Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Ηλεκτρονική Τάξη: http://eclass.uoa.gr

Σημειώσεις Φοιτητών

Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Μάθημα:

241. Πιθανότητες I

Διδάσκων: Σ. Τρέβεζας

Ευχαριστούμε για τις σημειώσεις τη: Λίλιαν

Πιθανότητες I

Μάθημα 1ο - 6/10/2014

Τυχαίο πείραμα: ή πείραμα τύχης: τυχαίο φαινόμενο ή φαινόμενο στο οποίο υπεισέρχονται τυχαίοι παράγοντες.

π.χ. i) Ρίψη ζαριού/νομίσματος
ii) Κατάσταση του καιρού αύριο σε μία συγκεκριμένη περιοχή.
iii) Παρατήρηση της διάρκειας ζωής μιας μηχανής/λαμπτήρα.
iv) Ο αριθμός και το ύψος των απαιτήσεων τον επόμενο μήνα σε μια ασφαλιστική εταιρεία.

Όχι τυχαίο πείραμα: η ελεύθερη πτώση μιας σφαίρας από 2m

Δειγματικός χώρος: $(\Omega, \underline{\Omega})$ Σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων

διάκριση δ.χ.
- → πεπερασμένος, $|\underline{\Omega}| < +\infty$, $\underline{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ $n \in \mathbb{N}$
- → αριθμήσιμως άπειρος, $|\underline{\Omega}| = |\mathbb{N}|$ $\underline{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$
- → συνεχής, $|\underline{\Omega}| > |\mathbb{N}|$

Δειγματικό σημείο: ένα δυνατό αποτέλεσμα $\omega \in \underline{\Omega}$

Ενδεχόμενο: ένα κατάλληλο υποσύνολο του δ.χ.
(συμβ. A, B, C, ...)
- → απλό ή στοιχειώδες: $|A| = 1$
- → σύνθετο $|A| > 1$

Πιθανότητα : Συνάρτηση που αποδίδει βαθμούς βεβαιότητας στα ενδεχόμενα, με τιμές στο $[0,1]$.

② Παραδείγματα

α) i) ρίψη 1 ζαριού $\longrightarrow$ $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$

ii) ρίψη 1 νομίσματος $\longrightarrow$ $\Omega = \{K, \Gamma\}$

iii) ρίψη 2 ζαριών $\longrightarrow$ $\Omega_1 = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$

iv) ρίψη νομίσματος μέχρι η πρώτη φορά να είναι γραμ. →

$$\Omega = \{\Gamma, K\Gamma, KK\Gamma, KKK\Gamma, ...\}$$

β) Κατάσταση καιρού : $\Omega = \{$ήλιος, μόνο σύννεφα, βροχή, χιόνι, χαλάζι, ...$\}$

γ) Διάρκεια ζωής μηχανής/λαμπτήρα : $\Omega = [0, +\infty)$

Ρίχνω 2 ζάρια

πχ. στο τάβλι →	φυσιολ. δ.χ. όταν δεν παίζω	φυσιολ. δ.χ όταν παίζω	P
→ διαδοχικά	Ω_1	Ω_2	
→ μαζί και τα διακρίνω	Ω_1	Ω_2	
→ μαζί και δεν τα διακρίνω	Ω_2	Ω_2	

$$P(\text{"να φέρω ασόδυο"}) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{36}$$

Όμως, αν επέλεγα Ω_2 : $P(\text{"ασόδυο"}) \neq \frac{1}{21}$

$\Omega_1 \rightarrow A_1 = \{(1,2), (2,1)\}$

$\Omega_2 \rightarrow A_2 = \{(1,2)\}$

$$\Omega_2 = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6) \\ & (2,2) & & (2,6) \\ & & & \vdots \\ & & & (6,6) \end{array} \right\}$$

Συμπεράσματα

1. Ο δ.χ. δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος σε ένα π.τ.
2. Ο "βολικός" δ.χ. ειναι αυτός που κάνει τα δ.σ. ισοπίθανα. (είναι πεπερασμένος)
3. Το ενδεχόμενο μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφ. υποσύνολα όταν έχω διαφ. δ.χ.
4. Προσοχή! Το τι παρατηρώ μπορεί να με βοηθά να βρω ένα δ.χ., αλλά μη συγχέεται με το τι μπορώ να καθορίσω ως δ.χ. του τυχαίου πειράματος. Ένα αποτέλεσμα του π.τ. μπορεί να μην είναι παρατηρήσιμο.

③ Διαφορετικές μορφές πιθανότητας

i) **κλασική πιθανότητα:** (Κατά Laplace)
προϋποθέτει πεπερασμένο δ.χ. και ισοπίθανα δ.σ.

- Αν Α ενδεχόμενο, $P(A) = \dfrac{\#\text{ ευνοϊκών περιπτ}}{\#\text{ δυνατών περιπτ.}} = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

πχ. i) $P(\text{"να φέρω ασόδυο"}) = \dfrac{2}{36}$

ii) $P(\text{"οι ενδείξεις των ζαριών να διαφέρουν κατά 2"}) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$

$B = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4)\}$

ii) **οριακή σχετική συχνότητα**: προϋποθέτει ότι το π.τ. μπορεί να επαναλαμβάνεται απεριόριστα.

