cases}$$

$\cancel{X = pX_1 + (1-p)X_2}$

$X = 1_A X_1 + 1_{A^c} X_2$ ✓

11/4/16

ΜΑΘΗΜΑ 12ο

① Διακριτές τ.μ - συνάρτηση πιθανότητας

Ορσ: Εστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και $X: \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. Η X λέγεται διακριτή τμ, αν υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $A: P(X \in A) = 1$.

~ Η συνάρτηση $f_X: \mathbb{R} \to [0,1]$, όπου $f_X(x) = P(X=x)$, λέγεται συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας της τμ X.

Ιδιότητες της σ.π.

① $f_X(x) \geq 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

② $\sum_{i \in I} f_X(x_i) = 1$, όπου $A = \{x_i, i \in I\}$

③ σύνδεση με την συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \sum_{i: x_i \leq x} f_X(x_i) \quad , \quad f_X(x) = F_X(x) - F_X(x-)$$

④ Η σ.π. f_X καθορίζει μονοσήμαντα την κατανομή της X

$$f_X \rightleftarrows F_X \rightleftarrows P_X$$

Πρόταση:

Εστω $f: \mathbb{R} \to [0,1]$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες ① και ②. Τότε, υπάρχει χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και διακριτή τμ $X: \Omega \to \mathbb{R}$, όπου $f_X = f$. Τότε λέμε ότι η f είναι συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας.

~ Παράδειγμα: Έστω $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x = 1, 2, 3, \ldots$ (και 0 διαφορετικά)

Η f είναι σ.π, αφού $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ και $\sum_{x=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$, δηλαδή ικανοποιούνται οι 2 ιδιότητες της παραπάνω πρότασης.

② (Απόλυτα) συνεχείς τ.μ. - συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας.

Ορσ: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χ.π. και $X: \Omega \to \mathbb{R}$ μια τ.μ. Η X λέγεται (απόλυτα) συνεχής τμ αν $f_X \geq 0$: $P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$

~ Η f_X λέγεται συνάρτηση πυκνότητας - πιθανότητας της τμ. X.

Ιδιότητες:

① $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Πράγματι, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = P(X\in\mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$

② σύνδεση με συνάρτηση κατανομής

$\boxed{i)}$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$

Πράγματι, $F_X(x) = P(X\le x) = P(X\in(-\infty,x]) = \int_{(-\infty,x]} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$

$\boxed{ii)}$ $F_X'(x) = f_X(x)$, όταν x σημείο συνέχειας της f_X.

Αν, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$ $\Rightarrow F_X'(x) = f_X(u)$ (θυμηθείτε το 1ο θεμελιώδες θεώρημα του Απ. Λογ)

③ Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τμ. X, χαρακτηρίζει την κατανομή της X

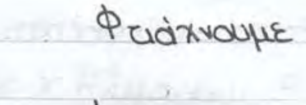
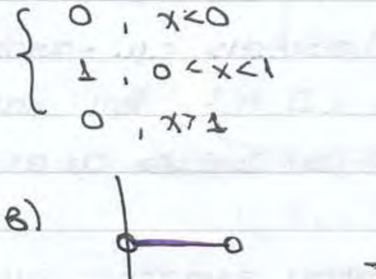
$f_X \longrightarrow F_X \longrightarrow P_X$

Δεν υπάρχει μοναδική σ.π.π. (υπάρχουν πολλές και συνήθως αναζητούμε την πιο ομαλή)

~ Παράδειγμα: π.τ: τυχαία επιλογή ενός σημείου στο $[0,1]$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0\le x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$$

Φτιάχνουμε $F_X'(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & 0<x<1 \\ 0, & x\geq 1 \end{cases}$

α)  ή β) 

όλες αυτές είναι σ.π.π (δεν είναι μοναδική)

Τα ολοκληρώματα δεν επηρεάζονται από αλλαγές σε μεμονωμένα σημεία.

④ $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) =$

$= \int_a^b f_X(x)dx$

⑤ $P(X=x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(P(X=x) = \int_x^x f_X(u)du = 0 \right)$

⑥ $P(x < X \leq x+\delta x) \simeq f_X(x)\delta x$ (για μικρό δx), όταν f_X συνεχής στο x.

Πράγματι,

$P(x < X \leq x+\delta x) = P(X \leq x+\delta x) - P(X \leq x) = F_X(x+\delta x) - F_X(x) =$

$= \frac{F_X(x+\delta x) - F_X(x)}{\delta x} \cdot \delta x \simeq F'_X(x)\delta x = f_X(x)\delta x$ (για μικρό δx)

αφού, $\lim_{\delta x \to 0^+} \frac{F_X(x+\delta x) - F_X(x)}{\delta x} = F'_X(x)$

~Παράδειγμα:

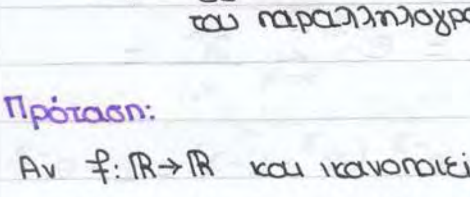
$P(1 < X < 1.02)$, όταν f_X συνεχής στο 1.

$\overset{\parallel}{f_X(1) \cdot 0{,}02} \overset{\text{π.χ. } f_X(1)=2}{=\!=} 2 \times 0.02 = 0.04$

Παρατηρήσεις:

1) Η $f_X(x)$ μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 1 (δεν είναι πιθανότητα)

2)



$P(x < X < x+\delta x) =$ Εμβαδόν κάτω από καμπύλη στο διάστημα $(x, x+\delta x)$

προσέγγιση με το Εμβαδόν του παραλληλογράμμου

Πρόταση:

Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις ιδιότητες $f \geq 0$, και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$, τότε υπάρχει χ.π. (Ω, A, P) και τ.μ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$, με $f_X = f$

Λέμε ότι η f είναι συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας

③ Παραδείγματα

Παρ. 1 (διακριτή τ.μ)

Έστω X = # τηλεφωνικών κλήσεων σε τηλεφωνικό κέντρο σε 1 μέρα

ή

πελατών που καταφθάνουν σε τράπεζα σε 1 μέρα

ή

τυπογραφικών λαθών σε 1 βιβλίο.

Δίνεται $f_X(x) = P(X=x) = c \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$ $x=0,1,2,\dots$ (κατανομή Poisson(λ), $\lambda>0$)

άγνωστο. γνωστό

α) $c = ?$

β) $P(X=0) = ?$

γ) $P(X \geq 2) = ?$

δ) $P(X=2 \mid X \geq 2) = ?$

ε) $P(X \geq 3 \mid X \geq 2) = ?$

<u>Λύση</u>:

α) Έχουμε $\sum_{x=0}^{+\infty} f_X(x) = 1$. Όμως $\sum_{x=0}^{+\infty} f_X(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} c \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = c \cdot \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} =$

$= c \cdot e^{\lambda}$

Άρα $ce^{\lambda} = 1 \Rightarrow c = e^{-\lambda}$ και τελικά, $f_X(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$ $x=0,1,2,\dots$

β) $P(X=0) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

γ) $P(X \geq 2) \overset{\text{αν μ' αρέσουν οι σειρές}}{=} \sum_{x=2}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} =$

$= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} - 1 - \lambda \right) = e^{-\lambda} (e^{\lambda} - 1 - \lambda) = 1 - e^{-\lambda}(1+\lambda)$

Διαφορετικά:

$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda} \cdot \lambda = 1 - e^{-\lambda}(1+\lambda)$

δ) $P(X=2 \mid X \geq 2) = \dfrac{P(X=2 \overset{\text{τομή}}{\cap} X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = \dfrac{P(X=2)}{P(X \geq 2)} \overset{(\gamma)}{=} \dfrac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2}}{1-e^{-\lambda}(1+\lambda)}$

ε) $P(X \geq 3 \mid X \geq 2) = 1 - P(X=2 \mid X \geq 2)$ ⊛

$$\left(\begin{array}{l} \text{αφού } 1 = P(X\geq 2 \mid X \geq 2) = P(X=2 \mid X\geq 2) + P(X \geq 3 \mid X \geq 2) \\ \quad \Rightarrow P(X \geq 3 \mid X \geq 2) = 1 - P(X=2 \mid X \geq 2) \end{array} \right)$$

Άρα, $P(X \geq 3 \mid X \geq 2) = 1 - \dfrac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2}}{1-e^{-\lambda}(1+\lambda)}$

Παρ. 2 (συνεχής τ.μ.)

Έστω τ.μ. X με σ.π.π. $f_X(x) = c \cdot x^{-3}$, $x \geq 1$

(α) Να βρεθεί η σταθερά c

(β) $P(X=2) = ?$

(γ) $P(X \geq 2) = ?$

(δ) $P(X \geq 3 \mid X \geq 2) = ?$

Λύση:

α) Πρέπει $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Υπενθύμιση: $\left(\displaystyle\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \right)$

$\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} c \cdot x^{-3}\,dx = \frac{c}{-2}\left[x^{-2}\right]_1^{+\infty} =$

$= -\dfrac{c}{2}\Big(\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}}_{=0} - 1\Big) = \dfrac{c}{2} \quad \Rightarrow \dfrac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$

Τελικά, $f_X(x) = 2x^{-3}$, $x \geq 1$ $\quad \left(\begin{array}{c} f_X(x)=0 \\ x<1 \end{array} \right)$

β) $P(X=2) = 0$ αφού X συνεχής τ.μ.

γ) $P(X \geq 2) = \displaystyle\int_{2}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{2}^{+\infty} 2x^{-3}\,dx = \frac{2}{-2}\left[x^{-2}\right]_2^{+\infty}$

$= -\Big[\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}}_{=0} - \frac{1}{4}\Big] = \dfrac{1}{4}$

Διαφορετικά:

$$P(X\geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(1<X<2) = 1 - \int_1^2 f_X(u)du = \ldots = \frac{1}{4}$$

(δ) $P(X\geq 3 | X\geq 2) = \dfrac{P(X\geq 3,\ X\geq 2)}{P(X\geq 2)} = \dfrac{P(X\geq 3)}{P(X\geq 2)}$ ⊛

ή

$$P(X\geq 3 | X\geq 2) = 1 - P(2<X<3 | X\geq 2) = 1 - \frac{P(2<X<3)}{P(X\geq 2)}$$

Για παράδειγμα:

$$P(X\geq 3) = \int_3^{+\infty} f_X(u)du = \int_3^{+\infty} 2x^{-3}dx = \frac{2}{-2}\left[x^{-2}\right]_3^{+\infty} =$$

$$= -\Big(\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}_{=0} - \frac{1}{9}\Big) = \frac{1}{9}$$

Τελικά από ⊛ $P(X>3 | X\geq 2) = \dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{9}$

16/3/16

ΜΑΘΗΜΑ 13ο

① Μέση Τιμή τ.μ. - Διαισθητικές Ερμηνείες.

(α) Μέσος όρος

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_N\}$: πεπερασμένος δ.χ. + ισοπίθανα δ.σ., $X: \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ.

$X(\omega) \in \{x_0, x_1, \ldots x_k\}$: διακεκριμένες τιμές του $X(\omega)$

Περιμένω Μέση Τιμή της X = Μέσος όρος των τιμών της

$$= \frac{X(\omega_1)+X(\omega_2)+\ldots+X(\omega_N)}{N} = \frac{\overbrace{x_0+x_0+\ldots+x_0}^{N_0} + \overbrace{x_1+x_1+\ldots+x_1}^{N_1} + \overbrace{x_k+\ldots x_k}^{N_k}}{N} =$$

$= x_0\dfrac{N_0}{N} + x_1\dfrac{N_1}{N} + \ldots x_k\dfrac{N_k}{N}$ (δειγματικά σημεία ισοπίθανα)

$$= x_0 P(X=x_0) + x_1 P(X=x_1) + \ldots + x_k P(X=x_k) = \sum_{x\in A} x\,P(X=x)$$

(με $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$).

Γενικότερα, μας οδηγεί στον ορισμό:

$$E(X) = \sum_{x \in A} x P(X=x)$$, όπου A το πολύ αριθμήσιμο σύνολο

~Παράδειγμα:

π.τ. : τυχαία επιλογή ενός φοιτητή στο αμφιθέατρο

X: ° βαθμός στον Απειροστικό Λογισμό I.

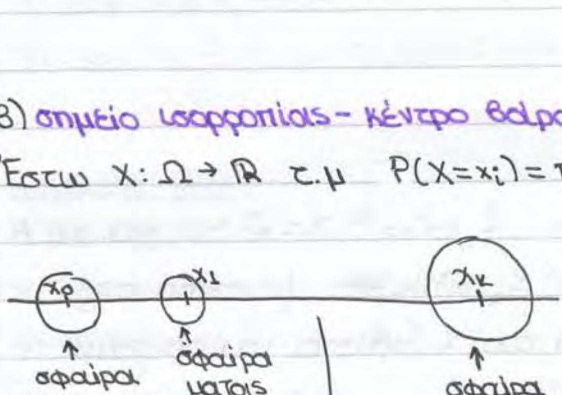
σ.π: $P(X=x) = \frac{N_x}{N}$ όπου $x = 0, 1, \dots, 10$

$E(X) = \sum_{x=0}^{10} x P(X=x) \to$ θα συμπίπτει με το μέσο όρο των βαθμών

$N_x = \#$ βαθμών που είναι x.

(Β) σημείο ισορροπίας - κέντρο βάρους (μάζας)

Έστω $X: \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ $P(X=x_i) = p_i \quad i = 0, 1, \dots, k$



Ενώνουμε τις σφαίρες με ράβδο ακαμπτη και αμελητέας μάζας.

$\{x_i\}_{i=0}^{k} \to$ συντεταγμένες του κέντρου βάρους.

$\{p_i\}_{i=0}^{k}$ όπου $p_i = \frac{m_i}{m}$ ποσοστό μάζας του συστήματος που κατανέμεται στην i-σφαίρα.

Ερώτηση: Σε ποιο σημείο, πρέπει να αναρτήσουμε τη ράβδο, ώστε να ισορροπήσει; Είναι γνωστό ότι αυτό θα αντιστοιχεί στο κ.Β. του συστήματος των σφαιρών.

Αν M_i είναι η ροπή του βάρους (της μάζας) της i-σφαίρας, ως προς κάποιο σημείο μ (συντεταγμένη του κέντρου βάρους), τότε για να ισορροπεί, πρέπει $\sum_{i=0}^{k} M_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} m_i (x_i - \mu) = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} \frac{m_i}{m}(x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} p_i (x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} p_i x_i = \left(\sum_{i=0}^{k} p_i\right)\mu$$

$$\Leftrightarrow \mu = \sum_{i=0}^{k} x_i p_i = \sum_{i=0}^{k} x_i P(X=x_i) = E(X)$$

(αντιστοιχεί στις συντεταγμ. των κέντρων βάρος του) (γ) Οριακός μέσος σε επαναλαμβανόμενα πειράματα.

Ανεξάρτητες ρίψεις σε ενός π.τ.

$$E(X) \cong \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$ όπου x_i : το i-αποτέλεσμα και n το # επαναλήψεων

Αν ο δειγμ. χώρος είναι πεπερασμένος (οι x_i είναι τ.μ.)

$$= \frac{N_0}{n} x_0 + \frac{N_1}{n} x_1 + \ldots + \frac{N_k}{n} x_k =$$

$\downarrow n\to\infty$ $\downarrow n\to\infty$ → ερμηνεία της πιθανότητας ως οριακής σχετικής συχνότητας.

$$= P(X=x_0)\cdot x_0 + P(X=x_1)\cdot x_1 + \ldots + P(X=x_k)\cdot x_k$$

② Μέση Τιμή - Ορισμός

(i) Διακριτές τ.μ.

Έστω X διακριτή τ.μ με σ.π. $f_X(x)=P(X=x)>0$, για $x\in A$, αριθμήσιμο. Τότε, αν $\sum_{x\in A}|x| f_X(x) < +\infty$ (η σειρά συγκλίνει απόλυτα) τότε, λέμε ότι η μέση τιμή του X, υπάρχει και ορίζουμε:

$$E(X) = \sum_{x\in A} x\, f_X(x) = \sum_{x\in A} x\, P(X=x)$$

(ii) Απόλυτα συνεχείς τ.μ.

Έστω X απόλυτα συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x)$.

Αν $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx < +\infty$, τότε λέμε ότι η μέση τιμή της X υπάρχει και ορίζουμε $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx$.

(iii) Μικτές τ.μ.

Έστω X μικτή τ.μ όπου $X = \begin{cases} X_1, \text{ με πιθαν. } p \\ X_2, \text{ με πιθαν. } 1-p \end{cases}$

Τότε, αν υπάρχουν $E(X_1)$ και $E(X_2)$ τότε:

$$E(X) = p\cdot E(X_1) + (1-p)E(X_2)$$

③ Ιδιότητες της μέσης τιμής.

1) Αν υπάρχει, τότε:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in A} g(x) f_X(x), & \text{όπου A: αριθμήσιμο αν X είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)dx, & \text{αν X (απόλυτα) συνεχής τ.μ.} \end{cases}$$

Law Of The Unconscious Statistician

2) $E(aX+b) = aE(X)+b$ (γραμμικότητα της μέσης τιμής)

3) Αν $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$ (εφόσον υπάρχουν)

4) Αν $X \stackrel{d}{=} Y \Rightarrow E(X) = E(Y)$ (εφόσον υπάρχουν)

Παρατηρήσεις:

1) Για $g(X)=|X|$, έχουμε ότι οι συνθήκες ύπαρξης μέσης τιμής αναδιατυπώνονται ως $E(|X|)<+\infty$ (και στις 2 περιπτώσεις)

2) $-|X| \leq X \leq |X| \xRightarrow{ιδ.3} E(-|X|) \leq E(X) \leq E(|X|) \xRightarrow{ιδ.2} -E|X| \leq E(X) \leq E|X|$
$\Rightarrow \boxed{|E(X)| \leq E|X|}$

Ιδιαιτέρως, αν $E|X|<+\infty \Rightarrow E(X) \in \mathbb{R}$

3) Για $X \geq 0$ (με πιθανότητα 1), ή $X \leq 0$ (με πιθ. 1), τότε μπορούμε να ορίσουμε τη $E(X)$ και σε αυτές τις περιπτώσεις (ακόμα και αν είναι $-\infty$ ή $+\infty$ αντίστοιχα). Λέμε ότι η $E(X)$ ορίζεται.

4) Μια σειρά μπορεί να συγκλίνει χωρίς να συγκλίνει απόλυτα
π.χ $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ $\quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$
Αυτή συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απόλυτα ως σειρά
η σειρά $\sum_{n=1} a_n$

5) Αν $X = 1_A$, τότε $E(X) = E(1_A) = P(A)$

δείκτρια: $1_A^{(\omega)} = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$ άρα $E(1_A) = 0 \cdot P(1_A=0) + 1 \cdot P(1_A=1)$
$= \underbrace{0 \cdot P(A^c)}_{=0} + 1 \cdot P(A)$

αφού, $\{\omega \in \Omega : 1_A = 1\} = A$.

④ Παραδείγματα

(i) κατανομή Poisson(λ)

σ.π $f_X(x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$, $x=0,1,2,\ldots$

$E(X)=?$

Λύση: $X \geq 0$ με πιθαν. 1, άρα ορίζεται η $E(X)$.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} x\,P(X=x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda\ ,\ \lambda>0$$

(ii) π.ε. ακολουθία ρίψεων ενός ζαριού

X: ένδειξη 1ης ρίψης (διακριτή ομοιόμορφη)

Y = # ρίψεων μέχρι 1η φορά 6

$E(X)=?$, $E(Y)=?$

Λύση: $E(X) = \sum_{x=1}^{6} x\,P(X=x) = \sum_{x=1}^{6} x\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{1}{6}(1+2+\ldots+6)$

$= \frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$ $\left(1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$

$E(Y) = \sum_{y=1}^{+\infty} y\,P(Y=y)$ (1)

$P(Y=y) = P(1\eta$ φορά 6 στην y-δοκιμή$) = P(y-1$ αστοχίες (αποτυχίες) (να μη φέρω 6), 1 επιτυχία (να φέρω 6)$)$

$= P^{y-1}($να μη φέρω 6$)\cdot P($να φέρω 6$) = \left(\frac{5}{6}\right)^{y-1}\frac{1}{6}$ (2) $y=1,2,\ldots$

(Γεωμετρική κατανομή, Geo$\left(\frac{1}{6}\right)$)

Από την (2) στην (1)

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{+\infty} y\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{y-1}\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\cdot\sum_{y=1}^{+\infty} y\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{y-1}$$

Θέτω, $g(\lambda) = \sum_{y=0}^{+\infty}\lambda^y$ (γεωμετρική σειρά)

$\overset{(*)}{=} \dfrac{1}{1-\lambda}$ (όταν $|\lambda|<1$)

$$\Rightarrow g'(\lambda) = \left(\sum_{y=0}^{+\infty} \lambda^y\right)' = \sum_{y=0}^{+\infty} (\lambda^y)' = \sum_{y=0}^{+\infty} y\cdot\lambda^{y-1} = \sum_{y=1}^{+\infty} y\cdot\lambda^{y-1} \quad (3)$$

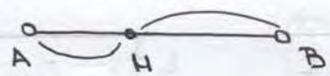
Και επίσης από (*)

$$g'(\lambda) = \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)' = \frac{1}{(1-\lambda)^2} \qquad \left(\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}\right) \quad (4)$$

Άρα $g'\left(\frac{5}{6}\right) \overset{(3)}{=\!=} \sum_{y=1}^{+\infty} y\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{y-1} \overset{(4)}{=\!=} \frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = 36.$

Τελικά, $E(Y) = \frac{1}{6}\cdot 36 = 6.$

(iii) π.τ τυχαία επιλογή ενός σημείου Η, ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, μήκους ℓ.



X: το μήκος(ΑΗ)

Y: ο λόγος $\frac{(AH)}{(HB)}$

$E(X)$? $E(Y)=$?

<u>Λύση</u>: Η X είναι συνεχής τ.μ. και $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx$ (X ~ συνεχής ομοιομ. κατανομή στο $(0,\ell)$)

Έχουμε, $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ell}, & 0<x<\ell \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

Άρα $E(X) = \int_0^{\ell} x\cdot\frac{1}{\ell}\,dx = \frac{1}{\ell}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\ell} = \frac{1}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{2} - 0\right) = \frac{\ell}{2}.$

Περιμένω, λόγω ομοιομορφ. κατανομής έχουμε:

$(HB) \overset{d}{=} (AH)$ δηλ. $\ell - X \overset{d}{=} X$

$$\Rightarrow E(\ell - X) = E(X) \Rightarrow E(\ell) - E(X) = E(X) \Rightarrow 2E(X) = \underset{\text{σταθερά}}{E(\ell)} \Rightarrow E(X) = \frac{\ell}{2}$$

$$Y = \frac{(AH)}{(HB)} = \frac{X}{\ell - X} = g(X)$$

<u>α' τρόπος:</u>

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_0^{\ell} g(x) f_X(x)\,dx = \int_0^{\ell} \frac{x}{\ell - x}\cdot\frac{1}{\ell}\,dx \;\overset{u=\ell-x}{\underset{\hookrightarrow x=\ell-u}{=\!=\!=}}$$

$$= \frac{1}{\ell}\int_{\ell}^{0} \frac{\ell-u}{u}(-du) = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} \frac{\ell-u}{u}\,du = \frac{1}{\ell}\left(\int_0^{\ell}\frac{\ell}{u}\,du - \underset{\int_0^{\ell} 1\,du}{\ell}\right) =$$

$$= \int_0^{\ell} \frac{1}{u}\,du - 1 = [\log x]_0^{\ell} - 1 = \log \ell - \lim_{x\to 0^+} \log x - 1 = +\infty$$

! Άρα, η $E(Y)$ δεν υπάρχει, αλλά ορίζεται και είναι $+\infty$

Άσκηση:

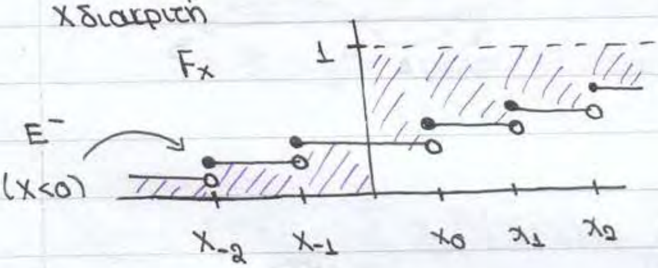
(β' τρόπος) Χρησιμοποιήστε ότι $X \overset{d}{=} \ell - X$, για να υπολογίσετε $E\left(\frac{X}{\ell - X}\right)$

18/3/15

ΜΑΘΗΜΑ 14ο

① Εναλλακτικός ορισμός της μέσης τιμής - Γεωμετρική ερμηνεία.

X διακριτή

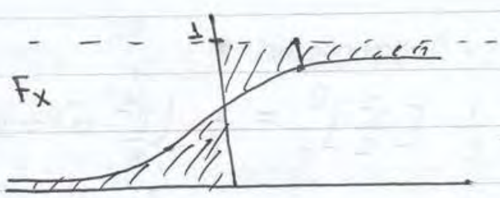


(για θετικές τ.μ. τη λέμε συνάρτηση επιβίωσης ή συνάρτηση αξιοπιστίας της X)

$$E(X) = E^+ - E^-$$

$$1 - F_X(x) = 1 - P(X \le x) = P(X > x)$$

X συνεχής



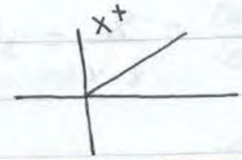
$E(X) = E^+ - E^-$

Όταν ορίζεται, δηλαδή όχι και τα δύο $(+\infty)$ $[E^+ = +\infty,\ E^- = +\infty]$ τότε η μέση τιμή δίνεται από αυτή διαφορά.

Άρα θ.δ.ο $E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))\,dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)\,dx$

Παρατήρηση:

$X^+ = \max(0, X)$, $\quad X^+ = \begin{cases} X, & X>0 \\ 0, & X<0 \end{cases}$



$X^- = \max(0, -X)$, $\quad X^- = \begin{cases} 0, & X>0 \\ \underset{= |X|}{-X}, & X<0 \end{cases}$

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ X = X^+ - X^-$, $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}\quad |X| = X^+ + X^-$

Ορίζουμε, $X^+ : \Omega \to \mathbb{R}$, όπου $X^+(\omega) = (X(\omega))^+$

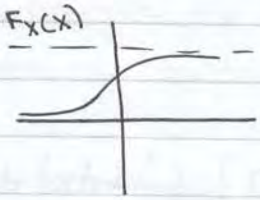
$X^- : \Omega \to \mathbb{R}$, όπου $X^-(\omega) = (X(\omega))^-$

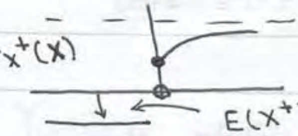
Άρα, άμεσα $X = X^+ - X^-$, όπου $X^+, X^- \geq 0$ (μη-αρνητικές τ.μ.)

Όταν ορίζεται η $E(X)$, τότε $E(X) = E(X^+) - E(X^-) = E^+ - E^-$

αφού μπορούμε να δούμε $E(X^+) = E^+$

$E(X^-) = E^-$





② Γεωμετρική Απόδειξη για X διακριτή τ.μ.

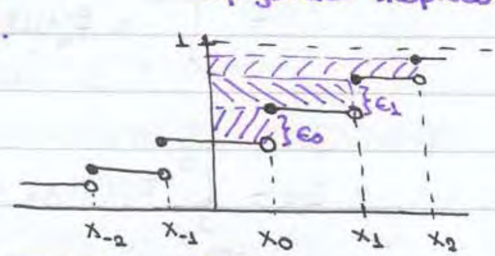
Θ.δ.ο $E^+ - E^- = E(X)$

Είναι φανερό ότι:

$$E^+ = \sum_{i=0}^{+\infty} E_i = \sum_{i=0}^{+\infty} \underbrace{x_i}_{\text{βάση}} \cdot \underbrace{P(X=x_i)}_{\text{ύψος}}$$

$$E^- = \sum_{i<0} E_i = \sum_{i<0}^{+\infty} (-x_i) \cdot P(X=x_i)$$

οριζόντιες λωρίδες:



ΑΡΙΣΤΕΡΑ	ΔΕΞΙΑ
Βάση: $-x_i$	Βάση: x_i
ύψος: $P(X=x_0)$	ύψος: $P(X=x_0)$.

$$\Rightarrow E^+ - E^- = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i P(X=x_i) - \left(-\sum_{i<0} x_i P(X=x_i)\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} x_i P(X=x_i) = E(X).$$

Παρατήρηση: Εναλλακτική σχέση $E(X)$ για μη-αρνητικές διακριτές τ.μ.

$E(X) = E^+ = E(X^+)$. Τότε, έχουμε:

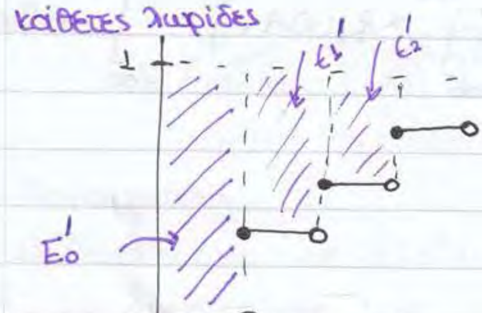
$$E^+ = \sum_{i=0}^{+\infty} E_i' = x_0 \underbrace{P(X \geq x_0)}_{=1} + (x_1 - x_0) P(X \geq x_1) + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} (x_i - x_{i-1}) P(X \geq x_i) \quad \text{όπου } x_{-1} = 0$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} (x_i - x_{i-1}) P(X > x_{i-1}) \text{, διότι } \{X > x_{i-1}\} = \{X \geq x_i\}, \ \forall i \geq 1$$

$x \in \{0,1,2,\dots\}$ $\quad$ $x \in \{1,2,3,\dots\}$

κάθετες λωρίδες



$$\sum_{x=0}^{+\infty} \underbrace{P(X > x)}_{\substack{= F^c(x) \\ = 1 - F(x)}} \qquad \sum_{x=0}^{+\infty} \underbrace{P(X > x)}_{= F^c(x)}$$

③ Αναλυτική απόδειξη για συνεχείς τ.μ.

Θ.δ.ο $E(X)=\underbrace{\int_0^{+\infty}(1-F_X(x))dx}_{I_1}-\underbrace{\int_{-\infty}^0 F_X(x)dx}_{I_2}$

• $I_1=\int_0^{+\infty}P(X>x)\,dx=\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}(f_X(u)du)dx$

$\left.\begin{matrix}0\le x<+\infty\\ x\le u<+\infty\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \quad 0\le x\le u<+\infty$

Άρα $I_1=\int_0^{+\infty}\int_0^u f_X(u)dx\,du=\int_0^{+\infty}f_X(u)\left(\int_0^u 1dx\right)du$

$=\int_0^{+\infty}u\,f_X(u)du=\int_0^{+\infty}x\,f_X(x)dx \quad (1)$

• $I_2=\int_{-\infty}^0 F_X(x)dx=\int_{-\infty}^0 P(X\le x)\,dx=\int_{-\infty}^0\left(\int_{-\infty}^x f_X(u)du\right)dx$

$\left.\begin{matrix}-\infty<x<0\\ -\infty<u\le x\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \quad -\infty<u\le x<0$

Άρα $I_2=\int_{-\infty}^0\int_u^0 f_X(u)\,dx\,du=\int_{-\infty}^0 f_X(u)\left(\int_u^0 1dx\right)du$

$=\int_{-\infty}^0 f_X(u)(-u)du=-\int_{-\infty}^0 u\,f_X(u)du=-\int_{-\infty}^0 x f_X(x)dx \quad (2)$

Άρα από (1) και (2)

Άρα $(I_1)-(I_2)=\int_0^{+\infty}x f_X(x)dx-\left(-\int_{-\infty}^0 x f_X(x)dx\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_X(x)dx$

$=E(X).$

④ Διασπορά της τ.μ.

Ορισμός: Έστω X τ.μ. με $E|X|<+\infty$. Αν $\mu \overset{ορσ}{=} E(X)$ (μ_X) τότε ορίζουμε ως **διασπορά** της τ.μ. X

$$\mathrm{Var}X = E(X-\mu)^2 \qquad (\mathrm{Var}X = \sigma_X^2 \text{ ή } \sigma^2)$$

Η $E(X)$ είναι ένα μέτρο θέσης της κατανομής της τ.μ. Αντίστοιχα, $\mathrm{Var}(X)$ είναι ένα μέτρο διασποράς, διακύμανσης ή μεταβλητότητας της κατανομής τμ X. Λέμε, επίσης ότι είναι μέτρο απομάκρυνσης ή αποκέντρωσης της κατανομης της X, από τη μέση τιμή της.

Παρατηρήσεις:

1) Η $\mathrm{Var}(X)$ είναι καλά ορισμένη ποσότητα, αν $E|X|<+\infty$.
   $(\mu \in \mathbb{R}$, $(X-\mu)^2 \geq 0$ (μη αρνητικη τμ))
2) $\mathrm{Var}(X) \geq 0$. $\quad (X-\mu)^2 \geq 0 \Rightarrow E(X-\mu)^2 \geq 0$
3) Πολλές φορές, η διασπορά με $E(X^2)<+\infty$, τότε $0 \leq \mathrm{Var}(X) < +\infty$

Ιδιότητες:

1) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$
2) $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

~ **Αποδείξεις:**

1) $\mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2 - 2\underset{σταθ}{\mu}X + \underset{σταθ.}{\mu^2}) = E(X^2) - 2\mu \underbrace{E(X)}_{\mu} + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 =$

$$= E(X^2) - E^2(X)$$

2) $$\mathrm{Var}(aX+b) = E\left[\left(aX+b - E(aX+b)\right)^2\right] = E\left[(aX + \cancel{b} - aE(X) - \cancel{b})^2\right]$$

$$= E\left[a^2(X-E(X))^2\right] = a^2 E\left[(X-\mu)^2\right] = a^2\,\mathrm{Var}(X)$$

Παρατηρήσεις:

1) $\mathrm{Var}(X) < +\infty \Leftrightarrow E(X^2) < +\infty$

Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι υπάρχει η διασπορά της X.

$$(\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X))$$
$\in \mathbb{R}$

2) Υπολογισμός διασποράς για διακριτές και συνεχείς τ.μ.

$$VarX = E(X^2) - E^2(X) = \begin{cases} \sum_{x\in A} x^2 P(X=x) - \left(\sum_{x\in A} x P(X=x)\right)^2 & \text{αν } X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx\right)^2 & \text{αν } X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

3) Αν $X=c$, με πιθαν 1 $\Rightarrow VarX=0$

Ισχύει και το αντίστροφο, αν $VarX=0 \Rightarrow X=c$ με πιθ. 1.

~ Σχόλιο ~

$E(X)=E^+ - E^-$

Περιπτώσεις:

(i) $E^+<\infty$ και $E^-<\infty$, τότε $E(X)$ υπάρχει $(\in\mathbb{R})$

(ii) $E^+=+\infty$ και $E^-<\infty$, τότε $E(X)=+\infty$ (ορίζεται)

(iii) $E^+<\infty$ και $E^-=+\infty$, τότε $E(X)=-\infty$ (ορίζεται)

(iv) $E^+=+\infty$ και $E^-=+\infty$, τότε $E(X)$ δεν ορίζεται

⑤ Παραδείγματα:

(i) X_1: ο χρόνος αναμονής ενός ανυπόμονου ασθενή οδοντιατρείου (αν φτάσει τότε ή εξυπηρετείτε άμεσα είτε φεύγει)

$X_1=0$ με πιθ. 1

(ii) X_2: κέρδος από 1 στοίχημα

$$X_2 = \begin{cases} 0 & \text{, με πιθ } \frac{1}{2} \text{ (αν δεν παίξω)} \\ 1 & \text{, με πιθ } \frac{1}{4} \text{ (αν παίξω, και φέρω γράμματα)} \\ -1 & \text{, με πιθ } \frac{1}{4} \text{ (αν παίξω και φέρω κορώνα)} \end{cases}$$

(iii) X_3 → όπως πριν (επιρρεπής να παίζω)

$$X_3 = \begin{cases} 0 & \text{με πιθαν } \frac{1}{4} \\ 1 & \text{με πιθαν } \frac{3}{8} \\ -1 & \text{με πιθ. } \frac{3}{8} \end{cases}$$

(iv) X_4 : τυχαία επιλογή ενός σημείου στο $[-1,1]$

(v) X_5: στοίχημα με 100€

$$X_5 = \begin{cases} 0 & \text{, με πιθ. } \frac{999.999}{1.000.000} \\ 100 & \text{, με πιθ } \frac{1}{2.000.000} \\ -100 & \text{, με πιθ. } \frac{1}{2.000.000} \end{cases}$$

~Υπολογισμός μέσης τιμής:

$E(X_i)=0 \quad \forall \ 1 \le i \le 5$, διότι οι X_i έχουν συμμετρικές κατανομές,

δηλαδή για διακριτές : $P(X=x) = P(X=-x)$, $\forall \ x \in A$

για συνεχείς : $f_X(x) = f_X(-x)$, $\forall \ x \in \mathbb{R}$

$\iff X \overset{d}{=} -X$

$\Rightarrow E(X)=E(-X) \Rightarrow E(X) = -E(X) \Rightarrow 2E(X)=0 \Rightarrow E(X)=0.$

21/3/16

ΜΑΘΗΜΑ 15ο

① Παραδείγματα (συνέχεια...)

i) $X_1=0$, με πιθανότητα 1.

ii) $X_2 = \begin{cases} 0 \text{, με πιθαν. } 1/2 \\ 1 \text{, με πιθαν. } 1/4 \\ -1 \text{, με πιθαν } 1/4 \end{cases}$

iii) $X_3 = \begin{cases} 0 \text{, με πιθ. } 1/4 \\ 1 \text{, με πιθ. } 3/8 \\ -1 \text{, με πιθ. } 3/8 \end{cases}$

iv) X_4 = τυχαία επιλογή σημείου $[-1,1]$

v) $X_5 = \begin{cases} 0 \text{, με πιθαν. } 999.999/1.000.000 \\ 100 \text{, με πιθαν. } 1/(2\cdot10^6) \\ -100 \text{, με πιθαν. } 1/(2\cdot10^6) \end{cases}$

Είχαμε δείξει ότι: $E(X_i)=0$, $\forall\ 1\le i\le 5$.

Θα υπολογίσουμε τη διασπορά τους.

Όμως, $Var(X_i)=E(X_i^2)-E^2(X_i)=E(X_i^2)$, $\forall\ 1\le i\le 5$

i) $E(X_1^2)=0 \Rightarrow Var(X_1)=0$

ii) $E(X_2^2)=0^2\cdot P(X_2=0)+1^2\cdot P(X_2=1)+(-1)^2P(X_2=-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow Var(X_2)=\frac{1}{2}$

iii) $E(X_3^2)=0^2\cdot P(X_3=0)+1^2\cdot P(X_3=1)+(-1)^2P(X_3=-1)=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow Var(X_3)=\frac{3}{4}$

iv) $f_{X_4}(x)=\frac{1}{2}$ $-1\le x\le 1$, 0 διαφορετικά

$$E(X_4^2)=\int_{-1}^{1}x^2 f_x(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right)$$

$=\frac{1}{3} \Rightarrow Var(X_4)=\frac{1}{3}$

v) $E(X_5^2)=0^2\cdot P(X_5=0)+100^2P(X_5=100)+(-100)^2P(X_5=-100)$

$=\frac{10.000}{2.000.000}+\frac{10.000}{2.000.000}=\frac{1}{200}+\frac{1}{200}=\frac{1}{100}$

$\Rightarrow Var(X_5)=\frac{1}{100}$ (αρκετά μικρότερο από $Var(X_2)$ και $Var(X_3)$)

② Τυπική Απόκλιση τ.μ.