- Αν Α ενδεχόμενο, $P(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{N_n(A)}{n}$

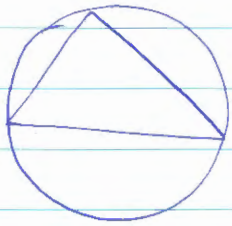
$N_n(A)$: Το πλήθος των φορών που πραγματοποιήθηκε το Α σε n-επαναλήψεις του π.τ.

⁓→ Προβλήματα που δημιουργούνται

1. ∃ π.τ. πολύ δύσκολα επαναλαμβανόμενα (κόστος, χρόνος πυρην. φυσική)
2. ∃ π.τ. που είναι αδύνατον να επαναληφθούν.
3. ∃ το όριο (?) αν ναι, ποιο είναι το n που σταματάω? Τι σφάλμα έκανα?
4. Σφάλματα με όργανα μέτρησης + ερευνητή

iii) **Γεωμετρική πιθανότητα**: προϋποθέτει ότι ο δ.χ. και τα ενδεχόμενα μπορούν να αναπαρασταθούν γραφικά

π.χ. τυχαία ρίψη ενός νομίσματος σε ένα κυκλικό στόχο. Ποια η πιθ. να πέσει το κέντρο του νομίσματος στο τρίγωνο;

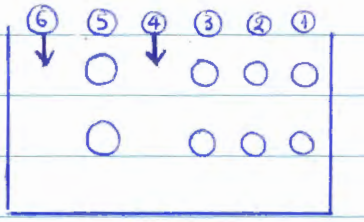


$$P(A) = \frac{\text{εμβαδόν "ευνοϊκής" περιοχής}}{\text{εμβαδόν κύκλου}}$$

iv) **Εμπειρική πιθανότητα**: υποκειμενική εκτίμηση της "πιθανότητας πραγματοποίησης" κάποιου ενδεχομένου ή ένα μέτρο της πεποίθησής μας.

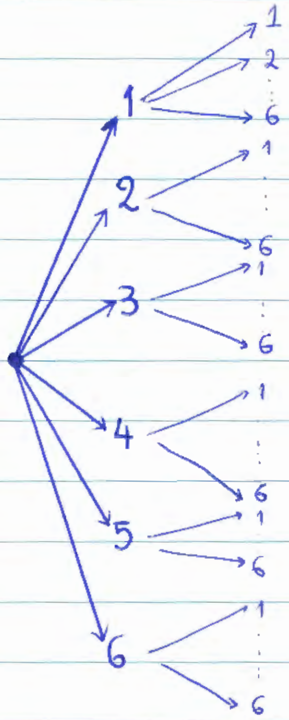
④ Ασκήσεις

1)



P("να μπω στο παιχνίδι στην επόμενη ζαριά")

A: "." = ("να φέρω 4 ή 6 σε κάποιο από τα 2 ζάρια").



$|A| = 2+2+2+6+2+6 = 20$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

ή $2 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{9}$

(υπολογισμός πιθαν. με δεντροδιαγραμμα)

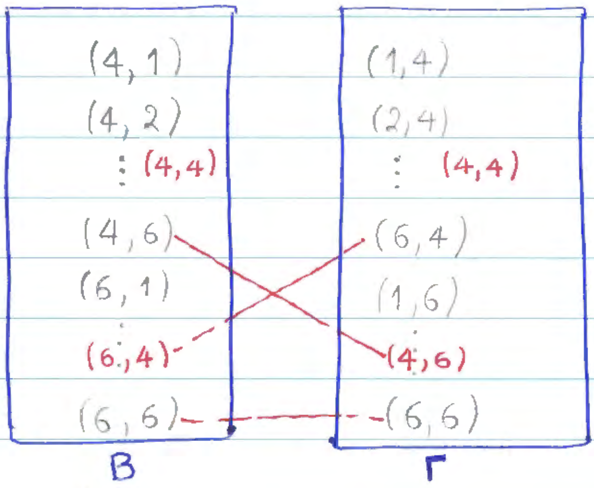
! Κάθε βέλος μου δίνει μία καινούρια διαδρομή με πιθανότητα $\frac{1}{6}$

Μάθημα 2ο - 8/10/2014

Ασκήσεις

① (συνέχεια) P("να φέρω 4 ή 6 σε τουλ. ένα ζάρι από τα 2")

β)



$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

τα κοινά στοιχεία που εμφ. 2 φορές

$|A| = 12 + 12 - 4 = 20 \Rightarrow$

$A = B \cup \Gamma$

$|A| = |B| + |\Gamma| - |B\Gamma|$

$B\Gamma = \{(4,4), (4,6), (6,4), (6,6)\}$

(αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού)

$\rightarrow \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|B|}{|\Omega|} + \frac{|\Gamma|}{|\Omega|} - \frac{|B\Gamma|}{|\Omega|} \Rightarrow P(A) = P(B) + P(\Gamma) - P(B\Gamma)$

* Ο πιο πονηρός τρόπος *

$|A| = |\Omega| - |A^c|$

A^c: "να μη φέρω 4 ή 6 σε κανένα από τα 2 ζάρια".
"να φέρω 1, 2, 3 ή 5 και στα 2 ζάρια".