$SD(X)=\sqrt{Var(X)}$ ή $sd(x)$ και το λέμε τυπική απόκλιση της τ.μ. X.

Έχει ανάλογες ερμηνείες, όπως και η διασπορά της X.

(μέτρο διασποράς, διακύμανσης, αποκέντρωσης, κτλ)

$SD(aX+b)=|a|\,SD(X)$

③ Κατανομές Τυχαίων Μεταβλητών

~ Κατανομή γραμμικών μετασχηματισμών τ.μ.

α) Κατανομή της $Y=aX+b$, για X διακριτή

Η Y είναι διακριτή, και άρα έχει σ.π. (υποθέτω $a\neq 0$)

$f_Y(y)=P(Y=y)=P(aX+b=y)=P\left(X=\frac{y-b}{a}\right)=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

Τελικά, $f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$, $\forall\ y\in\mathbb{R}$.

β) ~~κατανομή της $Y=aX+b$, για X απόλυτα συνεχής~~

Η Y θα είναι απόλυτα συνεχής τ.μ. (θα έχει σ.π.π)

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(aX+b)=\begin{cases} P\left(X\leq \frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ P\left(X\geq \frac{y-b}{a}\right)^{(*)}, & a<0 \end{cases}$$

(*) Έχουμε, $P\left(X\geq \frac{y-b}{a}\right)=1-P\left(X<\frac{y-b}{a}\right) \overset{}{\underset{X \text{ συνεχής}}{=\!=\!=}} 1-P\left(X\leq \frac{y-b}{a}\right)$

$$=1-F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Τελικά, $F_Y(y)=\begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ 1-F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a<0. \end{cases}$

(Βλέπουμε εδώ ότι η Y: συνεχής τμ (και μάλιστα απολυτα συνεχης), ως συνθεση τετοιων συναρτησεων)

Έχει, λοιπόν σ.π.π. και προκύπτει με παραγώγιση.

$$f_Y(y)=\begin{cases} F_X'\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot \frac{1}{a}, & a>0 \\ -F_X'\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot \frac{1}{a}, & a<0 \end{cases}$$

(εκεί που παραγωγίζεται ↳ συμπληρώνω με μηδεν, όπου χρειαστεί.)

$$\Downarrow$$

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\left|\frac{1}{a}\right| \quad (a\neq 0)$$

(αυτή, θα είναι μια από τις "πολλές" σ.π.π. που θα μπορούσαμε να ορίσουμε).

~ Παρατήρηση ~

Αν θέσουμε $y=g(x)=ax+b \Leftrightarrow x=g^{-1}(y)=\frac{y-b}{a}$

Άρα, λοιπόν έχουμε $f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))=\left|\frac{d\,g^{-1}(y)}{dy}\right| \rightarrow$ γενικότερη μορφή για g αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα.

④ Ειδικές Κατανομές: Ομοιόμορφη κατανομή

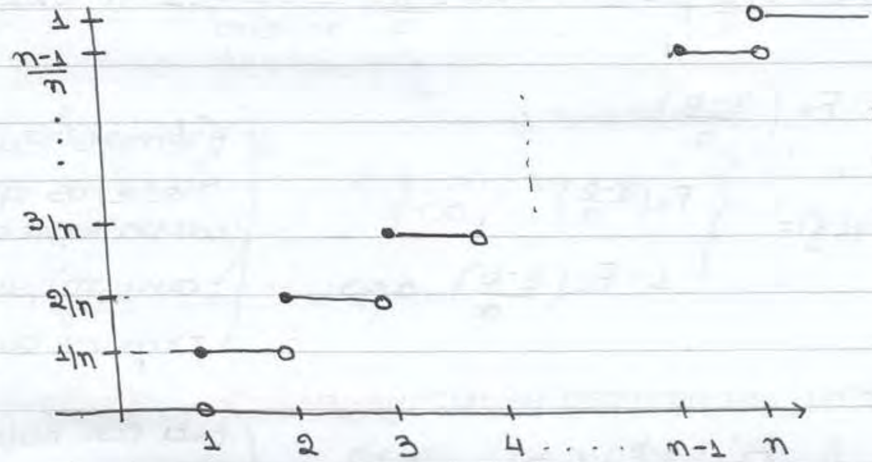
α) Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή.

συμβ. discrete Uniform(n) , $n \geq 1$.

π.τ. : τυχαία επιλογή ενός αριθμού στο $\{1, 2, \ldots, n\}$

τ.μ. : X : ο αριθμος που επιλέχθηκε.

σ.π. : $f_X(x) = \frac{1}{n}$, $x = 1, 2, \ldots, n$



σκαλωτή ή κλιμακωτή συνάρτηση (χαρακτηριστική των διακρ. τμ)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{[x]}{n} & , 1 \leq x < n \\ 1 & , x \geq n \end{cases} \quad ([x]: \text{ακέραιο μέρος})$$

$$F_X(x) = \sum_{x_i < x} f_X(x_i)$$

$$\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}$$

Απόδειξη:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} x P(X=x) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1+2+\ldots+n) = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n+1}{2}$$

~ Υπενθύμιση:

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{n^2-1}{2}}$$

Απόδειξη:

Έχουμε, $Var(X) = E(X^2) - E^2(X) \quad (1)$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 P(X=x) = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Από την (1) : $Var(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$

$$= \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}.$$

Παράδειγμα:

X = ένδειξη ζαριού σε 1 ρίψη ενός τίμιου ζαριού

$f_X(x) = \frac{1}{6} \quad x=1,\dots,6 \qquad X \sim discrUnif(6)$

$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3{,}5 \qquad Var(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}$

Γενίκευση:

discrete Uniform (a,b) $\quad [d.Unif(1,n) \equiv d\,Unif(n)]$.

$f_X(x) = \frac{1}{b-a+1}$, $x = a, a+1, \dots, b$ (γενικά $a,b \in \mathbb{Z}$)

Παρατηρούμε ότι: αν $Y \sim d.Unif(a,b)$ τότε:

$Y = a-1+X$, όπου $X \sim d.Unif(b-a+1)$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , x<a \\ \frac{[x-a+1]}{b-a+1} & , a \le x < b \\ 1 & , x \geq b \end{cases}$$

$$E(Y) = E(a-1+X) = a-1+E(X) = a-1+\frac{b-a+1+1}{2} = \frac{2a-\cancel{2}+b-a+\cancel{2}}{2}$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

$$Var(Y) = Var(\underbrace{a-1}_{\text{σταθ.}}+X) = Var(X) = \frac{(\overbrace{b-a+1}^{\text{"}n\text{"}})^2 - 1}{12}$$

β) Συνεχής ομοιόμορφη κατανομή.

συμβ: Uniform(a,b), $a<b$, (ή Unif(a,b) ή $U(a,b)$)

π.τ: τυχαία επιλογή ενός σημείου στο (a,b)

τμ X: τη συντεταγμένη του σημείου επιλογής.

σπп: $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ $a<x<b$ και 0 διαφορετικά.

Για $x: a<x<b$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} du = \frac{1}{b-a} [u]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

Τελικά,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x<b \\ 1, & x\geq b \end{cases}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

Απόδειξη:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{\cancel{b-a}} \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

Απόδειξη:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{a}^{b} x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(a^2+ab+b^2)}{3\cancel{(b-a)}} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} = \frac{a^2+2ab+b^2-ab}{3}$$

$$= \frac{(a-b)^2-ab}{3}$$

Από την ① έχουμε τελικά:

$$Var(X) = \frac{(a+b)^2 - ab}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4(a+b)^2 - 4ab - 3(a+b)^2}{12}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - 4ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

~ Παρατήρηση: ~

Αν $Y \sim Unif(a,b)$ τότε $Y \overset{d}{=} a + (b-a)U$, όπου $U \sim Unif(0,1)$

Θέτω $Z = a + (b-a)U$

Έχουμε, $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(a + (b-a)U \leq z) = P((b-a)U \leq z-a)$

$$\underset{b-a>0}{=} P\left(U \leq \frac{z-a}{b-a}\right) = F_U\left(\frac{z-a}{b-a}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & , \frac{z-a}{b-a} < 0 \\ \frac{z-a}{b-a} & , 0 \leq \frac{z-a}{b-a} < 1 \\ 1 & , \frac{z-a}{b-a} \geq 1 \end{cases},$$

αφού $F_U(u) = \begin{cases} 0 & , u < 0 \\ u & , 0 \leq u < 1 \\ 1 & , u \geq 1 \end{cases}$, δηλ. $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < a \\ \frac{z-a}{b-a} & a \leq z < b \\ 1 & z \geq b \end{cases}$

$$\Rightarrow \underset{(\forall z \in \mathbb{R})}{F_Z(z) = F_Y(z)} \Rightarrow Y \overset{d}{=} Z.$$

23/3/16

ΜΑΘΗΜΑ 16ο

① Ακολουθία Δοκιμών Bernoulli:

π.τ.: ανεξάρτητες επαναλήψεις ενός π.τ. που συνδέεται με την πραγματοποίηση ή όχι κάποιου ενδεχομένου

Ορίζονται $X_1, X_2, X_3 \dots$ δηλαδή μια ακολουθία τ.μ. που είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, όπου $P(X_n = x) = \begin{cases} p, & x=1 \text{ (επιτυχία)} \\ 1-p, & x=0 \text{ (αποτυχία)} \end{cases}$

$X_n = \#$ επιτυχιών στην n-οστή δοκιμή $n \geq 1$

$X_n \sim Be(p)$ (κατανομή Bernoulli)

p: πιθανότητα επιτυχίας

$S_n = \#$ επιτυχιών μέχρι τη n-οστή δοκιμή (Διωνυμική κατανομή)

αναπαράσταση: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, λέμε ότι $S_n \sim Bin(n, p)$

n: # δοκιμών, p: πιθανοτ. επιτυχίας

$T_1 \simeq \#$ δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία (Γεωμετρική κατανομή)

Θα λέμε ότι $T_1 \sim Geo(p)$

p: πιθανοτ. επιτυχίας.

$T_1 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$

$$T_1 = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - X_k)}_{\#\text{ αποτυχιών μέχρι τη 1η επιτυχία}}$$

$T_n = \#$ δοκιμών μέχρι την n-οστή επιτυχία (αρνητική διωνυμική κατανομή).

Θα λέμε $T_n \sim NegBin(n, p)$

n: # επιτυχιών, p: πιθανότητα επιτυχίας.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0

$S_3 = 1$, $S_7 = 2$, $S_{10} = 4$

$T_1 = 3$, $T_2 = 4$, $T_3 = 8$

② Κατανομή Bernoulli.

συμβ. Bernoulli (p) ή $Be(p)$

$X = \#$ επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli

σ.π. $f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \qquad x = 0, 1$

δηλ. $P(X=x) = \begin{cases} 1-p, & x=0 \\ p, & x=1 \end{cases}$ (είναι δίτιμη τ.μ.)

σ.κ. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-p, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

Μέση τιμή: $E(X) = p$.

Απόδειξη: Πράγματι, $E(X) = \sum_{x=0}^{1} x P(X=x) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot \underbrace{P(X=1)}_{p} = p$

Διασπορά: $Var(X) = p \cdot (1-p)$

Απόδειξη: $E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 P(X=x) = 0^2 \cdot P(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) = p$

$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1-p)$

③ Διωνυμική κατανομή

συμβ. Binomial (n,p) ή $Bin(n,p)$ $\; n \geq 1, \; 0 < p < 1$

π.τ. ακολουθία δοκιμών Bernoulli $X_1, X_2, \ldots$

$X = \#$ επιτυχιών σε n-δοκιμές Bernoulli

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

σ.π. $f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$

Απόδειξη: Έστω $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\{X=x\} = \bigcup_{\substack{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \{0,1\}^n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = x}} \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots X_n = x_n\}$$

$$P(X=x) = \sum_{\substack{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \{0,1\}^n : \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = x}} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \quad ①$$

(*)

$$P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots X_n=x_n) \overset{\text{ανεξ.}}{=\!=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i=x_i) \overset{x_i \sim Be(p)}{=\!=} \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} =$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \overset{(*)}{=\!=} p^x (1-p)^{n-x} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow P(X=x) = \begin{pmatrix}\text{\# τρόπων τοποθέτησης} \\ \text{x-μονάδων σε n-θέσεις}\end{pmatrix} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Μεση Τιμη:

$E(X) = np$

α' τρόπος: $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{= p} \overset{X_i \sim Be(p)}{=\!=} np$

β' τροπος: $E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$$\left(\begin{aligned} &\binom{n}{x} = \frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1} \quad , n \geq 1 \quad , x \geq 1 \\ &\binom{n}{x} = \frac{(n)_x}{x!} = \frac{n(n-1)_{x-1}}{x(x-1)!} = \frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1} \end{aligned}\right)$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x} = np \sum_{n=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-x}$$

$$\overset{x-1 \to x}{=\!=} np \cdot \underbrace{\sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{n-1-x}}_{= 1} = np$$

απο σ.π. $Bin(n-1, p)$

Διασπορα:

$Var(X) = np(1-p)$

Απόδειξη: $E(X^2) = E[X(X-1)+X] = E[X(X-1)] + E(X)$
$\Rightarrow Var(X) = E[X(X-1)] + E(X) - E^2(X)$

} Παρατήρηση (υπολογισμός διασποράς για διακριτές τμ)

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} [x^2 - x + x] \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$= \underbrace{\sum_{x=1}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}}_{\substack{\| \\ E[X(X-1)]\ (\text{όπως αναμέναμε})}} + \underbrace{\sum_{x=1}^{n} x \underbrace{\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}}_{\text{σ.π. } Bin(n,p)}}_{E(Bin(n,p)) = np} =$$

$$= \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} + np =$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \cancel{x}\cancel{(x-1)}\frac{n(n-1)}{\cancel{x}\cancel{(x-1)}}\binom{n-2}{x-2}p^x(1-p)^{n-x} + np =$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}(1-p)^{(n-2)-(x-2)} + np =$$

$$\overset{x-2\to x}{=\!=} n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{x=0}^{n-2}\underbrace{\binom{n-2}{x}p^x(1-p)^{(n-2)-x}}_{\text{σ.π. } Bin(n-2,p)}}_{=1} + np = n(n-1)p^2 + np$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

Παρατηρήσεις για Be(p) και Bin(n,p)

1) Αν $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π και $A \in \mathcal{A}$, ενδεχόμενο με $P(A)=p$, τότε
η $X = 1_A \sim Be(p)$ (1_A : η δείκτρια τμ)

$$\left.\begin{array}{l} P(X=1) = P(1_A=1) = P(1_A^{-1}\{1\}) = P(A) = p \\ \text{Επίσης, } P(X=0) = 1-p \end{array}\right\} \Rightarrow 1_A \sim Be(p)$$

2) Αν $X \sim Be(p) \Rightarrow X^n \sim Be(p)$ $\quad (X^n \overset{d}{=} X)$
$X \in \{0,1\} \Rightarrow X^n \in \{0,1\}$ και
$P(X^n=1) = P(X=1) = p \Rightarrow P(X^n=0) = 1 - P(X^n=1) = 1-p$

3) Αν $X \sim Be(p) \Rightarrow 1-X \sim Be(1-p)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Πράγματι, } P(1-X=1) = P(X=0) = 1-p \\ \text{και, } P(1-X=0) = P(X=1) = p \end{array}\right\} \Rightarrow 1-X \sim Be(1-p)$$

4) $Be(\frac{1}{2}) \equiv d.Unif(0,1)$

5) $Bin(1,p) \equiv Be(p)$ (άμεσο)

∵ Η Διωνυμική γενικεύει την Bernoulli

④ Γεωμετρική Κατανομή.

συμβ: $Geo(p)$ $\quad 0<p<1$

πε: ακολουθία δοκιμών $Be(p)$, $X_1, X_2, X_3, \dots$

$X =$ # δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία

σ.π. $f_X(x) = p(1-p)^{x-1}$, $x \geq 1$

$\{X=x\} = \{X_1=0, X_2=0, \dots X_{x-1}=0, X_x=1\}$

$$\Rightarrow P(X=x) \overset{\text{ανεξ.}}{=\!=} P(X_1=0)P(X_2=0)\dots P(X_{x-1}=0)P(X_x=1)$$

$$\underset{X_i\sim Be(p)}{=\!=\!=} p(1-p)^{x-1} \quad , x=1,2,\dots$$

σ.κ. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<1 \\ 1-(1-p)^{[x]} & , x\geq 1 \end{cases}$

Έστω $x \geq 1$

$$F_X(x) = P(X\leq x) = \sum_{\substack{x_i\leq x \\ x_i \in \mathbb{N}^*}} f_X(x_i) = \sum_{i=1}^{[x]} p(1-p)^{i-1} = p\sum_{i=1}^{[x]}(1-p)^{i-1}$$

$$= p\cdot \sum_{i=0}^{[x]-1} (1-p)^i = \cancel{p}\,\frac{1-(1-p)^{[x]}}{\cancel{1}-(\cancel{1}-\cancel{p})} = 1-(1-p)^{[x]}$$

Μέση Τιμή:

$E(X) = \frac{1}{p}$

α' τρόπος: $E(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} xP(X=x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x\,p(1-p)^{x-1} = p\sum_{x=1}^{+\infty} x(1-p)^{x-1}$ ①

Έχουμε, $\sum_{x=0}^{+\infty}(1-p)^x = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p} \xRightarrow{d/dp} -\sum_{x=1}^{+\infty} x(1-p)^{x-1} = -\frac{1}{p^2}$

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^{+\infty} x(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p^2} \quad ②$$

Από ①+②: $E(X) = p\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$

β' τρόπος: $E(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} x\,p(1-p)^{x-1} = \sum_{x=1}^{+\infty}(x-1+1)p(1-p)^{x-1}$

$$= \sum_{x=1}^{+\infty}(x-1)p(1-p)^{x-1} + \underbrace{\sum_{x=1}^{+\infty} p(1-p)^{x-1}}_{} = \sum_{x=2}^{+\infty}(x-1)p(1-p)^{x-1} + 1$$

$$\overset{x-1\to x}{=\!=\!=} \sum_{x=1}^{+\infty} xp(1-p)^x + 1 = (1-p)\cdot \underbrace{\overset{''1}{\sum_{x=1}^{+\infty}} xp(1-p)^{x-1}}_{E(Geo(p))=E(X)} + 1$$

$\Rightarrow E(X) = (1-p)E(X)+1 \Rightarrow pE(X) = 1 \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$

γ' τρόπος: $E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} P(X>x)$

Διασπορά:

$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Απόδειξη: $E(X^2) = \sum_{x=1}^{+\infty} x^2 P(X=x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x^2 p(1-p)^{x-1} = \sum_{x=1}^{+\infty} (x^2-x+x)p(1-p)^{x-1} =$

$$= \sum_{x=1}^{+\infty} x(x-1)p(1-p)^{x-1} + \underbrace{\sum_{x=1}^{+\infty} xp(1-p)^{x-1}}_{E(Geo(p))}$$

$$= \sum_{x=2}^{+\infty} x(x-1)p(1-p)^{x-1} + \frac{1}{p}$$

$$= p(1-p)\sum_{x=2}^{+\infty} x(x-1)(1-p)^{x-2} + \frac{1}{p} \quad ①$$

$$\sum_{x=0}^{+\infty} (1-p)^x = \frac{1}{p} \xRightarrow{d/dp} \sum_{x=1}^{+\infty} x(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p^2} \xRightarrow{d/dp} -\sum_{x=2}^{+\infty} x(x-1)(1-p)^{x-2} = -\frac{2}{p^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=2}^{+\infty} x(x-1)(1-p)^{x-2} = \frac{2}{p^3} \quad ②$$

$$\xRightarrow[②]{①} E(X^2) = p(1-p)\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-2p+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

28/3/16

ΜΑΘΗΜΑ 17ο

① Παρατηρήσεις στην Γεωμετρική Κατανομή.

1) Η αμνήμονη ιδιότητα

$P(X>s+t \mid X>s) = P(X>t)$, $\forall\, s,t \geq 0$

Απόδειξη:

$$P(X>s+t \mid X>s) = \frac{P(X>s+t, X>s)}{P(X>s)} = \frac{P(X>s+t)}{P(X>s)} \overset{(*)}{=} \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^s}$$

$$= (1-p)^t = P(X>t)$$

(*) $\{X>s+t\} = \{X_1=0, X_2=0, \dots X_{s+t}=0\}$ (ή από συνάρτηση κατανομής)

2) Η Γεωμετρική κατανομή στο $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ ($Geo^*(p)$)

$X\sim Geo^*(p) \Leftrightarrow X = \#$ αποτυχιών μέχρι την 1η επιτυχία

Προφανώς, $X = \underbrace{Y}_{\substack{\#\text{δοκιμών}\\ \text{μέχρι την}\\ \text{1η επιτυχία}}} - \underbrace{1}_{\text{επιτυχία}}$, όπου $Y=\#$ δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία

και $Y\sim Geo(p)$

σ.π. : $P(X=x) = p(1-p)^x$, $x\geq 0$

μέση τιμή: $E(X) = E(Y-1) = E(Y)-1 = \frac{1}{p}-1 = \frac{1-p}{p}$

Διασπορά : $Var(X) = Var(Y-1) = Var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$

② Αρνητική Διωνυμική κατανομή

συμβ: Negative Binomial (n,p) ή $NegBin(n,p)$

$n\geq 1$ $\quad 0<p<1$

π.τ: ακολουθία δοκιμών Bernoulli $X_1, X_2, X_3, \dots$

$X = \#$ δοκιμών μέχρι την nοστή επιτυχία, τότε $X\sim NegBin(n,p)$

σ.π. $P(X=x) = \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}$, $x=n, n+1, \dots$

Απόδειξη:

$$\{X=x\} = \left\{ \sum_{i=1}^{x-1} X_i = n-1,\ X_x = 1 \right\}$$

$$P(X=x) = P\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} X_i}_{Bin(x-1,p)} = n-1\Big) P(X_x=1) = \binom{x-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{x-n} p =$$

$= \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}$, αφού $\sum_{i=1}^{x-1} X_i$ είναι άθροισμα $x-1$ ανεξάρτητων $Be(p)$.

~ $E(X) = n \cdot \frac{1}{p}$

~ $Var(X) = n \cdot \frac{1-p}{p^2}$

X = # δοκιμών μέχρι την $n^{οστή}$ επιτυχία = # δοκιμών μέχρι την $1^η$ επιτυχ + # δοκιμών από την $1^η$ επιτυχία μέχρι την $2^η$ επιτ + ... + # δοκιμών από την $(n-1)$ μέχρι την n επιτυχία. $= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$

όπου $Y_k \sim Geo(p)$, $k = 1, 2, \dots, n$, αφού εκφράζει το # δοκιμών μέχρι την $1^η$ επιτυχία, αν ξεκινήσω το πείραμα τύχης, ακριβώς μετά την $k-1$ επιτυχία, και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.

~ $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} = n \cdot \frac{1}{p}$

(αν, n-τυχαίες ανεξάρτητες μεταβλητές $(Y_i)_{1 \le i \le n}$ και $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, τότε:
$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-p}{p^2} = n \cdot \frac{1-p}{p^2}$ → θα το δούμε αυστηρά αργότερα)

Παρατηρήσεις:

1) $NegBin(1, p) \equiv Geo(p)$, και άρα η αρνητική Διωνυμική κατανομή είναι γενίκευση της Γεωμετρικής κατανομής.

2) Μπορούμε να ορίσουμε $NegBin^*(n, p)$ $(n = 1, 2, \dots$ $0 < p < 1)$, όπου $X \sim NegBin^*(n, p)$, αν X = # αποτυχιών μέχρι την $n^{οστή}$ επιτυχία

~σύνδεση με $NegBin(n, p)$:

Έχουμε $X = Y - n$, όπου $Y \sim NegBin(n, p)$

Y = # δοκιμών μέχρι την $n^{οστή}$ επιτυχία, n = # επιτυχιών

Άρα, $P(X = x) = \binom{x+n-1}{n-1} p^n (1-p)^x$, $x = 0, 1, 2, \dots$

Μέση τιμή της:

$$E(X) = E(Y-n) = E(Y) - n = \frac{n}{p} - n = n\left(\frac{1}{p} - 1\right) = n\,\frac{1-p}{p}$$

Διασπορά της:

$$Var(X) = Var(Y-n) = Var(Y) = n \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

③ Κατανομή Poisson

συμβ.: Poisson(λ) ή $P(\lambda)$, $\lambda > 0$

σ.π. $f_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

μέση τιμη: $E(X) = \lambda$

Διασπορα: $Var(X) = \lambda$

Απόδειξη:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) \quad (1)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{+\infty} x^2 P(X=x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty} x\frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty}(x-1+1)\frac{\lambda^x}{(x-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty}(x-1)\frac{\lambda^x}{(x-1)!} + e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{(x-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{+\infty}(x-1)\frac{\lambda^x}{(x-1)!} + \lambda\underbrace{\sum^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}}_{=1} =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{x=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}}_{=e^{\lambda}} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

Αρα, από την (1)

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Εφαρμογές:

- \# τηλεφωνικών κλήσεων σε τηλεφ. κεντρο
- \# πελατών σε μια τράπεζα σε 1 μέρα
- \# τυπογραφικών λαθών σε 1 βιβλίο.

Ιδιότητα Poisson:

- προσέγγιση της $Bin(n,p)$, για μεγάλο n και μικρό p (υπό προϋποθέσεις.)

Έστω $X_n \sim Bin(n,p_n)$, ώστε $\lim_{n\to\infty} n p_n = \lambda > 0$

$\hookrightarrow p_n = n \cdot p_n \cdot \frac{1}{n} \to 0$ $\quad n=1,2,3,\dots$

Θ.δ.ο $\lim_{n\to\infty} P(X_n=x) = \underbrace{P(Y=x)}_{P(\lambda)} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x=0,1,2,3,\dots$

Απόδειξη:

- $X_n \sim Bin(n,p_n) \Rightarrow P(X_n=x) = \binom{n}{x} p_n^x (1-p_n)^{n-x}$ $\quad x=0,1,2,\dots,n$

$\lim_{n\to\infty} P(X_n=x) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p_n^x (1-p_n)^{n-x}$

Αναλύω το: $\binom{n}{x} p_n^x (1-p_n)^{n-x} = \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{1}{1-p_n}\right)^x p_n^x (1-p_n)^n$

$$= \frac{1}{x!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\dots\cdot\frac{n-x+1}{n}(np_n)^x\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{1-p_n}\right)^x =$$

$$= \frac{1}{x!}\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)(np_n)^x\underbrace{\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n}_{(*)}\left(\frac{1}{1-p_n}\right)^x$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{x!}\,1\cdot1\cdot1\dots\cdot1\cdot\lambda^x\cdot e^{-\lambda}\cdot 1 = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!} = P(Y=x)$$, όπου $Y\sim P(\lambda)$

(*) Αν $(u_n)_{n\geq 1}$: $u_n \to u$, τότε $\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n \to e^u$.

Το εφαρμόζουμε για $u_n = -np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\lambda$

4 Ασκήσεις με Διακριτές Κατανομές

1) Δειγματοληψία με επανάθεση από κάλπη με N-σφαιρίδια.

Έχουμε κάλπη με N-σφαιρίδια, όπου m είναι λευκά και $N-m$ μαύρα. Επιλέγουμε n-σφαιρίδια με επανάθεση

Έστω X = # λευκών σφαιριδίων (στα n-που επέλεξα)

$P(X=x) = ?$ $\quad x=0,1,2,\dots,n$

Λύση

α' τρόπος: (συνδυαστική)

Θέτω $A_x = \{X=x\}$ (να επιλέξω ακριβώς x-λευκά σφαιρίδια)

$P(X=x) = P(A_x) = \frac{|A_x|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{x} \cdot m^x (N-m)^{n-x}}{N^n}$ → επαναληπτικές διατάξεις των N ανά n

$= \binom{n}{x} \frac{m^x (N-m)^{n-x}}{N^x N^{n-x}} = \binom{n}{x} \left(\frac{m}{N}\right)^x \cdot \left(\underbrace{\frac{N-m}{N}}_{1-\frac{m}{N}}\right)^{n-x}, x=0,1,\dots,n$

$\Rightarrow X \sim Bin(\underset{\#\text{επιλογών}}{n}, \frac{m}{N})$

β' τρόπος:

Θέτω $X_i = \begin{cases} 1 & \text{, αν το σφαιρίδιο είναι λευκό} \\ 0 & \text{, αν το σφαιρίδιο είναι μαύρο} \end{cases}$

Τότε $X_i \sim Be(p)$, $p = P$("να βγάλω λευκό σφαιρίδιο") $= \frac{m}{N}$ και είναι ανεξάρτητες.

Τότε, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Τελικά $X \sim Bin(n,p)$, αφού $(X_i)_{1 \le i \le n}$ είναι ανεξάρτητες $Be(p)$

$\Rightarrow P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} \left(\frac{m}{N}\right)^x \left(\frac{N-m}{N}\right)^{n-x}, x=0,1,\dots,n$

2) Έστω X διακριτή τμ με σ.π. $P(X=i) = c(1+i)$, $i=0,1,\dots,n$

(i) c; (ii) $E(X)$; (iii) $Var(X)$; iv) $P(X=1 | X \le 2) = ?$

Λύση:

(i) Πρέπει, $\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = 1 \Rightarrow c \cdot \sum_{i=0}^{n} (1+i) = 1 \Rightarrow c\left(\sum_{i=0}^{n} 1 + \sum_{i=0}^{n} i\right) = 1$

$\Rightarrow c\left(n+1 + \frac{n(n+1)}{2}\right) = 1 \Rightarrow c(n+1)\left(1+\frac{n}{2}\right) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

(ii) $E(X) = \sum_{i=0}^{n} i P(X=i) = c \cdot \sum_{i=0}^{n} i(1+i) = c \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} i^2\right) =$

$= c \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \left(\frac{n\cancel{(n+1)}}{\cancel{2}} + \frac{n\cancel{(n+1)}(2n+1)}{\cancel{6}\,3}\right)$

$$= \frac{1}{n+2} \frac{3n+n(2n+1)}{3} = \frac{n}{n+2} \frac{3+2n+1}{3} = \frac{2n\cancel{(n+2)}}{3\cancel{(n+2)}} = \frac{2n}{3}$$

(iii) $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$ (1)

• $E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2 c(1+i) = c \cdot \sum_{i=0}^{n} (i^2 + i^3) = c \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i^3 \right) =$

$$= c \cdot \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) = \frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \left(\frac{n\cancel{(n+1)}(2n+1)}{\cancel{6}\,3} + \frac{n^2(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{4}\,2} \right)$$

$$= \frac{1}{n+2} \left(\frac{2n(2n+1) + 3n^2(n+1)}{6} \right) = \frac{n}{n+2} \cdot \frac{4n+2+3n^2+3n}{6}$$

$$= \frac{n}{n+2} \frac{3n^2+7n+2}{6} = \frac{n\cancel{(n+2)}(3n+1)}{\cancel{(n+2)} \cdot 6} = \frac{n(3n+1)}{6}$$

Άρα (1): $Var(X) = \frac{n(3n+1)}{6} - \left(\frac{2n}{3}\right)^2 = \frac{n(3n+1)}{6} - \frac{4n^2}{9} =$

$$= \frac{3n(3n+1) - 8n^2}{18} = \frac{n^2+3n}{18} = \frac{n(n+3)}{18}.$$

ΜΑΘΗΜΑ 18ο

30/3/16

① Ασκήσεις στις Διακριτές Κατανομές (συνέχεια...)

3) Μια Εταιρεία κατασκευής αεροπλάνων φτιάχνει 2-κινητήρια και 4-κινητήρια αεροσκάφη. Η πιθανότητα βλάβης ενός κινητήρα κατά τη διάρκεια της πτήσης $= p$ (λειτουργούν ανεξάρτητα μεταξύ τους). Το αεροσκάφος δεν πέφτει όταν λειτουργούν τουλάχιστον οι μισοί κινητήρες. Ποιο είναι το πιο ασφαλές (2-κινητήριο ή 4-κινητήριο).

Λύση:

Έστω X_2 = # κινητήρων που λειτούργησαν σωστά σε όλη την πτήση στο 2-κινητήριο αεροσκάφος

X_4 = # » στο 4-κινητήριο αεροσκάφος

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } o\ j\text{-κινητήρας του αεροσκάφους με } i\text{-κινητήρες λειτούργησε σωστά} \\ 0, & \text{διαφορετικά (υπέστη βλάβη)} \end{cases}$$

αν $i=2$ $j=1,2$

$i=4$, $1 \le j \le 4$

Απο υπόθεση $X_{ij} \sim Be(1-p)$ η πιθανότητα να λειτουργήσει σωστά
p (= πιθανότητα βλάβης)

και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Άρα, $X_2 = X_{2,1} + X_{2,2} \sim Bin(2, 1-p)$

$X_4 = X_{4,1} + X_{4,2} + X_{4,3} + X_{4,4} \sim Bin(4, 1-p)$

Το 2-κινητήριο είναι πιο ασφαλές από το 4-κινητήριο $\Leftrightarrow$

$P(\text{"πτώσης 2-κινητηρίου"}) < P(\text{"πτώσης 4-κινητηρίου"}) \Leftrightarrow$

$P(X_2 = 0) < P(X_4 \in \{0,1\})$ αφού

$\{\text{πτώσης 2-κινητηρίου}\} = \{X_2 = 0\}$

$\{\text{πτώσης 4-κινητηρίου}\} = \{X_4 \in \{0,1\}\}$ (1)

$X \sim Bin(n, 1-p) \Leftrightarrow P(X=x) = \binom{n}{x}(1-p)^x p^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$

Απο την (1):

$$\binom{2}{0}(1-p)^0 p^2 < \binom{4}{1}(1-p)^1 p^3 + \binom{4}{0}(1-p)^0 p^4$$

$$\Leftrightarrow p^2 < 4p^3(1-p) + p^4 \overset{0<p<1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 1 < 4p(1-p) + p^2 \Leftrightarrow$$

$$p^2 - 1 + 4p(1-p) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-p)[4p - 1 - p] > 0 \overset{1-p>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$3p - 1 > 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{3}$$

Δηλαδή, Για
- $\frac{1}{3} < p < 1$, το 2-κινητήριο είναι πιο ασφαλές
- $0 < p < \frac{1}{3}$, το 4-κινητήριο » » »
- $p = \frac{1}{3}$, εξίσου ασφαλή.

4) → Ασκ. 4.9)

Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 100 οδηγούς για 1 χρόνια. Καθένας έχει πιθανότητα $p = \frac{1}{1000}$ να προκαλέσει ατύχημα. Έστω $X = \#$ οδηγών που προκαλούν ατύχημα εκείνη τη χρονιά. Να υπολογιστούν:
(i) $P(X \leq 1)$ (ii) $P(X=3)$ (iii) $P(X=10)$ και έπειτα προσεγγίσεις τους με την κατανομή Poisson.

Λύση:

(i) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$?

Θέτουμε $x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i\text{-οδηγός προκάλεσε ατύχημα} \\ 0, & \text{αν ο } i\text{-οδηγός } \underline{\text{δεν}} \text{ προκάλεσε ατύχημα.} \end{cases}$

$x_i \sim Be(p)$, $p = \frac{1}{1000}$ $i = 1, \ldots, 100$ και υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Άρα, $X = \sum_{i=1}^{100} x_i \sim Bin\left(100, \underbrace{\frac{1}{1000}}_{p}\right)$

Άρα, $P(X \leq 1) = \binom{100}{0}\left(\frac{1}{1000}\right)^0\left(\frac{999}{1000}\right)^{100} + \binom{100}{1}\left(\frac{1}{1000}\right)\left(\frac{999}{1000}\right)^{99}$

$= \left(\frac{999}{1000}\right)^{100} + 100 \cdot \frac{1}{1000}\left(\frac{999}{1000}\right)^{99} \cong 0{,}995362$

(ii) $P(X=3) = \binom{100}{3}\left(\frac{1}{1000}\right)^3\left(\frac{999}{1000}\right)^{97} \cong 1467 \times 10^{-7}$

(iii) $P(X=10) = \binom{100}{10}\left(\frac{1}{1000}\right)^{10}\left(\frac{999}{1000}\right)^{90} \cong 1581 \times 10^{-20}$

Αν $Y \sim P(\lambda)$ τότε: $P(Y=y) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!}$ $y = 0, 1, 2, \ldots$

(i) $P(Y \leq 1) = P(Y=0) + P(Y=1) = e^{-0.1}(1+0.1) \cong 0{,}995321$

αφού $Bin\left(100, \frac{1}{1000}\right) \approx P\left(100 \cdot \frac{1}{1000}\right) = P(\underbrace{0{,}1}_{\lambda})$

(ii) $P(Y=3)= e^{-0.1}\cdot\dfrac{(0.1)^3}{3!} \simeq 1508\times 10^{-7}$

(iii) $P(Y=10)= e^{-0.1}\,\dfrac{(0.1)^{10}}{10!} \simeq 2493\times 10^{-20}$

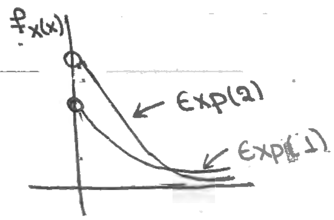
② Εκθετική Κατανομή

συμβ Exponential(θ) ή Exp(θ), $\theta>0$: παράμετρος ρυθμού

$X\sim Exp(\theta)$, $\theta>0$ αν:

$$f_X(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x}, & x>0\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

σππ



(εκθετικές συναρτήσεις)

• συνάρτηση κατανομής Exp(θ)

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\theta x}, & x\geq 0\end{cases}$$

Για $x<0$ προφανές

Για $x\geq 0$: $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_0^x \theta e^{-\theta u}\,du = -\int_0^x (e^{-\theta u})'\,du$

$= -\left[e^{-\theta u}\right]_0^x = -(e^{-\theta x}-1) = 1-e^{-\theta x}$

Μέση Τιμή : $E(X)=\dfrac{1}{\theta}$

Διασπορα : $Var(X)=\dfrac{1}{\theta^2}$

Απόδειξη: $\forall\, n\geq 1$

$E(X^n)=\int_0^{+\infty} x^n f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^n\theta e^{-\theta x}dx =$ (παραγοντική ολοκλήρ)

$= -\int_0^{+\infty} x^n (e^{-\theta x})'\,dx = -\underbrace{\left[x^n e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} (x^n)' e^{-\theta x}\,dx =$

$$= n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-\theta x}\, dx = \frac{n}{\theta} \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{n-1}\, \theta e^{-\theta x}\, dx}_{E(X^{n-1})}$$

$$\Rightarrow E(X^n) = \frac{n}{\theta} E(X^{n-1}) = \frac{n(n-1)}{\theta^2} E(X^{n-2}) = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{\theta^n} \underbrace{E(X^0)}_{1} = \frac{n!}{\theta^n}$$

Άρα $E(X) \overset{n=1}{=\!=} \frac{1}{\theta}$, $E(X^2) = \frac{2!}{\theta^2} = \frac{2}{\theta^2}$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$$

Ιδιότητες:

1) αμνήμονη ιδιότητα

Η εκθετική κατανομή είναι για τις συνεχείς, ότι η γεωμετρική για τις διακριτές, κατανομή. Χαρακτηρίζεται από την αμνήμονη ιδιότητα δηλ.

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t) \quad \forall\, s, t > 0$$

Εκφράζει συνήθως χρόνο παραμονής, αναμονής ή χρόνο λειτουργίας.

Απόδειξη:

$$P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X>s+t,\, X>s)}{P(X>s)} = \frac{P(X>s+t)}{P(X>s)} = \frac{1-F_X(s+t)}{1-F_X(s)} =$$

$$= \frac{1-(1-e^{-\theta(s+t)})}{1-(1-e^{-\theta s})} = \frac{e^{-\theta(s+t)}}{e^{-\theta s}} = e^{-\theta t} = 1-(1-e^{-\theta t}) = 1-F_X(t) = P(X>t).$$

2) Η οικογένεια των εκθετικών κατανομών είναι κλειστή σε μετασχηματισμούς κλίμακας.

δηλ. αν $X \sim Exp(\theta) \Rightarrow aX \sim Exp\left(\frac{\theta}{a}\right)$, $a > 0$

Απόδειξη:

Θέτουμε $Y = aX \Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(\frac{y}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$ άρα

$$\left(\begin{array}{l} y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) \\ f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \end{array} \right)$$

Άρα $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \frac{y}{a} \le 0 \\ \theta e^{-\theta \frac{y}{a}} \cdot \frac{1}{a}, & \frac{y}{a} > 0 \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{\theta}{a} e^{-\frac{\theta}{a} y}, & y > 0 \end{cases}$ άρα $Y \sim Exp\left(\frac{\theta}{a}\right)$

Προφανώς, αν $X \sim Exp(\theta)$, τότε $X = \frac{1}{\theta} \underbrace{(\theta X)}_{Exp(1)} \sim \frac{1}{\theta} Exp(1)$

③ Κατανομή Γάμμα

συμβ. Gamma (a,θ), $a>0$ $\theta>0$ ή $G(a,\theta)$ ή $\Gamma(a,\theta)$

Μια τμ X ακολουθεί $G(a,\theta)$, αν έχει:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\theta x}, & x>0\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

όπου, $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}dx$, $a>0$

→ ολοκλήρωμα Euler β' είδους

Μέση Τιμή: $E(X)=\dfrac{a}{\theta}$

Διασπορά: $Var(X)=\dfrac{a}{\theta^2}$

Απόδειξη:

$$E(X^n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n f_X(x)dx=\int_0^{+\infty}x^n\frac{\theta^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\theta x}dx=$$

$$=-\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^{a+n-1}\frac{\theta^a}{\Gamma(a)}(e^{-\theta x})'dx=-\frac{1}{\theta}\left[x^{a+n-1}\frac{\theta^a}{\Gamma(a)}e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty}+$$

$$+\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}(x^{a+n-1})'\frac{\theta^a}{\Gamma(a)}e^{-\theta x}dx=\frac{a+n-1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^{a+n-2}\frac{\theta^a}{\Gamma(a)}e^{-\theta x}dx$$

$$=\frac{a+n-1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^{n-1}\underbrace{\frac{\theta^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\theta x}}_{\text{σππ } G(a,\theta)}dx$$

$$E(X^n)=\frac{a+n-1}{\theta}E(X^{n-1}),\ \forall n\geq 1$$

$$E(X^n)=\frac{a+n-1}{\theta}E(X^{n-1})=\frac{(a+n-1)}{\theta}\cdot\frac{(a+n-2)}{\theta}E(X^{n-2})=$$

$$=\frac{(a+n-1)(a+n-2)\dots(a+n-n)}{\theta^n}\underbrace{E(X^0)}_{1}=\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{\theta^n}\quad\forall n\geq 1$$

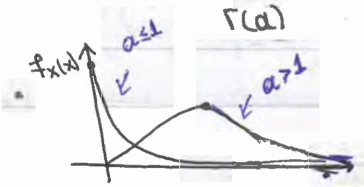
- Για $n=1$, $E(X)=\dfrac{a}{\theta}$
- Για $n=2$, $E(X^2)=\dfrac{a(a+1)}{\theta^2}\Rightarrow Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\dfrac{a(a+1)}{\theta^2}-\dfrac{a^2}{\theta^2}$

$$=\frac{\cancel{a^2}+a-\cancel{a^2}}{\theta^2}=\frac{a}{\theta^2}.$$

Παρατηρήσεις:

1) $G(a,\theta) \xrightarrow[a=1]{} \left(G(1,\theta) \equiv Exp(\theta) \right)$

$$f_X(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} e^{-\theta x} \xrightarrow[a=1]{} \theta e^{-\theta x} \quad (\Gamma(1)=1)$$



γενίκευση της εκθετικής

2) Αν $a=n$, $n \in \mathbb{N}^*$, Gamma $(a,\theta) \equiv$ Erlang(n,θ).

Αν $X \sim$ Erlang(n,θ), τότε $f_X(x) = \frac{\theta^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\theta x}$, $x>0$

3) $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$, $a>1$

Απόδειξη:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} x^{a-1} (e^{-x})' dx = -\underbrace{[x^{a-1} e^{-x}]_0^{+\infty}}_{0} +$$

$$+ (a-1)\int_0^{+\infty} x^{a-2} e^{-x} dx = (a-1)\Gamma(a-1)$$

4) $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall n \geq 1$ ακέραιος

Απόδειξη:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots = (n-1)(n-2)\ldots 1 \cdot \Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x} dx}_{1} \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!$$

5) Αν $X \sim G(a,\theta) \overset{c>0}{\Longrightarrow} cX \sim G\left(a, \frac{\theta}{c}\right)$ (ανάλογη όπως εκθετική)

Εφαρμογές

Τύπος Stirling: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

(ασυμπτωτική ισοδυναμία): $a_n \sim b_n$, $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(Εκτός ύλης) Αναλυτική Θεωρία Αριθμών. (σύνδεση με τη συνάρτηση ζήτα του Riemann)

$$\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \zeta(a) \pi^{-\frac{a}{2}} = \Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right) \zeta(1-a) \pi^{-\frac{1-a}{2}}$$

όπου, $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ (συγκλίνει $\forall a>1$)

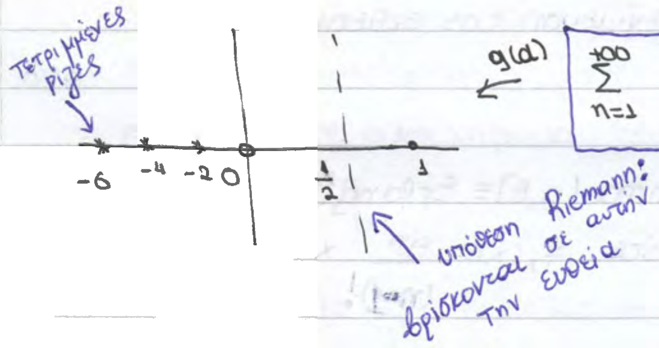
↳ αν οριστεί στο $\mathbb{C}$ συγκλίνει $Re(a)>1$.

επεκτείνεται αναλυτικά στο $\mathbb{C}-\{1\}$

Υπόθεση Riemann (διάσημο άλυτο πρόβλημα)

Οι μη τετριμμένες ρίζες του $\zeta(\alpha)$, έχουν αναγκαστικά πραγματικό μέρος $\frac{1}{2}$

αν α^* : $\zeta(\alpha^*)=0$ τότε $Re(\alpha^*)=\frac{1}{2}$ (τετριμμένες ρίζες: $-2,-4,-6,\dots$)



$$g(\alpha) \leftarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \prod_{p\in P} \frac{1}{1-p^{-\alpha}}}$$ (σύνδεση με πρώτους)

$P \Rightarrow$ το σύνολο των πρώτων αριθμών

1-4-16

ΜΑΘΗΜΑ 19ο

① Κανονική κατανομή

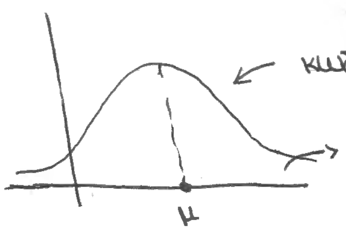
συμβ. $N(\mu,\sigma^2)$ $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$

Μια συνεχής τμ ακολουθεί την κανονική κατανομή αν έχει σππ:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad x\in\mathbb{R}$$

Θα δείξω ότι: $E(X)=\mu$

μετά $Var(X)=\sigma^2$



κωδωνοειδής καμπύλη, συμμετρική κατανομή

σ^2 θα καθορίζει τη μορφή της καμπύλης.

Υπενθύμιση:

$$\int_A f(x)\,dx \overset{x=g(u)}{=} \int_B f(g(u))\,\underbrace{\frac{dx}{du}}_{=g'(u)}\,du$$ (σε διάσταση 1)

$g(B)=A$

Αντίστοιχα, ∃ γενίκευση (π.χ για διάσταση 2):

$$\iint f(x,y)\,dxdy \underset{(x,y)=g(u,v)}{=\!=\!=} \iint \underset{(x(u,v),\,y(u,v))}{f(g(u,v))} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

όπου $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ ⇝ Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού:

$g: B \subset \mathbb{R}^2 \to A\ (=g(B))$

$(u,v) \mapsto (x,y) = g(u,v)$

• Η Ιακωβιανή ορίζουσα συμβολίζεται και $|J|$

~ Θα πρέπει η g να είναι "1-1" και C^1 (συνεχείς μερικές παραγώγους)

και $\boxed{J \neq 0}$

• Θα αποδείξουμε ότι η $f_X(x)$ είναι πράγματι σ.π.π

(i) $f_X(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ✓

(ii) Θέλουμε $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = 1 \underset{dx=\sigma dy}{\overset{y=\frac{x-\mu}{\sigma}}{\Longleftrightarrow}}$$

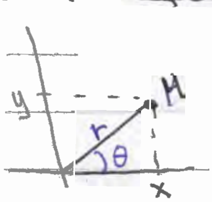
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} \cancel{\sigma}\,dy = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}$$

Θέτω $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy$. Άρα $I = \sqrt{2\pi} \overset{I>0}{\Leftrightarrow} I^2 = 2\pi$

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx\right) e^{-y^2/2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \underset{f(x,y)}{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}\,dxdy$$

Περνάμε από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες



$M(x,y)$ ή $M(r,\theta)$

Έχουμε $(x,y) = g(r,\theta)$ όπου:

$g: [0,+\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$

όπου $(r,\theta) \mapsto (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

για $r\neq 0$ (μπορούμε να εξαιρέσουμε μεμονωμένα σημεία)

Η g έχει όλες τις καλές ιδιότητες ("1-1", C^1) και

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=$$

$$=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r \qquad (r\neq 0)$$

Άρα,

$$I^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{-r^2/2}\,|J|\,dr\,d\theta \quad \text{αφού } r^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2$$

$$=-\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(e^{-r^2/2}\right)'dr\,d\theta=-\int_0^{2\pi}\left[e^{-r^2/2}\right]_0^{+\infty}d\theta=$$

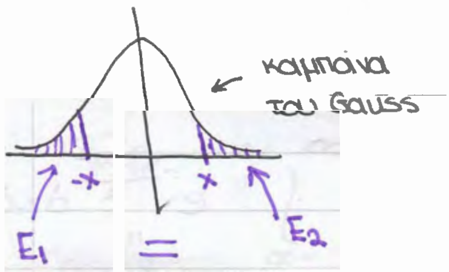
$$=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi. \qquad \blacksquare$$

② Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

Αν $Z\sim N(0,1)$, τότε λέμε ότι ακολουθεί την τυποποιημένη (ή τυπική) κανονική κατανομή.

Έχει σ.π.π. $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x\in\mathbb{R}$.

σ.κ. $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du \quad ,\forall\, x\in\mathbb{R}$



$\Phi(-x)$ $\qquad$ $1-\Phi(x)$

Η $\varphi(x)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y, δηλαδή: $\varphi(x)=\varphi(-x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Η Z έχει συμμετρική κατανομή και η φ είναι άρτια συνάρτηση.

~ Βασική Ιδιότητα της Φ

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

Η σ.κ της $N(0,1)$ δίνεται σε πίνακες για $0 \le x \le 3$

$\Phi(0) = \frac{1}{2}$, $\Phi(3) \cong 0.999$

Πρακτικά $\Phi(x) \cong 1$ $\forall x \geq 3$.

Οι ενδιάμεσες τιμές της $\Phi(x)$ έχουν πολύ ενδιαφέρον στη Στατιστική

Παρατήρηση:

Η σημασία της έγκειται στο γεγονός ότι οι άλλες κανονικές κατανομές, ανάγονται σε γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Θα δείξουμε ότι: • Μέση Τιμή : $E(Z)=0$

• Διασπορά : $Var(Z)=1$

Απόδειξη:

• $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{f_Z(x)}_{\varphi(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}_{x \cdot \varphi(x)} dx$

(περιττή συνάρτηση σε συμμετρικό διάστημα γύρω από το 0)

$x \cdot \varphi(x)$

περιτ. · άρτια = περιτ.

(αν $g(x)$ περιττή $g(-x) = -g(x), \forall x \in \mathbb{R}$) $\quad \left(g(-x) = -g(x)\right)$

• $Var(X) = E(Z^2) - \underbrace{E^2(Z)}_{0} = E(Z^2)$

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \quad \frac{\text{ολοκλήρωση}}{\text{κατά παράγοντες}}$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-x^2/2}\right)' dx = -\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2}\right] + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\varphi(x)} dx}_{=1}$$

$= 1$.

③ Ιδιότητες Κανονικής Κατανομής

1) $Z \sim N(0,1) \Rightarrow \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$.

2) (τυποποίηση μιας κανονικής κατανομής)

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

3) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \mu + \sigma Z$, όπου $Z \sim N(0,1)$

4) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$

5) γραμμικοί μετασχηματισμοί

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Απόδειξη:

1) Θέτουμε $X = \mu + \sigma Z$, τότε $f_X(x) = f_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Άρα, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$

Άρα, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

2) Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X \overset{d}{=} \mu + \sigma Z$ (ιδ.1), όπου $Z \sim N(0,1)$

$\Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \overset{d}{=} Z$ $\quad (X \overset{d}{=} Y \Rightarrow g(X) \overset{d}{=} g(Y))$

$\Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

3) Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \mu + \sigma Z$, $Z \sim N(0,1)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \mu + \sigma \underbrace{\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}_{Z \sim N(0,1)}$

4) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\Downarrow$ ιδ.3

$X = \mu + \sigma Z$, $Z \sim N(0,1) \Rightarrow E(X) = \mu + E(Z) = \mu$.

$\Rightarrow Var(X) = Var(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 Var(X) = \sigma^2$

5) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \mu + \sigma Z \Rightarrow$

$Y = aX + b = a(\mu + \sigma Z) + b = \underbrace{a\mu + b}_{c} + \underbrace{a\sigma}_{d} Z$ $\Rightarrow$ (ιδ.1)

$Y \sim N(a\mu + b, a^2 b^2)$ ■

⑤ Κεντρικό Οριακό Θεώρημα de Moivre-Laplace.

de Moivre (1733): Για μεγάλο n, $Bin(n, \frac{1}{2}) \cong N(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$

Γενίκευση:

Laplace (1812): Για μεγάλο n, $Bin(n,p) \cong N(np, np(1-p))$

δηλαδή, αν $X_n \sim Bin(n,p)$, $Y_n \sim N(np, np(1-p))$ τότε:

$X_n \overset{d}{\cong} Y_n$, προσεγγιστικά έχει ίδια κατανομή

Η πιο χρήσιμη μορφή της προσέγγισης.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le t\right) = \Phi(t) = P(Z \le t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad Z \sim N(0,1)$$

$E(X_n) = np$, $Var(X_n) = np(1-p)$

$$\Rightarrow P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le t\right) \cong \Phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ για } n\text{-μεγάλο.}$$

Άρα $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P(X_n \le x) = P\left(\frac{X_n - np}{np(1-p)} \le \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \cong \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Παρατήρηση:

Η προσέγγιση είναι ικανοποιητική για $np(1-p) \ge 10$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$ $var(Bin(n,p))$

~Εφαρμογή:

Αν $X \sim Bin(40, \frac{1}{2})$ τότε: $E(X) = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20$

$Var(X) = 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 10.$

S.O.S $P(10 \le X \le 25) = ?$ (προσέγγιση)

$$P(10 \le X \le 25) = P\left(\frac{10-20}{\sqrt{10}} \le \underbrace{\frac{X-20}{\sqrt{10}}}_{\approx N(0,1)} \le \frac{25-20}{10}\right)$$

$$\cong \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{10}}\right) = \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{10}}\right)\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) + \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{10}}\right) - 1$$

ΜΑΘΗΜΑ 20ο

① Κατανομές Μετασχηματισμών τ.μ.

Γενικεύονται εδώ, αυτά που έχουμε δει για κατανομές γραμμικών μετασχηματισμών τ.μ.

Περιπτώσεις:

① $Y=g(X)$, όπου X είναι διακριτή τμ. Τότε η Y είναι $\boxed{\text{διακριτή}}$ τμ και άρα έχει συνάρτηση πιθανότητας.

Μ.Ε.Κ. (Μέθοδος Εύρεσης Κατανομής)

(i) Βρίσκουμε το στήριγμα (της κατανομής) της Y

- $A_Y = g(A_X)$, όπου $A_X = \{x \in \mathbb{R} : P(X=x)>0\}$ είναι στήριγμα της X. Αυτό θα είναι και το στήριγμα της Y.

(ii) Βρίσκουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της Y

$$f_Y(y) = P(Y=y) = P(g(X)=y) = P(X \in g^{-1}\{y\}) = \sum_{x:g(x)=y} P(X=x), \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Ειδικότερα, $f_Y(y)>0$, $\forall y \in A_y$ (και 0 διαφορετικά)

② $Y=g(X)$, όπου X είναι συνεχής τμ. και η Y είναι $\boxed{\text{διακριτή}}$ τμ

ΜΕΚ

(i) Βρίσκουμε το στήριγμα της Y

$A_y \subset g(S_X)$ [πολλές φορές θα έχουμε την ισότητα]

όπου $S_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x)>0\}$

(ii) Βρίσκουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της Y

$$f_Y(y) = P(Y=y) = P(g(X)=y) = P(X \in g^{-1}\{y\}) = \int_{\substack{x \in S_X: \\ g(x)=y}} f_X(x)\,dx$$

Ιδιαίτερα, είναι $f_Y(y)>0$, $\forall y \in A_y$

③ $Y=g(X)$, όπου X συνεχής τμ και η Y είναι και αυτή $\boxed{\text{συνεχής}}$

ΜΕΚ

(i) Βρίσκουμε το στήριγμα της Y

$S_Y \subset g(S_X)$ [πολλές φορές θα ισχύει η ισότητα]

όπου $S_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$

(ii) Βρίσκουμε την σ.κ. της Y, ως συνάρτηση της σ.κ της X.

• $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = \dots$ λύνεται ως συνάρτηση της F_X (Ιδιαιτέρως $\forall y \in S_Y$)

(iii) Βρίσκουμε τη σ.π.π της Y

Εκεί που παραγωγίζεται, έχουμε $f_Y(y) = F_Y'(y)$

Ειδική περίπτωση:

(για g γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη και $g'>0$ ή $g'<0$)

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$, $\forall y \in S_Y$ (καμιά φορά έχω πρόβλημα στα μεμονωμένα σημεία)

Άσκηση 1 (Ασκ. 3.11 Φωλδ.)

(Παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης) → Nicolas Bernoulli

• Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται διαδοχικά, και αν η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται για 1η φορά στην κ-ρίψη. Τότε κερδίζουμε 2^k €.

(α) Ποιο είναι το μέσο κέρδος του παιχνιδιού?

(β) Θα έδινες 50€, για να παίξεις το παιχνίδι?

Λύση:

Έστω K: # ρίψεων μέχρι να φέρουμε 1η φορά κορώνα.

Η K είναι τμ και $K \sim Geo(p=\frac{1}{2})$, και εκφράζει το # δοκιμών μέχρι 1η επιτυχία (όταν φέρω κορώνα)

Το κέρδος σαν τμ είναι $X = 2^K = g(K)$

(i) μέσο κέρδος $E(X)=E(2^K)=E(g(K))$ (Lotus)

Άρα, $E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k P(K=k)=\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{πιθ. επιτ.}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}_{\text{πιθαν. αποτ.}} =$

$=\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \cdot 2^{-k}=\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$

(ii) $P(\text{"να χάσουμε"})=P(X<50)=P(2^K<50)=P(2^K\le 2^5=32)$

$=(\{2^K<50\}=\{2^K\le 32\})$

$P(K\le 5)=1-P(K>5)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{31}{32}$: είναι αποτρεπτικό στο να παίξουμε.

~ Αν και $E(X)=+\infty$. Όμως, αν το παίξαμε πολλές φορές (χωρίς όριο) θα ήταν σιγουρά συμφέρον.

Ασκ. 2

Έστω X τμ και σ.π.π $f_X(x)=\begin{cases} cx^{-3}e^{x^{-2}} &, x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right) \\ 0 &, \text{διαφορετικά}\end{cases}$

Να βρεθούν:

(i) το c

(ii) η σππ $Y=\frac{1}{X^2}$

(iii) $E(Y)$, $Var(Y)$

Λύση:

(i) Πρέπει $\int f(x)dx=1 \Rightarrow \int_{2^{-\frac{1}{2}}}^{1} cx^{-3}e^{x^{-2}}dx=1$

$(e^{x^{-2}})'=(x^{-2})'e^{x^{-2}}=(-2)x^{-3}e^{x^{-2}} \Rightarrow \int_{2^{-1/2}}^{1} cx^{-3}e^{x^{-2}}dx=$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)c\int_{2^{-1/2}}^{1}(e^{x^{-2}})'dx=-\frac{c}{2}\left[e^{x^{-2}}\right]_{2^{-1/2}}^{1}=-\frac{c}{2}\left(e-e^{(2^{-\frac{1}{2}})^{-2}}\right)$

$=-\frac{c}{2}(e-e^2)\overset{\text{πρέπει}}{=}1 \Rightarrow c=\frac{2}{e^2-e}$ $(c>0)$

(ii) Τη σ.π.π. της $Y = \frac{1}{X^2}$, έχουμε βρει $f_X(x) = \frac{2}{e^2-e} x^{-3} e^{x^{-2}}$,

και $S_X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

α' τρόπος (πιο εύκολος)

Έχουμε $Y = \frac{1}{X^2} = g(X)$, όπου $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ορισμένη στο $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

που είναι "1-1" (και μάλιστα γνησίως μονότονη)

Είμαστε στην Περ. 3, δηλαδή X συνεχής και η Y είναι συνεχής τ.μ.

(i) Βρίσκουμε το S_Y

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \xRightarrow{Y=g(X)=\frac{1}{X^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 < x^2 < 1 \text{ ή } \frac{1}{2} < x^2 < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 < \frac{1}{x^2} < 2$. Συμπεραίνουμε $S_Y = (1,2)$

(ii) $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| \quad \forall y \in (1,2) = S_Y$

Έχουμε $y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-1/2} = g^{-1}(y)$

Άρα, $f_Y(y) = f_X(y^{-1/2}) \left| \left(-\frac{1}{2}\right) y^{-3/2} \right| = \frac{2}{e^2-e} (y^{-1/2})^{-3} e^{(y^{-1/2})^{-2}} \frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}}$

$= \frac{1}{e^2-e} e^y \quad (y \in (1,2))$

Τελικά, $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{e^2-e} e^y &, y \in (1,2) \\ 0 &, \text{διαφορετικά} \end{cases}$

β' τρόπος

Αφού έχει βρεθεί $S_Y = (1,2)$, τότε υπολογίζουμε F_Y $\forall y \in S_Y$, έχουμε

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P\left(\frac{1}{X^2} \le y\right) = P\left(X^2 \geq \frac{1}{y}\right) \underset{(y>0)}{=}$

$= P\left(|X| \geq \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \xlongequal{X>0, \text{ μεπιθ } 1} P(X \geq y^{-1/2}) = 1 - P(X < y^{-1/2})$

$\xlongequal{X \text{ συνεχής}} 1 - P(X \le y^{-1/2}) = 1 - F_X(y^{-1/2})$

Άρα, $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \le 1 \\ 1 - F_X(y^{-1/2}) & , 1 < y < 2 \\ 1 & , y \geq 2 \end{cases}$

Άρα για $y \in S_Y$ έχουμε:

σ.π.π. $f_Y(y) = F_Y'(y) = -F_X'(y^{-1/2})\left(-\frac{1}{2}\right) y^{-3/2} = \frac{1}{2} f_X(y^{-1/2}) y^{-3/2}$
= ίδιο με πριν

(iii) $E(Y) \to$ απευθείας και όχι μέσω LOTUS

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_1^2 y \frac{1}{e^2-e} e^y\,dy = \frac{1}{e^2-e} \int_1^2 y e^y\,dy \quad (1)$$

$$\int_1^2 y e^y\,dy = \int_1^2 y (e^y)'\,dy = \left[y e^y\right]_1^2 - \int_1^2 e^y\,dy =$$

$$= 2e^2 - e - \left[e^y\right]_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2 \quad (2)$$

Από (2) στην (1), έχουμε:

$$E(Y) = \frac{e^2}{e^2-e} = \frac{e}{e-1} \quad \left(= 1 + \frac{1}{e-1}\right)$$

$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_1^2 y^2 \frac{1}{e^2-e} e^y\,dy = \frac{1}{e^2-e}\int_1^2 e^y y^2\,dy \quad (3)$$

$$\int_1^2 y^2 e^y\,dy = \int_1^2 y^2 (e^y)'\,dy = \left[y^2 e^y\right]_1^2 - 2\underbrace{\int_1^2 y e^y\,dy}_{= e^2 \text{ από (σχέση (2))}}$$

$$= 4e^2 - e - 2e^2 = 2e^2 - e$$

Τελικά, $Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 2e^2 - e - \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 = \ldots =$

$$= 1 - \frac{e}{(e-1)^2}$$

6/4/16

ΜΑΘΗΜΑ 21ο

Ασκ1) Ερωτήματα όπως πριν με $f(x)=\begin{cases} c|x|^{-3}e^{x^{-2}} & , |x|\in(1/\sqrt{2},1) \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

i) Πρέπει, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ $\quad (S_x=(-1,-2^{-1/2})\cup(2^{-1/2},1))$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{-2^{-\frac{1}{2}}} c(-x)^{-3}e^{x^{-2}}dx+\int_{2^{-1/2}}^{1} cx^{-3}e^{x^{-2}}dx=2\int_{2^{-1/2}}^{1} cx^{-3}e^{x^{-2}}dx$$

(διότι η f(x) είναι άρτια συνάρτηση και ολοκληρώνουμε σε συμμετρικά διαστήματα γύρω από 0)

$$=2c\underbrace{\int_{2^{-1/2}}^{1} x^{-3}e^{x^{-2}}dx}_{\text{έχει υπολογιστεί}}=2c\,\frac{e^2-e}{2}=c(e^2-e)$$

Άρα, πρέπει $c(e^2-e)=1 \Rightarrow c=\frac{1}{e^2-e}$

Στην πραγματικότητα, $X=\begin{cases} X_1 & , \text{με πιθ } 1/2 \\ -X_1 & , \text{με πιθ. } 1/2 \end{cases}$ (X_1 της προηγούμ. άσκησης)

(ii) $Y=\frac{1}{X^2}=g(X)$, όπου $g(x)=\frac{1}{x^2}$ (που δεν είναι 1-1)

~ Περίπτωση_3 ~

i) στήριγμα της Y (X συνεχής, Y συνεχής)

$\frac{1}{\sqrt{2}}<|x|<1 \Rightarrow \frac{1}{2}<x^2<1 \Rightarrow 1<\frac{1}{x^2}<2$ (ίδιο στήριγμα)

ii) $\forall\, y\in S_y=(1,2)$ έχουμε:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P\left(\frac{1}{X^2}\le y\right)\overset{y>0}{=\!=}P(X^2\geq 1/y)$$
$$=P(|X|\geq y^{-1/2})=P(X\geq y^{-1/2} \text{ ή } X\le -y^{-1/2})$$
$$\overset{\text{ξένα}}{\underset{\text{ενδεχομ.}}{=\!=}} P(X\geq y^{-1/2})+P(X\le -y^{-1/2}) \underset{X\text{ συνεχής}}{=\!=} 1-F_X(y^{-1/2})+F_X(-y^{-1/2})$$

$$\overset{X\text{ έχει}}{\underset{\text{συμμετρ. κατανομή}}{=\!=}} 1-F_X(y^{-1/2})+1-F_X(y^{-1/2})=2-2F_X(y^{-1/2})$$

(X άρτια συνάρτηση → ∃ συμμετρία
π.χ. $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ → Φ σ.κ. της N(0,1)
$\underset{X\text{ συμμ.}}{\longrightarrow}$ $F_X(-x)=1-F_X(x)$)

Άρα $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \le 1 \\ 2-2F_X(y^{-1/2}) & , 1<y<2 \\ 1 & , y \geq 2 \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} F'_Y(y) & , 1<y<2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Για $1<y<2$: $f_Y(y) = -2F_X'(y^{-1/2}) \cdot (y^{-1/2})' = (-2)(-\frac{1}{2}) f_X(y^{-1/2}) y^{-3/2}$

$= \frac{1}{e^2-e} e^y$

Άρα, $Y \sim$ κατανομή, όπως προηγ. ασκ. (όπως $E(Y)$, $Var(Y)$ ίδια)

Ασκηση 2:

2 παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι. Ρίχνουν συνεχώς 1 ζάρι, μέχρι να εμφανιστεί για 1η φορά 1 ή 2. Έστω $X = \#$ δοκιμών που απαιτούνται. Αν ο X είναι περιττός, τότε κερδίζει ο A παίρνει β € από τον B, ενώ αν ο X είναι άρτιος, τότε κερδίζει ο B και παίρνει α € από τον A.

α) Ποια είναι $P(X=x) = ?$ $x = 1, 2, \dots$

β) P ("να κερδίσει ο A") = ?

γ) Τι σχέση συνδέει τα α και β για να είναι το παιχνίδι δίκαιο?

Λύση:

α) Έχουμε ακολουθίες ανεξ. δοκιμών $Be(p)$, όπου:

$p = P(\text{"επιτυχία σε 1 δοκιμή"}) = \frac{|\{1,2\}|}{|\{1,2,\dots 6\}|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$X = \#$ δοκιμών μέχρι 1η επιτυχία $\sim Geo(\frac{1}{3})$

Άρα $P(X=x) = p(1-p)^{x-1} = (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^{x-1}$, $x = 1, 2, \dots$

β) P ("να κερδίσει ο A") $= P(X \in \{1,3,5,\dots\}) = \sum_{x \text{ περιττός}} P(X=x)$

$= \sum_{x=1}^{\infty} P(X=2x-1) = \sum_{x=1}^{\infty} (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^{2x-1-1}$

$= \frac{1}{3} \sum_{x=1}^{\infty} [(\frac{2}{3})^2]^{x-1} = \frac{1}{3} \sum_{x=0}^{\infty} (\frac{4}{9})^x = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{5}{9}}$

$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

β' τρόπος

Θ.Ο.Π : A = "να κερδίσει ο A"

$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_1^c B_1)P(A|A_1^c B_1) + P(A_1^c B_1^c) \cdot P(A|A_1^c B_1^c)$

A_1: κερδίζει ο A στην 1η δοκιμή

B_1: κερδίζει ο B στην 2η δοκιμή (1η δική του)

$$x = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x$$

$$x = \frac{1}{3} + \frac{4}{9}x \Rightarrow \frac{5}{9}x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

(iii) Αν Y είναι το κέρδος του παίκτη A τότε:

$$Y = \begin{cases} \beta, & 3/5 \text{ (πιθανότητα να κερδίσει)} \\ -\alpha, & 2/5 \text{ (πιθανότητα να χάσει)} \end{cases}$$

Για να είναι δίκαιο το παιχνίδι πρέπει:

$E(Y) = 0 \Rightarrow P(Y=\beta)\cdot\beta + P(Y=\alpha)\cdot(-\alpha) = 0$

$\Rightarrow \frac{3}{5}\beta + \frac{2}{5}(-\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}\beta = \frac{2}{5}\alpha \Rightarrow \beta = \frac{2}{3}\alpha$

Πολυδιάστατες τμ - Τυχαία Διανύσματα

① Εισαγωγή

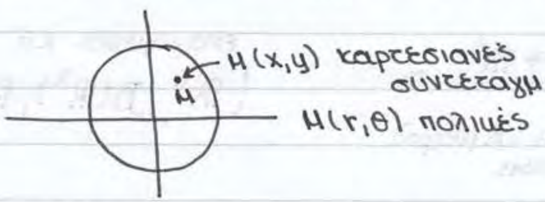
2-διάστατη τμ. ή τυχαίο διάνυσμα τδ (διάστασης 2) : Ζεύγος αριθμητικών χαρακτηριστικών που αντιστοιχίζεται στα δ.σ. ενός π.τ.

Παράδειγμα:

(i) π.τ: 10 ρίψεις ενός ζαριού

τ.δ: (X, Y) = (# ρίψεων με ένδειξη 1, # ρίψεων με ένδειξη 6)

(ii) π.τ: τυχαία επιλογή ενός σημείου σε ένα κύκλο.



(X, Y): καρτεσιανές συντετ. του H

(r, θ): πολικές συντετ.

(iii) Παρατήρηση διάρκειας ζωής 1000 λαμπτήρων

τ.δ: (X, Y) = (# λαμπτήρων που δεν λειτούργησαν καθόλου, # λαμπτήρων που λειτούργησαν >1000 ώρες)

② Ορισμός 2-διαστατης τμ

Ορισμός: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π. Μια (διανυσματική) συνάρτηση $(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$ λέγεται 2-διαστάτη τμ (ή τ.δ. διαστασης 2) αν $\{X\le x, Y\le y\} \overset{\text{ορσ}}{=} \{\omega\in\Omega : X(\omega)\le x, Y(\omega)\le y\} \in \mathcal{A}, \forall x,y\in\mathbb{R}$

$A_{x,y} = \{X\le x, Y\le y\}$

$$A_{x,y} = (X,Y)^{-1}\left((-\infty,x]\times(-\infty,y]\right) = X^{-1}((-\infty,x])\cap Y^{-1}((-\infty,y])$$

Παρατήρηση:

Αν (X,Y) είναι 2-διαστατη τμ τότε οι X και Y είναι μοναδιαστατες τμ, αλλά και αντίστροφα, αν X,Y είναι τμ ορισμένες στον ίδιο χ.π. τότε, (X,Y) είναι 2-διαστατη τμ.

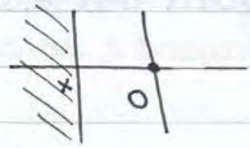
Απόδειξη:

$(\Rightarrow)$ Αν (X,Y) είναι 2-διαστατη τμ $\Rightarrow \{X\le x, Y\le y\}\in\mathcal{A}\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

$$\{X\le x\} = \{X\le x, Y\in\mathbb{R}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{\{X\le x, Y\le n\}}_{\in\mathcal{A}} \Rightarrow \{X\le x\}\in\mathcal{A}$$

$(\Leftarrow)$ Άμεσο. $\{X\le x, Y\le y\} = \underset{\in\mathcal{A}}{\{X\le x\}} \cap \underset{\in\mathcal{A}}{\{Y\le y\}} \in\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα

$\{X\le x\}$



③ Κατανομή μιας 2-διαστατης τμ

Μέσω της (X,Y) οδηγούμαστε φυσιολογικά σε ένα καινούριο χ.π.

αρχικός χ.π $\quad(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), P_{x,y})$ επαγόμενος χ.π

Ω: δ.χ, $\mathcal{A}$: σ-άλγεβρα, P: συνάρτηση (ή μέτρο) πιθανότητας

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma$ (ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$) = (σχεδόν όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ που γνωρίζουμε)

↳ Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$

$P_{X,Y}(B) = P((X,Y)\in B) \quad \forall\, B\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

↳ Επαγόμενη (συνάρτηση) ή μέτρο πιθανότητας

Η $P_{X,Y}$ λέγεται κατανομή του ζεύγους (X,Y)

④ Συνάρτηση κατανομής μιας 2-διάστατης τμ.

Ορισμός: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π. και $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ μια 2-διάστατη τμ. Η συνάρτηση $F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,\, Y\le y)$ όπου: $F_{X,Y}:\mathbb{R}^2\to[0,1]$ λέγεται από κοινού (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής της (X,Y)

Παρατηρήσεις:

1) Η σ.κ. $F_{X,Y}$ καθορίζει μονοσήμαντα την κατανομή πιθανότητας $P_{X,Y}$ της (X,Y).

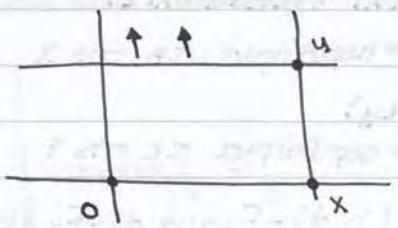
Αν $F_{X_1,Y_1}(x,y)=F_{X_2,Y_2}(x,y) \quad \forall\, (x,y)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow P_{X_1Y_1}=P_{X_2Y_2}$

(δηλ. $(X_1,Y_1)\overset{d}{=}(X_2,Y_2)$)

2) Περιθώριες σ.κ. των X και Y

$$F_X(x)=P(X\le x)=\lim_{y\to\infty} P(X\le x,\, Y\le y)=\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\lim_{x\to\infty} P(X\le x,\, Y\le y)=\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y),\ \forall\, y\in\mathbb{R}$$



ΜΑΘΗΜΑ 22ο

① Ιδιότητες της από κοινού σ.κ.

Βασικές Ιδιότητες

1) Η $F_{X,Y}(x,y)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς x, y, δηλαδή, $\forall y \in \mathbb{R}$ αν $x_1 < x_2$ τότε $F_{X,Y}(x_1,y) \leq F_{X,Y}(x_2,y)$ και $\forall x \in \mathbb{R}$, αν $y_1 < y_2$ τότε $F_{X,Y}(x,y_1) \leq F_{X,Y}(x,y_2)$

2) Η $F_{X,Y}$ είναι δεξιά συνεχής ως προς x, y δηλ. $\forall y \in \mathbb{R}$:
$\lim\limits_{u \to x^+} F_{X,Y}(u,y) = F_{X,Y}(x,y)$ και

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{v \to y^+} F_{X,Y}(x,v) = F_{X,Y}(x,y)$

$\forall y \in \mathbb{R}$ $F_{X,Y}(-\infty,y) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_{X,Y}(x,-\infty) = 0$

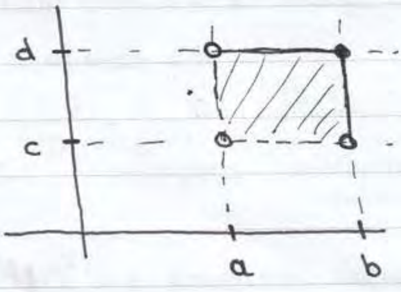
$F_{X,Y}(-\infty,y) = \lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y)$, $F_{X,Y}(x,-\infty) = \lim\limits_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y)$

3) $F_{X,Y}(+\infty,+\infty) \overset{\text{ορσ}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F_{X,Y}(x,y) = 1$

Προσοχή! $\lim\limits_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$ (γενικά όχι 1)
↳ περιθώρια σ.κ. της X

αντίστοιχα $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$
↳ περιθώρια σ.κ της Y

4) $P(a < X \leq b, c \leq Y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$



② Κατηγορίες 2-διαστάτων τ.μ.