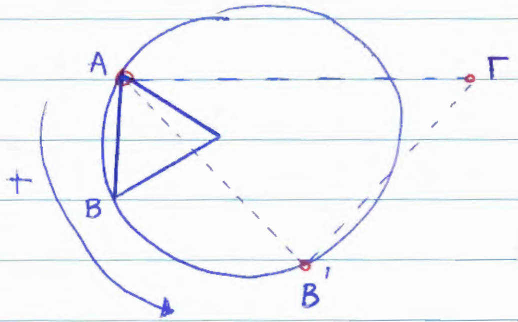
$A^c = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,5\}\}$ / $|A^c| = 4^2 = 16 \Rightarrow |A| = 36 - 16 = 20$

$\Rightarrow P(A) = \frac{5}{9}$

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} - \frac{|A^c|}{|\Omega|} \rightarrow P(A) = 1 - P(A^c).$$

② Γεωμετρική πιθανότητα

Επιλέγω τυχαία 2 σημεία A και B πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου. Ποια είναι η πιθανότητα το ισόπλευρο τρίγωνο που σχηματίζεται με χορδή την AB, να περιέχεται εξ' ολοκλήρου μέσα στον κύκλο;

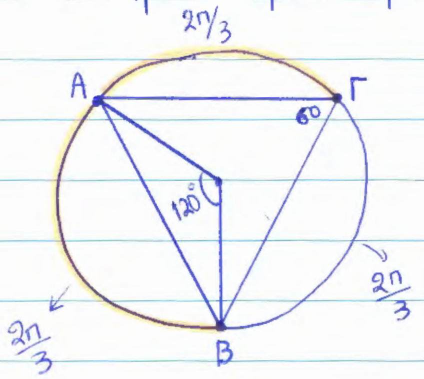


• έχουμε τυχαία επιλογή σημείων στην περιφέρεια ενός κύκλου.

$$P(\text{ενδεχομένου}) = \frac{\text{μήκος τόξου ευνοϊκής περιοχ.}}{\text{μήκος τόξου του κύκλου.}}$$

Λύση

Ονομάζω C την ευνοϊκή περιοχή
Το πρόβλημα πρέπει να αναχθεί σε μήκη τόξου.



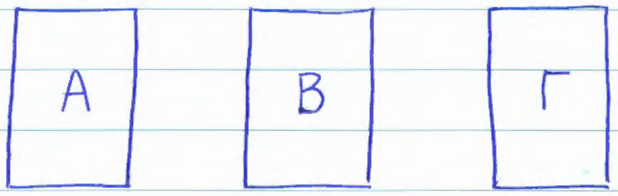
* Το τρίγωνο γίνεται εγγεγραμμένο στον κύκλο, βγαίνει εκτός κύκλου στην περιοχή $\overset{\frown}{BΓ}$ και ξανά εντός στην περιοχή $\overset{\frown}{ΓA}$.

Όλα τα τόξα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BΓ} = \overset{\frown}{ΓA} = \frac{2\pi}{3}$

μήκος ευνοϊκής περιοχής = μήκος C = $\frac{2\pi}{3}$

$$P(C) = \frac{\frac{4\pi}{3}}{2\pi} = \frac{2}{3}$$

③ Το δίλημμα Monty-Hall (παράδοξο των πιθανοτήτων)



«1 αυτοκίνητο και
2 γίδες κρύβονται
σε 3 κουτιά».

A: η επιλογή του παίκτη
Γ: το κουτί που ανοίγει ο τηλεπαρουσιαστής (γνωρίζοντας ότι δεν περιέχει το αυτοκίνητο).
B: εναλλακτική επιλογή του παίκτη.

Σ_1: "μένω πιστός στην επιλογή μου".

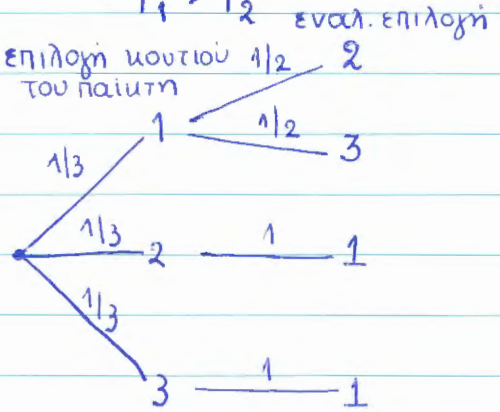
Σ_2: "αλλάζω το κουτί που διάλεξα".

$P_1 = P($'να κερδίσω κάτω από στρατ. Σ_1'$)$

$P_2 = P($'να κερδίσω κάτω από στρατ. Σ_2'$)$

- $P_1 < P_2$
- $P_1 = P_2$ (?)
- $P_1 > P_2$

Ονομάζω 1 το αυτοκίνητο, 2 και 3 τις γίδες.



$$\Omega = \{ \underset{\underset{\frac{1}{6}}{\downarrow}}{(1,2)}, \underset{\underset{\frac{1}{6}}{\downarrow}}{(1,3)}, \underset{\underset{\frac{1}{3}}{\downarrow}}{(2,1)}, \underset{\underset{\frac{1}{3}}{\downarrow}}{(3,1)} \}$$

$P_1 = P($"να κερδίσω κάτω από στρατ. Σ_1"$)$ ⟹

$$A_1 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ στην πρώτη} \\ \text{θέση} \end{array} \right\} = \{ (1,2), (1,3) \}$$

αντίστοιχα: $A_2 = (\text{στρατ. } \Sigma_2) = \{ (2,1), (3,1) \}$

$$P_1 = P(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = P(A_2) = \frac{2}{3}$$

② Ορισμοί κ' πράξεις ενδεχομένων

ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

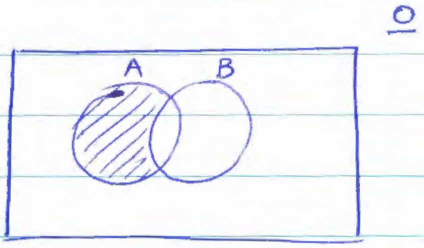
$\emptyset$: αδύνατο

$\underline{O}$: βέβαιο

A^c: συμπληρωματικό

- αν $AB = \emptyset$, τότε A, B ασυμβίβαστα
- αν $(A_i)_{i \in I}$ με $A_i A_j = \emptyset$, για $i \neq j$ τότε έχω συλλογή ασυμβίβαστων (ή ξένων ανά 2) ενδεχομένων.