(X,Y) τμ →
- $\boxed{\text{διακριτή}}$: $\exists A \subset \mathbb{R}^2$ αριθμήσιμο : $P((X,Y)\in A)=1$
- $\boxed{\text{συνεχής}}$: $P((X,Y)=(x,y))=0 \ \forall \ (x,y)\in\mathbb{R}^2$
  $\Leftrightarrow$ (η $F_{X,Y}(x,y)$ είναι συνεχής)
  - $\boxed{\text{απόλυτα συνεχής}}$
  - $\boxed{\text{ιδιάζουσα συνεχής}}$

Απόλυτα συνεχής: $\exists \ f_{X,Y}(x,y) \geq 0$:

$$\forall \ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \ P((X,Y)\in B) = \iint_B f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

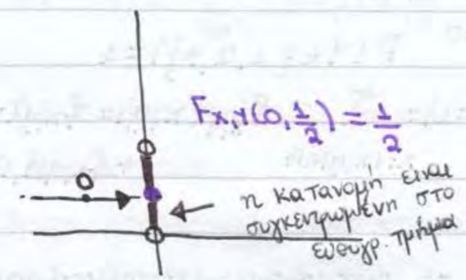
τότε λέμε ότι :
η $f_{X,Y}$ είναι συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας (σ.π.π)
κατ' αντιστοιχία με τις μονοδιάστατες τ.μ.

Ιδιότητα: (ισοδύναμος ορισμός της απόλυτης συνέχειας)

$$\text{αν } B: \text{ εμβαδόν}(B)=0 \Rightarrow P((X,Y)\in B)=0$$

Ιδιάζουσα συνεχής:

Έχουμε $P[(X,Y)=(x,y)]=0$, $\forall \ x,y\in\mathbb{R}^2$
και $\exists \ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$: εμβαδόν$(B)=0$, $P((X,Y)\in B)=1$
(προκύπτουν πολύ εύκολα στο $\mathbb{R}^2$, ιδιάζουσα συνεχής τμ)



π.χ (X,Y), $X=0$, με πιθ. 1
$Y\sim Unif(0,1)$
τότε, αυτή είναι ιδιάζουσα συνεχής

Η $F_{X,Y}(x,y)$ δεν είναι συνεχής.

Διότι $\begin{cases} F_{X,Y}(0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} F_{X,Y}(x,\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$

③ Ιδιότητες διακριτών 2-διάστατων τμ

- Έχουν συνάρτηση πιθανότητας

χαρακτηριστικές ιδιότητες της σ.π.

i) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$

ii) $\sum_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y) = 1$, όπου A αριθμήσιμο : $P((X,Y)\in A) = 1$.

Όταν, μια $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii) για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο A, τότε είναι σ.π κάποιας τμ (X,Y)

Επιπλέον Ιδιότητες: (σύνδεση με τις μονοδιάστατες X και Y)

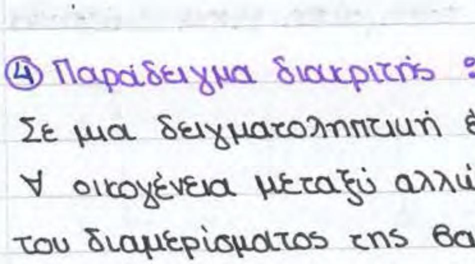
~ Όταν (X,Y) διακριτή, τότε οι X και Y είναι διακριτές και

- $f_X(x) = \sum_{y:(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y:(x,y)\in A} P(X=x, Y=y)$

(περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της Y)

Αντίστοιχα, $\forall\, y \in \mathbb{R}$

$f_Y(y) = \sum_{x:(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x:(x,y)\in A} P(X=x, Y=y)$



$\to f_X(x)=0$

$P(X=-2) = f_{X,Y}(-2,1) + f_{X,Y}(-2,2)$

$P(X=2) = f_{X,Y}(2,1)$

$P(Y\in\{1,2,3\}) = 1$

$P(Y=1) = \sum_{x:(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(-2,1) + f_{X,Y}(-1,1) + f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(2,1)$

④ Παράδειγμα διακριτής 2-διάστατης τμ.

Σε μια δειγματοληπτική έρευνα σε οικογένειες, καταγράψαμε $\forall$ οικογένεια μεταξύ άλλων, το # των μελών, και τον τύπο του διαμερίσματος της βασικής κατοικίας. Το δείγμα που πήραμε χωρίστηκε ως εξής:

$\to$

τύπος διαμερ. / # μελών	2-αρι	3-αρι	4-αρι	5-αρι
2	30%	9%	1%	0%
3	4%	15%	1%	0%
4	3%	15%	10%	2%
5	1%	4%	4%	1%

π.χ. τυχαία επιλογή μιας οικογένειας στο δείγμα.
Έστω X: # μελών της οικογ.
Y: τύπος διαμερ.
Ποια είναι η σ.π της (X,Y)?
$P(X=x)=?$ $P(Y=y)=?$

Λύση:

$\Downarrow$

X \ Y	2	3	4	5	$f_X(x)$
2	0.3	0.09	0.01	0	0.4
3	0.04	0.15	0.01	0	0.2
4	0.03	0.15	0.1	0.02	0.3
5	0.01	0.04	0.04	0.01	0.1
$f_Y(y)$	0.38	0.43	0.16	0.03	1

$P(X=x, Y=y)$ = ποσοστό που είχα (μετατροπή σε δεκαδικό)

$P(X=x) = \sum_{y=2}^{5} f_{X,Y}(x,y)$

⑤ Ιδιότητες απόλυτα συνεχών 2-διάστατων τμ.

- Έχουν σ.π.π

Χαρακτηριστικές Ιδιότητες

(i) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

~ Όταν μια $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii), τότε είναι σ.π.π μιας διδιάστατης τμ.

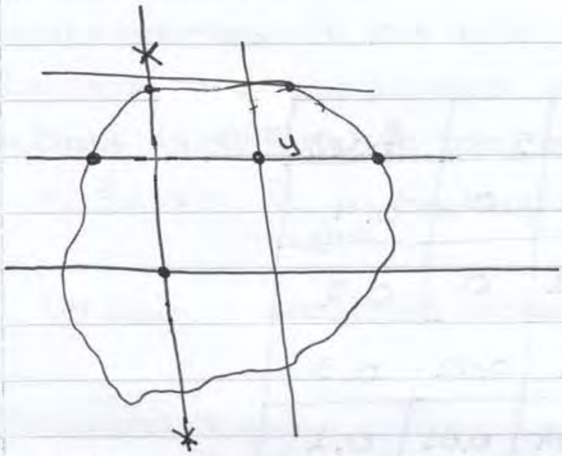
Επιπλέον Ιδιότητες

· σύνδεση με τις μονοδιάστατες X και Y.

Οι X και Y είναι απόλυτα συνεχείς τμ (άρα έχουν σ.π.π)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \ , \ \forall\ x\in\mathbb{R} \quad \left(\begin{matrix}\text{και}\\ \text{περιθώρια}\\ \text{σ.π.π της } X\end{matrix}\right)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \ , \ \forall\ y\in\mathbb{R} \quad \left(\begin{matrix}\text{περιθώρια}\\ \text{σ.π.π της } Y\end{matrix}\right)$$



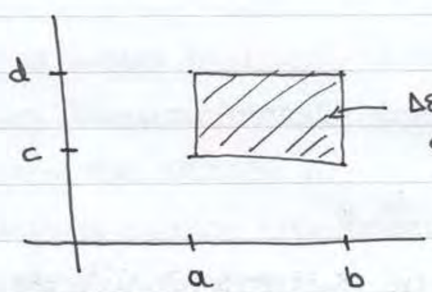
· σύνδεση της σ.κ. της (X,Y) με την σ.π.π.

$\rightarrow F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du \quad \forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \left(\text{ή } \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv\right)$

$\rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\,\partial y}$, όταν $\exists$ παράγωγοι $\left(\text{ή } \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial y\,\partial x}\right)$

Πιθανότητα σε ορθογώνια

$$P(a \underset{(-)}{\leq} X \underset{(-)}{\leq} b \ , \ c \underset{(-)}{\leq} Y \underset{(-)}{\leq} d) = \int_a^b\int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$



Δεν έχει σημασία αν θα συμπεριλαμβάναμε ή όχι τις πλευρές

$\rightsquigarrow$ εξαιρούνται σύνολα εμβαδού 0, δεν αλλάζει η πιθανότητα (αριθμήσιμό το πλήθος) ιδιότητα της απόλυτης συνέχειας (ισοδυν. ορισμος της α.σ. της (X,Y))

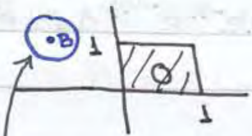
$$\text{Εμβαδον}(B)=0 \Rightarrow P((X,Y)\in B)=0$$

$$\Updownarrow$$

Αν B : $P((X,Y)\in B)>0 \Rightarrow \text{εμβαδον}(B)>0$

Προσοχη! Το αντίστροφο δεν ισχύει!

$$\text{Εμβαδον}(B)>0 \not\Rightarrow P((X,Y)\in B)>0$$



$X \sim Unif(0,1)$

$Y \sim Unif(0,1)$ (και ανεξ. τμ, θα το δουμε αργότερα)

Εμβαδον$(B)>0$, όμως $P((X,Y)\in B)=0$

$\sim$ η κατανομή είναι συγκεντρωμένη στο τετράγωνο

Παράδειγμα απόλυτα συνεχούς 2-διαστατης τμ.

Εστω (X,Y) με $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c e^{-x} e^{-2y}, & x,y>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(i) $c=?$

(ii) $f_X(x)=?$

(iii) $f_Y(y)=?$

(iv) $P(X>1, Y<1)=?$

(v) $P(X<1)?$

vi) $P(X<Y)?$

Λύση:

Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

Έχουμε, $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} c e^{-x} e^{-2y}\,dx\,dy =$

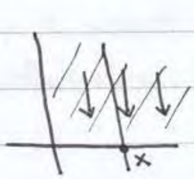
$$= c\left(\int_0^{+\infty} e^{-x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy\right) = \frac{c}{2}\left(\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x}dx}_{=1}\right)\left(\underbrace{\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}dy}_{=1}\right)$$

$\Rightarrow c = 2$

διοτι σ.ππ $\sim Exp(1)$ σ.ππ $Exp(2)$

ΜΑΘΗΜΑ 23ο

① (ii) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & , x,y>0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$



$S_{X,Y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x,y)>0\}$

⇝ προβάλλουμε το $S_{X,Y}$ στον άξονα x

S_X ↳ προβολή του $S_{X,Y}$ στον άξονα x.

$f_X(x) = 0 \quad \forall x \leq 0$

$\forall x>0 \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y}dy = e^{-x}\underbrace{\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}dy}_{\substack{\text{σ.π.π} \\ \sim Exp(2)}}$

$= e^{-x} \cdot 1 = e^{-x}$

Άρα, $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x>0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$ $\quad f_X(x) = e^{-x} 1_{(0,+\infty)}(x)$ ή $e^{-x} 1_{x>0}$

και έτσι $X \sim Exp(1)$

iii) Παρόμοια, $\forall y \leq 0 \quad f_Y(y) = 0$

$\forall y>0 \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y}dx =$

$= +2e^{-2y}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x}dx}_{\substack{=1 \\ \text{σ.π.π} \sim Exp(1)}} = 2e^{-2y}$

$f_Y(y) = 2e^{-2y} 1_{(0,+\infty)}(y)$

Τελικά: $f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & y>0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

δηλ $Y \sim Exp(2)$

(iv) $P(X>1, Y<1) = P((X,Y) \in (1,+\infty)\times(-\infty,1))$

$= \int_1^{+\infty}\int_{-\infty}^{1} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{+\infty}\int_0^1 2e^{-x}e^{-2y}dy\,dx =$

$= \left(\int_1^{+\infty} e^{-x}dx\right)\left(\int_0^1 2e^{-2y}dy\right) = P(X>1)\,P(0<Y<1)$

$X \sim Exp(\theta)$, $\underset{(x>0)}{P(X\leq x) = 1-e^{-\theta x}}$, $P(X>x) = e^{-\theta x}$ $(x>0)$

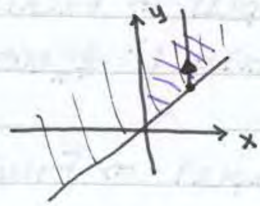
$= e^{-1}(1-e^{-2})$ $(X \sim Exp(1),\ Y \sim Exp(2))$

v) $\underset{\overset{\shortparallel}{F_X(1)}}{P(X<1)} = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx = \int_0^1 e^{-x}dx = 1-e^{-1}$

$= 1-e^{-1}$

(vi) Πιο δύσκολη πιθανότητα

$P(X<Y) = P((X,Y)\in B)$, όπου $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>x\}$



$\shortparallel$

$P((X,Y)\in B_+)$, όπου

$B_+ = \{(x,y): 0<x<y\}$

$$= \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} \underbrace{2e^{-2y}e^{-x}}_{f_{X,Y}(x,y)} dy\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\int_x^{+\infty} 2e^{-2y}dy\right)dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}P(Y>x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-2x}dx = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \underbrace{3e^{-3x}}_{\text{σππ } Exp(3)}dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$$

② Ανεξαρτησία 2 τ.μ.

Υπενθύμιση: 2 ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

Ορισμός: 2 τμ X,Y (ορισμένες στον ίδιο χ.π.), λέγονται ανεξάρτητες, αν $P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)$, $\forall A,B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ισοδύναμα: Αν $\{X\in A\}$ και $\{Y\in B\}$ είναι ανεξάρτητα, $\forall A,B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Τότε, γράφουμε $X \perp\!\!\!\perp Y$

Παρατηρήσεις:

1) Αν χρησιμοποιήσουμε επαγόμενες συναρτήσεις (μέτρα) πιθανότητας, τότε $X \perp\!\!\!\perp Y \overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} P_{X,Y}(A\times B) = P_X(A)P_Y(B)$, $\forall A,B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

2) $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

($\Rightarrow$) Αν $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)$

Για $A=(-\infty,x]$ και $B=(-\infty,y]$ έχουμε $\forall$ $x,y\in\mathbb{R}$.

$P(X\in(-\infty,x], Y\in(-\infty,y]) = P(X\in(-\infty,x])P(Y\in(-\infty,y])$

άρα $P(X\le x, Y\le y) = P(X\le x)P(Y\le y)$

δηλ $F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y) \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

$(\Leftarrow)$ (βλέπε Πιθ ΙΙ)

π.χ $(X,Y) \Rightarrow$ απολ. συνεχής τμ και $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}2e^{-2y}e^{x}, & x>0\ y>0\\ 0, & \text{διαφορ.}\end{cases}$

$X\sim Exp(1) \Rightarrow F_X(x)=1-e^{-x}, x>0$ (0 διαφορ)

$F_X(x)=\int_0^x f_X(u)\,du, \ \forall\, x\in\mathbb{R})$

$Y\sim Exp(2) \Rightarrow F_Y(y)=1-e^{-2y}, y>0$ (0 διαφορετικά)

Έχουμε, για $x>0, y>0$ $\quad F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$

$$=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du = \int_0^x\int_0^y 2e^{-u}e^{-2v}\,du\,dv =$$

$$=\left(\int_0^x \underbrace{e^{-u}}_{\text{σππ } Exp(1)}du\right)\left(\int_0^y \underbrace{2e^{-v}}_{\text{σππ } Exp(2)}dv\right) = P(X\le x)P(Y\le y)=F_X(x)F_Y(y)$$

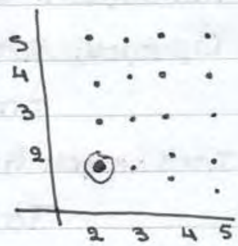
~Αν $x\le 0$ ή $y\le 0$ τότε $F_{X,Y}(x,y)=0$ και $F_X(x)F_Y(y)=0$

Τελικά, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ $\quad F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ άρα $X \perp\!\!\!\perp Y$

Παράδειγμα διακριτής τμ (δειγμ. έρευνα)

Είναι οι X και οι Y ανεξάρτητες τμ?

(# μελών) (# δωματίων)



Παρατηρούμε ότι για $(x,y)=(2,2)$

$$F_{X,Y}(x,y) \underset{(x,y)=(2,2)}{=} F_{X,Y}(2,2)=P(X\le 2, Y\le 2)$$

$$=P(X=2,Y=2)=0.3 \neq P(X=2)P(Y=2)=0.4\times 0.38=F_X(2)F_Y(2)$$

Άρα οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.

③ Συνθήκες ανεξαρτησίας με σ.π ή σ.π.π

- Αν (X,Y) μια 2-διάστατη τμ με σ.π/σ.π.π $f_{X,Y}(x,y)$
  Τότε, $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ με πιθαν. 1.

Μια σχέση ισχύει με πιθανότητα 1, αν $\exists\ S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) : P((X,Y)\in S) = 1$ και η σχέση ισχύει στο S.
Ισοδύναμα, $\exists\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ όπου $P((X,Y)\in A) = 0$, και η σχέση δεν ισχύει μόνο σε αυτό το A.

Παρατηρήσεις:

1) Αν (X,Y) είναι διακριτή και $\exists\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ δηλαδή $P(X=x, Y=y) \neq P(X=x)P(Y=y)$, τότε οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες τμ.
Άρα, λοιπόν έχουμε ότι για διακριτή, αρκεί ένα σημείο, να μην ισχύει η σχέση, για να έχουμε μη-ανεξαρτησία.

$$P(X=x, Y=y) = F_{X,Y}(x,y) - F_{X,Y}(x^-,y) - F_{X,Y}(x,y^-) + F_{X,Y}(x^-,y^-)$$

Απόδειξη: $\{X=x, Y=y\} = \Big\{ \big(\{X\leq x\}\setminus\{X<x\}\big) \cap \big(\{Y\leq y\}\setminus\{Y<y\}\big) \Big\}$

2) Ικανή Συνθήκη Ανεξαρτησίας:
Όταν (X,Y) είναι (απολυτ.) συνεχής και $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ μόνο σε σύνολο A: Εμβαδόν(A) = 0
(λόγω απόλυτης συνέχ: $\text{Εμβ}(A) = 0 \Rightarrow P[(X,Y)\in A] = 0$.

π.χ. (X,Y) απ.συν. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} &, x>0, y>0 \\ 0 &, \text{διαφορετικά.} \end{cases}$
$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-x}e^{-2y}\, \mathbb{1}_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)}(x,y) = \big(e^{-x}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\big)\big(2e^{-2y}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y)\big)$$
$$= f_X(x) f_Y(y) \quad \text{, όπου } X\sim Exp(1)$$
$$Y \sim Exp(2)$$

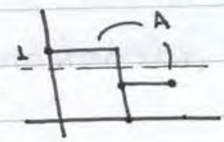
Άρα $X \perp\!\!\!\perp Y$.

π.χ (2) (X,Y) διακριτή όπως στη δειγμ. έρευνα

$$f_{X,Y}(2,2) = P(X=2, Y=2) = 0.3 \neq 0.4 \times 0.3 = P(X=2)P(Y=2) = f_X(2)f_Y(2)$$

Άρα $X \not\perp\!\!\!\perp Y$.

(X,Y) α.σ. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y)\in A \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

$A =$ 

Είναι οι X και Y ανεξάρτητες;

$S_{X,Y} = A$

$\sim \forall x$:

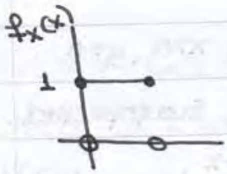
- $x<0$ ή $x>2$ $\quad f_X(x)=0$
- Αν $0 \le x \le 1$ και έχουμε $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 1\,dy = 1$
- Για $1 < x \le 2$ $\quad f_X(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,dy = 0$

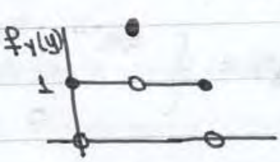
Άρα, $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \Rightarrow X \sim Unif\,(0,1)$ $[0,1]$

Άρα, αν $y<0$, $y>1$ προφανώς $f_Y(y)=0$

- Αν $y \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ $\quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$
- Αν $y = \frac{1}{2}$ $\quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^2 1\,dx = 2.$

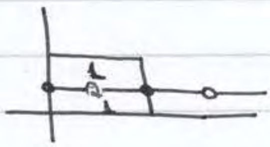
Άρα $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] - \{\frac{1}{2}\} \\ 2, & y = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$





Παρόλα αυτά $Y \sim Unif\,(0,1)$ (δεν αλλάζει η σ.κ. όταν έχω αλλαγή σε σημείο της f)

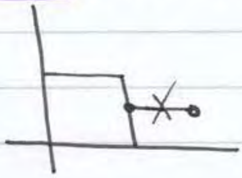
$$f_X(x)\, f_Y(y) = \begin{cases} 2, & y=\frac{1}{2} \quad 0\le x\le 1 \\ 1, & 0\le x\le 1,\ y\in[0,1]-\{\frac{1}{2}\} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



$f_X(x)\, f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$ στο $B=[0,2]\times\{\frac{1}{2}\}$

Εμβαδον $(B)=0$, άρα $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Αλλιως, $X \perp\!\!\!\perp Y$?



$(Z,W) \overset{d}{=} (X,Y)$ και είναι 0 στο προβλημ. ευθυγρ. τμήμ.

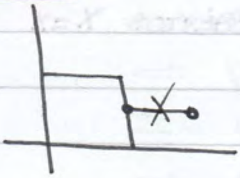
$f_{Z,W}(z,w) = f_Z(z) f_W(w)$ παντου και άρα $Z \perp\!\!\!\perp W$ $\left.\right\}$ $\overset{(Z,W)\overset{d}{=}(X,Y)}{\Rightarrow} X \perp\!\!\!\perp Y$

$$f_X(x)\, f_Y(y) = \begin{cases} 2, & y=\frac{1}{2} \quad 0\le x\le 1 \\ 1, & 0\le x\le 1, \; y\in[0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$f_X(x)\, f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$ στο $B=[0,2]\times\{\frac{1}{2}\}$

Εμβαδόν $(B)=0$, άρα $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Αλλιώς, $X \perp\!\!\!\perp Y$?



$(Z,W) \overset{d}{=} (X,Y)$ και είναι 0 στο προβλημ. ευθυγρ. τμήμ.

$f_{Z,W}(z,w) = f_Z(z)\, f_W(w)$ παντού και άρα $Z \perp\!\!\!\perp W$ $\Big\}$ $(Z,W)\overset{d}{=}(X,Y)$ $\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

13/4/16

ΜΑΘΗΜΑ 24ο

① Δεσμευμένες Κατανομές τ.μ.

$P(A) \xrightarrow{\text{γνωστή } B} P(A|B)$

$P(X\le x) \xrightarrow{Y=y} P(X\le x\,|\,Y=y)$ έχει νόημα με αυτά που ξέρουμε αν $P(Y=y)>0$.

π.χ για (X,Y) διακριτή 2-διάστατη τμ.

$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ και άρα, $\dfrac{P(X\le x, Y=y)}{P(Y=y)} = \sum\limits_{\substack{u:(u,y)\\ \in A \\ u\le x}} \dfrac{P(X=u, Y=y)}{P(Y=y)}$

Τι κάνουμε όταν (X,Y) απόλυτα συνεχής;

$P(Y=y)=0 \quad \forall\, y\in\mathbb{R}$. Όμως $f_Y(y)>0$, όταν $y\in S_y$

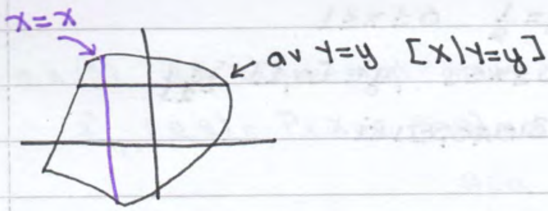
αυτή την έννοια θα χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε $[X|Y=y]$

Ορισμός: Εστω (X,Y) 2-διάστατη τμ με σ.π.π/σ.π. $f_{X,Y}(x,y)$. Ορίζουμε:

$\forall\, y: f_Y(y)>0$ (περιθώρια σ.π.π/σ.π της Y)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$ (συνάρτηση του x, για σταθερό y.)

και τη λέμε δεσμευμένη σ.π/σ.π.π της X, δοθέντος ότι $Y=y$.



Ανάλογα, ορίζουμε $\forall x$: $f_X(x)>0$ (περιθώρια σ.π/σ.π.π της X)

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$ (συνάρτηση του y για σταθερό x)

και τη λέμε δεσμευμένη σ.π/σ.π.π της Y, δοθέντος $X=x$

Ιδιότητες:

① Η $f_{X|Y}(x|y)$ είναι πράγματι σ.π/σ.π.π κάποιας τμ.
(μη-αρνητική, αθροίζει/ολοκληρώνει στη μονάδα)
Καμιά φορά γράφουμε ότι είναι σ.π/σ.π.π της τμ $[X|Y=y]$
Όμοια η $f_{Y|X}(y|x)$, ανάλογα λέμε ότι είναι σ.π/σ.π.π της $[Y|X=x]$

② Δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της $[X|Y=y]$

$$F_{X|Y}(x|y) \overset{\text{ορσ}}{=} P(X\le x|Y=y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{u\le x \\ (u,y)\in A}} f_{X|Y}(u|y), & \text{αν } (X,Y) \text{ διακριτή και } P[(X,Y)\in A]=1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,du, & \text{αν } (X,Y) \text{ είναι απολ. συνεχής} \end{cases}$$

Όμοια, για $F_{Y|X}(y|x)$ τη δεσμευμ. συνάρτηση κατανομής της $[Y|X=x]$

~Προσοχή~

Για (X,Y) είναι απόλυτα συνεχής, $P(X\le x|Y=y) = \cancel{\dfrac{P(X\le x, Y=y)}{P(Y=y)}}$ πιθ.0
ενώ για (X,Y) διακριτή ισχύει η σχέση όταν $P(Y=y)>0$.

② Ισοδύναμες συνθήκες ανεξαρτησίας

Αν (X,Y) είναι 2-διάστατη τμ με σ.π/σ.π.π $f_{X,Y}(x,y)$ τότε

$X \perp\!\!\!\perp Y \overset{ορσ}{\iff} P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B), \forall\ A,B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\iff F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, αν $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, αν $x,y\in\mathbb{R}$ (με πιθ. 1)

$\iff f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \forall\ x\in\mathbb{R}, \forall\ y: f_Y(y)>0$ (με πιθ. 1)

$\iff f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y), \forall\ y\in\mathbb{R}, \forall\ x: f_X(x)>0$ (με πιθ. 1)

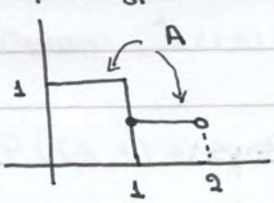
$\iff F_{Y|X}(y|x) = F_Y(y), \forall\ y\in\mathbb{R}, \forall\ x: f_X(x)>0$ (με πιθ. 1)

$\iff F_{X|Y}(x|y) = F_X(x), \forall\ x\in\mathbb{R}, \forall\ y: f_Y(y)>0$ (με πιθ. 1)

$\iff f_{X,Y}(x,y) = h(x)g(y)$ (με πιθ. 1)

$\hookrightarrow$ (χωρίς κατ' ανάγκη να είναι σ.π. ή σ.π.π)

~Παράδειγμα~



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y)\in A \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

α) $f_{Y|X}(y|x) = ?$ β) $F_{X|Y}(y|x) = ?$

γ) $f_{X|Y}(x|y) = ?$ δ) $F_{Y|X}(x|y) = ?$

ε) Να ελεγχθεί η ανεξαρτησία σε κάθε μια περιπτ.

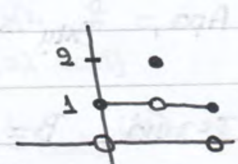
Λύση:

α) Βρίσκουμε τα x: $f_X(x)>0$

Έχουμε $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x\in[0,1] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$$\forall\ x\in[0,1],\ f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 1, & 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2, & y=\frac{1}{2} \\ 1, & y\in[0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Τελικά, $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$ εκτός $B = [0,1]\times\{\frac{1}{2}\}$

Εμβαδόν$(B)=0$ (ευθύγραμμο τμήμα)

διότι: μήκος $[0,1]$ × μήκος $\{\frac{1}{2}\}$
$\qquad\quad\ \ \| \qquad\qquad\qquad \|$
$\qquad\quad\ \ 1 \qquad\qquad\qquad 0$

Παρατήρηση:

~ εμβαδόν (σημείου) = 0

~ εμβαδόν (ευθ. τμήμ) = 0

~ εμβαδόν (ευθείας) = 0 γιατι, π.χ. $\mathbb{R}\times\{0\}$ $\downarrow$ ______ x

β) $F_{Y|X}(y|x) = ?$

Από το α) $[Y|X=x] \sim Unif([0,1])$, $\forall\ 0\le x\le 1$

$$\Rightarrow F_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ y & , 0\le y<1 \\ 1 & , y\ge 1 \end{cases} = F_Y(y) \text{ διοτι } Y\sim Unif[0,1]$$

$\Rightarrow F_{Y|X}(y|x) = F_Y(y)$, $\forall\ 0\le x\le 1$, $y\in\mathbb{R}$. Άρα $X \perp\!\!\!\perp Y$.

$\Rightarrow [Y|X=x] \overset{d}{=} Y$, $\forall\ 0\le x\le 1$.

γ) $f_{X|Y}(x|y) = ?$

Βρίσκουμε τα y: $f_Y(y)>0$. Έχουμε πάλι $0\le y\le 1$

$\forall\ y\notin[0,1]$ δεν ορίζεται η δεσμ. σ.π.π

$$\forall\ y\in[0,1]\setminus\{\tfrac{1}{2}\}\quad f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 1 & , 0\le x\le 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Άρα, $[X|Y=y] \sim Unif[0,1]$, $\forall\ y\in[0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\}$

$$\text{Για } y=\tfrac{1}{2}\qquad f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , 0\le x\le 2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$\Rightarrow [X|Y=\frac{1}{2}] \sim Unif[0,2]$

Άρα, $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$ για $y\ne\frac{1}{2}$ και $x\in[0,2]$

Τελικά, $B = \{(x,y)\mid f_{X|Y}(x|y)\ne f_X(x)\} = [0,2]\times\{\frac{1}{2}\}$

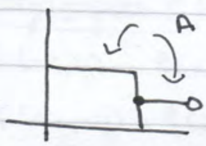
Πάλι, εμβαδον$(B)=0 \Rightarrow X\perp\!\!\!\perp Y$

δ) $F_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x & , 0\leq x \leq 1 \\ 1 & , x>1 \end{cases} = F_X(x)$ για $y \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$

Ενώ για $y=\frac{1}{2}$: $F_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{x}{2} & , 0\leq x \leq 2 \\ 1 & , x>2 \end{cases}$

$F_{X|Y}(x|y) \neq F_X(x)$ μονο για $x \in (0,2)$ και $y=\frac{1}{2}$

Άρα εμβαδον (B) = εμβαδον $((0,2) \times \{\frac{1}{2}\}) = 0 \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$.

ε) 

Αν $f_{X,Y}(x,y) = h(x)g(y)$ τότε $X \perp\!\!\!\perp Y$ (με πιθανότητα 1)

$f_{X,Y}(x,y) = 1_A(x,y) = 1_{[0,1]\times[0,1]}(x,y) + 1_{(1,2]\times\{\frac{1}{2}\}}(x,y)$

όμως $1_{(1,2]\times\{\frac{1}{2}\}} = 0$, με πιθαν. 1 (γιατί?)

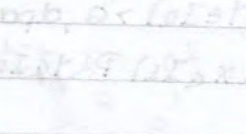
διότι $P((X,Y) \in (1,2] \times \{\frac{1}{2}\}) = 0$ (αφου εμβαδόν $([1,2]\times\{\frac{1}{2}\}) = 0$ και (X,Y) απόλυτα συνεχής)

δηλαδή, $f_{X,Y}(x,y) \overset{\text{πιθ. 1}}{=} 1_{[0,1]\times[0,1]}(x,y) \overset{\Delta}{=} 1_{[0,1]}(x) \, 1_{[0,1]}(y) = h(x)\,g(y)$, όπως απαιτεί η ανεξαρτησία.

Ασκήσεις:

1) Να ελεγθεί η ανεξαρτησία των X και Y όταν (X,Y) είναι απόλυτα
(i) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\frac{x^2}{y^2} & , a\leq x\leq b \;, 0<c\leq y\leq d \\ 0 & , \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

Λύση:

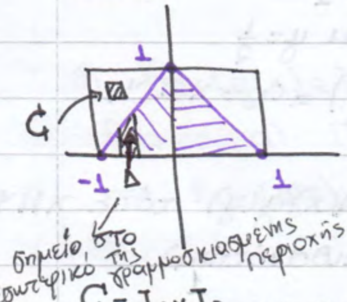


$f_{X,Y}(x,y) = c\frac{x^2}{y^2} \, 1_{[a,b]\times[c,d]}(x,y) =$

$= \underbrace{c x^2 \, 1_{[a,b]}(x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{y^2} \, 1_{[c,d]}(y)}_{h(y)} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y.$

(ii) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c|x|y & , 0 \le x \le 1 ,\ 0 \le y \le 1-|x| \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Λύση:



$f_{X,Y}(x,y) = c|x|y \ \mathbb{1}_{\text{τρίγωνο}}(x,y)$

$G = I_1 \times I_2$ με εμβαδόν$(G) > 0$ και $P[(X,Y) \in \underset{I_1 \times I_2}{\overset{\shortparallel}{G}}] = 0$

Αν ήταν ανεξάρτητα, πρέπει:

$= P(X \in I_1) \cdot P(X \in I_2)$

~ Αν $P(X \in I_1) = 0$ τότε $\Rightarrow P(X \in I_1, (X,Y) \in S_{X,Y}) = 0$

Όμως, η f είναι συνεχής στο Δ και $\iint_{\text{περιοχή γραμμοσκ.}} f(x,y)\,dx\,dy > 0$

αφού $f(x,y) > 0$. άτοπο! $\quad \shortparallel$

$\downarrow$ στε περιοχή που πήραμε το Δ $\quad P(X \in I_1, (X,Y) \in S_{X,Y})$

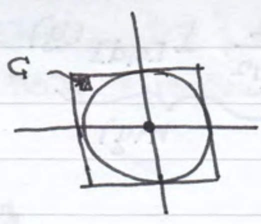
~ Αντίστοιχα, $P(Y \in I_2) = 0$ (άτοπο)

$P((X,Y) \in \underset{I_1 \times I_2}{\overset{\shortparallel}{G}}) = 0$, όμως $P(X \in I_1) > 0$, $P(X \in I_2) > 0$

άρα $X \not\perp\!\!\!\perp Y$.

(iii) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & , x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$ Είναι $X \perp\!\!\!\perp Y$?

Λύση:



$P((X,Y) \in G) = P((X,Y) \in I_1 \times I_2) = 0$ (δεν έχουμε κοινά σημεία με το στρογγ.)

Όμως,

$P(X \in I_1) > 0$ και $P(Y \in I_2) > 0$, άρα

$0 = P((X,Y) \in I_1 \times I_2) \neq P(X \in I_1) P(Y \in I_2) > 0$

Άρα $X \not\perp\!\!\!\perp Y$

ΜΑΘΗΜΑ 25ο

① Άσκηση

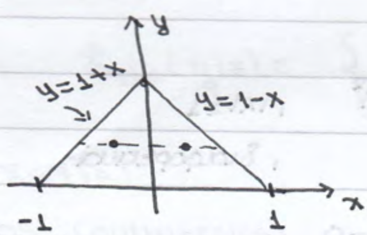
Έστω (X,Y) με σ.π.π $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c|x|y, & -1\le x\le 1, \ 0\le y\le 1-|x| \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

i) c? ii) $f_X(x)=?$ iii) $f_Y(y)$? iv) $f_{X|Y}(x|y)=?$ v) $f_{Y|X}(y|x)=?$
vi) $P(X<Y)=?$

συμμετρίες ?

$\left(\begin{array}{ll} f(-x,y)\overset{?}{=}f(x,y), & f(x,-y)\overset{?}{=}f(x,y) \\ f(-x,-y)\overset{?}{=}f(x,y), & f(x,y)\overset{?}{=}f(y,x)=? \end{array} \right)$

Λύση:



i) α' τρόπος:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-|x|} c|x|y\,dy\,dx=1$$

β' τρόπος:

$$\int_{0}^{1}\int_{y-1}^{1-y} c|x|y\,dx\,dy=1$$

γ' τρόπος:

Καταρχήν $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx=1$ (1)

Παρατηρούμε ότι, $f(-x,y)=f(x,y)$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Άρα $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = 2\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$ (2)

Έχουμε, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} c\,x\,y\,dy\,dx$

$$= c\int_0^1 x\left(\int_0^{1-x} y\,dy\right)dx = c\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx = \frac{c}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dy$$

$$\overset{x\to 1-x}{=} \frac{c}{2}\int_0^1 (1-x)x^2\,dx = \frac{c}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{12}$$

$$=\frac{c}{24} \quad (3)$$

Απο (1), (2), (3) έχουμε $2\frac{c}{24}=1 \Rightarrow c=12$

Τελικα: $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 12|x|y & , -1\leq x\leq 1 \ , \ 0\leq y\leq 1-x \\ 0 & , \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

ii) $f_X(x)=?$

Για κάθε $x: |x|>1$ έχουμε $f_X(x)=0$

Αν $x: |x|\leq 1$ $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_{0}^{1-|x|} 12|x|y\,dy=$

$=12|x|\int_0^{1-|x|} y\,dy = 12|x|\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-|x|} = 12|x|\frac{(1-|x|)^2}{2}=$

$=6|x|(1-|x|)^2$

Τελικα, $f_X(x)=\begin{cases} 6|x|(1-|x|)^2 & , |x|\leq 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

iii) Αν $y\notin[0,1]$ τότε $f_Y(y)=0$

Αν $y\in[0,1]$, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_{y-1}^{1-y} 12|x|y\,dx$

$=12y\int_{y-1}^{1-y}|x|\,dx = 24y\int_0^{1-y} x\,dx = 24y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y} = 12y(1-y)^2$

Τελικα, $f_Y(y)=\begin{cases} 12y(1-y)^2 & , 0\leq y\leq 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

iv) $f_{X|Y}(x|y)=?$

Πρέπει: $f_Y(y)>0$. Άρα $y\in[0,1]$ και $12y(1-y^2)>0$

Όμως, $12y(1-y^2)>0 \underset{0\leq y\leq 1}{\Longleftrightarrow} y\in(0,1)$

Για $y\in(0,1)$ $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{12|x|y}{12y(1-y)^2}=\frac{|x|}{(1-y)^2}$ $y-1\leq x\leq 1-y$

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{(1-y)^2}, & y-1\le x\le 1-y \\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}\qquad (y\in[0,1))$$

v) $f_{Y|X}(y|x)$;

Πρέπει $f_X(x)>0 \Leftrightarrow |x|\le 1$ και $6|x|(1-|x|)^2>0$

δηλαδή $|x|\le 1$ και $|x|\neq 0$ και $|x|\neq 1$

δηλαδή, $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ (διαφορετικά δεν ορίζεται)

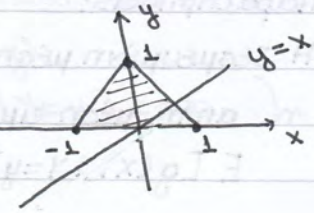
$\forall x\in(-1,0)\cup(0,1)$, $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{\cancel{12}^{\,2}\cancel{|x|}y}{\cancel{6}\cancel{|x|}(1-|x|)^2}$

$$=\frac{2y}{(1-|x|)^2},\ (0\le y\le 1-|x|)$$

Τελικά, $$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{2y}{(1-|x|)^2}, & 0\le y\le 1-|x| \\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}\qquad \left(x\in(-1,0)\cup(0,1)\right)$$

vi) $P(X<Y)=?$

α' τρόπος (συμμετρίες)



Παρατηρούμε ότι $f(-x,y)=f(x,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X<0)=P(X>0)=\frac{1}{2}$

Επίσης, $f(x,y)=f(y,x)$, για $x,y>0$

Άρα $P(0<X<Y)\overset{(*)}{=}P(0<Y<X) \Rightarrow P(X>0)=\underbrace{P(0<X<Y)+P(0<Y<X)}_{\frac{1}{2}}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} P(0<X<Y)=\frac{1}{4}$

Όμως, $P(X<Y)=P(X<Y<0)+P(X<0<Y)+P(0<X<Y)=$

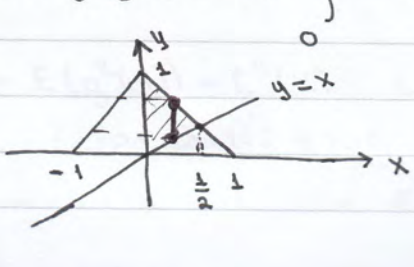
$= 0 + P(X<0)+P(0<X<Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

β' τρόπος:

$P(X<Y)=P(X<0)+P(0<X<Y)\overset{\text{συμμ.}}{=}\frac{1}{2}+\overbrace{P(0<X<Y)}^{(*)}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{1-x}12xy\,dy\,dx=12\int_0^{1/2}x\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{1-x}dx=6\int_0^{1/2}x\left[(1-x)^2-x^2\right]dx$

$=\ldots=\frac{1}{4}$



② Δεσμευμένη Μέση Τιμή.

Ορ.: Εστω (X,Y) 2-διάστατη τμ με σ.π/σ.π.π $f_{X,Y}(x,y)$.

Ορίζουμε, $\forall y$: $f_Y(y)>0$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_{X|Y}(x|y)\,dx < +\infty$, για (X,Y) α.σ. ή

$$\sum_k |x_k| f_{X|Y}(x_k|y) < +\infty.$$

$$E[X|Y=y] = \begin{cases} \sum\limits_{x_k:(x_k,y)\in A} x_k f_{X|Y}(x_k|y), & \text{για } (X,Y) \text{ διακριτή με } P((X,Y)\in A)=1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx : & \text{για } (X,Y) \text{ απολ. συν.} \end{cases}$$

τη δεσμευμένη μέση τιμή της X, δοθείσης της $Y=y$.

Αντίστοιχα, ορίζουμε $E[Y|X=x]$ με εναλλαγή των ρόλων x και y.

Παρατηρήσεις:

1) Η δεσμευμένη μέση τιμή ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που ικανοποιεί η απλή μέση τιμή π.χ LOTUS.

$$E[g(X)|Y=y] \underset{\substack{(X,Y)\\ \text{διακριτή}}}{=} \sum_{x:(x,y)\in A} g(x) f_{X|Y}(x|y)$$ (αρκεί να δεσμεύουμε για $Y=y$)

2) Η $E[X|Y=y]$ είναι μια συνάρτηση του y: για y: $f_Y(y)>0$.

Αν $g(y) = E[X|Y=y]$ τότε $\underbrace{g(Y) = E[X|Y]}_{\text{είναι τμ.}}$

π.χ $(y^2+1) \xrightarrow{y \to Y} Y^2+1 = g(Y)$

Αντίστοιχα, ορίζεται η $h(X) = E[Y|X]$

Πρόταση: (Θεώρημα της διπλής μέσης τιμής ή τύπος της δεσμευμένης μέσης τιμής)

$$E(X) = E[\underbrace{E(X|Y)}_{\substack{\shortparallel\\ g(Y)}}]$$

Απόδειξη:

Θα γίνει για διακριτή (X,Y) (αντίστοιχα και για συνεχείς)

$$E(\underbrace{E[X|Y]}_{g(Y)}) \underset{LOTUS}{=} \sum_{y\in A_y} g(y)P(Y=y) = \sum_{y\in A_y} E(X|Y=y)P(Y=y) =$$

$$= \sum_y \left(\sum_x x\, P(X=x|Y=y)\right)P(Y=y) = \sum_y \left(\sum_x x \frac{P(X=x, Y=y)}{\cancel{P(Y=y)}}\right)\cancel{P(Y=y)}$$

Εναλλαγή αθροισμάτων

$$= \sum_x x\cdot \sum_y P(X=x, Y=y) = \sum_x x\cdot P(X=x) = E(X) \quad \blacksquare$$

③ Δεσμευμένη Διασπορά

Ορσ: Εστω (X,Y) 2-διαστατη τμ με σ.π/σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$.

Ορίζουμε $\forall\, y$: $f_Y(y)>0$ και $E[|X|\,|\,Y=y]<+\infty$

Τότε ορίζουμε, $Var[X|Y=y] = E\left[(X-E(X|Y=y))^2 \,\middle|\, Y=y\right]$

Πρόταση: (όπως και, απλή διασπορά, $Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$)

$Var(X|Y=y) = E(X^2|Y=y) - E^2(X|Y=y)$

(Ισχύει $\forall\, y$: $f_Y(y)>0$ και $E[|X|\,|\,Y=y]<+\infty$)

Παίρνοντας τ.μ.

$Var(X|Y) = E[X^2|Y] - E^2[X|Y]$: σχέση για τ.μ.

Πρόταση: (τύπος της δεσμευμένης διασποράς)

$Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var[E(X|Y)]$

Απόδειξη:

Θέτουμε $E[X|Y] = g(Y)$ (1)

$E[Var(X|Y)] = E[E(X^2|Y) - E^2(X|Y)] \overset{(1)}{=} E[E(X^2|Y)] - E(g^2(Y))$

$= E(X^2) - E(g^2(Y))$ (2)

$Var(E(X|Y)) \overset{(1)}{=} Var(g(Y)) = E(g^2(Y)) - E^2(\underset{E(X|Y)}{g(Y)}) =$

$= E(g^2(Y)) - E^2(X)$ (3)

$(2)+(3) \Rightarrow E(Var(X|Y)] + Var(E(X|Y)) = E(X^2) - E(g^2(Y)) + E(g^2(Y)) - E^2(X)$

$= Var(X).$

Παράδειγμα:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 12|x|y & , -1\le x\le 1 \ , \ 0\le y\le 1-|x| \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

i) $E(X|Y=y)=?$ άρα $E(X|Y)=?$

ii) $E(Y|X=x)=?$ άρα $E(Y|X)=?$

iii) $Var(X|Y=y)=?$ άρα $Var(X|Y)=?$

iv) $Var(Y|X=x)=?$ άρα $Var(Y|X)=?$

Επαληθεύστε τους τύπους της δεσμευμένης μέσης τιμής και δεσμευμένης διασποράς

$$E[E(X|Y)]=E(X)$$

$$E[E(Y|X)]=E(Y)$$

$$E[Var(X|Y)]+Var(E(X|Y))=Var(X)$$

↳ ανάλογα Y|X

Παράδειγμα:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}12|x|y & , -1\le x\le 1 \ , \ 0\le y\le 1-|x| \\ 0 & , \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

i) $E(X|Y=y)=?$ άρα $E(X|Y)=?$

ii) $E(Y|X=x)=?$ αρα $E(Y|X)=?$

iii) $Var(X|Y=y)=?$ αρα $Var(X|Y)=?$

iv) $Var(Y|X=x)=?$ αρα $Var(Y|X)=?$

Επαληθεύστε τους τύπους της δεσμευμένης μέσης τιμης και δεσμευμένης διασποράς

$E[E(X|Y)]=E(X)$

$E[E(Y|X)]=E(Y)$

$E[Var(X|Y)]+Var(E(X|Y))=Var(X)$

↳ ανάλογα $Y|X$

18/4/16

ΜΑΘΗΜΑ 26ο

① Συνέχεια Άσκησης.

i) $E(X|Y=y)=?$ $\quad f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{(1-y)^2} & , y-1\le x\le 1-y \\ 0 & , \text{διαφορετικά}\end{cases}$

$(0<y<1)$

Άρα $E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx=\underbrace{\int_{y-1}^{1-y} x\,\frac{|x|}{(1-y)^2}\,dx}_{\text{περιττή σε συμμετρ. διαστημα γύρω από 0.}}=0$

($[X|Y=y]$ έχει συμμετρική κατανομή)

$\forall\, y\in(0,1)$, βρήκαμε $E[X|Y=y]=0 \Rightarrow E[X|Y]=0$.

ii) $Var(X|Y=y)=?$

$Var(X|Y=y)=E(X^2|Y=y)-E^2(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{X|Y=y}})=E(X^2|Y=y)$

$E(X^2|Y=y)=\underbrace{\int_{y-1}^{1-y}\frac{x^2|x|}{(1-y)^2}}_{\text{άρτια σε συμμετρ. διάστημα γύρω απο το 0.}}=\frac{2}{(1-y)^2}\int_{0}^{1-y}x^3dx=$

$$= \frac{2}{(1-y)^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{1-y} = \frac{2}{(1-y)^2}\,\frac{(1-y)^4}{4} = \frac{(1-y)^2}{2}$$ (συνάρτηση του y)

$$\Rightarrow Var(X|Y) = \frac{(1-Y)^2}{2} \quad (= E(X^2|Y))$$

② Κατανομή αθροίσματος 2 τ.μ.

Έστω (X,Y) τ.δ. με σ.π/σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$.

Αν $Z = X+Y$, τότε η Z είναι διακριτή / α. συνεχής και η σ.π/σ.π.π δίνεται από:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \sum_x f_{X,Y}(x,z-x) = \sum_y f_{X,Y}(z-y,y) & \text{, αν } (X,Y) \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(z-y,y)\,dy & \text{αν } (X,Y) \text{ α. συνεχή} \end{cases}$$

~ Παρατήρηση: ~

Αν χρειαστεί, χρησιμοποιούμε δεσμευμένες σ.π ή σ.π.π (θυμίζει τον πολλαπλό νόμο των πιθανοτήτων)

$$f_Z(z) = \sum_x f_X(x)\, f_{Y|X}(z-x|x)$$

ή

$$\sum_y f_Y(y)\, f_{X|Y}(z-y|y)$$

Αντίστοιχα, $$f_Z(z) = \int_x f_X(x)\, f_{Y|X}(z-x|x)\,dx$$

$$f_Z(z) = \int_y f_Y(y)\, f_{X|Y}(z-y|y)\,dy$$

Ειδική Περίπτωση:

Αν $X \perp\!\!\!\perp Y$ τότε:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \sum_x f_X(x)\, f_Y(z-x) = \sum_y f_X(z-y)\, f_Y(y) & \text{, αν } (X,Y) \text{ διακριτή} \\ \int_x f_X(x)\, f_Y(z-x)\,dx = \int_y f_X(z-y)\, f_Y(y)\,dy & \text{αν } (X,Y) \text{ α. συνεχής} \end{cases}$$

③ Παραδείγματα με απόλυτα συνεχείς.

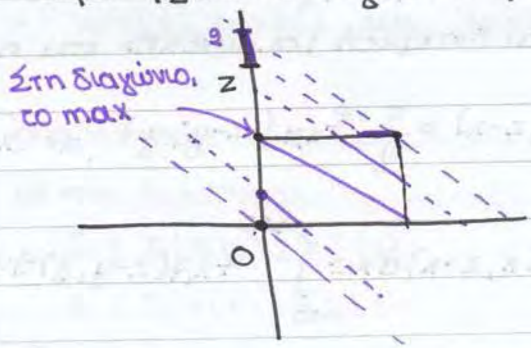
(i) Έστω $X, Y \sim Unif([0,1])$ με $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Αν $Z = X+Y$, να βρεθεί η σ.π.π $f_Z(z)$

Λύση:

Έχουμε $X \in [0,1]$ και $Y \in [0,1] \Rightarrow Z = X+Y \in [0,2]$

Άρα $f_Z(z) = 0$ για $z \notin [0,2]$



σταθεροποιώ το $z \in [0,2]$ και θέλω $x+y = z \Rightarrow y = z-x$

$\forall\, z \in [0,2]$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\,dx$$

ⵗ Για να καθορίσουμε τα άκρα ολοκλήρωσης, λύνουμε ταυτόχρονα 2 περιορισμούς

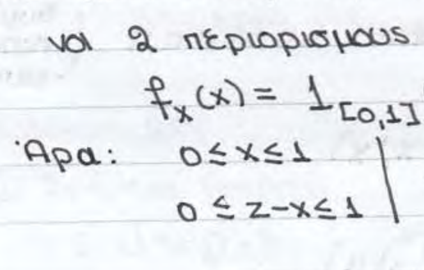
$$f_X(x) = 1_{[0,1]}(x), \quad f_Y(y) = 1_{[0,1]}(y)$$

Άρα: $\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z-x \le 1 \end{array}\right| \iff \left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ z-1 \le x \le z \end{array}\right| \iff$

$$\max(0, z-1) \le x \le \min\{1, z\}$$

Άρα $$f_Z(z) = \int_{\max(0,z-1)}^{\min(1,z)} 1\,dx = \min\{1,z\} - \max\{0, z-1\}$$

δηλ. $$f_Z(z) = \begin{cases} z &, \ 0 \le z \le 1 \\ 2-z &, \ 1 < z \le 2 \\ 0 &, \ \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



$\rightsquigarrow$ τριγωνική σ.π.π που αντιστοιχεί στο άθροισμα 2 ανεξ. $Unif([0,1])$

(ii) Έστω $X \sim G(a,\theta)$, $Y \sim G(\beta,\theta)$ και $X \perp\!\!\!\perp Y$.

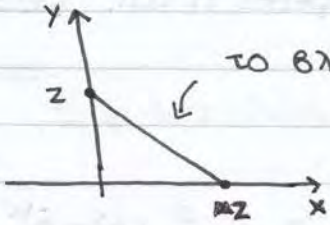
Αν $Z = X+Y$, να βρεθεί η σ.π.π της $f_Z(z)$.

Λύση:

$X>0$ και $Y>0 \Rightarrow Z = X+Y>0$

Αν $z \in (-\infty, 0]$, τότε $f_Z(z) = 0$.

• Αν $z>0$



το βλέπω γραφικά

Άρα το

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_0^z \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} \cdot \frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} \cdot e^{-\theta(z-x)} dx$$

(Εναλλακτικά $x \geq 0$ και $z-x \geq 0$)

για τα άκρα ολοκλήρωσης

$$= \frac{\theta^{a+\beta} \cdot e^{-\theta z}}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} \int_0^z x^{a-1} (z-x)^{\beta-1} dx \overset{u=\frac{x}{z}}{=\!=} \frac{\theta^{a+\beta} e^{-\theta z}}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (uz)^{a-1} (z-uz)^{\beta-1} z \, du$$

$$= \underbrace{\frac{\theta^{a+\beta}}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)}}_{\text{σταθερά}} \underbrace{z^{a+\beta-1} e^{-\theta z}}_{g(z)} \underbrace{\int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{\beta-1} du}_{\text{σταθερά } (=B(a,\beta) \text{ συναρτ.})} = c\, g(z),$$

όπου $g(z)$ εμφανίζεται στη σ.π.π της $G(a+\beta,\theta)$ δηλαδή

$$f_{G(a+\beta,\theta)}(z) = \frac{\theta^{a+\beta-1}}{\Gamma(a+\beta)} \underbrace{z^{a+\beta-1} e^{-\theta z}}_{g(z)}, \quad z \geq 0$$

$$= c' g(z)$$

(όμως και οι 2 είναι σ.π.π)

άρα $c = c'$ και τελικά $Z \sim G(a+\beta, \theta)$ ($f_Z(z) \propto$ πυκνότητα Gamma)

Παρατήρηση:

Εξισώνοντας τις σταθερές $c = c'$, προκύπτει ότι

$$\int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{\beta-1} du \overset{\text{ορσ}}{=} B(a,\beta) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta)}$$

που είναι η σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις Βήτα και Γάμμα.

→

Η συνάρτηση Βήτα μας επιτρέπει να ορίσουμε την κατανομή Βήτα και $X \sim B(a,\beta)$ (κατανομή Βήτα), αν $f_X(x) = \frac{1}{B(a,\beta)} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}$, $0<x<1$, $a>0$, $\beta>0$.

④ Παράδειγμα με διακριτές

Έστω $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$ και $X \perp\!\!\!\perp Y$. (κατανομές Poisson)
Αν $Z = X+Y$, τότε να βρεθεί η σ.π. $f_Z(z)$
(Θ.δ.ο $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$)

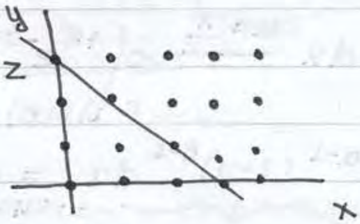
Λύση

$$f_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad x=0,1,2,\dots \qquad f_Y(y) = e^{-\mu}\frac{\mu^y}{y!}, \quad y=0,1,2,\dots$$

$X \in \mathbb{N}$, $Y \in \mathbb{N} \Rightarrow Z = X+Y \in \mathbb{N}$ (με πιθαν. 1)

Άρα, για $z \in \mathbb{N}$, $f_Z(z) = P(Z=z) = \sum_{x=0}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)$

Έχουμε, $x \geq 0$ και $z-x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq z$



Άρα, $f_Z(z) = \sum_{x=0}^{z} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\mu}\frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!} =$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\mu^z}{z!} \sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!(z-x)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\mu^z}{z!} \sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x 1^{z-x} =$$

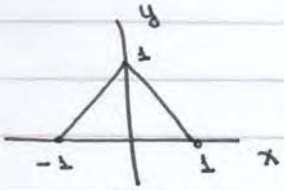
$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\mu^z}{z!}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)^z = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}\frac{\mu^z}{\mu^z}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!} \quad z=0,1,2,\dots$$

που είναι η σ.π της $P(\lambda+\mu)$.

⑤ Παράδειγμα με X και Y όχι ανεξάρτητες

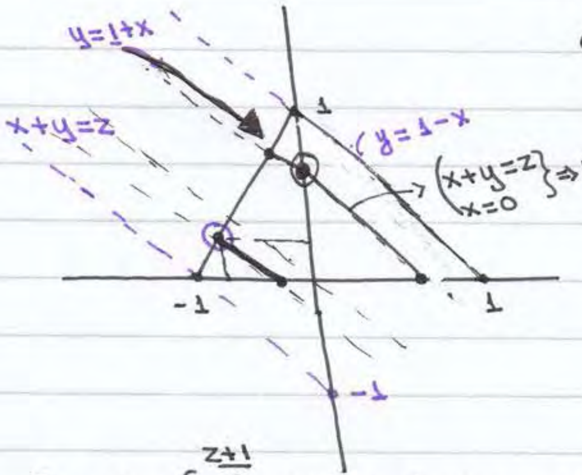
Έστω $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12|x|y \ , & |x|\le 1 \ , \ 0 \le y \le 1-|x| \\ 0 \ , & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



Να βρεθεί η σ.π.π της $Z = X+Y$

Λύση:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(z-y, y)\,dy$$



$\left.\begin{matrix} x+y=z \\ x=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=z$

o Έχουμε για $-1 \le z \le 0$, έχουμε αναζητώ σημείο τομής της:

$$\begin{cases} y = 1+x \\ x+y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ x = z-y \end{cases}$$

$$\Rightarrow y-1 = z-y \Rightarrow 2y = 1+z$$

$$y = \frac{1+z}{2}$$

Άρα, $f_Z(z) = \int_0^{\frac{z+1}{2}} 12|z-y|y\,dy = \int_0^{\frac{z+1}{2}} 12(y-z)y\,dy$

o Για $0 \le z \le 1$ τότε: $\quad f_Z(z) = \int_0^{z} 12(z-y)y\,dy + \int_z^{\frac{1+z}{2}} 12(y-z)y\,dy$

Επαληθεύστε ότι:

$$f_Z(z) = \frac{(z+1)^2(1-2z)}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(z) + 4z^3\mathbb{1}_{[0,1]}(z).$$

ΜΑΘΗΜΑ 27ο

① Γνωστές κατανομές αθροισμάτων ανεξάρτητων τ.μ.

· Αν X και Y είναι ανεξάρτητες τμ. τότε:

$X \sim Be(p)$, $Y \sim Be(p) \Rightarrow X+Y \sim Bin(2,p)$

Γενίκευση: $X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(m,p) \Rightarrow X+Y \sim Bin(n+m,p)$

$X \sim Geo(p)$, $Y \sim Geo(p) \Rightarrow X+Y \sim NegBin(2,p)$

$X \sim NegBin(n,p)$, $Y \sim NegBin(m,p) \Rightarrow X+Y \sim NegBin(m+n,p)$

$X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu) \Rightarrow X+Y \sim Poison(\lambda+\mu)$

$X \sim Exp(\theta)$, $Y \sim Exp(\theta) \Rightarrow X+Y \sim G(2,\theta)$

$X \sim G(a,\theta)$, $Y \sim G(\beta,\theta) \Rightarrow X+Y \sim G(a+\beta,\theta)$

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Υπενθύμιση:

$Bin(1,p) \equiv Be(p)$, $NegBin(1,p) \equiv Geo(p)$

$G(1,\theta) \equiv Erlang(1,\theta) \equiv Exp(\theta)$

② Πολυδιάστατες τμ ($n \geq 2$)

Ορσ: Έστω (Ω, A, P) χ.π. Μια συνάρτηση $(X_1, X_2, \dots X_n): \Omega \to \mathbb{R}^n$ λέγε- -ται n-διάστατη τμ. ή τ.δ διάστασης n αν:

$$\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots X_n \leq x_n\} \overset{ορσ}{=\!=} \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots X_n(\omega) \leq x_n\} \in A$$

$\forall x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}$.

Όπως, για $n=2$, έτσι και γενικότερα ορίζουμε

$$F_{X_1, X_2, \dots X_n}(x_1, x_2, \dots x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots X_n \leq x_n)$$

Την λέμε από κοινού σ.κ. των $X_1, X_2, \dots X_n$

Ανάλογα, έχουμε και τη σ.π / σ.π.π, αν το τ.δ $(X_1, X_2, \dots X_n)$ είναι διακριτή ή απόλυτα συνεχής n-διάστατης τμ και συμβολίζουμε $f_{X_1, X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots x_n)$.

Ορσ: Οι $X_1, X_2, \ldots X_n$ τμ είναι ανεξάρτητες $\overset{ορσ}{\Longleftrightarrow}$

$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots X_n \in A_n) = P(X_1 \in A)P(X_2 \in A) \ldots P(X_n \in A_n)$

$\forall A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Εχουμε παρόμοια κριτήρια ανεξαρτησίας

$X_1, X_2, \ldots X_n$ είναι ανεξάρτητες $\Leftrightarrow F_{X_1, X_2, \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots x_n) = F_{X_1}(x_1) \ldots F_{X_n}(x_n)$

$\forall x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow f_{X_1, X_2, \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2), \ldots f_{X_n}(x_n)$.

$\forall x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$. (με πιθ. 1)

③ Επιπλέον ιδιότητες της Μέσης Τιμής

Αν $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και (X, Y) είναι τ.δ. τότε (LOTUS)

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{x \\ (x,y) \in A}} \sum\limits_{y}' g(x,y) f_{X,Y}(x,y), & \text{αν } (X,Y) \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy, & \text{αν } (X,Y) \text{ α. συνεχής} \end{cases}$$

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

γενικ. $\to E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$

Γενικά, $E(XY) \neq E(X)E(Y)$

Όμως, όταν $X \perp\!\!\!\perp Y$ τότε $E(XY) = E(X)E(Y)$ (Δεν ισχύει το αντίστροφο).

Γενίκευση:

Γενικά, $E(X_1 X_2 \ldots X_n) \neq E(X_1)E(X_2) \ldots E(X_n)$.

Όμως αν, $X_1, X_2, \ldots X_n$ είναι ανεξάρτητες τότε:

$E(X_1 X_2 \ldots X_n) = E(X_1)E(X_2) \ldots E(X_n)$ (Δεν ισχύει το αντίστροφο)

Απόδειξη: (για $n=2$ και (X,Y) διακριτή)

$$E(XY) = \sum_x' \sum_y' \underbrace{xy}_{g(x,y)} f_{X,Y}(x,y) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=\!=\!=}$$

$$= \sum_x' \sum_y' xy\, f_X(x) f_Y(y) = \left(\sum x f_X(x)\right)\left(\sum y f_Y(y)\right)$$

$= E(X)E(Y)$ (Ανακαθιστώντας τα αθροίσματα με ολοκληρώματα έχουμε την απόδειξη για α. συνεχείς)

Συνέπειες για τη Διασπορά

Αν $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Γενίκευση:

Αν $X_1, X_2, \dots X_n$ ανεξ. τμ $\Rightarrow Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

Γενικά:

$Var(X+Y) \neq Var(X) + Var(Y)$

και $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \neq \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

Απόδειξη: (για $n=2$)

$$Var(X+Y) = E[(X+Y)^2] - E^2[X+Y] = E(X^2+Y^2+2XY) - [E(X)+E(Y)]^2$$

$$= \underbrace{E(X^2) - E^2(X)}_{Var(X)} + \underbrace{E(Y^2) - E^2(Y)}_{Var(Y)} + 2\big(E(XY) - E(X)E(Y)\big)$$

$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} E(X)E(Y)$, οπότε $E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

(4) Παράδειγμα Matching Problem

- n άτομα που βάζουν τα καπέλα τους στο κέντρο και διαλέγουν ένα στην τύχη.

Έστω X = # ατόμων που διαλέγουν το δικό τους καπέλο.

$E(X) = ?$

Λύση:

Μπορούμε να γράψουμε τη $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, όπου $X_i \in \{0,1\}$ που μας δείχνει αν το i-άτομο βρήκε το καπέλο του,

δηλ. $X_i = 1_{A_i}$, όπου A_i = "το i-άτομο να επιλέξει το καπέλο του")

Έτσι, $X = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$. Εδώ οι $X_i = 1_{A_i}$ $i=1,2,\dots,n$ δεν είναι ανεξάρτητες.

Όμως, οι X_i είναι ισόνομες $Be\left(\frac{1}{n}\right)$

Αναζητούμε, $P(X_i = 1) = P(A_i)$ $i=1,2,\dots,n$

Κάνουμε αντιστοίχηση, καθε καπέλου σε ένα άτομο και έχουμε $\Omega = \{$μεταθέσεις των $\{1,2,\dots,n\}\}$,

όπου i είναι το καπέλο που αντιστοιχεί στο i-άτομο.

$P(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ δηλ $X \sim Ber(\frac{1}{n})$

Αν $\omega \in A_i \Rightarrow (\underset{1^η}{\overset{\text{στοιχ (εκτός από } i)}{\cdot}} \underset{2^η}{\overset{\text{στοιχ}}{\cdot}} \cdots \underset{i^η}{?} \underbrace{\overset{\text{στοιχ}}{\cdot}\ \overset{\text{στοιχ}}{\cdot}\ \cdot}_{i+1,\dots n})$ (όμως χωρίς επανάθεση)

$\Rightarrow |A_i| = (n-1)!$ που και όλες οι μεταθέσεις των $n-1$ στοιχείων.

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} E(1_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Παρατήρηση:

Εδω, $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ δεν υπολογίζεται ως $\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$, αφού οι X_i, $1 \le i \le n$, δεν είναι ανεξ. τμ.

Βρείτε τη διάσπορα!

⑤ Παράδειγμα Coupon Collector Problem

Υπάρχουν n-τύποι κουπονιών. Ενας πελάτης αγοράζει προϊόντα και κάθε προϊόν φέρει 1 κουπόνι τύπου i με πιθ $\frac{1}{n}$.

Έστω X = # προϊόντων που αγοράζει συνολικά μέχρι να μαζέψει όλα τα κουπόνια

$E(X) = ;$

Λύση:

Έστω X_i = # προϊόντων που αγοράζει συνολικά μεταξύ του $(i-1)$ και i-διαφορετικού κουπονιου.

Τότε $\sum^{n} X_i = X$, και $X_1 = 1$ (αφού στην αρχή δεν έχω κανένα)

X_2 = # δοκιμών σε ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli μέχρι την $1^η$ επιτυχία

$\sim Geo\left(\frac{n-1}{n}\right)$ $\left(p_2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$.

X_3 = # ανεξαρτητων δοκιμών Bernoulli μέχρι $1^η$ επιτυχία

με πιθαν επιτυχ $p_3 = \frac{n-2}{n}$ $\sim Geo\left(p_3 = \left(\frac{n-2}{n}\right)\right)$

$\vdots$

X_i = # ανεξάρτητων δοκιμων Bernoulli μέχρι την $1^η$ επιτυχία

με πιθαν. επιτυχ. $p_i = \frac{n-i+1}{n}$ $\sim Geo\left(p_i = \frac{n-i+1}{n}\right)$

(Εδω ταυτίζουμε τη $X_1 = 1$ ως $Geo(1)$). $1 \le i \le n$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $X_i \sim Geo\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$ (Έχουμε ανεξ. τμ αλλά όχι ισόνομες)

Άρα: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} =$

αφού $E(Geo(p)) = \frac{1}{p}$

$= n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cong n \log n$ (για μεγάλο n)

Υπολογίστε και τη διασπορά $Var(X)$.

⑥ Εφαρμογές - Εύρεση μέσης τιμής και διασποράς γνωστών κατανομών

- Έστω $X \sim Bin(n,p)$ (# επιτυχιών σε n-δοκιμές Bernoulli)

Τότε $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ με $X_1, X_2, \dots X_n$ ανεξ. $Be(p)$ [ισχύει και το αντίστρ.]

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \underset{X_i \sim Be(p)}{=} \sum_{i=1}^{n} p = np$$

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

- Έστω $X \sim NegBin(n,p)$ (# δοκιμών μέχρι την $n^{οστή}$ επιτυχ.)

Τότε $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ με $X_1, X_2, \dots X_n$ ανεξαρτ. $Geo(p)$ [Ισχύει και το αντίστρ.]

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{\frac{1}{p}} = \frac{n}{p}$$

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{+ανεξ}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-p}{p^2}$$

$$= \frac{n(1-p)}{p^2}$$

(Δοκιμάστε και ~~την~~ με $Neg^*Bin(n,p)$ που μετράει # αποτυχιών μέχρι n-οστή επιτυχία.)

· Έστω $X \sim Erlang(n,\theta) = G(n,\theta)$

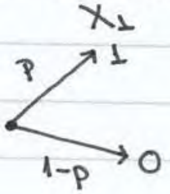
Τότε $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, όπου $X_1, X_2, \dots X_n$ ανεξ. $Exp(\theta)$ [Ισχύει και το αντίστροφο]

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{n}{\theta}$$

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{+\text{ ανεξ}}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n \cdot \frac{1}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}$$

Μέση Τιμή και Διασπορά Γεωμετρικής (ανάλυση 1ου βήματος)

Αν $N \sim Geo(p)$, τότε εκφράζει # δοκιμών μέχρι 1η επιτυχία



$$\left.\begin{array}{l} [N \mid X_1 = 1] = 1 \\ [N \mid X_1 = 0] \overset{(d)}{=} 1 + N' \end{array}\right\} (1) \quad \text{όπου } N' \sim Geo(p).$$

α' τρόπος: θυμίζει (Θ.Ο.Π)

$$E(N) = P(X_1=0)\,E(N \mid X_1=0) + P(X_1=1)\,E(N \mid X_1=1)$$

Εφαρμογή του τύπου $\left[E(N) = E[\underbrace{E(N \mid X_1)}_{g(X_1)}] \right]$

$$\Rightarrow E(N) \overset{(1)}{=} (1-p)\cdot(1 + E(N')) + p \cdot 1 = (1-p)\left(1 + \frac{1}{p}\right) + p$$

$$= (1-p)\left(\frac{1+p}{p}\right) + p = \frac{(1-p)(1+p) + p^2}{p} = \frac{1}{p}$$

β' τρόπος:

$$(1) \Rightarrow E(N \mid X_1 = 1) = 1$$

$$E(N \mid X_1 = 0) = 1 + E(N') = 1 + \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow E(N \mid X_1) = 1 + \frac{1}{p}\cdot(1 - X_1)$$

Άρα, $E(N) = E[E(N \mid X_1)] = E\left(1 + \frac{1}{p}(1 - X_1)\right) = 1 + \frac{1}{p}(1 - \underbrace{E(X_1)}_{=p})$

$$= 1 + \frac{1}{p}(1-p) = \frac{p + (1-p)}{p} = \frac{1}{p}$$

ΜΑΘΗΜΑ 28ο ~Μεταπτυχιακός~

Άσκηση 1:

i) Αν X, Y τμ και $Y=c$ (με πιθ. 1) τότε $X \perp\!\!\!\perp Y$

ii) Αν $X = \begin{cases} c, & \text{με πιθαν. } p \\ -c, & \text{με πιθαν } 1-p \end{cases}$, $p \in [0,1]$ τότε $X^2 \perp\!\!\!\perp X$.

Λύση:

i) $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y) \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

$P(Y=c) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\omega : Y(\omega) \neq c) = 0$

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \begin{cases} 0, & y<c \\ 1, & y \geq c \end{cases}$

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$: $F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \overset{(*)}{=} \begin{cases} 0, & y<c \\ \mathbb{P}(X \leq x), & y \geq c \end{cases}$

$(*)_1$: $\{Y \leq y\} \subseteq \{Y < c\}$, για $y < c \Rightarrow P(Y \leq y) \leq P(Y<c) = 0 \Rightarrow P(X \leq x, Y \leq y) = 0$

$(*)_2$: $\{Y \leq y\} \supset \{Y = c\}$, για $y \geq c \Rightarrow P(Y \leq y) = 1 \Rightarrow P(X \leq x, Y \leq y) = 1$.

Έχουμε ότι $F_Y(y) = 1_{\{y \geq c\}} = 1_{[c,\infty)}(y)$

$F_{XY}(x,y) = 1_{\{y \geq c\}}$ $P(X \leq x) = F_Y(y) \cdot F_X(x)$

(ii) $X = \begin{cases} c & \text{με πιθ. } p \\ -c & \text{με πιθ } 1-p \end{cases} \Longrightarrow X^2 = c^2$ (με πιθ. 1) $\Longrightarrow$

από (i) $X^2 \perp\!\!\!\perp X$

Άσκηση 2:

Κάλπικο νόμισμα ρίχνεται (ανεξάρτητες) 3 φορές και έστω $p = \frac{2}{3}$ η πιθανότητα να έρθει κεφαλή σε κάποια ρίψη.

Έστω $X = \#$ κεφαλών στη 1η

$Y = \#$ κεφαλών στις 3 ρίψεις (συνολικά)

i) $f_{X,Y}(x,y)$ ii) $F_{X,Y}(x,y)$ iii) $f(x|y)$

iv) $f_{Y|X}(y|x)$ v) $E(Y|X=x)$ vi) $E[Y|X]$

Λύση:

i) $X \sim Ber\left(\frac{2}{3}\right)$, $Y \sim Bin\left(3, \frac{2}{3}\right)$ $\Rightarrow$ $Y = X + W$, όπου $W = \#$ κεφ. στην $2^η$ και $3^η$ ρίψη

X, Y δεν είναι ανεξάρτητες

Επίσης $W \sim Bin\left(2, \frac{2}{3}\right)$

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x, X+W=y) = \mathbb{P}(X=x, W=y-x) \overset{X \perp\!\!\!\perp W}{=} \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(W=y-x)$$

για $x \in \{0,1\}$ κ' $y \in \{0,1,2,3\}$

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$f_X(x)$
0	1/27	4/27	4/27	0	9/27
1	0	2/27	8/27	8/27	18/27
$f_Y(y)$	1/27	6/27	12/27	8/27	1

$\mathbb{P}((X,Y)=(0,1)) = \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(W=1) =$

$= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

$p_i = \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(1-\frac{2}{3}\right)^{1-i}$ $\quad i \in \{0,1\}$ με $\mathbb{P}(W=i) = \binom{2}{i}\left(\frac{2}{3}\right)^i\left(1-\frac{2}{3}\right)^{2-i}$

ii)
$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{για } x<0 \text{ ή } y<0 \\ \frac{1}{27}, & x \geq 0 \text{ κ' } 0 \leq y < 1 \\ \frac{5}{27}, & 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2 \\ \frac{7}{27}, & x \geq 1,\ 1 \leq y < 2 \\ \frac{9}{27}, & 0 \leq x < 1,\ 2 \leq y < 3 \\ \frac{19}{27}, & x \geq 1 \quad 2 \leq y < 3 \\ 1, & x \geq 1 \quad y \geq 3 \end{cases}$$

iii) Αν $f_Y(y) > 0$ τότε $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	1	2/3	1/3	0
1	0	1/3	2/3	1

κάθε στήλη αθροίζει στη μονάδα

$f_{X|Y}(0|1) = \dfrac{f_{X|Y}(0,1)}{f_Y(1)} = \dfrac{\frac{4}{27}}{\frac{6}{27}} = \frac{2}{3}.$

iv) Για την $f_{Y|X}(y|x)$

x\y	0	1	2	3
0	1/9	4/9	4/9	0
1	0	1/9	4/9	4/9

$\longrightarrow$ κάθε γραμμή αθροίζει στη μονάδα

v) $E[Y|X=x] = \sum_{y=0}^{3} y\, f_{Y|X}(y|x) = f_{Y|X}(1|x) + 2 f_{Y|X}(2|x) + 3 f_{Y|X}(3|x)$

$\equiv h(x)$

Για $x=0$ $\quad h(0) = \frac{4}{3}$

Για $x=1$ $\quad h(1) = \frac{7}{3}$

Για την $E[Y|X] = h(X)$ (με πιθ. 1)
$Y = X+W \quad Y|X=x = x+W$
$\Rightarrow$ $E(Y|X=x) = x + E[W] = x + \frac{4}{3}$
Άρα $E[Y|X] = X + \frac{4}{3}$ (με πιθ 1)

Άσκηση 3:

Έστω U αριθμός επιλ. ομοιόμορφα από το $(0,1)$. Αν $U=u$, ένας δεύτερος αριθμός Y, επιλ. ομοιόμορφα από το $(u,1)$. Να βρεθούν:
i) $E(Y)$, ii) $V(Y)$ (i) Η σ.π.π της Y.

Λύση:

$(Z=)\ Y|U=u \sim U(u,1)$

Αν $X \sim U(a,b)$ τότε

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{αν } x\in(a,b) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \frac{1}{b-a} 1_{\{a<x<b\}}$$

$E[X] = \frac{a-b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Οπότε $f_U(u) = \mathbb{1}_{\{0<u<1\}} \quad E(U) = \frac{1}{2}$

$f_{Y|U}(y|u) = \frac{1}{1-u} \mathbb{1}\{u<y<1\}$

$E[Y|U=u] := \frac{1+u}{2}$ (*)

(*) από τύπο της μέσης (δηλαδή) τιμής

$E[Y] = E[E[Y|U]]$

$E[Y|U] = \frac{1+U}{2}$ από (*)

άρα $E(Y) = E\left(\frac{1+U}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E(U) = \frac{3}{4}$

$$Var(Y) = Var[E(Y|U)] + E[Var[Y|U]] \overset{(**)}{=} \frac{1}{36} + \frac{1}{48}$$

• $Var[E(Y|U)] = Var\left[\frac{1+U}{2}\right] = \frac{1}{4} \underbrace{Var(U)}_{=\frac{1}{48}}$ $\quad Var(a)=0$

$Var(aX) = a^2 Var(X)$

(**)

• $Var(Y|U=u) = \frac{(1-u)^2}{12}$

$Y|U=u \sim U(u,1)$

οπότε,

$Var(Y|U) = \frac{(1-U)^2}{12}$ (με πιθ 1)

$E(U) = \frac{1}{2}$

$Var(U) = E(U^2) - E(U)^2$

$\frac{1}{12} = E(U^2) - \frac{1}{4}$.