Διαγράμματα Venn



$A \setminus B = AB^c$

Τύποι De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

③ Αξιωματική Θεμελίωση (Kolmogorov 1933)

μαθηματική μοντελοποίηση του π.τ.

Χώρος πιθανότητας : $(\Omega \, , \, A \, , \, P)$

Ω → δ.χ.
(αυθαίρετο σύνολο)
↓
περιέχει τα δ.σ.

A → σ-άλγεβρα
(συλλογή υποσυνόλων του Ω
που ικανοποιεί 3 ιδιοτ.)
↓
ενδεχόμενα

P → συνάρτηση
πιθανότητας
(πραγματική
συνολοσυνάρτηση
$P: A \to \mathbb{R}$
που ικανοποιεί 3 αξιωμ
↓
αποδίδει πιθανότητα
στα ενδεχόμενα.)

(εκτός ύλης)

Ορισμός: Μια συλλογή υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα (επί του Ω) αν ικανοποιούνται:

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $A^c \in \mathcal{A}$

iii) Αν $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ ακολουθία ενδεχομένων (στοιχεία της $\mathcal{A}$) τότε $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι ενδεχόμενο $\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}\right)$.

Ορισμός: Μια πραγμ. συνολοσυνάρτηση $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ θα λέγεται πιθανότητα αν:

i) $P(A) \geq 0 \quad , \forall \; A \in \mathcal{A}$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) Αν $(A_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ασυμβ. ενδεχομένων, τότε

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

(ιδιότητα σ-προσθετικότητας)

*Ιδιότητες πιθανότητας *

1. $P(\emptyset) = 0$

Αποδ.: $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$

Ισχύει Αξ.3) : $P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \Longrightarrow$

$$0 = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

$$\Longrightarrow P(\emptyset) = 0$$

2. Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ ασυμβ. ενδεχ. (πεπερασμ. προσθετικότητα)

τότε $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots}_{\text{διατηρούνται ξένα ανά 2.}}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{P(\emptyset)}} + P(\emptyset) + \dots$$

$$\overset{\text{ιδιοτ. 1}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. Αν $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$ ⟸ Η Πιθανότητα ως αύξουσα συνολοσυνάρτηση.

Αποδ.: $B = A \cup (B \setminus A)$, A και $B \setminus A$ είναι ξένα

Από ιδιοτ. πεπ. προσθ. $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.

4) $0 \leq P(A) \leq 1$

$$A \subset \Omega \xRightarrow{\iota\delta.3.} P(A) \leq P(\Omega) = \textcircled{1}$$

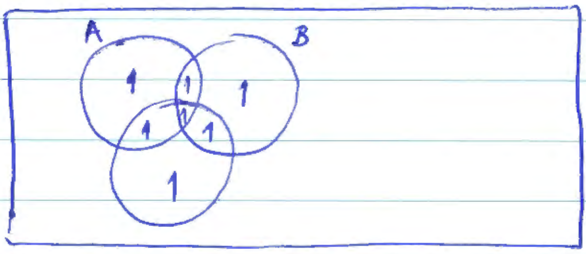
5) $P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$

$$A = (A \setminus B) \cup (AB) \xRightarrow{\xi\acute{\varepsilon}\nu\alpha} P(A) = P(A \setminus B) + P(AB) \Rightarrow$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$$

6) $P(A^c) = 1 - P(A)$ ‖ Αποδ.: $A^c = \Omega \setminus A \xRightarrow{\iota\delta\iota o\tau.\,5} P(A^c) = P(\Omega) - P(\Omega A) =$
$= 1 - P(A)$ ■

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma)$$



(αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού)

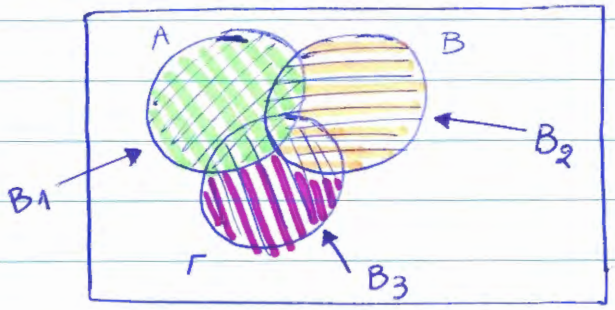
(τύπος Poincaré)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$
$$- P(A_1A_2) \dots - P(A_{n-1}A_n)$$
$$+$$
$$+$$
$$+ (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \dots A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \dots A_n)$$

9) $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$ (ιδιότητα σ-υποπροσ/τητας της πιθανότητας.

🟩 (Χρώμα 1), 🟨 (Χρώμα 2), 🟪 (Χρώμα 3)



$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$

$\vdots$

$B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})$

Η ακολουθία (B_n) είναι ακολ. ξένων ανά 2 ενδεχ.