$E(U^2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

$$E\left[\frac{(1-U)^2}{12}\right] = \frac{1}{12} E(1-2U+U^2) =$$

$$= \frac{1}{12}\left[\underbrace{1 - 2E(U) + E(U^2)}_{=\frac{1}{3}}\right] \overset{\text{πράξεις.}}{=} \frac{1}{36}$$

ii) Έστω $u, y \in \mathbb{R}$

$$f_{U,Y}(u,y) = f_{Y|U}(y|u) \times f_U(u) = \frac{1}{1-u} \mathbb{1}_{\{u<y<1\}} \mathbb{1}_{\{0<u<1\}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-u}, & \text{αν } u<y<1, \text{ και } 0<u<1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έχουμε ότι $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,Y}(u,y)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-u} \mathbb{1}_{\{0<y<1\}} \mathbb{1}_{\{0<u<1\}} du$

(*) Όμως, $u<y<1$ και $0<y<1$ $\quad 0<y<1 \iff 0<u<y$

$$\overset{(*)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-u} \underbrace{\mathbb{1}_{\{0<y<1\}}}_{\text{ανεξαρτ. του } u} \mathbb{1}_{\{0<u<y\}} du = \mathbb{1}_{\{0<y<1\}} \int_0^y \frac{1}{1-u} du$$

$$= \mathbb{1}_{\{0<y<1\}} \int_0^y -(\log(1-u))' du = \begin{cases} -\log(1-y), & \text{όταν } 0<y<1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

'Ασκηση 4:

Έστω $Z \sim N(0,1)$, $I \sim Ber(\frac{1}{2})$ και ορίζουμε

$$X = \begin{cases} Z, & I=1 \\ -Z, & I=0 \end{cases}$$

i) $E(X)$, $V[X]$ ii) $f_X(x)$

Λύση:

$$E[X] = E[E[X|I]] = \sum_{i=0}^{1} E(X|I=i)P(I=i)$$

Έχουμε ότι $X|I=1 \sim Z$

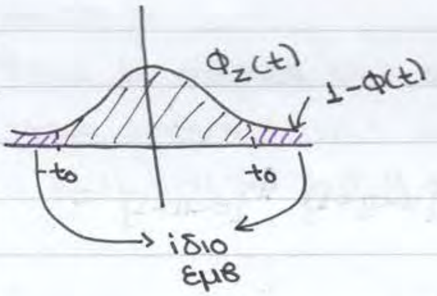
$X|I=0 \sim -Z$

Έστω $t \in \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{P}(-Z \leq t) = \mathbb{P}(Z \geq -t) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq -t) = 1 - \Phi(-t)$

$= \Phi(t)$

Οπότε $Z, -Z$ ίδια κατανομή $\left(Z \overset{d}{=} -Z \right)$

↳ διότι Z συμμετρική κατανομή



$$\Phi(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} f_Z(t)\,dt$$

$$\Phi(-t_0) = 1 - \Phi(t_0)$$

Άρα $E[X|I=0] = E[X|I=1] = 0$

$V[X|I=0] = V[X|I=1] = 1$

Οπότε $E(X) \overset{*}{=} \underbrace{P(I=0)}_{\frac{1}{2}} \cdot 0 + \underbrace{P(I=1)}_{\frac{1}{2}} \cdot 0 = 0$

$$V(X) = V[E(X|I)] + E[V(X|I)]$$

όμως, $V(X|I) = 1$ (με πιθ. 1) → λόγω, $V[X|I=0] = V[X|I=1] = 1$

Άρα, $V[X] = 0 + 1 = 1$

$* \; \sum_{i=0}^{1} E[X|I=i]P(I=i)$

πιο απλά

$E(X|I=0) = 0$, $E(X|I=1) = 0 \Rightarrow E(X|I) = 0$ (πιθ. 1).

$Var(X|I=0) = 1$, $Var(X|I=1) = 1 \Rightarrow Var(X|I) = 1$ (πιθ. 1) $\Big\} \Rightarrow$

$E(X) = E[\underbrace{E(X|I)}_{0}] = 0$, $Var(X) = E[\underbrace{Var(X|I)}_{1}] + Var[\underbrace{E(X|I)}_{0}] = 1$

ii) Έστω $t\in\mathbb{R}$: $F_Y(t)=\mathbb{P}(X\le t)=\sum_{i=0}^{1}\mathbb{P}(X\le t\mid I=i)\,\mathbb{P}(I=i)$

$=\mathbb{P}(I=0)\,\mathbb{P}(Z\le t)+\mathbb{P}(I=1)\,\mathbb{P}(-Z\le t)=\frac{1}{2}\Phi(t)+\frac{1}{2}\Phi(t)=\Phi(t)$

$(Z,-Z$ ίδια κατανομή$)$

Όποτε $X\sim N(0,1)$ και άρα $f_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ $t\in\mathbb{R}$.

ΜΑΘΗΜΑ 29ο 11/5/16

① Άθροισμα με τυχαίο πλήθος μεταβλητών

- Έστω X η τμ που εκφράζει την συνολική είσπραξη ενός καταστήματος σε 1 μέρα.

  $N=\#$ πελατών που γίνισαν αυτή τη μέρα

  $X_i=$ το ποσό που πλήρωσε ο i-πελάτης

  τότε, $X=\sum_{i=1}^{N}X_i$ (άθροισμα με τυχαίο πλήθος προσθετέων)

- X το πλήθος των τέκνων μιας οικογένειας

  N: πλήθος γεννήσεων

  $X_i=\#$ τέκνων στην i-γέννηση τότε $X=\sum_{i=1}^{N}X_i$

- Έστω X η τμ που εκφράζει το πλήθος των καρέτα-καρέτα που φτάνουν τελικά στη θάλασσα.

  $N=\#$ από τα χελωνάκια που γεννήθηκαν

  $X_i=$ η δείκτρια τμ που παίρνει 1, αν το i-χελώνακι έφτασε στη θάλασσα ή όχι, τότε

$$X=\sum_{i=1}^{N}X_i$$

Σύμβαση: αν $N=0$, τότε το άθροισμα είναι κενό, και θέτουμε $X=0$.

Ας υποθέσουμε ότι $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (n ← σταθερό). Τότε $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \xrightarrow{\text{αν } E(X_i)=E(X_1)} n \cdot E(X_1)$

Αν $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ τότε:

$$\cancel{\underbrace{E(X)}_{\text{σταθερά}} = \sum^{N} \underbrace{E(X)}_{\text{είναι τμ}}}$$ (γενικά δεν ισχύει)

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν $N \perp\!\!\!\perp \{X_n\}_{n \geq 1}$ και $E(X_i) = E(X_1)$, $\forall i \geq 1$ τότε:

$$\boxed{E(X) = E(N)E(X_1)}$$

Αν επιπλέον οι τμ $N, X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και $Var(X_i) = Var(X_1)$, $\forall i \geq 1$ τότε:

$$\boxed{Var(X) = E(N)Var(X_1) + E^2(X_1)Var(N)}$$

Απόδειξη:

$E(X) = E[E(X|N)]$

$E(X|N=n) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i | N=n\right) \xrightarrow{N \perp\!\!\!\perp \{X_n\}_{n\geq 1}}$ (n ← σταθερό)

$= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \xrightarrow{E(X_i)=E(X_1)} n \cdot E(X_1)$

(αυτή η έκφραση ισχύει και για $n=0$).

$\Rightarrow E(X|N) = N \cdot E(X_1) \Rightarrow E(X) = E[E(X|N)] = E(N \underbrace{E(X_1)}_{\text{σταθερό}})$

$= E(N)E(X_1)$

Έχουμε, $Var(X) = E(Var(X|N)) + Var(E(X|N))$

$Var(X|N=n) = Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i | N=n\right) =$

$\xrightarrow{N \perp\!\!\!\perp \{X_n\}_{n\geq 1}} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \xrightarrow{\{X_i\} \text{ ανεξ. τμ}} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \xrightarrow{Var(X_i)=Var(X_1)}$

$= n \cdot Var(X_1)$ (ισχύει και για $n=0$)

Άρα $Var(X|N) = N \cdot Var(X_1)$

Άρα: Έχουμε $Var(X) = E(Var(X|N)) + Var(E(X|N)) =$

$$= E(N\underbrace{Var(X_1)}_{\text{σταθερό}}) + Var(N\underbrace{E(X_1)}_{\text{σταθερό}}) = E(N)Var(X_1) + E^2(X_1)Var(N)$$

Άσκηση: (Παλιό θέμα, λίγο τροποποιημένο)

Το πλήθος των αυγών που γεννάει ένα έντομο ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda>0$. Κάθε ένα από τα αυγά επιβιώνει (ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα) με πιθανότητα p $(0<p<1)$

(i) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή και ποια η διασπορά του αριθμού των αυγών που επιβιώνουν;

(ii) Ποια είναι η πιθανότητα να επιβιώσουν ακριβώς s-αυγά; $(s=0,1,\dots)$

Λύση:

Έστω X = # αυγών που επιβιώνουν

Θέτουμε N = # αυγών που γεννάει το έντομο

A_i = "να επιβιώσει το i-αυγό"

$X_i = 1_{A_i} \sim Be(p)$, $p = P(A_i)$ (πιθανότητα επιβίωσης)

Από υπόθεση, $\{A_i\}_{i\geq 1}$ είναι ανεξάρτητα ακολ. ενδεχομένων.

$\Rightarrow \{X_i\}_{i\geq 1}$ είναι ανεξαρτ. ακολ. τμ $(Be(p))$

Άρα: (i) $X = \sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow{\text{Πρόταση}} E(X) = \underbrace{E(N)}_{\lambda}\underbrace{E(X_1)}_{p} = p\cdot\lambda$

$Var(X) = E(N)Var(X_1) + E^2(X_1)Var(N) = \lambda p(1-p) + p^2(\lambda) = p\lambda$

(Μπορώ να χρησιμοποιώ τους τύπους κατ' ευθείαν, αν δεν τους θυμάμαι, μπορώ να τον βρω μέσω της απόδειξης)

ii) $P(X=s) = ?$, $s=0,1,2,\dots$

Εφαρμόζουμε ΘΟΠ

$P(X=s) = \sum_{n=s}^{\infty} P(N=n)P(X=s|N=n)$, διότι για να επιβιώσουν s πρέπει να έχουν γεννηθεί τουλάχιστον s.

→

Όμως, $N \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow P(N=n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ (1) $n=0,1,2,\dots$

$[X|N=n] = [\sum_{i=1}^{n} x_i | N=n] \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \sim Bin(n,p)$, αφού οι $\{x_i\}_{i\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες $Be(p)$.

$$P(X=s|N=n) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} \quad (2), \; s=0,1,2,\dots,n$$

• Για $n=0$, ισχύει η έκφραση, αφού $P(X=0)=1=\binom{0}{0}p^0(1-p)^0$

Απο (1) και (2)

$$P(X=s) = \sum_{n=s}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s} =$$

$$= \sum_{n=s}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{\cancel{n!}}\frac{\cancel{n!}}{s!(n-s)!}p^s(1-p)^{n-s} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^s}{s!}\sum_{n=s}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{n-s}}{(n-s)!}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^s}{s!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \qquad \underline{e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^s}{s!}e^{\lambda(1-p)} = e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^s}{s!}$$

$$\Rightarrow X \sim \mathcal{P}(p\lambda)$$

② Συνδιακύμανση 2 τ.μ.

- Μέτρο μεταβλητότητας της κατανομής μιας τ.μ.

 ↳ $Var(X) = E[(X-\mu_x)^2]$, $\mu_x = E(X)$

 διακύμανσης

- Μέτρο συμμεταβλητότητας των κατανομών 2 τμ (συνδιακύμανσης)

 ↳ $Cov(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$ γενικεύει τη διασπορά μιας τμ ($Cov(X,X) = Var(X)$)

Ορισμοί:

διαισθητικά

• Αν $Cov(X,Y)>0$, τότε οι X,Y λέγονται θετικά συσχετισμένες $\begin{pmatrix} X\uparrow \Leftrightarrow Y\uparrow \\ X\downarrow \Leftrightarrow Y\downarrow \end{pmatrix}$

• Αν $Cov(X,Y)<0$, τότε οι X,Y λέγονται αρνητικά συσχετισμένες $\begin{pmatrix} X\uparrow \Leftrightarrow Y\downarrow \\ X\downarrow \Leftrightarrow Y\uparrow \end{pmatrix}$

• Αν $Cov(X,Y)=0$, τότε λέμε ότι οι X και Y είναι ασυσχέτιστες.

Ιδιότητες:

1) $Cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)$

2) Αν X και Y είναι ανεξάρτητες τότε είναι και ασυσχέτιστες
(ανεξάρτητες $\Rightarrow$ ασυσχέτιστες) $(Cov(X,Y)=0)$

• Δεν ισχύει το αντίστροφο!

$\Downarrow$

X, Y ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ X, Y ανεξάρτητες (ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ ανεξαρτ.)

3) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$ (συμμετρικότητα)

4) $Cov(aX+b, cY+d) = a \cdot c \; Cov(X,Y)$

5) $Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, Y_j)$

} τις ιδιότητες εσωτερ. γινομ.

Συνέπειες για τη Διασπορά:

• $Var(X) = Cov(X,X)$

• $X \perp\!\!\!\perp X \Rightarrow X=c$ με πιθ 1 (δηλ. εκφυλισμένες τ.μ.)
(προφανώς, ισχύει και το αντίστροφο)

• $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

• $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} Cov(X_i, X_j)$

Ειδικότερα, $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

Απόδειξη:

$$Var(X+Y) = Cov(X+Y, X+Y) = Cov(X,X) + Cov(X,Y) + Cov(Y,X) + Cov(Y,Y)$$
$$= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

■

• Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τμ

$$Var(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

Απόδειξη:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} Cov(X_i, X_j)$$

Όμως, για $i \neq j$, X_j και X_i από υποθ. ανεξαρτ. $\Rightarrow$ ασυσχετ.

$$\Rightarrow Cov(X_i, X_j) = 0 \Rightarrow Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i). \blacksquare$$

• Ανισότητα Cauchy-Schwarz για τμ-

Ισχύει $|E(XY)| \leq E(X^2)^{1/2} E(Y^2)^{1/2}$

[Ειδική περίπτωση: $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$]

$\hookrightarrow \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}$ (όταν ορίζεται.) $E(XY)$

Απόδειξη:

$$g(\lambda) = E(\lambda X + Y)^2 \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g(\lambda) = E(\lambda^2 X^2 + 2XY\lambda + Y^2) = E(X^2)\lambda^2 + 2E(XY)\lambda + E(Y^2)$$

Πρέπει $\Delta = \cancel{4}E^2(XY) - \cancel{4}E(X^2)E(Y^2) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2)$$

$$|E(XY)| \leq E(X^2)^{1/2} E(Y^2)^{1/2} \quad \bullet$$

Πόρισμα:

$$|Cov(X,Y)| \leq (Var(X))^{1/2} (Var(Y))^{1/2}$$

Απόδειξη:

Στην Cauchy-Schwarz, θέτουμε $X \to X - \mu_X$, $Y \to Y - \mu_Y$ και προκύπτει άμεσα.

Κάποιες αποδείξεις:

• $X \perp\!\!\!\perp X \Rightarrow X = c$ με πιθ. 1

Έχουμε, $X \perp\!\!\!\perp X \underset{\text{ανεξ}\to\text{ασυσχ}}{\Longrightarrow} Cov(X,X) = 0 \Rightarrow Var(X) = 0 \Rightarrow X = c$ με πιθ 1

• ανεξάρτητες → ασυσχέτιστες

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=\!=\!=} E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

• Αντιπαράδειγμα για ασυσχέτιστες → ανεξάρτητες

Έστω X με συμμετρική κατανομή ($X \overset{d}{=} -X$, $\underbrace{f_X(x) = f_X(-x)}_{\text{άρτια συνάρτηση}}$)

Θα έχουμε $E(X^k) = 0$, για $k = 1, 3, 5, \ldots$ (όταν υπάρχουν)

π.χ. $E(X^3) \overset{\text{αν } X \text{ έχει σ.π.π}}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^3 f_X(x)}_{\text{περιττή συνάρτηση}} dx = 0$ σε συμμ. διάστημα γύρω από 0. (εφ' όσον υπάρχει)

Παίρνουμε λοιπόν X και X^2. Έχουμε:

$$Cov(X,X^2) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{E(X^3)} - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{E(X)}E(X^2)=0$$

Άρα, η X και X^2 είναι ασυσχέτιστες τμ

Γενικά, η X και η X^2 δεν είναι ανεξάρτητες τμ. (όμως θέλει απόδειξη γιατί ∃ αντιπαράδειγμα)

π.χ. $X \sim N(0,1)$

Αν $X \perp\!\!\!\perp X^2 \overset{*}{\Rightarrow} X^2 \perp\!\!\!\perp X^2 \Rightarrow X^2 = c$ (με πιθ. 1) άτοπο, διότι η X^2 δεν είναι εκφυλ. τμ.

[*: Αν $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$ για οποία g και h (ντετερμινιστικές συναρτήσεις)]

13/5/16

ΜΑΘΗΜΑ 30ο

① Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης.

Ορσ: Έστω 2 τμ X και Y με $Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y}$

$\sqrt{Var(X)} = \sigma_X > 0$, $\sqrt{Var(Y)} = \sigma_Y > 0$, ορίζουμε ως συντελεστή γραμμικής συσχέτισης (σ.γ.σ) $\rho(X,Y)$ των X και Y

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

(ορίζεται για μη-εκφυλισμένες τμ)

Παρατηρήσεις:

1) Όπως θα δούμε και παρακάτω, ο σ.γ.σ $\rho(X,Y)$ είναι ένα μέτρο γραμμικής εξάρτησης των X και Y.

2) $Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$

$$\Downarrow$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = E\left[\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \cdot \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right]$$

$$= E(Z_X \cdot Z_Y) = Cov(Z_X, Z_Y) = \rho(Z_X, Z_Y)$$

(μέση τιμή του γινομένου των αντίστοιχων τυποποιημένων των X και Y)

(αν οι X και Y είναι κεντροποιημένες τότε: $E(XY) = Cov(X,Y)$

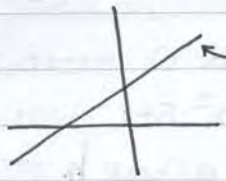
αν οι X και Y είναι τυποποιημένες τότε: $E(XY) = Cov(X,Y) = \rho(X,Y)$)

Ιδιότητες

1) $\rho(aX, bY) = \begin{cases} \rho(X,Y), & \text{αν } ab>0 \\ -\rho(X,Y), & \text{αν } ab<0 \end{cases}$

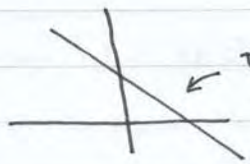
2). $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$ ή $|\rho(X,Y)| \le 1$

- $\rho(X,Y)=0 \iff Cov(X,Y)=0$ (οι X και Y είναι ασυσχέτιστες)
- $\rho(X,Y)=1 \iff Y=aX+b$, $a>0$ με πιθαν. 1



το στήριγμα της (X,Y) βρίσκεται πάνω σε αυτή την ανοδική ευθεία

- $\rho(X,Y)=-1 \iff Y=aX+b$, $a<0$, με πιθαν. 1



το στήριγμα της (X,Y) βρίσκεται σε αυτή την καθοδική ευθεία.

3) $\rho(X+Y, Z) \overset{\text{γενικά}}{\neq} \rho(X,Z)+\rho(Y,Z)$

Σε αντίθεση με $Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

Αποδείξεις:

1) $$\rho(aX, bY) = \frac{Cov(aX,bY)}{\sqrt{Var(aX)}\sqrt{Var(bY)}} = \frac{ab\,Cov(X,Y)}{\sqrt{a^2 Var(X)}\sqrt{b^2 Var(Y)}} =$$

$$= \frac{ab}{|ab|}\,\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var X}\sqrt{Var Y}} = \begin{cases} \rho(X,Y), & ab>0 \\ -\rho(X,Y), & ab<0 \end{cases}$$

2) α' απόδειξη:

$$|Cov(X,Y)| \le \sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)} \Rightarrow \left|\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}\right| \le 1$$

$\Rightarrow \rho(X,Y) \le 1$

β' απόδειξη:

$g(\lambda) = Var(\lambda Z_X + Z_Y) \geq 0$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

$g(\lambda) = Var(\lambda Z_X) + Var(Z_Y) + 2\,Cov(\lambda Z_X, Z_Y) =$

$= \lambda^2 \underbrace{Var(Z_X)}_{=1} + 2\lambda \underbrace{Cov(Z_X, Z_Y)}_{=\rho(X,Y)} + \underbrace{Var(Z_Y)}_{=1}$

$\Rightarrow g(\lambda) = \lambda^2 + 2\rho(X,Y)\lambda + 1 \geq 0, \ \lambda \in \mathbb{R}$

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4\rho^2(X,Y) - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \rho^2(X,Y) \leq 1 \Leftrightarrow |\rho(X,Y)| \leq 1$

• $\rho(X,Y) = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b, \ a > 0$ (με πιθ. 1)

$(\Rightarrow)$ $g(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \Rightarrow \lambda = -1$ είναι ρίζα του $g(\lambda)$

Όμως, $g(\lambda) = Var(\lambda Z_X + Z_Y) \Rightarrow Var(-Z_X + Z_Y) = 0$

$\Rightarrow -Z_X + Z_Y = c$ (με πιθ. 1) ή $Z_X = Z_Y + c$ (με πιθαν. 1)

$$\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{c} \quad (\text{διότι, } E(Z_X) = E(Z_Y) = 0)$$

$$\Rightarrow X = \underbrace{\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}}_{a>0} Y + b \ (\text{με πιθ. } 1)$$

$(\Leftarrow)$ Αν $Y = aX + b$, τότε $\rho(X,Y) = \rho(X, aX+b) \overset{(1)}{=} \rho(X,X)$ (αφού $a>0$) $= 1$

• $\rho(X,Y) = -1 \Leftrightarrow Y = aX + b, \ a < 0$ (με πιθ. 1)

$(\Rightarrow)$ $g(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda = 1$ ρίζα του $g(\lambda)$

$\Rightarrow Var(Z_X + Z_Y) = 0 \Rightarrow Z_X + Z_Y = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{c}$ με πιθ 1 (ίσο μέση τιμή)

$$\hookrightarrow \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = -\frac{Y - \mu_X}{\sigma_Y}$$

$$\Rightarrow X = -\underbrace{\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}}_{a<0} Y + b \quad (\text{με πιθ. } 1)$$

$(\Leftarrow)$ Αν $Y = aX + b, \ a < 0$, τότε

$\rho(X,Y) = \rho(X, aX+b) = -1$, διότι $a < 0$

$$\rho(aX+b, Y_0) = \begin{cases} \rho(X,Y), & ab > 0 \\ -\rho(X,Y), & ab < 0 \end{cases}$$

<u>Άσκηση:</u>

Αν 2 τμ X και Y ανεξάρτητες ν.δ.ο $Cov(X^2Y, Y) = E(X^2)Var(Y)$.

Λύση:

$Cov(X^2Y, Y) = E(X^2Y \cdot Y) - E(X^2Y)E(Y)$

Αν $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$ (όπου $X \perp\!\!\!\perp Y$ και $E(XY) = E(X)E(Y)$

$\rightarrow$

Άρα $\underset{\overline{\overline{X^2 \perp\!\!\!\perp Y}}}{X^2 \perp\!\!\!\perp Y^2}$ $E(X^2)E(Y^2)-E(X^2)E(Y)E(Y)=E(X^2)\left(E(Y^2)-E^2(Y)\right)$
$= E(X^2)Var(Y)$ ■

② Γεννήτριες Συναρτήσεις.

Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι τυπικές δυναμοσειρές (αλγεβρικά αντικείμενα) που αντιστοιχίζονται σε ακολουθίες πραγματικών αριθμών (εδώ $a_n \in \mathbb{R}$)
Γενικεύουν τα πολυώνυμα (από πεπερασμένα αθροίσματα → άπειρες σειρές)
~ Δύο σημαντικές κατηγορίες γεννητριών συναρτήσεων

(α) Συνήθεις Γεννήτριες Συναρτήσεις

$$G(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \longleftrightarrow (a_0, a_1, \dots)$$

Οι συντελεστές της δυναμοσειράς μας πληροφορούν για τις τιμές της ακολουθίας

(β) Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις.

$$EG(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

③ Πιθανογεννήτρια μιας τ.μ.

Έστω X διακριτή τμ με τιμές στο $\mathbb{N}$.
Η πιθανογεννήτρια της τμ X, ορίζεται: $P_X(z)=E(z^X)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)z^n$
(συγκλίνει για $|z|\leq 1$)

Παρατήρηση:
Η πιθανογεννήτρια της τμ X είναι η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\left(\underset{f_X(n)}{\underset{\parallel}{P(X=n)}}\right)_{n\geq 0}$

Ιδιότητες:

1) $P(X=n) = \dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}$ $\quad n=0,1,2,\dots$

Ειδικότερα, $P(X=0)=P_X(0)$, $P(X=1)=P_X'(0)$, ...

2) Κάθε διακριτή τμ X με τιμές στο $\mathbb{N}$ έχει πιθανογεννήτρια

και $X \overset{d}{=} Y \iff P_X(z)=P_Y(z)$

Άρα, η $P_X(z)$ χαρακτηρίζει την κατανομή της X.

3) $E[(X)_n] = E(X(X-1)\dots(X-n+1)] = P_X^{(n)}(1)$, $n\geq 0$

Ειδικά, $E(X)=P_X'(1)$ εφόσον υπάρχουν.

$Var(X) = P_X''(1) + P_X'(1) - (P_X'(1))^2$

4) Αν $X_1, X_2, \dots X_n$ είναι ανεξάρτητες τμ. $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\Rightarrow P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \dots P_{X_n}(z)$

Αν, επιπλέον, $X_i \overset{d}{=} X$ $\quad 1\leq i \leq n$, τότε $P_{S_n}(z) = P_X^n(z)$

5) Αν $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολ. ανεξαρτ. τμ, όπου $X_n \overset{d}{=} X$ και $N \perp\!\!\!\perp (X_n)_{n\geq 1}$

και $S_n = \sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$

Αποδείξεις:

1) Ν.δ.ο $P(X=n) = \dfrac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$. Έχουμε ότι $P_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) z^n$ (1), συγκλ.

για $|z|\leq 1$

Αν φτιάξουμε τη σειρά MacLaurin της $P_X(z)$ (σειρά Taylor με κέντρο 0)

$P_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_X^{(n)}(0)}{n!} z^n$ (2) : Άρα οι συντελεστές είναι ίσοι.

και $P(X=n) = \dfrac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$

2) $X \overset{d}{=} Y \overset{\text{Ν.δ.ο}}{\iff} P_X(z) = P_Y(z)$

Έχουμε $P_X(z) = P_Y(z) \iff$ οι δυναμοσειρές είναι ίσες $\iff$ οι συντελεστές είναι ίσοι.

$\iff P(X=n) = P(Y=n)$, $\forall\, n\geq 0$ έχουν ίδια συνάρτηση πιθανότητα

$\iff X \overset{d}{=} Y$.

3) $E[X(X-1)\dots(X-n+1)] = P^{(n)}(1)$, $\forall\, n \geq 0$

$P_X(z) = E(Z^X)$. Άρα, αν είναι επιτρεπτό να περάσουμε την παράγωγο μέσα στη μέση τιμή.

$$P_X'(z) = \frac{d}{dz} E(Z^X) \overset{(*)}{=\!=} E\left(\frac{d}{dz} Z^X\right) = E\left(XZ^{X-1}\right)$$

$\Rightarrow$ Διαδοχικά n-φορές...

$$P_X^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} E(Z^X) = E(X(X-1)\dots(X-n+1)Z^{X-n})$$

$\overset{z=1}{\Longrightarrow}$ $P_X^{(n)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-n+1)] = E[(X)_n] \rightarrow$ καθοδικό παραγοντικό n τάξεως

Άρα, $P_X''(1) = E(X(X-1))$, $(X^2 = X^2 - X + X)$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = E[X(X-1) + X] - E^2(X) =$$
$$= E[X(X-1)] + E(X) - E^2(X) = P_X''(1) + P_X'(1) - [P_X'(1)]^2$$

4) $P_{S_n}(z) = E(Z^{S_n}) = E(Z^{X_1+\dots+X_n}) = E(Z^{X_1} \cdot Z^{X_2} \dots Z^{X_n})$

$\underset{\text{λόγω ανεξ.}}{=\!=} E(Z^{X_1})\dots E(Z^{X_n}) = P_{X_1}(z)\dots P_{X_n}(z)$

5) $P_{S_N}(z) = E(Z^{S_N}) = E[E(Z^{S_N}|N)]$ (1)

$E(Z^{S_N}|N=n) = E(Z^{S_n}|N=n) \underset{\text{άρα και από } S_n}{\overset{N \perp\!\!\!\perp (X_n)_{n\geq 1}}{=\!=\!=}} E(Z^{S_n}) = P_{S_n}(z)$

$\overset{18.4}{=} P_X^n(z) \Rightarrow E(Z^{S_N}|N) = P_X^N(z)$ (2)

Από (1) κ (2) $P_X(z) = E[P_X^N(z)] = P_N(P_X(z))$

④ Κάποιες πιθανογεννήτριες Διακριτών τμ

- Αν $X \sim Be(p)$ τότε $P_X(z) = 1-p+pz$

Πράγματι, $P_X(z) = E(Z^X) = P(X=0)z^0 + P(X=1)z^1 = 1-p+pz$.

• Αν $X \sim Bin(n,p)$ τότε $P_X(z) = (1-p+pz)^n$

$\boxed{\text{α' τροπος:}}$

$$P_X(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underset{\underset{b}{\parallel}}{(pz)^k} \underset{\underset{a}{\parallel}}{(1-p)^{n-k}}$$

$= (1-p+pz)^n \rightarrow$ τύπο Διωνύμου Νεύτωνα.

$\boxed{\text{β' τρόπος:}}$

$X \sim Bin(n,p) \Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_i \sim Be(p)$ (ανεξάρτητες + ισόνομη)

(Απο ιδ 4)

$$P_X(z) = P^n_{Be(p)}(z) = (1-p+pz)^n$$

16/5/16

ΜΑΘΗΜΑ 31ο

① Πιθανογεννήτριες γνωστών κατανομών (συνέχεια...)

• $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$, τότε $P_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}$ $\forall z \in \mathbb{R}$

$P_X(z) = E(z^X) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z}$
$= e^{-\lambda(1-z)}$

• $X \sim Geo(p)$ στο $1, 2, \ldots$ $P_X(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$, όταν $|z| < \frac{1}{1-p}$

$$P_X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n p(1-p)^{n-1} = pz \sum_{n=1}^{\infty} ((1-p)z)^{n-1} = pz \sum_{n=0}^{\infty} ((1-p)z)^n = \frac{pz}{1-(1-p)z}$$

όταν $|(1-p)z| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{1-p}$

• $X \sim NegBin(n,p)$ στο $n, n+1, \ldots$ $P_X(z) = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^n$, $|z| < \frac{1}{1-p}$

Έχουμε $X \sim NegBin(n,p) \Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_i \sim Geo(p)$, X_i ανεξαρτ. τμ.

Αρα $P_X(z) = P^n_{X_1} = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^n$

Δείξτε ότι: αν $X \sim Geo(p)$ στο $0, 1, 2, \ldots$ $(0<p<1)$ τότε

$$P_X(z) = \frac{p}{1-(1-p)z}, \quad |z| < \frac{1}{1-p}$$

αν $X \sim NegBin(n,p)$ στο $0, 1, 2, \ldots$ τότε $P_X(z) = \left(\frac{p}{1-(1-p)z}\right)^n$

για $|z| < \frac{1}{1-p}$

② Άσκηση με $P_{S_N}(z)$

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (αν $N=0$, $S_N=0$), $N \sim P(\lambda)$, $X \sim Be(p)$

(π.χ. άσκηση με $P(X=s)$ με τα αυγά που επιβιώνουν)

Πάμε με πιθανογεννήτριες

$$P_{S_N}(z) \overset{\text{Ιδ.5}}{=} P_N(P_{X_1}(z)) \quad (1)$$

$N \sim P(\lambda) \Rightarrow P_N(z) = e^{-\lambda(1-z)}$ (2)

$X \sim Be(p) \Rightarrow P_{X_1}(z) = 1-p+pz$ (3)

(1),(2),(3) $\Rightarrow$ $P_{S_N}(z) = e^{-\lambda[1-(1-p+pz)]} = e^{-\lambda(p-pz)} =$

$= e^{-\lambda p(1-z)}$ που είναι πιθανογεννήτρια της $\mathcal{P}(p\lambda)$

άρα από Θεώρημα χαρακτ. κατανομών μέσω πιθαγεννητριών

έχουμε $X \sim \mathcal{P}(p\lambda) \Rightarrow P(X=s) = e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^s}{s!}$ $s=0,1,2,\dots$

~Άσκηση για σπίτι~

Έστω $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ όπου $(X = S_N)$

$(= \sum_{i=1}^{N} X_i)$

και $N \sim Geo(\theta)$, στο $0,1,2,\dots$ και $X_i \sim Be(p)$ όπου $0<p<1$

$N \perp\!\!\!\perp \{X_i\}_{i\geq1}$ και $\{X_i\}_{i\geq0}$ ανεξαρτ. μεταβ. $0<\theta<1$

Τότε να βρεθεί η κατανομή S_N

③ Εφαρμογή με κατανομές αθροισμάτων ανεξάρτητων τ.μ.

- Αν $X_i \sim Bin(n_i, p)$ $i=1,2,\dots,k$ ανεξάρτητες μεταξύ τους

  Τότε, $X = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim Bin(n_1+n_2+\dots+n_k, p)$

  $$P_X(z) = \prod_{i=1}^{k} P_{X_i}(z)$$

- $X_i \sim Bin(n_i, p) \Rightarrow P_{X_{i,n_i}}(z) = (1-p+pz)^{n_i}$ $i=1,\dots,k$

  Άρα, $P_X(z) = \prod_{i=1}^{k} (1-p+pz)^{n_i} = (1-p+pz)^{n_1+n_2+\dots+n_k}$

  $\Rightarrow X \sim Bin(n_1+n_2+\dots+n_k, p)$ (πιθανογεννήτρια Bin(...))

• Αν $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ $i=1,2,\dots,n$ είναι ανεξάρτητες τότε

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)$$

$$P_X(z) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z) \underset{X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)}{=\!=\!=} \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(1-z)} = e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(1-z)} = e^{-\lambda(1-z)}$$

όπου $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n>0$, άρα $X\sim \mathcal{P}(\lambda)$

④ Ροπογεννήτρια τυχαίας μεταβλητής.

Η πιθανογεννήτρια ορίζεται μόνο για διακριτές τμ (με τιμές στο $\mathbb{N}$)
Μπορούμε να έχουμε κάτι αντίστοιχο και για συνεχείς τμ?
Το πρόβλημα λύνεται μερικώς από τις ροπογεννήτριες.

~Η ροπογεννήτρια μιας τμ X ορίζεται ως:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum\limits_{x\in A} e^{tx} \underbrace{P(X=x)}_{f_X(x)\ (\sigma.\pi)}, & X \text{ διακριτή με } P(X\in A)=1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \underbrace{f_X(x)}_{\sigma.\pi.\pi \text{ της } X} dx, & \text{αν } X \text{ (απολύτως) συνεχής τμ} \end{cases} \quad (\forall t\in\mathbb{R})$$

Παρατηρήσεις:

1) Η $M_X(t)$ είναι καλά ορισμένη, αφού $e^{tX}\geq 0 \Rightarrow E(e^{tX})\geq 0$, ορίζεται $\forall\, t\in\mathbb{R}$ (ενδεχομένως $+\infty$)

2) Λέμε ότι η υπάρχει η ροπογεννήτρια της X ή ότι η X έχει ροπογεννήτρια, αν $M_X(t)<+\infty$, σε ένα ανοικτό διάστημα γύρω από το 0 ($\exists\, \varepsilon>0$: $M_X(t)<+\infty$, $\forall\, t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$)

3) Αν η X έχει ροπογεννήτρια, τότε η $M_X(t)$ είναι αναλυτική συνάρτηση, η X έχει ροπές οποιασδήποτε τάξης, δηλ $E|X|^n<+\infty$, $\forall\, n\geq 1$ και τα παραπάνω είναι επιτρεπτά ($M_X(0)=E(e^{0X})=1$)

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}X^n\Big) \underset{}{\overset{(*)}{=\!=}} \sum_{n=0}^{\infty} E(X^n)\frac{t^n}{n!}, \quad \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$ (για κάποιο ε)

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι συμπίπτει με την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση των ροπών $(E(X^n))_{n\geq 0}$ της τμ X.
Αυτό δικαιολογεί και το όνομα της, ως ροπογεννήτρια της τμ X

⑤ Ιδιότητες Ροπογεννήτριας

1) $E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$, $n \geq 0$ (αν η X έχει ροπογεννήτρια)

2) Αν οι X και Y έχουν ροπογεννήτριες τότε:

$$X \overset{d}{=} Y \Leftrightarrow M_X(t) = M_Y(t) \Leftrightarrow E(X^n) = E(Y^n),\ \forall\, n \geq 0$$

Άρα η $M_X(t)$ χαρακτηρίζει την κατανομή της X, στην περίπτωση που η X έχει ροπογεννήτρια (άρα τότε και οι ροπές $E(X^n)$ χαρακτηρίζουν την κατανομή της X)

Παρατηρήσεις (αδυναμίες της ροπογεννήτριας)

1) Είναι φανερό ότι, αν $\exists$ ένα n: $E|X^n| = +\infty$, (δηλ $\nexists\, E(X^n)$) τότε $\nexists$ η ροπογεννήτρια της τμ $X \Rightarrow$ η $M_X(t)$ δεν χαρακτηρίζει την κατανομή της X.

2) Όμως, η $M_X(t)$ δεν χαρακτηρίζει την κατανομή, ούτε και όλων των τμ που έχουν ροπές οποιασδήποτε τάξης (π.χ λογαριθμοκανονική κατανομή)

3) Αν $X_1, X_2, \ldots X_n$ ανεξάρτητες τμ τότε $M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$

Αν επιπλέον, $X_i \overset{d}{=} X \Rightarrow M_{S_n}(t) = M_X^{\,n}(t)$

4) Αν $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξαρτ + ισόνομων τμ και $X_n \overset{d}{=} X$

$N \perp\!\!\!\perp \{X_n\}_{n\geq 1}$, $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow M_{S_N}(t) = P_N(M_X(t))$.

5) Σύνδεση ροπογεννήτρια-πιθανογεννήτρια

Έχουμε, $M_X(t) = P_X(e^t)$ (αν $P(X \in \mathbb{N}) = 1$)

6) Αποδείξεις ιδιοτήτων:

1) $M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(X^n) \dfrac{t^n}{n!}$ Είναι και αναλυτική συνάρτηση σε κάποια περιοχή $(-\varepsilon, \varepsilon)$

Από τη σειρά McLaurin (Taylor γύρω από 0)

$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{M_X^{(n)}(0)\, t^n}{n!} \Rightarrow E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$ (συντελεστές δυναμοσειράς)

(2) $X \overset{d}{=} Y \overset{(1)}{\iff} M_X(t)=M_Y(t) \overset{(2)}{\iff} E(X^n)=E(Y^n)\ n\geq 0$, όταν υπάρχουν οι ροπογεννήτριες των X και Y.

Απόδειξη:

$\overset{(1)}{\Longleftarrow}$ χρειάζεται ένα θεώρημα αντιστροφής (βλ. Πιθ ΙΙ)

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)t^n}{n!}$

$$M_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(Y^n)t^n}{n!}$$

Όμως, $X \overset{d}{=} Y$ και υπάρχουν μέσες τιμές (αφού $\exists$ οι ροπογεννήτριες τους)
$\Rightarrow E(X^n) = E(Y^n)$

Άρα, η $M_X(t)$ και η $M_Y(t)$ συμφωνούν (αφού έχουν ίσους συντελεστές)

Για το $\overset{(2)}{\Longleftarrow}$ Δυναμοσειρές ίσες $\iff$ συντελεστές ίσους (δηλ. $E(X^n)=E(Y^n)$) είναι προφανές!

(3) $M_{S_N}(t) = E(e^{tS_n}) = E(e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}) = E(e^{tX_1}\dots e^{tX_n})$

$\xrightarrow[\text{της } X]{+\text{ανεξαρτ}} E(e^{tX_1})\dots E(e^{tX_n}) = M_{X_1}(t)\dots M_{X_n}(t)$

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ + υποθέσεις

$M_{S_N}(t) = E(e^{tS_N}) = E[E(e^{tS_N}|N)]$ (1)

$$E(e^{tS_N}|N=n) = E(e^{tS_n}|N=n) \xrightarrow{N \perp\!\!\!\perp \{X_n\}_{n\geq 1}} E(e^{tS_n}) = M_{S_n}(t) = M_X^n(t)\ (X \overset{d}{=} X_i)$$

$\Rightarrow E(e^{tS_N}|N) = M_X^N(t)$

Αντικαθιστώ την (1): $M_{S_N}(t) = E(M_X^N(t)) = P_N(M_X(t))$

(5) $M_X(t) = E(e^{tX}) = E((e^t)^X) \xrightarrow[\text{πιθανογ}]{\text{αν X έχει}} P_X(e^t)$

(7) Ροπογεννήτριες γνωστών κατανομών

1) Αν $X \sim N(0,1)$ τότε $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Λύση:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \quad \left(\begin{array}{c} \text{σπη } N(0,1) \\ \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx)} dx = e^{t^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx}_{\overset{\shortparallel}{1}}$$

σπη $N(t,1)$

$$= e^{\frac{t^2}{2}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

2) Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Λύση:

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $X = \mu + \sigma Z$, $Z \sim N(0,1)$

Άρα, $M_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{t(\mu + \sigma Z)}) = E(e^{\mu t + \sigma t Z})$

$$= e^{\mu t} E(e^{\sigma t Z}) = e^{\mu t} M_Z(\sigma t) = e^{\mu t} e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

3(i)

⇝ Τυχαία μεταβλητή X που υπάρχουν όλες οι ροπές της, και δεν έχει ροπογεννήτρια.

$X \sim \log N(\mu, \sigma^2) \iff \log X = Y$ όταν $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ (λογαριθμο-κανονική κατανομή)

Παρατηρούμε ότι $X = e^Y > 0$

Παίρνουμε $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$

Δείχνετε ότι $f_{X_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x} e^{-\frac{\log^2 x}{2}}$, $x > 0$

(σ.π.π.) → $\log N(0,1)$

$E(X^n) = E((e^Y)^n) = E(e^{nY}) = M_Y(n) = e^{n^2/2}$ $\forall n \geq 1$ $(Y \sim N(0,1))$

(∃ όλες οι ροπές)

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n X^n}{n!}\right) \overset{t \geq 0}{=\!=} \sum_{n=0}^{+\infty} E(X^n) \frac{t^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{\frac{n^2}{2}} t^n}{n!}$$

Αν υπάρχει η ροπογεννήτρια, τότε πρέπει να $\exists\, t > 0 : M_X(t) < \infty$

Έστω $t > 0$ $\quad n! \leq n^n \Rightarrow \frac{1}{n!} \geq \frac{1}{n^n} \Rightarrow \frac{e^{\frac{n^2}{2}} t^n}{n!} \geq \frac{e^{\frac{n^2}{2}} t^n}{n^n}$

$$= \left(\frac{e^{\frac{n}{2}} t}{n}\right)^n$$

De l'Hospital

Όμως, $\frac{e^{\frac{n}{2}t}}{n} \to +\infty$ $\Big($ διότι $\frac{e^{\frac{x}{2}t}}{x} \to +\infty \Big)$

$\Leftrightarrow \frac{e^{\frac{n^2}{2}}t^n}{n^n} \to +\infty$

άρα, αφού $\sum a_n < \infty \Rightarrow a_n \to 0$, έχουμε εδώ $a_n = \frac{e^{\frac{n^2}{2}}t^n}{n!} \to +\infty$

και άρα $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$ ($a_n > 0$) (∄ ροπογεννήτρια)

(ii) Μπορούμε να πάρουμε πολλές τυχαίες μεταβλητές, με διαφορετική κατανομή, όπου έχουν ίσες όλες τις ροπές n-τάξης.

Παίρνουμε X_a τμ με σ.π.π

$f_{X_a}(x) = f_{X_0}(x)(1 + a\sin(2\pi \log x))$ $|a| \le 1$

όπου $X_0 \sim \log N(0,1)$. Επαληθεύστε ότι f_{X_a} είναι σπп και $E(X_a^n) = E(X_0^n)$.

20/5/16

ΜΑΘΗΜΑ 32ο (Μεταπτυχιακός)

Ασκ 1/ Έστω (X,Y) δισδιάστατη τ.μ. με σ.π.π $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & \text{αν } |x|+|y| \le 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Να υπολογισθούν τα εξής:

i) η σταθερά c

ii) $f_X(x)$, $f_Y(y)$

iii) $f_{X|Y}(x|y)$ της $X|Y=y$

iv) $E(X|Y=y)$

v) $P(X<Y)$

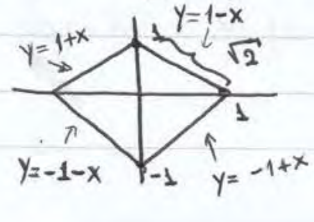
Λύση:

i) Θα πρέπει: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

Έστω $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \iint_S c\,dx\,dy$

$= c \cdot Εμβ(S) = 2c$

όπου $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \le 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \le 1,\ x-y \ge -1,\ x+y \ge 1,\ x-y \le 1\}$



Οπότε $I = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

$2^{ος}$ τρόπος:

Έστω I_i = εμβαδον στο $i^{οστο}$ τεταρτημοριο

Τότε: $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 4I_1$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Επειδή, η } f_{X,Y} \text{ είναι συμμετρική} \\ f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(-x,y) = f_{X,Y}(x,-y) = f_{X,Y}(-x,-y) \end{array} \right)$$

Αρκεί να υπολογίσω το I_1: $\left\{ \begin{array}{l} |x|+|y| \le 1 \\ x,y>0 \iff 0<x\le 1 \end{array} \right\}$

$$-1+x \le y \le 1-x$$

$$I_1 = \int_0^1 \int_{-1+x}^{1-x} c\,dx dy = 2c\int_0^1 (1-x)dx = c\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow 4I_1 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

ii) Παρατήρηση: $X \overset{d}{=} Y$ οπότε $f_X = f_Y$, αρκεί να υπολογίσουμε την f_X. Έστω $x \in \mathbb{R}$: Για $x : |x|>1$ η $f_X(x) = 0$

Για x: $|x| \le 1$ έχουμε:

$$f_X(x) = \int_{-1+|x|}^{1-|x|} \frac{1}{2}dy = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}(1-|x|) = 1-|x|$$

Οπότε, $f_X(x) = \begin{cases} 0, & |x|>1 \\ 1-|x|, & |x|\le 1 \end{cases}$ και $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & |y|>1 \\ 1-|y|, & |y|\le 1 \end{cases}$

iii) Για την $X|Y=y$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \text{ όταν } f_Y(y)>0 \iff |y|<1$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot \mathbb{1}_{\{|x|+|y|\le 1\}}}{1-|y|} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-|y|)}, & |x| \le 1-|y| \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Από την μορφή $f_{X|Y}(x|y)$, παρατηρούμε ότι:

$X|Y=y \sim Unif(-u,u)$, όπου $u = 1-|y|$

iv) $E(X|Y=y) = \frac{-u+u}{2} = 0$ (από παρατήρηση)

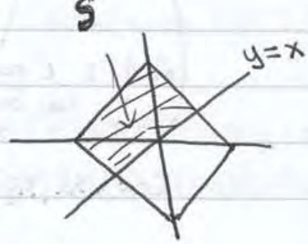
Αλλιώς, επειδή για την κατανομή της $X|Y=y$, έχουμε $f(x|y) = f(-x|y)$ οπότε είναι άρτια και έτσι $E(X|Y=y)=0$, αλλιώς
$E[X|Y=y] = \int x\, f(x|y)dx = 0$

v) Ο υπολογισμός της $P(X<Y)$

$P(X<Y) = \iint_{S'} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \frac{1}{2}\, \text{εμβ}(S') = \frac{1}{2}$

όπου $S' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leq 1,\ x<y\}$

S'



Αλλιώς: Λόγω συμμετρίας: $P(X<Y) = P(X>Y)$ ⊛

$1 = P((X,Y)\in S) = P(X<Y) + P(X>Y) + \cancel{P(X=Y)}^{0}$

$\overset{⊛}{\Longrightarrow} 2P(X<Y) = 1 \Rightarrow P(X<Y) = \frac{1}{2}$

Ασκ.2 Πρόβλημα με καπέλα:

n άτομα που θα βάλουν τα καπέλα τους στο κέντρο και διαλέγουν ένα στην τύχη. Θέτουμε:

$X = \#$ ατόμων που επιλέγουν το καπέλο τους

Να υπολογίσετε $Var(X)$, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ όπου $X_i = 1_{A_i}$, $A_i = \{$το i-οστό άτομο επιλέγει το καπέλο του$\}$

Παρατήρηση: Οι X_i δεν είναι ανεξάρτητες

π.χ.: Αν ο i-οστός επιλέξει το καπέλο του $j^{\text{οστού}}$ τότε η πιθανότητα ο $j^{\text{οστός}}$ να βρει το καπέλο του είναι 0.

$X_i \sim Be(1/n)$ ισόνομες

Υπενθύμιση: αν $W \sim Be(p)$ $E(W) = p$, $Var(W) = p(1-p)$

① Έχουμε $Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j)$

$Var(X_i) = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$Cov(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]$

$E[X_i X_j] = \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} k_1 k_2 P(X_i k_1, X_j k_2)$

$\circledast = P(X_i = k_1, X_j = k_2) = P(A_i A_j) = \frac{|A_i A_j|}{|\Omega|} \overset{\circledast\circledast}{=} \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$

$\circledast$ Αλλιώς, $X_i \cdot X_j = 1 \iff X_i = 1$ και $X_j = 1$

($\circledast\circledast$ Έχουμε, $W = (w_1, \dots, w_n)$ (μεταθέσεις)

$A_i A_j$: i στη i-θέση, j στη j-θέση
και διαφορετικά στοιχεία στις
$n-2$ υπόλοιπες θέσεις. (# = μεταθέσεις $n-2$ στοιχείων).)

$Cov(X_i, X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$

$\sum_{1 \le i < j \le n} \sum 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} 1 \quad \sum_{i=1}^{n} (n-i) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$

Οπότε $① = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{(n-i)}{n} + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \sum \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n^2(n-1)} \left(n^2 - \frac{n}{2}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1$

Παρατήρηση: $Cov(X_i, X_j) = \frac{1}{n^2(n-1)} > 0$

Επίσης, $\rho(X_i, X_j) = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i)}\sqrt{Var(X_j)}} = \frac{1}{(n-1)^2} > 0$

Θετική Συσχέτιση:

Αν $X_i = 1$ η πιθαν. $X_j = 1$ αυξάνεται.

Επίσης, $Cov(X_i, X_j) \xrightarrow{n \to \infty} 0$, οπότε για μεγάλο n (πλήθος), η εξάρτηση "χαλαρώνει"

Ασκ.3| Έστω $Y = I \cdot X$, όπου $I = \begin{cases} 1 & \text{, με πιθ. } p \\ -1 & \text{, με πιθ. } 1-p \end{cases}$

και $X > 0$ (με πιθ. 1) απολ. συνεχής.

$\Longleftrightarrow \exists$ πυκνότητα f_X και υποθέτουμε X και I είναι ανεξαρτ.

i) Να βρεθεί $F_Y(y)$

ii) Να βρεθεί $f_Y(y)$

iii) Να απαντηθεί το ii) αν $Y = I \cdot X^2$

Παρατήρηση: Αν x η πραγματοποίηση της X με αυτές τις συνθήκες τότε, ρίχνουμε ένα νόμισμα και με πιθ. p, παίρνουμε x και με πιθ. $1-p$, παίρνουμε $-x$.

Για $y \in \mathbb{R}$: $F_Y(y) = P(IX \le y) = P(I=1)P(X \le y) + P(I=-1)P(-X \le y) =$

$= p \cdot P(X \le y) + (1-p)(1 - P(X < -y)) = p \cdot F_X(y) + (1-p)(1 - F_X(y))$

$x > 0$, με πιθ. 1 $F_X(x) = 0$

Για $y > 0$ $\quad F_Y(y) = p F_X(y)$

Για $y < 0$ $\quad F_Y(y) = (1-p) - (1-p) F_X(-y)$

$$F_Y(y) = \begin{cases} p F_X(y) & , y > 0 \\ (1-p) - (1-p) F_X(-y) & , y < 0 \end{cases}$$

ii) Για $y \in \mathbb{R}$: $f_Y(y) = F'_Y(y)$

Για $y > 0$: $f_Y(y) = p f_X(y)$

Για $y \le 0$: $f_Y(y) = (1-p) f_X(-y)$

$$f_Y(y) = \begin{cases} p f_X(y) & , y > 0 \\ (1-p) f_X(-y) & , y \le 0 \end{cases}$$

π.χ $X \sim \exp(\theta)$ $\quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta x} & , x > 0, (\theta > 0) \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$

$f_X(x) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$, $\theta > 0$

$$f_Y(y) = \begin{cases} p \theta e^{-\theta y} & , y > 0 \\ (1-p) e^{\theta y} & , y \le 0 \end{cases}$$

iii) Ο μετασχηματισμός $Z = g(x) = x^2$ οδηγεί στην $Y = I \cdot Z$ και $Z>0$ (ικανοποιεί τις υποθέσεις της ii))

Για $x>0$ $g: 1-1$ οπότε $g^{-1}(z) = \sqrt{z}$

Έτσι, $f_Z(z) = f_X(g^{-1}(z)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}(z)}{dz} \right| = f_Y(-\sqrt{z}) \frac{1}{2\sqrt{z}}$

$$= \begin{cases} p\, f_X(\sqrt{y})\, 1/2\sqrt{y} &, y>0 \\ (1-p)\, f_X(\sqrt{-y}) \frac{1}{2\sqrt{-y}} &, y<0 \end{cases}$$

Ασκ. 4 | Πολεμικό αεροσκάφος με φορτίο τουλάχιστον δύο βόμβες (Φεβρ '15) βάλει κατά ενός στόχου μέχρι να τον καταστρέψει είναι p_2.

Διαδοχικές βολές θεωρούνται ανεξάρτητες

i) P (μια βόμβα να καταστρέψει τον στόχο)

ii) P (να χρειαστώ το πολύ δύο βόμβες για την ολοκλήρωση της αποστολής)

Λύση:

(i) $B = \{$η βόμβα πετυχαίνει τον στόχο$\}$

$A = \{$ο στόχος καταστρέφεται από ρίψη βόμβας$\}$

$P(B) = p_1$ $\quad P(A|B) = p_2$

Προφανώς, $P(A|B^c) = 0$

Θ.Ο.Π. $\quad P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c)\, P(B^c) = p_1 \cdot p_2$

(ii) $A_i = \{$ο στόχος καταστρέφεται στην ρίψη i-οστής βόμβας$\}$ $i = 1, 2$

Ζητάμε, $\underbrace{P\left(\text{να χρειαστώ 1 ή 2 βόμβες για την ολοκλήρωση της αποστολής}\right)}_{=\Gamma}$

$\Gamma = A_1 \cup \{A_1^c \cap A_2\}$

$P(\Gamma) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2)$ $\quad$ (ανεξ. ρίψεις A_1, A_2 ανεξαρτ. $\Rightarrow A_1^c, A_2$ ανεξαρτ.)

$= p_1 p_2 + P(A_1^c)\, P(A_2)$

$= p_1 p_2 + (1 - p_1 p_2)\, p_1 p_2$

Αλλιώς, $\Gamma_1 = \{$ο στόχος καταστρέφεται σε τουλάχιστον 3 ρίψεις$\}$

$P(\Gamma_1^c) = 1 - P(\Gamma_1)$ όμως $\Gamma = A_1^c \cap A_2^c$

$P(\Gamma) = P(A_1)\, P(A_2) = (1 - p_1 p_2)^2$ οπότε: $P(\Gamma_1^c) = 1 - (1 - p_1 p_2)^2 = p_1 p_2 + p_1 p_2 (1 - p_1 p_2)$

23/5/16

ΜΑΘΗΜΑ 33ο

① Ροπογεννήτριες γνωστών κατανομών (συνέχεια...)

$X \sim G(a,\theta) \Leftrightarrow M_X(t) = \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^a, \ t<\theta$

$X \sim G(a,\theta), \ f(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma a} x^{a-1} e^{-\theta x}, \ x>0$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{tx} \frac{\theta^a}{\Gamma a} x^{a-1} e^{-\theta x} dx =$$

$$= \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^a \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{(\theta-t)^a}{\Gamma a} x^{a-1} e^{-(\theta-t)x} dx}_{\text{σ.π.π } G(a,\theta-t)} \overset{\theta-t>0}{=\!=} \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^a \cdot 1 =$$

$$= \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^a, \ t<\theta$$

Ειδικές Περιπτώσεις:

$X \sim Erlang(n,\theta) \Leftrightarrow M_X(t) = \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^n, \ n \geq 1, \ t<\theta$

$X \sim exp(\theta) \overset{n=1}{\Longleftrightarrow} M_X(t) = \frac{\theta}{\theta-t}, \ t<\theta$

Ν.δ.ο $X \sim U(a,\beta) \overset{a<\beta}{\Longleftrightarrow} M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{\beta t} - e^{at}}{(\beta-a)t}, & t \neq 0 \\ 1, & t=0 \end{cases}$

② Εφαρμογή Ροπογεννήτριων με κατανομές αθροισμ. ανεξαρτ. τ.μ.

Αν $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i=1,\dots,n$ + ανεξάρτητες

$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu,\sigma^2), \ \mu = \sum_{i=1}^n \mu_i, \ \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$

Απόδειξη:

(αν $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ έχουμε $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2}$)

$$M_{S_n}(t) = E(e^{tS_n}) \overset{\text{έχει δειχθεί}}{=\!=\!=} \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) \overset{X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)}{=\!=\!=\!=}$$

$$= \prod_{i=1}^n e^{\mu_i t + (\sigma_i^2/2)t^2} = e^{(\sum_{i=1}^n \mu_i)t + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}} = e^{\mu t + \sigma^2/2 \cdot t^2}$$

όπου $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ και $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 > 0$.

Άρα, πράγματι $S_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ν.δ.ο, αν $X_i \sim G(a_i, \theta)$ $i=1,\dots,n$ + ανεξάρτητες τότε:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G\left(\sum_{i=1}^{n} a_i, \theta\right)$$ με ροπογεννήτριες.

③ Βασικές ανισότητες στην Θεωρία Πιθανοτήτων:

A) Concetration Inequalities.

Οι ανισότητες αυτές δίναν άνω φράγματα πιθανοτήτων ενδεχομένων, που αφοράν αποκλίσεις μιας τμ από κάποια τιμή. Ισοδύναμα, μπορούν να ερμηνευθούν ως εύρεση κάτω φραγμάτων του βαθμού συγκέντρωσης της κατανομής μιας τ.μ. σε κάποιο διάστημα, και συνήθως περιέχει τη μέση τιμή (παίρνοντας τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα).

Ανισότητα Markov: Αν $X \geq 0$, $a > 0$ τότε $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

Απόδειξη: $P(X \geq a) = P(X/a \geq 1) = P(X/a \in [1, +\infty)) =$

$= E[1_{[1,+\infty)}(X/a)] \overset{*}{\leq} E(X/a) = E(X)/a$

διότι $1_{[1,+\infty)}(X/a) \leq X/a$

$$\left(\begin{array}{l} \text{αν } \omega: \frac{X(\omega)}{a} < 1, \text{ τότε } 0 \leq \frac{X(\omega)}{a} \\ \text{αν } \omega: \frac{X(\omega)}{a} \geq 1, \text{ τότε } 1 \leq \frac{X(\omega)}{a} \end{array}\right)$$

Γενικευμένη Ανισότητα Markov:

Αν X οποιαδήποτε τμ, $a \in \mathbb{R}$, $h \uparrow$, $h \geq 0$, ώστε $h(a) > 0$.

Τότε $P(X \geq a) \leq \frac{E[h(X)]}{h(a)}$ (γενικεύει την ανισότητα Markov)

$\boxed{\text{Απόδειξη:}}$

$$P(X \geq a) \overset{h\uparrow}{\leq} P(h(X) \geq h(a)) \underset{h(X)\geq 0}{\overset{\text{Markov}}{\leq}} \frac{E[h(X)]}{h(a)}$$

Ανισότητα Chebyshev:

Αν $E|X| < +\infty$, (υπάρχει μέση τιμή), $\mu = E(X)$, $c > 0$, τότε

$P[|X-\mu| \geq c] \leq \frac{Var(X)}{c^2}$

Απόδειξη:

$$P[|X-\mu| \geq c] = P[(X-\mu)^2 \geq c^2] \overset{(X-\mu)^2 \geq 0}{\leq} \frac{E[(X-\mu)^2]}{c^2} = \frac{Var(X)}{c^2}$$

Εφαρμογή: Ν.δ.ο αν $Var(X)=0 \Rightarrow X=C$ με πιθ. 1 (συμπίπτει με τη μέση τιμή)

$$P[|X-E(X)|>0] = P[\bigcup_n \underbrace{\{|X-E(X)| \geq \tfrac{1}{n}\}}_{A_n}] =$$

Έχουμε A_n είναι ↑ ακολουθία ενδεχ.

$$= P(\lim_n A_n) = \lim_n P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P[|X-E(X)| \geq \tfrac{1}{n}] \overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{0}{\overbrace{Var(X)}}}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

Τελικά, $P(|X-E(X)|>0)=0 \Rightarrow P[|X-E(X)|=0] = 1-P[|X-E(X)|>0]=1$

ή $|X-E(X)|=0$, με πιθ. 1

Άρα, $\underset{c}{\overset{\shortparallel}{E(X)}}=X$, με πιθ. 1

Ανισότητα Chernoff

Αν $t>0$, $a\in\mathbb{R}$, τότε: $P(X\geq a)\leq e^{-ta}M_X(t)$, όπου $M_X(t)=E(e^{tX})$

Λύση:

Θέτω, $h(x)=e^{tx}$, $x\in\mathbb{R}$ $(t>0)$. Έχουμε $t>0$, $h(x)$ ↑, $h(x)>0$ $(h(a)>0)$

$$P(X\geq a)\leq \frac{E[h(X)]}{h(a)} = \frac{E[e^{tX}]}{e^{ta}} = e^{-ta}M_X(t)$$

(Προφανώς, έχει ενδιαφέρον, όταν η Χ έχει ροπογεννήτρια, ⇒ έχει ροπές οποιασδήποτε τάξης)

Παρατήρηση:

1) Πολλές φορές χρησιμοποιείται με το μικρότερο δυνατό άνω φράγμα δλδ:

$$P(X\geq a) \leq \inf_{t>0}\{\underbrace{e^{-ta}M_X(t)}_{g(t)}\}$$

2) Για απλή Markov και $a=kE(X)$ $k=1,2,\ldots$ $(E(X)<\infty)$ τότε:

$$P(X\geq \underbrace{k\cdot E(X)}_{a}) \leq \frac{E(X)}{k\cdot E(X)} = \frac{1}{k} \quad \left(\begin{array}{c}\text{γενικό φράγμα για } X\geq 0\\ \text{και } E(X)<\infty.\end{array}\right)$$

Αν $E(X^2)<+\infty$: $P(X\geq kE(X)) = P(X^2\geq k^2E^2(X)] \leq \dfrac{E(X^2)}{k^2E^2(X)} =$

$$= \frac{1}{k^2}\,\frac{Var(X)+E^2(X)}{E^2(X)} = \frac{1}{k^2}\left(1+\frac{Var(X)}{E^2(X)}\right)_{k\geq 1}$$

Συγκρίνουμε τα 2 φράγματα:

$$\frac{1}{k^2}\left(1+\frac{Var(X)}{E^2(X)}\right) \leq \frac{1}{k} \Leftrightarrow k\geq 1+\frac{Var(X)}{E^2(X)}$$

(από αυτό το σημείο και πέρα, παίρνουμε πιο μικρό άνω φράγμα από τις δεύτερες ροπές)

(B) Ανισότητες με μέσες τιμές

· Cauchy-Schwarz

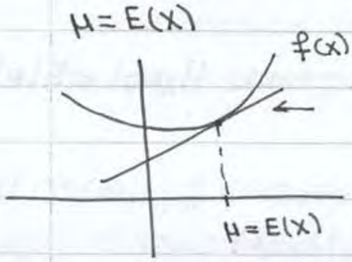
$|E(XY)| \leq [E(X^2)]^{1/2} \cdot [E(Y^2)]^{1/2}$ (έχει αποδειχθεί)

· Ανισότητα Jensen

Αν f είναι κυρτή, τότε $f(E(X)) \leq E(f(X))$ (για κοίλη, προφανώς η ανισότητα πάει ανάποδα) (προϋποθέτουμε ύπαρξη ροπών)

Απόδειξη:

Θα κάνουμε την απόδειξη, υποθέτοντας ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mu = E(X)$



εφαπτομένη της f στο μ, λόγω κυρτότητας, βρίσκεται κάτω από την f.

$f(x) \geq f(\mu) + f'(\mu)(x-\mu) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$.

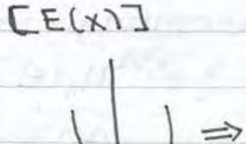
Επειδή, ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$f(X) \geq f(\mu) + f'(\mu)(X-\mu)$ (αφού ισχύει $\forall \omega \in \Omega$, θέτοντας $X(\omega)$)

Παίρνουμε μέσες τιμές: $E[f(X)] \geq f(\mu) + f'(\mu) E(X-\mu)$

$\Rightarrow E[f(X)] \geq f(\mu) = f[E(X)]$ $\quad E(X-\mu) \overset{\mu=E(X)}{=} 0$.

(κόλπο για να θυμόμαστε:



$\Rightarrow E[f(X)] \geq f(E(X))$ $\quad f(E(X)) = 0$)

• Ανισότητες Ροπών:

$E|X| \leq (E(X^2))^{1/2} \leq (E(X^3))^{1/3} \leq \dots \leq (E(X^n))^{1/n} \leq \dots$

Άρα, αν $\exists\ n \geq 1 : E|X|^n < +\infty \Rightarrow E|X|^k < +\infty \quad \forall\ 1 \leq k \leq n$

Απόδειξη:

Πρέπει ν.δ.ο, αν $m < n$, τότε $(E|X|^m)^{1/m} \leq (E|X|^n)^{1/n}$

Θέτουμε, $Y = |X|^m$ και $h(y) = y^{n/m}$ ($n/m > 1$) στο $[0, +\infty)$

Η $h(y)$ είναι κυρτή. Πράγματι: για $y > 0$: $h''(y) = \frac{n}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right) y^{\frac{n}{m}-2} > 0$ (και έχουμε κυρτότητα)

~Από την ανισότητα Jensen:

$h(E(Y)) \leq E(h(Y))$, δηλ. $h(E|X|^m) \leq E((|X|^m)^{n/m})$ δηλ.

$E(|X|^m)^{n/m} \leq E|X|^n$ δηλ. $(E|X|^m)^{1/m} \leq (E|X|^n)^{1/n}$

④ Ιδιότητες Δειγματικού Μέσου

Εστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολ. τμ., $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ και $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{S_n}{n}$.

Τότε $E(\bar{X}_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n}$ → μέση τιμή του δ.μ είναι ο μέσος όρος των μέσων τιμών των X_i.

Αν επιπλέον $E(X_i)=\mu$, $\forall i\geq 1$, τότε $E(\bar{X}_n)=\mu$.

$Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i,X_j)\right)$

Όταν είναι ανεξάρτητες ακολ. τμ ($Cov(X_i,X_j)=0$ $i\neq j$)

Άρα $Var(\bar{X}_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)}{n^2}$

Επιπλέον, όταν έχω ισόνομες $Var(X_i)=\sigma^2$ τότε:

$Var(\bar{X}_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$ ισχύει και για ακολ. ανεξ. ισον. τ.μ.

25/5/16

ΜΑΘΗΜΑ 34º

① Στοχαστική σύγκλιση ή σύγκλιση κατά Πιθανότητα.

Παράδειγμα: Εστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολ. ανεξ + ισον τμ. Αντιστοιχίζουμε $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$ όπου $\bar{X}_n = \frac{\sum X_i}{n}$

~ $E(\bar{X}_n) = \mu = E(X_1)$

~ $Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\overset{<+\infty}{Var(X_1)}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Περιμένουμε $\bar{X}_n \underset{\text{με κάποιο τρόπο}}{\to} \mu$ ($X=\mu$, με πιθ. 1)

Υπάρχουν πολλοί τρόποι σύγκλισης ακολουθιών τμ.

Μια συνέπεια του $Var(\bar{X}_n)\to 0$, είναι η λεγόμενη σύγκλιση κατά πιθανότητα της $\bar{X}_n$ στο μ.

Ορισμός: Θα λέμε ότι μια ακολουθία τμ $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα ή στοχαστικά σε μια τμ X αν $\forall \varepsilon>0$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Γράφουμε $X_n \xrightarrow{P} X$ $(n \to \infty)$ p: in probability

Ιδιαίτερα, εμείς θα το εφαρμόζουμε για $X = c$ με πιθ. 1.

Τότε, θέλουμε

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \lim_{n \to \infty} P(|X_n - c| > \varepsilon) = 0.$$

Τότε γράφουμε $X_n \xrightarrow[P]{} c$

Παράδειγμα:

Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία τμ όπου $X_n \sim Be(\frac{1}{n})$.

Ν.δ.ο η $(X_n)_{n\geq 1}$, αλλά και η $(\overline{X_n})_{n \geq 1}$ συγκλίνει στοχαστικά στο 0.

Λύση:

α' τρόπος: Έστω $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - 0| > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon) \underset{(0<\varepsilon<1)}{\overset{\parallel^{\,0 \ \ (\varepsilon \geq 1) \to 0}}{=}} P(X_n = 1)$

(ακριβής υπολογισμός) $= \frac{1}{n} \to 0$. Άρα, λοιπόν $X_n \xrightarrow{P} 0$.

β' τρόπος: $P(X_n > \varepsilon) \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{E(X_n)}{\varepsilon} = \frac{1}{n\varepsilon} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

(με άνω φράγμα) Θέλουμε νδο $\overline{X_n} \xrightarrow{P} 0$

Έστω $P(|\overline{X_n} - 0| > \varepsilon) = P(\overline{X_n} > \varepsilon) \leq \frac{E(\overline{X_n})}{\varepsilon}$ (1)

Όμως, $E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \underset{X_i \sim Be(\frac{1}{i})}{=\!=\!=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} =$

$= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n}$

δηλ. ο μέσος όρος της ακολουθίας (p_i)

Από Απειροστικό, αν $p_n \to p$ όταν $n \to \infty$, τότε η ακολουθία των μέσων όρων $\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n} \to p$ (Πρόταση Cauchy)

Άρα, εδώ $\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, δηλαδή $E(\overline{X_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Από την (1), έχουμε τελικά $P(|\overline{X_n} - 0| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $\forall \varepsilon > 0$.

Άρα λοιπόν $\overline{X_n} \xrightarrow{P} 0$

② Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (ΑΝΜΑ)
Weak Law of Large Numbers (WLLN)

• Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία α.ι.τ.μ. με $E|X_1|<+\infty$ $\left(\begin{array}{c}\text{υπάρχει}\\ \text{μέση}\\ \text{τιμή}\end{array}\right)$
Τότε $\overline{X_n} \xrightarrow{P} \mu = E(X_1)$
ή $\forall\, \varepsilon>0 \quad \lim P(|\overline{X}_n-\mu|>\varepsilon)=0$

Απόδειξη:

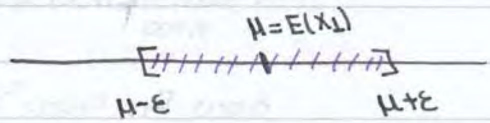
$\left\{ \text{Θα υποθέσουμε ότι } Var(X_1)<+\infty \atop \Updownarrow \; E(X^2)<+\infty \right)$

Έστω $\varepsilon>0$: $P(|\overline{X}_n-\mu|>\varepsilon) = P(|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)|>\varepsilon) \overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \dfrac{Var(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} =$
$= \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Παρατηρήσεις: (Ισοδυναμίες)

$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu \overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon>0 \;, \lim\limits_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n-\mu|>\varepsilon)=0$

$\overset{\forall \varepsilon>0}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} (P(|\overline{X}_n-\mu|\leq\varepsilon))=1.$



$P(|\overline{X}_n-\mu|\leq\varepsilon) = P(\overline{X}_n \in [\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon])$, δηλαδή, η πιθανότητα να βρεθεί ο δ.μ. $\overline{X}_n$ μέσα σε αυτό το διάστημα, δηλαδή να απέχει από το μ το πολύ ε, μπορεί να φτάσει όσο κοντά στο 1 θέλουμε..

Προσοχή! Αυτό δεν σημαίνει ότι : $P(\overline{X}_n=\mu) \not\to 1$.
π.χ, αν $(X_n)_{n\geq 1}$, οι α.ι.τ.μ. που είναι συνεχείς τ.μ.
Έχουμε $\overline{X}_n$ είναι συνεχής τμ. $\Rightarrow P(\overline{X}_n=\mu)=0 \not\to 1$.

Άσκηση:

Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολ α.ι.τ.μ. με $E(X_1)=0$ και $M_{X_1}(1)<+\infty$, όπου $M_{X_1}(t)=E(e^{tX_1})$.
Θέτω $Y_n = e^{X_n}, n\geq 1$

α) Ν.δ.ο η $\overline{Y}_n$ συγκλίνει στοχαστικά σε σταθερά $c\geq 1$.

β) Αν $X_n \sim N(0,1)$, να βρεθεί το c.

Λύση:

α) $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι α.ι.τ.μ. $(Y_n = e^{X_n})_{n\geq 1}$ είναι α.ι.τ.μ., αφού $Y_n = g(X_n)$, όπου $g(x) = e^x$

Παρατηρούμε ότι $E|Y_1| = E(Y_1) = E(e^{X_1}) = M_{X_1}(1) < +\infty$, άρα ∃ μέση τιμή, και έτσι εφαρμόζεται ο ΑΝΜΑ

δηλ. $\bar{Y}_n \xrightarrow{P} E(Y_1) = M_{X_1}(1) = c$.

Όμως $c = M_{X_1}(1) = E(e^{X_1}) = E(g(X_1)) \underset{\substack{g(x)=e^x \\ \text{κυρτή}}}{\overset{\text{Jensen}}{\geq}} g[E(X_1)] = g(0) = e^0 = 1$

β) $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, $t\in\mathbb{R}$, όπου $X\sim N(0,1)$. Άρα $c = M_X(1) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

③ Σύγκλιση κατά κατανομή

Ορσ: Λέμε ότι μια ακολουθία τ.μ. $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή, σε μια τμ X, αν $\lim_{n\to\infty} P(X_n\leq x) = P(X\leq x)$

ή $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(X)$, $\forall x$ που είναι σημείο συνέχειας της συναρτ κατανομής της X.

όπου F_n είναι η σ.κ. της X_n

και F είναι η σ.κ της X

Παρατηρήσεις:

1) Αν η X είναι συνεχής τ.μ., τότε πρέπει $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2) Η σύγκλιση κατά κατανομή είναι πιο ασθενής από σύγκλιση κατά πιθανότητα δηλ.

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X \quad (d = \text{distribution})$$

όπου $\xrightarrow{d}$ συμβολίζει τη σύγκλιση κατά κατανομή.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Όμως, αν $X = c$, με πιθ. 1, τότε

$X_n \xrightarrow{P} c \iff X_n \xrightarrow{d} c$.

Παράδειγμα:

ii) Για $(X_n)_{n\geq 1}$ ισονομων τμ (και όχι κατα ανάγκη ανεξάρτητων) έχουμε, λόγω ισοδυναμίας $F_n(x) = F(x)$ (κοινή σ.κ). Άρα, προφανώς. $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ άρα $X_n \xrightarrow{d} X$, όπου X έχει σ.κ. την $F(x)$

ii) Έχουμε, αν $X_n \sim Be(\frac{1}{n})$ τότε $X_n \xrightarrow{d} X$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-\frac{1}{n}, & 0\leq x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & 0\leq x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & 0\leq x \end{cases} = F(x)$$ όπου $F(x)$ σ.κ των εκφυλισμένων τμ $X=0$, με πιθ. 1

δηλαδή $X_n \xrightarrow{d} 0$ (αρκούσε για $x\neq 0$, $F_n(x)\to F(x)$)

④ Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)
Central Limit Theorem (CLT)

Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία α.i.τ.μ. με $0<Var(X_1)<+\infty$

Τότε $\dfrac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$ (τυποποιημένη ή τυπική κατανομή)

~ Ισοδύναμες μορφές (με $\bar{X}_n$)

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \in A\right] = P(Z\in A) \quad \frac{\forall A \in B(\mathbb{R})}{Z\sim N(0,1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \leq x\right] = P[Z\leq x] = \Phi(x), \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq x\right] = P(Z\leq x) = \Phi(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Ισοδύναμες μορφές με S_n $\qquad \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \in A\right] = P[Z \in A] \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ Z \sim N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \le x\right] = P(Z \le x) = \Phi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right] = P(Z \le x) = \Phi(x) \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Στην πράξη: Για μεγάλο n $\bar{X}_n \approx N(E(\bar{X}_n), Var(\bar{X}_n))$,
δηλ. $\approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, $S_n \approx N(E(S_n), Var(S_n))$
(δηλ. $\approx N(n\mu, n\sigma^2)$)

Ασκηση (Παλιο θέμα)

Να βρεθεί προσεγγιστικά, η πιθανότητα $P(S_n > \frac{n}{a})$, όπου $S_n = \sum_{i=1}^{n} \log X_i$, και $X_1, \dots X_n$ α.ι.τ.μ. με $P(X_i > x) = x^{-a}$, $\forall x > 1$, $(a > 0)$

Λύση:

Πρώτα βρίσκουμε την κατανομή του $\log X_i$ $\quad \underline{\forall x > 0}$

$P(\log X_i > x) = P(X_i > e^x) = (e^x)^{-a} = e^{-ax}$, δηλ $\forall x > 0$,

$P(\log X_i \le x) = 1 - P(\log X_i > x) = 1 - e^{-ax}$, που είναι η σ.κ. της $Exp(a)$ (προφανώς είναι 0, για $x \le 0$)

Άρα, $\log X_i \sim Exp(a) \Rightarrow E(\log X_i) = \frac{1}{a}$

$$Var(\log x_i) = \frac{1}{a^2}$$

Έχουμε $S_n = \sum_{i=1}^{n} \log X_i$ και $E(S_n) = n \cdot E(\log X_1) = \frac{n}{a}$

$$Var(S_n) = n \cdot Var(\log X_1) = \frac{n}{a^2}.$$

Εχουμε $P(S_n > \frac{n}{a}) = P\left(\frac{S_n - \frac{n}{a}}{\sqrt{\frac{n}{a^2}}} > \frac{\frac{n}{a} - \frac{n}{a}}{\sqrt{\frac{n}{a^2}}}\right)$

$$= P\left(\frac{S_n - \frac{n}{a}}{\sqrt{\frac{n}{a^2}}} > 0\right) \cong P(Z > 0)$$

όπου $Z \sim N(0,1)$ από το Κ.Ο.Θ.