και $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \overset{Αξ.\,3}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) \overset{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

(*): διότι $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \subset A_n \Longrightarrow$

$\xRightarrow{Ιδιοτ.\,3} P(B_n) \leq P(A_n)$

ΜΑΘΗΜΑ 3ο - 10/10/2014

Ιδιότητες πιθανότητας (συνέχεια)

10) Αν $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ (αύξουσα ακολουθία δεδομένων)

τότε $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

Παρατήρηση

Αν $\lim_{n \to +\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

τότε $P\left(\lim_{n \to \infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

Απόδ.

Θέτω $B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$\vdots$

$B_n = A_n \setminus (\overset{= A_{n-1}}{A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}})$

Ιδιότητες

1) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

2) $(B_n)_{n \geq 1}$ ~~να~~ αντιστοιχεί σε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα (ξένα ανά δύο)

Όμως $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \overset{\text{ξένα ανά } 2}{\underset{\sigma\text{-προσθ.}}{=}} \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \overset{\text{πεπ. προσθ.}}{=} \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

11) Αν $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$ (φθίνουσα ακολ. ενδεχομένων)

τότε $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

παρατήρηση

Αν $\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$

τότε $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Χρησιμοποιώ τους τύπους DeMorgan + την έννοια του συμπληρώματος για να αποδείξω το ζητούμενο.

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1 - P\left[\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)^c\right] =$$

$$= 1 - P\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right] \qquad (1)$$

Η $(A_n^c)_{n\geq 1}$ είναι ↗ εφόσον $(A_n)_{n\geq 1}$ ↘

⟶

και από Ιδιότητα. 10)

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) \qquad (2)$$

Από (1) και (2)

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = 1-\left[\lim \left(1-P(A_n)\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

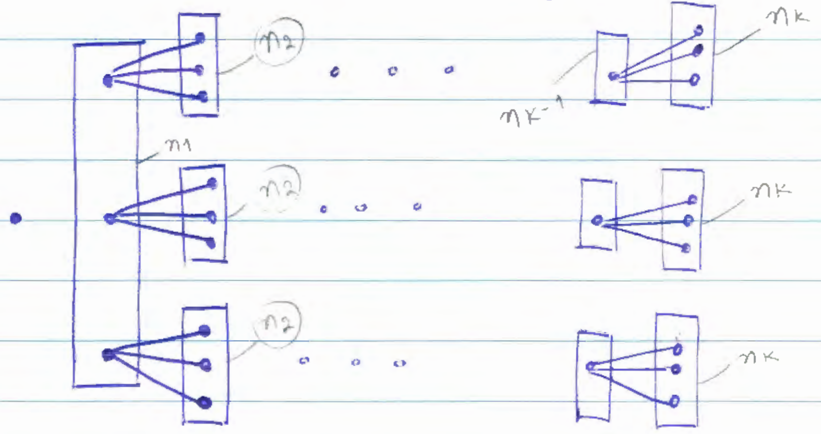
Κλασική πιθανότητα κ' Στοιχεία Συνδιαστικής

Αν A ενδεχόμενο $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

1. Πολλαπλασιαστική αρχή ή αρχή του γινομένου

- Έστω ότι η (καταγραφή) απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου A, μπορεί να χωριστεί σε κ. διαδοχικά βήματα, και έστω $\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ ένα στοιχείο του $\omega \in A$.
  Αν $\exists$ n_1-τρόποι επιλογής του στοιχείου α_1, και $\forall$ μία επιλογή του α_1, $\exists$ n_2-τρόποι επιλογής του α_2, ... και
  $\forall$ μία επιλογή των $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$, $\exists$ n_k-τρόποι επιλογής του α_k, τότε $|A| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$

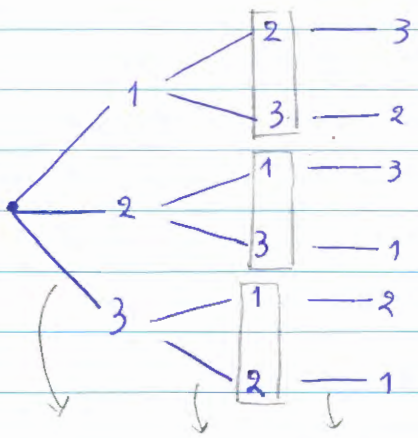
Αναπαράσταση με δεντροδιάγραμμα.



Βήμα	1	2	κ-1	κ
Στοιχείο	α_1	α_2	α_{k-1}	α_k
# Συνολικών διαδρομών μέχρι βήμα i	n_1	$n_1 n_2$	$n_1 n_2 \cdots n_{k-1}$	$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$

(∗)

π.χ. Μεταθέσεις 3 στοιχείων $\{1, 2, 3\}$



α_1	α_2	α_3
↓	↓	↓
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

3 2 1 = $3 \cdot 2 \cdot 1$ = 6 τρόποι

(∗) Παρατήρηση: Το πλήθος των επιλογών στο βήμα -i- είναι n_i, αλλά το σύνολο επιλογών μπορεί να διαφέρει ανάλογα με τη διαδρομή που έχω ακολουθήσει μέχρι το βήμα (i-1)

2. Διατάξεις και Μεταθέσεις

Ορισμός : Διάταξη των n-στοιχείων ανά κ, είναι μία τοποθέτηση κ-στοιχείων του, σε μία σειρά (χωρίς επανάληψη).

διατάξεων n ανά κ $\overset{\text{συμβ.}}{=} (n)_\kappa = n\cdot(n-1)\cdots(n-\kappa+1)$

Ορισμός : Μετάθεση των n-στοιχείων, είναι μία τοποθέτησή τους σε μια σειρά. (αντιστοιχεί στις διατάξεις n ανά n)

μεταθέσεων n-στοιχείων $= n!$

Ορισμός: Διάταξη των n ανά κ με επανάληψη (ή επαναληπτική διάταξη) είναι μία τοποθέτηση κ-στοιχείων του σε μία σειρά με δυνατότητα επανάληψης.

επαναλ. διατάξεων n ανά κ $= n^\kappa$

π.χ. ① 8 αθλητές και θέλω # σειρών κατάταξης → $8!$

Πόσες 3-άδες νικητών όπου η σειρά κατάταξης με ενδιαφέρει
→ $(8)_3 = 8\cdot 7\cdot 6$

1 αθλητής σε 3 αγωνίσματα → 8^3

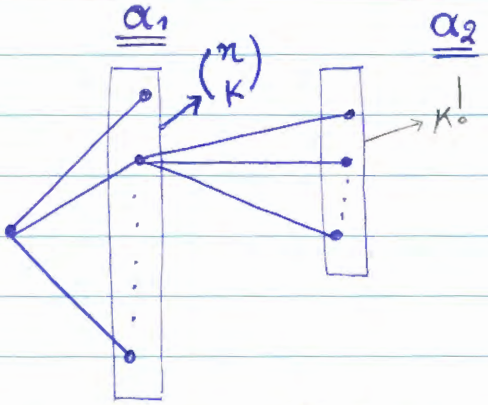
πόσοι τρόποι κατάταξης

Ορισμός: Συνδυασμός των n-στοιχείων ανα k είναι μια συλλογή k-στοιχείων του (χωρίς επανάληψη)

συνδυασμών n ανά k $\overset{συμβ}{=} \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1}{1\ 2\cdots k}$

$\boxed{\text{Απόδ}}$

* δεντροδιάγραμμα



επιλέγω τα k-στοιχεία χωρίς σειρά

βάζω τα k σε σειρά

$\Omega = \{$Διατάξεις των n ανά $k\}$

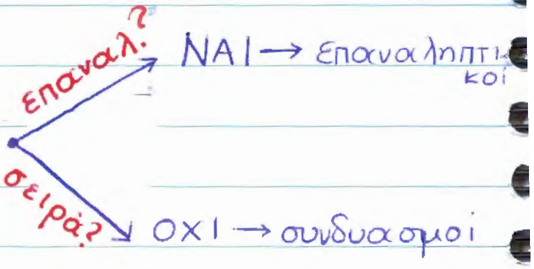
$\omega = (\alpha_1, \alpha_2)$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{πολ/κή αρχή}}}{(n)_k} = \binom{n}{k} k! \Longrightarrow \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Ορισμός: Επαναληπτικός συνδυασμός των n ανά $κ$, είναι μία επιλογή κ-στοιχείων του, με επανάληψη, <u>χωρίς</u> να με ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης.

4 κατανομές μεταλλίων

Στοιχεία : Χρ , Αρ , Χαλ. → $n=3$
Πόσες επιλογές? → $κ=4$



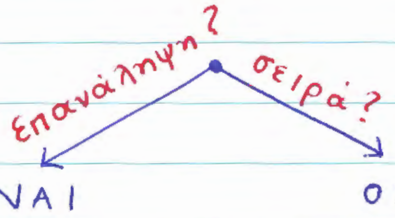
επαναλ. συνδυασμών n ανά $κ$ $\overset{συμβ.}{=} \begin{bmatrix} n \\ κ \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} n+κ-1 \\ κ \end{pmatrix} = \frac{n(n+1)\cdots(n+κ-1)}{1\cdot 2\cdots κ}$

$$\begin{bmatrix} n \\ κ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\ \ 2\cdot 3\cdot 4}$$

διαφορετικών ζαριών σε 3 (όμοια) ζάρια

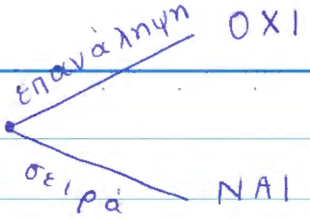
Στοιχεία: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (έδρες των ζαριών) $n=6$

Επιλογές $κ=3$



$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}$$

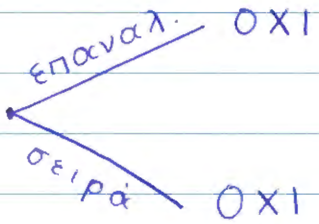
Ορισμός :



→ διατάξεις $(n)_k$

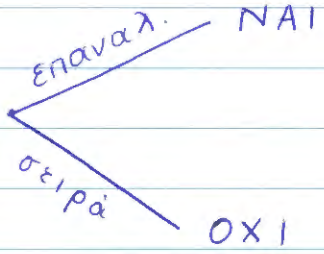
$\#$ στοιχείων → n

$\#$ επιλογών → k

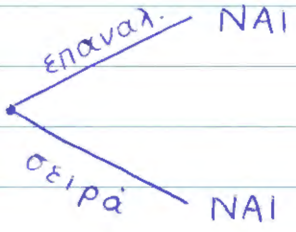


→ συνδυασμοί $\binom{n}{k}$

Συνοπτικά ...