Όμως, $P(Z>0) = 1 - P(Z \leq 0) = 1 - \Phi(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

↳ ή κατευθείαν $\frac{1}{2}$ λόγω συμμετρικούς κατανομής.

27/5/16

ΜΑΘΗΜΑ 35ο

~Θέμα 3 (Σεπτέμβριος '15)

Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ α.ι.τ.μ. με $X_n \sim N(0,1)$.

(α) Ν.δ.ο $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρεθούν οι ροπές $E(X^i)$, $i=1,2,3,4$

(γ) Αν $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, ν.δ.ο η $(Y_n)_{n\geq 1}$, όπου $Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$

(δ) Δείξτε ότι η $(Y_n)_{n\geq 1}$ δεν μπορεί να συγκλίνει στοχαστικά, σε κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Λύση:

(α) έχει γίνει ✓

(β) $M_X^{(i)}(0) = E(X^i)$, $i=1,2,3,4$

μετά από πράξεις (υπολογίζουμε $M_X^{(i)}(t)$ $1\leq i \leq 4$ και μετά θέτουμε $t=0$)

$E(X) = 0$, $E(X^2) = 1$, $E(X^3) = 0$, $E(X^4) = 3$

(γ) $\{X_i\}_{i\geq 1}$ α.ι.τ.μ. $\Rightarrow$ $\{Z_i = X_i^2\}_{i\geq 1}$ α.ι.τ.μ., αφού $Z_i = g(X_i)$

όπου $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = n E(X_1^2) \xrightarrow[E(X_1^2)=1]{(\beta)} n$.

$Var(S_n) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \xrightarrow[+\text{ισον.}]{\text{ανεξαρτ.}} n Var(X_1^2) = n\left[E(X_1^4) - E^2(X_1^2)\right]$

$\stackrel{(\beta)}{=} n(3-1) = 2n.$

Άρα, από το Κ.Ο.Θ (ισχύουν κ οι προϋποθέσεις), έχουμε

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

(δ) Αν (Y_n) συγκλίνει στοχαστικά σε $c \in \mathbb{R}$, τότε:

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|Y_n - c| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ή

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|Y_n - c| \leq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Έστω $c \in \mathbb{R}$

$$P[|Y_n - c| \leq \varepsilon] = P[-\varepsilon \leq Y_n - c \leq \varepsilon] = P[-\varepsilon + c \leq Y_n \leq \varepsilon + c]$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{(\gamma)} P[c-\varepsilon \leq Z \leq c+\varepsilon] = \Phi(c+\varepsilon) - \Phi(c-\varepsilon) < 1$$

(αφού $\Phi(c+\varepsilon) < 1$, $\Phi(c-\varepsilon) > 0$) άρα αδύνατο να συγκλίνει στο 1!

(εκτός ύλης) Ισχυρή σύγκλιση μιας ακολουθίας τ.μ.

Το αποτέλεσμα σύγκλισης του $\overline{X}_n$ στο $\mu = E(X_1)$, κατά πιθανότητα, δηλ $\overline{X}_n \xrightarrow{P} E(X_1)$, μπορεί να ισχυροποιηθεί πιο πολύ, με την σχεδόν βεβαίως (σ.β.) σύγκλιση ή σύγκλιση με πιθανότητα 1.

Ορσ: Μια ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ τμ, λέμε συγκλίνει σ.β. ή με πιθανότητα 1, αν

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1 \text{ όπου } \{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega : \text{υπάρχει το } \lim X_n(\omega) \\ \text{και } \lim X_n(\omega) = X(\omega) \end{array} \right\}$$

Παρατήρηση:

$$X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X \overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; P(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| \leq \varepsilon) = 1$$

(στην κατά πιθανότητα $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1$)

Ισχύει, $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$.

(εκτός ύλης)

Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (ΙΝΜΑ)

Strong Law of Large Numbers (SLLN) (του Kolmogorov)

Για μια ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ α.ι.τ.μ. με $E|X_1|<+\infty$, έχουμε ότι

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} E(X_1) \quad \text{ή} \quad P\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = E(X_1)\right)=1.$$

ΕΝΤΟΣ ΥΛΗΣ

Άσκηση:

Αν $(X_n)_{n\geq 1}$ α.ι.τ.μ. με $X_n \sim Bin(4, \frac{1}{2})$ ν.δ.ο.

(α) $T_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{2n} + 1 \xrightarrow{P} 2$ και

(β) να βρεθεί προσεγγιστικά ακέραιος n:

$$P\left(|T_n-2| \leq 0.1\right) \cong 0{,}95 \quad \text{Δίνεται ότι } \Phi(2)\cong 0.975.$$

Λύση:

$\boxed{(α)}$ $T_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i + 2n}{2n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i+2}{2}\right)}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{2}+1\right)}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \overline{Y}_n$

όπου $Y_i = \frac{X_i}{2}+1 = g(X_i)$, όπου $g(x)=\frac{x}{2}+1$

Έχουμε $\{X_n\}_{n\geq 1}$ α.ι.τ.μ. $\Rightarrow \{Y_n\}_{n\geq 1}$ α.ι.τ.μ. με $E(Y_1) =$

$= E\left(\frac{X_1}{2}+1\right) = \frac{E(X_1)}{2}+1 \overset{*}{=} 2$

$(*)$ $X_1 \sim Bin(4, \frac{1}{2}) \Rightarrow E(X_1) = 4\cdot\frac{1}{2}=2$ και $Var(X_1) = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1$

$X\sim Bin(n,p) \Rightarrow E(X) = np, \; Var(X) = np(1-p).$

Άρα από ΑΝΜΑ έχουμε $T_n = \overline{Y}_n \xrightarrow{P} E(Y_1)=2$

$\boxed{(β)}$ $P(|T_n-2| \leq 0.1) = ?$ (πρέπει να κάνουμε τυποποίηση της T_n)

$E(T_n) \overset{(α)}{=} E(\overline{Y}_n) = E(Y_1) = 2.$

$Var(T_n) = Var(\overline{Y}_n) = \dfrac{Var(Y_1)}{n} = \dfrac{Var\left(\frac{X_1}{2}+1\right)}{n} = \dfrac{Var(X_1)}{4n} = \dfrac{1}{4n}$

$$P\left(|T_n-2| \leq 0.1\right) = P\left(\left|\frac{T_n-2}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\right| \leq 0.2\sqrt{n}\right)$$

Όμως, $\dfrac{T_n-2}{\sqrt{\frac{1}{4n}}} = \dfrac{\overline{Y}_n - E(\overline{Y}_n)}{\sqrt{Var(\overline{Y}_n)}} \xrightarrow[\text{ΚΟΘ}]{d} Z \sim N(0,1).$

Αρα, για μεγάλο n : $P(|T_n-2| \leq 0.1) \cong P(|Z| \leq 0.2\sqrt{n})$

$= P(-0.2\sqrt{n} \leq Z \leq 0.2\sqrt{n}) = \Phi(0.2\sqrt{n}) - \Phi(-0.2\sqrt{n})$

$\left(\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \implies x = 0.2\sqrt{n} \right)$

$P(|T_n-2| \leq 0.1) \cong 2\Phi(0.2\sqrt{n}) - 1 \overset{\text{θέλω εκφώνηση}}{\cong} 0.95$

Αρα, $2\Phi(0.2\sqrt{n}) - 1 = 0.95 \Rightarrow \Phi(0.2\sqrt{n}) = 0.975$

$\Rightarrow \Phi(0.2\sqrt{n}) = \Phi(2) \underset{\Phi: 1-1}{\Longrightarrow} 0.2\sqrt{n} = 2$

$\Rightarrow \sqrt{n} = 10 \Rightarrow n = 100.$

Απόδειξη του ΚΟΘ: (Εκτός ύλης)

Λήμμα:

Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία τ.μ. που έχουν ροπογεννήτριες $(M_{X_n})_{n\geq 1}$ και X με ροπογεννήτρια M_X.

Αν $\exists\, \varepsilon > 0$: $M_{X_n}(t) \to M_X(t)$, $\forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Τότε $X_n \xrightarrow{d} X$

Απόδειξη ΚΟΘ $\Rightarrow$ Θέλουμε να δ.ο $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$

όπου, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (X_i ροπογεννήτριες $\equiv M_{X_1}(t)$)

Ισχυρισμός: Αρκεί να δειχθεί μόνο για $\mu=0$, $\sigma^2=1$. Πράγματι

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i'}{\sqrt{n}} = \frac{S_n'}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

όπου X_i' έχει $E(X_i') = 0$, $Var(X_i') = 1$

(αν έχει δειχθεί για $\mu=0$, $\sigma^2=1$)

Δηλ. θέλουμε να δείξουμε $Z_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$

Από το Λήμμα, αρκεί να $\exists\, \varepsilon>0$: $\forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$M_{Z_n}(t) \to M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Έχουμε $M_{Z_n}(t) = E(e^{tZ_n}) = E(e^{t\frac{S_n}{\sqrt{n}}}) = E(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}S_n})$

$= M_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = M_{X_1}^{n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ (1) $\xrightarrow{\text{αφού } S_n = X_1+\dots+X_n \text{ α.ι.τ.μ}} M_{S_n}(t) = M_{X_1}^{n}(t)$

(για $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$)

$$M_{X_1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E(X_1^k)\frac{t^k}{k!} = 1 + \underset{0}{E(X_1)}\,t + \underset{1}{E(X_1^2)}\frac{t^2}{2} + \sum_{k\geq 3} E(X_1^k)\frac{t^k}{k!}$$

$$\underset{\sigma^2=1}{\overset{\mu=0}{=}} 1 + \frac{t^2}{2} + \sum_{k\geq 3} E(X_1^k)\frac{t^k}{k!} \Rightarrow$$

$$M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t^2/2}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k\geq 3}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{E(X_1^k)t^k}{n^{(k-3)/2}k!} = 1 + \frac{\frac{t^2}{2} + V_n(t)}{n}$$

όπου, $V_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\geq 3}\frac{E(X_1^k)t^k}{n^{(k-3)/2}k!} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\underbrace{\sum_{k\geq 3}\frac{E(X_1^k)t^k}{k!}}_{<\infty}\Big)$ $\left(\begin{array}{l}\text{από υπόθεση}\\ M_{X_1}(t)<\infty\\ t\in(-\varepsilon,\varepsilon)\end{array}\right)$

$\left(n\geq 1 \quad \frac{1}{n^{(k-3)/2}} \leq 1\right)$

$$\Rightarrow V_n(t) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\, G(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Άρα, $M_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{U_n(t)}{n}$, όπου $U_n(t) = \frac{t^2}{2} + V_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{t^2}{2}$

Τελικά, $M_{Z_n}(t) = M_{X_1}^{\,n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 + \frac{U_n(t)}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lim_{n\to\infty} U_n(t)}$

$$= e^{t^2/2} \qquad (\forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon))$$

30/5/16

ΜΑΘΗΜΑ 36ο

Επαναληπτικές Ασκήσεις:

1) Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ροπογεννήτριες τμ;

- $M_1(t) = t^2$, $t\in\mathbb{R}$
- $M_2(t) = \begin{cases} \frac{3}{1-t}, & t<1 \\ +\infty, & t\geq 1\end{cases}$
- $M_3(t) = 1$, $t\in\mathbb{R}$
- $M_4(t) = \begin{cases} \frac{6}{(2-t)(3-t)}, & t<2 \\ +\infty, & t\geq 2\end{cases}$
- $M_5(t) = e^t$, $t\in\mathbb{R}$.

$\rightarrow$

Λύση:

• $M_1(0) = 0 \neq 1$ (όχι) $\left(M_X(t) = E(e^{tX}),\ \text{αν } t=0\ \ M_X(0)=1\right)$

• $M_2(0) = 3 \neq 1$ (ίδιος λόγος)

• $M_3(t) = 1 = E(e^{t\cdot 0})$, έχουμε για $X=0$, με πιθ. 1 ικανοποιείται

άρα NAI!

• $M_4(t) \overset{t<2}{=} \dfrac{2}{2-t} \cdot \dfrac{3}{3-t} = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t)$, όπου $X_1 \sim \mathcal{E}xp(2)$, $X_2 \sim \mathcal{E}xp(3)$ (για $t<2$)

Άρα, λοιπόν αφού $X_1 \sim \mathcal{E}xp(2)$ $X_2 \sim \mathcal{E}xp(3)$ και αν X_1, X_2 ανεξάρτητες

$\Rightarrow M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) = M_4(t)$ παντού.

αφού, είναι και $+\infty$ για $t \geq 2$.

Τελικά, NAI για $X = X_1 + X_2$

• $M_5(t) = e^t = e^{t\cdot 1} = E(e^{tX})$, όπου $X=1$, με πιθαν. 1

~Άσκηση~ Ελέγξτε για $M(t) = t^2+1$

Υπόδειξη: ανισότητες ροπών (αν υπάρχει για κάποια μεταβλητή X)

2) $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$, $X_i \sim Be(p)$, $0<p<1$ και

$N \sim Geo^*(\theta)$, $0<\theta<1$, δηλαδή Γεωμετρική στο $0,1,2,\ldots$

όπου, $\{N, X_1, X_2, \ldots\}$ ανεξαρτ. τ.μ.

Να βρεθεί η κατανομή της S_N.

Λύση:

$$P_{S_N}(z) \overset{\text{από γνωστή πρόταση}}{=} P_N(P_{X_1}(z)) \qquad P_{X_1}(z) = E(z^{X_1})$$

$X_1 \sim Be(p) \Rightarrow P_{X_1}(z) = 1-p+p\cdot z$

$N \sim Geo^*(\theta) \Rightarrow P_N(z) \underset{\text{έχει υπολογιστεί}}{=} \dfrac{\theta}{1-(1-\theta)z}$, $|z| < \dfrac{1}{1-\theta}$

Από (1) και (2) έχουμε: $P_{S_N}(z) = \dfrac{\theta}{1-(1-\theta)[1-p+pz]} = \dfrac{\theta}{1-(1-\theta)(1-p)-(1-\theta)\cdot p\cdot z}$

$$= \frac{\dfrac{\theta}{1-(1-\theta)(1-p)}}{1-\dfrac{(1-\theta)p}{1-(1-\theta)(1-p)}z} \overset{?}{=} \frac{\lambda}{1-(1-\lambda)z} \quad \text{όπου } 0<\lambda<1, \quad |z| < \frac{1}{1-\lambda}$$

Θέτοντας $\lambda = \dfrac{\theta}{1-(1-\theta)(1-p)}$, έχουμε:

Πράγματι

$$1-\lambda = 1 - \frac{\theta}{1-(1-\theta)(1-p)} = \frac{1-(1-\theta)(1-p)-\theta}{1-(1-\theta)(1-p)} = \frac{(1-\theta)(1-(1-p))}{1-(1-\theta)(1-p)}$$

$$= \frac{(1-\theta)p}{1-(1-\theta)(1-p)}$$ και επαληθεύουμε άμεσα $0<\lambda<1$

Τελικά, $S_N \sim Geo(\lambda)$

3) Θέμα 1 (Σεπτέμβριος '15)

Ρίχνουμε 1 ζάρι μέχρι για 1η φορά να εμφανιστεί «5» και έστω $X = \#$ δοκιμών που απαιτούνται. Να βρείτε:

α) τον αναμενόμενο αριθμό δοκιμών, τη σ.π της X και τη διασπορά της.

β) πιθαν. να μην εμφανιστεί «3», αν είναι γνωστό ότι το «5» εμφανίστηκε για 1η φορά στην κ-δοκιμή $k=1,2,\dots$

γ) πιθαν. να εμφανιστεί το "3"? (τουλάχιστον 1 φορά)

δ) πιθαν να εμφανιστούν και οι δύο ενδείξεις «3» και «6» από τουλάχιστον 1 φορά η κάθε μια?

Λύση

(α) $X = \#$ δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία, σε ανεξάρτητες δοκιμές $Be(p=\frac{1}{6})$. Άρα $P(X=k) = p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ για $k=1,2,\dots$ αφού $X \sim Geo(p)$

$E(X) = E(Geo(\frac{1}{6})) = 6 \qquad (E(Geo(p)) = \frac{1}{p})$

$Var(X) = Var(Geo(\frac{1}{6})) = \dfrac{\frac{5}{6}}{(\frac{1}{6})^2} = 30 \qquad (Var(Geo(p)) = \frac{1-p}{p^2})$

$$\qquad\qquad A \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad B_K$$

(β) P("να μην εμφανιστεί το «3»" | "εμφανιστ. το «5» πρωτη φορα" στην Κ-δοκιμή)

$$P(A|B_K) = \frac{P(AB_K)}{P(B_K)} \quad (1)$$

$P(AB_K) = P($"να μην εμφανιστεί το «3» και το «5» για 1η φορα στην κ-δοκιμή"$)$

$$= P(\underbrace{\text{"όχι 3 ή 5"}, \text{"όχι 3 ή 5"} \ldots \text{"όχι 3 ή 5"}}_{(\kappa-1)\,\text{δοκιμές}}, \underbrace{\text{"ναι 5"}}_{\kappa\text{-δοκιμή}})$$

$$\overset{\text{λογω}}{\underset{\text{ανεξ}}{=}} P(\text{"όχι 3 ή 5"})^{\kappa-1} P(\text{"ναι 5"}) = \left(\frac{4}{6}\right)^{\kappa-1} \cdot \frac{1}{6} \quad \kappa=1,2,\ldots \ (2)$$

$$P(B_K) = P(X=\kappa) \overset{(\alpha)}{=} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{\kappa-1} \quad \kappa=1,2,\ldots \ (3)$$

Από (2) και (3) στην (1)

$$P(A|B_K) = \frac{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{\kappa-1}}{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{\kappa-1}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\kappa-1}, \ \kappa=1,2,\ldots$$

(γ) P("εμφανιστεί το «3» τουλάχιστον 1 φορά") =

1 − P("να μην εμφανιστεί το «3»") = 1 − P(A)

$$P(A) = \sum_{\kappa=1}^{+\infty} P(AB_K) \qquad \left(\text{ή θοπ } \sum_{\kappa=1}^{+\infty} P(B_K)P(A|B_K)\right)$$

$$\text{Άρα } P(A) = \sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^{\kappa-1} = \frac{1}{6}\sum_{\kappa=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^{\kappa} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{6}} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \text{ζητουμ. πιθ} \quad 1-P(A) = \frac{1}{2}$$

(δ) Εστω A_3: "να μην εμφανιστεί το 3" $(A \to A_3)$

A_6: "να μην εμφανιστεί το 6"

P("να εμφανιστεί το «3» και «6» από τουλάχιστον 1 φορα")

= 1 − P("να μην εμφανιστεί το «3» ή να μην εμφανιστεί το «6»")

$$= \underline{\underline{1 - P(A_3 \cup A_6)}} \left(= P((A_3 \cup A_6)^c) = P(A_3^c A_6^c)\right)$$

$$P(A_3 \cup A_6) = P(A_3) + \underset{(3\to 6)}{P(A_6)} - P(A_3A_6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(A_3A_6)$$

$\Leftrightarrow$ ζητουμ. πιθαν. $= P(A_3A_6)$

Όμως, $P(A_3A_6) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_3A_6B_k)$ ⊛

⊛ $P(A_3A_6B_k) = P(\underbrace{\text{"όχι 3 ή 5 ή 6", "όχι 3 ή 5 ή 6"}, \dots}_{(k-1)\text{ δοκιμές}}, \underbrace{\text{"και 5"}}_{k\text{-δοκιμή}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$

Άρα $P(A_3A_6) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ 4º | Σεπτεμβρ. '15

Έστω (U,V) διδιάστατη τμ με σππ $f_{U,V}$ και περιθώριες σ.π.π f_U, f_V

(α) Να βρεθεί σταθερά c: $f(x,y) = c\left(f_{U,V}(x,y) + f_{U,V}(y,x)\right)$ να είναι σ.π.π. κάποιας 2-διαστ. τμ.

(β) Αν (X,Y) με $f_{X,Y}(x,y) = f(x,y)$, Ν.δ.ο $f_X(x) = f_Y(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Τι συμπεραίνετε για τις τμ X και Y

(γ) Δ.ο $(X,Y) \stackrel{d}{=} (Y,X)$ (υποδ: δείξτε $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y,X}(x,y)$)

(δ) Να υπολογισθεί η $P(X<Y)$

Λύση:

(α) Πρέπει $c>0$ και $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

Θέτω $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} c\left(f_{U,V}(x,y) + f_{U,V}(y,x)\right)dx\,dy \stackrel{\text{πρέπει}}{=} 1$

Έχουμε, $I = c\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(x,y)\,dx\,dy}_{=1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(y,x)\,dx\,dy}_{=1}\right)$ ($y = u$, $x = v$, $x = v$, $y = u$)

διότι η $f_{U,V}$ είναι σ.π.π

$$\Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

(β) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(f_{U,V}(x,y) + f_{U,V}(y,x)\right)dy$

$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(x,y)\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(x,y)\,dy\right) = \frac{1}{2}\, f_U(x) + f_V(x)$

εναλλακτ.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \qquad \left(f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,x)\,du \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(f_{U,V}(x,y) + f_{U,V}(y,x) \right) dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(x,y)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(y,x)\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f_V(y) + f_U(y) \right) \quad , \forall y \in \mathbb{R}$$

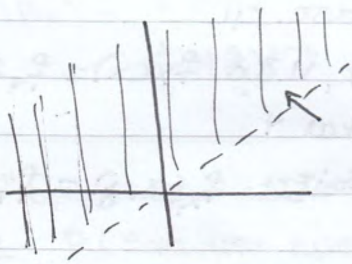
$$\xRightarrow{f_X = f_Y} \quad X \stackrel{d}{=} Y.$$

(γ) $f_{Y,X}(x,y) = f_{X,Y}(y,x) = \frac{1}{2}\left(f_{U,V}(y,x) + f_{U,V}(x,y) \right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(f_{U,V}(x,y) + f_{U,V}(y,x) \right) = f_{X,Y}(x,y)$$

$$\Rightarrow (X,Y) \stackrel{d}{=} (Y,X)$$

(δ)



$$P(X<Y) = P((X,Y) \in S) \underset{(X,Y) \stackrel{d}{=} (Y,X)}{=\!=} P((Y,X) \in S) = P(Y<X) \ (*)$$

Όμως, $\underset{\substack{\| \\ 0}}{P(X=Y)} + P(X<Y) + P(Y<X) = 1 \xRightarrow{(*)} P(X<Y) = \frac{1}{2}$

$\left(\begin{array}{c} P(X,Y) \in \text{ευθεία} \\ \text{εμβαδόν} = 0 \end{array} \right)$

Ασκ. 5] Θέμα 1 | Φεβρ.' 16

(α) Οι 30 επιβάτες ενός λεωφορείου θα αποβιβαστούν τυχαία στις επόμενες 3 στάσεις $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Να βρεθεί η πιθαν. να αποβιβαστεί, τουλάχιστον 1 επιβάτης σε καθεμιά από τις 3 στάσεις.

A_i : "Να επιβιβαστεί τουλάχιστον 1 επιβάτης στη στάση Σ_i", $i = 1,2,3$.

Λύση:

ζητουμ. πιθαν $= P(A_1A_2A_3) = 1 - P((A_1A_2A_3)^c) = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c)$

$P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c) = P(A_1)^c + P(A_2^c) + P(A_3^c) - P(A_1^c A_2^c) - P(A_1 A_3^c)^{(1)}$

$- P(A_2^c A_3^c) + P(A_1^c A_2^c A_3^c) =$

$= 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{30} - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{30} + 0$

$\Rightarrow$ ζητούμενη πιθ. $= 1 - 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{30} - \left(\frac{1}{3}\right)^{30}\right]$

1/6/16

ΜΑΘΗΜΑ 37ο (Τελευταίο...)

Θέμα 1ο | Φλεβ. '16

(β) Έστω X τ.μ. με $E(X)=3$, $E(X^2)=13$. Ν.δ.ο $P(-2\le X\le 8)\geq \frac{21}{25}$

Λύση:

$P(-2\le X\le 8)=P(-2-3\le X-E(X)\le 8-3)=P(-5\le X-E(X)\le 5)=P(|X-E(X)|\le 5)$

Γνωρίζουμε ότι: $P(|X-E(X)|>5)\overset{\text{chebyshev}}{\le}\frac{Var(X)}{5^2}=\frac{E(X^2)-E^2(X)}{25}=\frac{13-3^2}{25}=$

$=\frac{4}{25}$

$P(|X-E(X)|\le 5)=1-P(|X-E(X)|>5)\geq 1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}$

Θέμα 4ο | Φλεβ. 16

Έστω X συνεχής τ.μ. με σ.π.π

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & e^{-1}<x<e\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η σ.π.π της $Y=\ln X$

(β) Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. α.ι.τ.μ. με σ.π.π f_X

Αν $W_n=\prod_{i=1}^{n}X_i$, ν.δ.ο $\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\ln W_n}{\sqrt{n}}\le x\right)=\Phi(x\sqrt{3})$, $x\in\mathbb{R}$.

Λύση:

$Y=\ln X=g(X)$, όπου $g:(e^{-1},e)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\ln x$ είναι "1-1" (άρα αντιστρέψιμη)

έχουμε, $y=\ln x \Rightarrow x=e^y=g^{-1}(y)$ και

$e^{-1}<x<e \Rightarrow \ln e^{-1}<\ln x<\ln e \Rightarrow -1<y<1$

Άρα $S_Y=g(S_X)=(-1,1)$ και έχουμε από γνωστή πρόταση

$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|=f_Y(e^y)|(e^y)'|=\frac{1}{2e^y}e^y$

$=\frac{1}{2}$

Τελικά, $f_Y(y)=\frac{1}{2}\mathbb{1}_{(-1,1)}(y)$ ή $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & y\in(-1,1)\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$

$\Rightarrow Y\sim U(-1,1)$.

β) $\ln W_n = \ln \prod_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \ln X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i = S_n$

$\{X_i\}_{i\geq 1}$ α.ι.τ.μ. $\Rightarrow \{Y_i = \underset{g(X_i)}{\underbrace{\ln X_i}}\}_{i\geq 1}$ α.ι.τ.μ.

Έχουμε, $E(S_n) = n\,E(Y_1) = n\,E(U(-1,1)) = 0$ (1)
διότι, αν $U \sim U(\alpha,\beta)$ τότε $E(U) = \frac{\alpha+\beta}{2}$ και $Var(U) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

$Var(S_n) = n \cdot Var(Y_1) = n\,Var(U(-1,1)) = \frac{n \cdot 2^2}{12} = \frac{n}{3}$ (2)

Εφαρμόζουμε το ΚΟΘ (όλες οι προϋποθέσεις ισχύουν από τα παραπάνω)

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \overset{(1),(2)}{=} \frac{S_n}{\sqrt{\frac{n}{3}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z \sim N(0,1) \quad (*)$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\ln W_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{\frac{n}{3}}} \leq x\sqrt{3}\right) \overset{(*)}{=} P(Z \leq x\sqrt{3}) = \Phi(x\sqrt{3}),\ \forall x \in \mathbb{R}.$

ΘΕΜΑ 2ο | Φλεβ.'16

Έστω X συνεχής τμ με $f_X(x) = \begin{cases} c - x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(α) c; (β) $F_X(x) = ?$ (γ) $E(X^n)$, $n\geq 1$ (δ) να αναλυθεί σε δυναμοσειρά, η ροπογεννήτρια $M_X(t)$

Λύση:

(α), (β), (γ) ενδεικτικές απαντήσεις:

(α) $c = \frac{4}{3}$ (β) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{4x - x^3}{3}, & 0\leq x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$ (γ) $E(X^n) = \frac{4}{3(n+1)} - \frac{1}{n+3}$, $n\geq 1$

(δ) Όταν υπάρχει η $M_X(t)$ (σε διάστημα γύρω από το 0) τότε, $M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(X^n)\frac{t^n}{n!}$ = (η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση ροπών)

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{3(n+1)} - \frac{1}{n+3}\right)\frac{t^n}{n!}$

Άσκηση:

Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο Μ, στο μοναδιαίο δίσκο και έστω (X,Y) οι συντεταγμένες του. Να βρεθούν:

(α) η σ.π.π της (X,Y)

(β) οι περιθώριες σ.π.π $f_X(x)$, $f_Y(y)$. Είναι οι X και Y ισόνομες? Είναι ανεξάρτητες;

(γ) η πιθανότητα του επιλεγμένου σημείου να απέχει από την αρχή των αξόνων μικρότερο ίσο από κάποιο $a \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $L = (OM)$

(δ) $E(L) = ?$ $Var(L) = ?$

(ε) $f_{X|Y}(x|y) = ;$ (όταν ορίζεται)

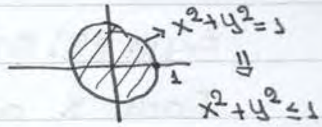
(ζ) $E[X|Y=y] = ?$ (όταν ορίζεται) και $Var(X|Y=y)$

(η) Ν.δ.ο η L^2 και X είναι ασυσχέτιστες τ.μ. ενώ, δεν είναι ανεξάρτητες τμ.

Λύση:

(α) Επειδή, έχουμε τυχαία επιλογή, συμπεραίνουμε ότι η κατανομή της είναι ομοιόμορφη στο μοναδιαίο δίσκο. Άρα έχει σ.π.π

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

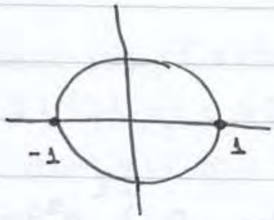


Πρέπει: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} c\,dx\,dy = 1 \Rightarrow c \cdot \underset{x^2+y^2\leq 1}{\text{εμβαδον (δίσκου)}} = 1$$

$$\Rightarrow c\cdot \pi = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$$

β)



Έχουμε $f_X(x) = 0$, $\forall x$, με $|x|>1$

$\forall x$ με $|x|\le 1$ έχουμε

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy$$

$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

$x^2+y^2=1$

$y^2 = 1-x^2$

$|y| = \sqrt{1-x^2}$

δηλ. $|y| \le \sqrt{1-x^2}$

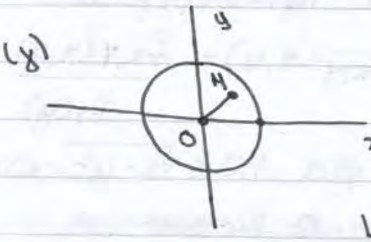
Άρα $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$

Λόγω συμμετρίας, παρομοίως $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & |y|\le 1 \\ 0, & |y|>1 \end{cases}$

Έχουμε $f_X = f_Y$ άρα $X \stackrel{d}{=} Y$ (ισόνομες τ.μ.) ($f_X(x) = f_Y(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

Έχουμε $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, δεν είναι ανεξάρτητες οι X και Y.

(γ)



$$P((OM)\le a) = P(L\le a) \qquad L = (OM)$$

$$\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \| \; F_L(a)$$

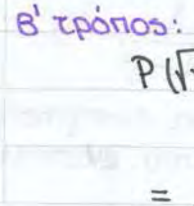
$L = \sqrt{X^2+Y^2}$

Παρατηρούμε ότι $P(L<a) = 0$, για $a<0$

$P(L<a) = 1$, για $a \geq 1$

Έστω $0 \le a < 1$, $P(L\le a) = P(\sqrt{X^2+Y^2} \le a)$

α' τρόπος: $\{\sqrt{X^2+Y^2}\le a\}$ = είναι ο μικρός κυκλικός δίσκος, με ακτίνα α



ακτίνα α

$$\Rightarrow P(L\le a) \xrightarrow[\text{πιθανότητα}]{\text{κλασσική}} \frac{\text{εμβαδόν ευνοϊκής}}{\text{εμβαδόν μεγάλου κυκλ. δισκ.}} =$$

$$= \frac{\text{εμβαδόν δίσκου ακτίνας } a}{\text{εμβαδόν δίσκου ακτίνας } 1} = \frac{\pi a^2}{\pi \cdot 1^2} = a^2$$

β' τρόπος:

$$P(\sqrt{X^2+Y^2}\le a) = P(X^2+Y^2 \le a^2) = \iint_{x^2+y^2\le a^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi}\left(\text{εμβαδόν δίσκου ακτίνας } a\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\pi a^2 = a^2$$

Τελικά, $\underset{\substack{\| \\ F_L(a)}}{P(L \le a)} = \begin{cases} 0, & a<0 \\ a^2, & 0 \le a < 1 \\ 1, & a \ge 1 \end{cases}$

(δ) $E(L) = \int_0^1 a\, f_L(a)\,da = \int_0^1 a\, F_L'(a)\,da = 2\int_0^1 a^2\,da = 2\frac{a^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

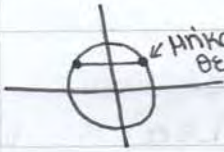
$Var(L) = E(L^2) - E^2(L)$

$E(L^2) = \int_0^1 a^2 f_L(a)\,da = 2\int_0^1 a^3\,da = 2\frac{a^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow Var(L) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$

(ε) $f_{X|Y}(x|y) = ?$

Θέλω $f_Y(y) > 0$. Άρα $|y| \le 1$ και $\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} > 0$



Άρα $|y|<1$, και για $|y|<1$ ορίζεται $f_{X|Y}(x|y)$. Τότε, $f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}$, για $|x| \le \sqrt{1-y^2}$ και 0 διαφορετικά

Άρα $[X|Y=y] \sim Unif(-\theta, \theta)$, όπου $\theta = \sqrt{1-y^2}$

(ζ) $E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x}{2\sqrt{1-y^2}}\,dx = 0$

περιττή (ως προς x) συνάρτηση σε συμμετρ. διάστημα γύρω από 0.

$Var(X|Y=y) = E(X^2|Y=y) - \underset{\substack{\| \\ 0}}{E^2(X|Y=y)} = E(X^2|Y=y)$

$E(X^2|Y=y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2 f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2 \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\,dy =$

άρτια συνάρτηση σε συμμ. διάστημα

$= \frac{2}{2\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2\,dx = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} =$

$= \frac{(\sqrt{1-y^2})^3}{3\sqrt{1-y^2}} = \frac{1-y^2}{3}$.

Διαφορετικά, $[X|Y=y] \sim Unif(-\theta,\theta)$

$\Rightarrow E(X|Y=y) = E[U(-\theta,\theta)] = 0$

$Var(X|Y=y) = Var(U(-\theta,\theta)) = \frac{(2\theta)^2}{12} = \frac{\theta^2}{3} = \frac{\sqrt{1-y^2}^{\,2}}{3} = \frac{1-y^2}{3}$

η) $Cov(X,L^2) = Cov(X, \sqrt{X^2+Y^2}^{\,2}) = Cov(X, X^2+Y^2) = Cov(X,X^2) + Cov(X,Y^2)$

$= \underset{\substack{\| \\ 0}}{E(X^3)} - \underset{\substack{\| \\ 0}}{E(X)}E(X^2) + E(XY^2) - \underset{\substack{\| \\ 0}}{E(X)}E(Y^2) = E(XY^2)$

χ συμμετρική κατανομή

$E(XY^2) = E[E(XY^2|Y)] - E[Y^2 \underset{\substack{\| \\ 0}}{E(X|Y)}] = 0$

Διαφορετικά, $\underset{\substack{\| \\ g(X,Y)}}{E(XY^2)} = \iint_{x^2+y^2\leq 1} xy^2 \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{c}\,dx\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\,dx\,dy$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} y^2 \underbrace{\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx}_{0}\,dy = 0$

Τελικά, $Cov(X,L^2)=0 \Rightarrow X, L^2$ είναι ασυσχέτιστες τμ

Όταν X,Y ανεξαρτ. τ.μ $P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)$

Αν $X \perp\!\!\!\perp L^2 \Rightarrow X^2 \perp\!\!\!\perp \underset{\substack{\| \\ X^2+Y^2}}{L^2}$. Παρατηρούμε ότι:

$P(X^2 > \frac{1}{4}, X^2+Y^2 < \frac{1}{4}) = 0$

Όμως, $P(X^2 > \frac{1}{4})P(X^2+Y^2 < \frac{1}{4}) = \underset{>0}{P(|X| > \frac{1}{2})}\ \underset{>0}{P(L<\frac{1}{2})}$

Τελικά, $P(X^2 > \frac{1}{4}, X^2+Y^2 < \frac{1}{4}) \neq P(X^2 > \frac{1}{4})P(X^2+Y^2 < \frac{1}{4})$

άτοπο!

από $X \perp\!\!\!\perp L^2$ (δηλαδή είναι εξαρτημ. τ.μ.)

Άσκηση: (Μόνοι μας)

(1) Έστω X, Y 2 τμ. Να εξετάσετε αν:

$(X, Y) \stackrel{d}{=} (Y, X)$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) χωρίς καμία επιπλέον υπόθεση.

(β) αν X, Y είναι ισόνομες δηλ $X \stackrel{d}{=} Y$

(γ) αν X, Y είναι ανεξ + ισον τμ.

Σε αρνητική περίπτωση να δοθεί αντιπαράδειγμα

(2) Έστω O_1 και O_2 2 σημεία στο επίπεδο και O_1O_2 το αντίστοιχο ευθυγρ. τμήμα. Επιλέγουμε ανεξάρτητα και τυχαία 2 σημεία M_1 και M_2 στο ευθυγρ. τμήμα O_1O_2 και σχεδιάζουμε τους αντίστοιχους κύκλους με κέντρο το O_i και ακτίνα $(O_i M_i)$ $1 \le i \le 2$. Ζητείται η πιθανότητα οι 2 κύκλοι να τέμνονται

→ Η ύλη από κάθε βιβλίο θα αναρτηθεί στην e-class.

→ Η ύλη από τα μαθήματα που ανέβηκαν επίσης.

→ Οι αποδείξεις δεν εξετάζονται, μόνο όταν δεν θυμόμαστε τον τύπο απ'έξω!

→ Τα θέματα είναι ισοδύναμα, διαλέγουμε τα 3 από τα 4 και αθροίζουν στο 12,5.