→ επαναλ. συνδυασμοί $\left[{n \atop k}\right]$



→ επαναλ. διατάξεις n^k

3. Ασκήσεις

① Το πρόβλημα Λόττο

$\{1, 2, \dots, 49\}$

↓

φτιάχνω
6άδες

Σε 1 δελτίο

$P(\text{"να πιάσω } 6^{\text{αρι}}\text{"})$, $P(\text{"να πιάσω } 5^{\text{αρι}}\text{"})$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6!}{(49)_6} = \frac{1}{\frac{(49)_6}{6!}} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

Θα μπορούσα να είχα χρησιμοποιήσει συνδυασμούς

$\Omega = \{$διατάξεις των 49 ανά 6$\}$ ή $\Omega = \{$συνδυασμοί των 49 ανά 6$\}$

$$P(A) = \frac{\text{"ευνοϊκές"}}{\text{"δυνατές"}}$$

$$P(\text{"5άρι"}) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}$$

από 6 νουμ.
5 επιτυχ.

↑

$\omega = (\alpha_1, \alpha_2)$

↓

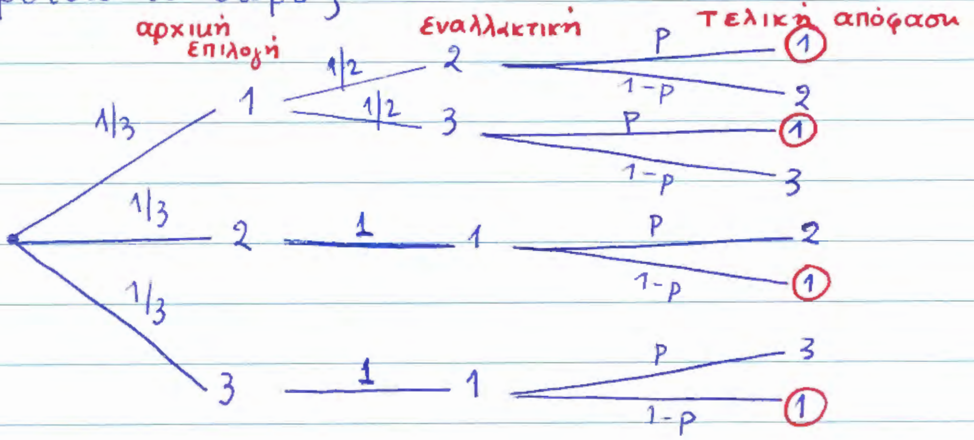
από 43 νουμ.
1 αποτυχ.

② Παραλλαγή του Monty-Hall

Σ_p : επιλέγω με πιθανότητα p την αρχική μου επιλογή.
άρα με πιθανότητα $(1-p)$ την εναλλακτική

- Ποια τιμή του p μεγιστοποιεί την πιθανότητα να κερδίσω το δώρο;

Βοηθητικό Σχήμα



$$P(\text{"να κερδίσω κάτω από στρατηγική } \Sigma_p\text{"})$$

$$= P(\text{"1 στην τελική απόφαση"})$$

$$= \frac{1}{6}p + \frac{1}{6}p + \frac{1}{3}(1-p) + \frac{1}{3}(1-p)$$

$$= \frac{p}{3} + \frac{1}{3} - \frac{p}{3} + \frac{1}{3} - \frac{p}{3} = \boxed{\frac{2}{3} - \frac{p}{3}}$$

$\boxed{0 \leq p \leq 1}$ Για $p=0$ ⇝ $\boxed{\frac{2}{3} - \frac{p}{3}}$ → Max

$p=0 \rightarrow \frac{2}{3}$

Τελικά: Η βέλτιστη στρατηγική είναι να αλλάξω την απόφασή μου.

Μάθημα 4ο - 13/10/2014

Ασκήσεις Φυλλαδίου

① $P_n = P(\exists$ τουλ. 2 άτομα μεταξύ n που έχουν γενέθλια την ίδια μέρα$) \geq 0,5$.

n άτομα $\longrightarrow$ n μέρες γενεθλίων

Υποθέσεις:
- Ημ. Έτους: $\{1, 2, \ldots, 365\}$
- Ισοπίθανα έχουμε ότι κάθε μέρα από $\{1, 2, \ldots, 365\}$ θα μπορούσε να είναι μια μέρα γενεθλίων.

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 365\}^n$$

$|\Omega| = 365^n$ (διατάξεις με επανάληψη)

- A^c: "τα n άτομα έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές μέρες".

στοιχεία $1, 2, \ldots, 365$

\# στοιχείων $\longrightarrow 365$

\# επιλογών $\longrightarrow n$

$\xrightarrow{\text{επαναλ.}}$ ΟΧΙ

$\xrightarrow{\text{σειρά}}$ ΝΑΙ

διατάξεις (χωρίς επανάλ.) των 365 ανά n $= (365)_n$

$$|A^c| = (365)_n, \qquad P(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{(365)_n}{365^n}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(365)_n}{365^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, 365$$

ελάχιστο $n = 23$, $P_{23} \cong 0,507$ ■

⑧ i) Αν $(A_n)_{n\geq 1}$, $P(A_n)=0$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)=0$

Λύση

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \overset{\sigma\text{-υποπρ.}}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = 0$$

ii) Αν $P(A_n)=1$, $\forall n=1,2,\dots \rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)=1$

Λύση

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right) \quad (1)$$

$$P(A_n)=1 , \ \forall n\geq 1 \Rightarrow P(A_n)^c = 1 - P(A_n) = 0 , \ \forall n \geq 1 \quad (2)$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right) \overset{(i)}{=} 0 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1 .$$

③ $\Omega = \{1,2,\dots,6\}^3$

$|\Omega| = 6^3$

A_1: "άθροισμα ενδείξεων των 3 ζαριών είναι 9"

$\Longrightarrow$

$$A_1 = \left\{ \begin{array}{l} (1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(1,5,3),(1,6,2) \\ (2,1,6),(2,2,5),(2,3,4),(2,4,3),(2,5,2),(2,6,1) \\ (3,1,5),(3,2,4),(3,3,3),(3,4,2),(3,5,1) \\ (4,1,4),(4,2,3),(4,3,2),(4,4,1) \\ (5,1,3),(5,2,2),(5,3,1) \\ (6,1,2),(6,2,1) \end{array} \right\}$$

$|A_1| = 25$

- 1) $\overset{6}{[1,2,6]}$, $\overset{6}{[1,3,5]}$, $\overset{3}{[1,4,4]}$

  2) $\overset{3}{[2,2,5]}$, $\overset{6}{[2,3,4]}$

  3) $[3,3,3] — 1$

αθροίζοντας 25

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{25}{216}$$

β) A_2 = "άθροισμα ενδείξεων = 10"

1) $\overset{6}{[1,3,6]}$, $\overset{6}{[1,4,5]}$

2) $\overset{3}{[2,2,6]}$, $\overset{6}{[2,3,5]}$, $\overset{3}{[2,4,4]}$

3) $[3,3,4] — 3$

αθροίζοντας 27

$|A_2| = 27$, $P(A_2) = \dfrac{|A_2|}{|\Omega|} = \dfrac{27}{216}$

γ) A_3 "άθροισμα 3 ζαριών $= 11$"

$$\begin{tikzcd} P(A_2), \arrow[d] & P(A_3) \arrow[d] \\ \text{αθρ. } 10 & \text{αθρ. } 11 \end{tikzcd}$$

$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (7-x_1, 7-x_2, 7-x_3)$

$f: A_2 \longrightarrow A_3$

$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (7-x_1, 7-x_2, 7-x_3)$

αν $(x_1, x_2, x_3) \in A_2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10$

$\Rightarrow (7-x_1) + (7-x_2) + (7-x_3) = 21 - (x_1 + x_2 + x_3) = 11$

$\Rightarrow (7-x_1, 7-x_2, 7-x_3) \in A_3$ (f καλά ορισμένη)

επιπλέον είναι ("1-1" + "επί") $\Rightarrow |A_2| = |A_3| \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A_2) = P(A_3)$

■

⑥ α) Οφείλει να απαντήσει 8/10 ερωτήσεις

$$\binom{10}{8}$$

επιλέγει 8 από τις 10 χωρίς δυνατότητα επανάληψης και χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά.

β) χωρίζω $\underbrace{1-3}_{\downarrow \atop 1}$, $\underbrace{4-10}_{\downarrow \atop \binom{7}{5}}$

γ) A: "απαντώ τουλάχιστον σε 4 από τις 5"

$A = A_1 \cup A_2$

A_1: "απαντώ ακριβώς σε 4 από τις 5".

A_2: "απαντώ και στις 5 από τις 5"

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$

$|A_1| = \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{4}$

$|A_2| = \overset{=1}{\binom{5}{5}} \cdot \binom{5}{3}$

⑨ Έστω $n \geq 1$ σταθερός

Επιλέγω στην τύχη από $\{1, 2, \dots, n\}$ (ισοπίθανα)

Θέτουμε A_p: "το p διατηρεί τον επιλεγμένο αριθμό", $\forall p : 1 \leq p \leq n$

$P(A_p) = ?$

$\omega \in A_p \Leftrightarrow p \mid \omega \Leftrightarrow \omega = \kappa \cdot p$, για κάποιο κ, ώστε $1 \leq \kappa p \leq n$

άρα $\kappa = 1, 2, \dots \left[\frac{n}{p}\right] \longrightarrow$ ακέραιο μέρος.

$$A_p = \left\{p, 2p, \dots, \left[\frac{n}{p}\right] \cdot p\right\} \overset{\text{άρα}}{=} \left\{\kappa p \, , \; 1 \leq \kappa \leq \left[\frac{n}{p}\right]\right\}$$

$$P(A_p) = \frac{|A_p|}{|\Omega|} = \frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{n} \, , \quad 1 \leq p \leq n$$

Ιδιαίτερα, όταν $p \mid n \longrightarrow p(A_p) = \frac{1}{p}$

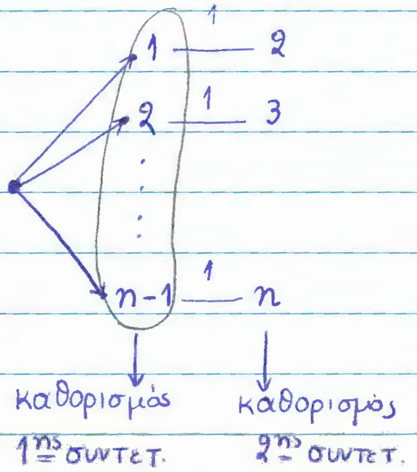
⑩

Επιλέγουμε τυχαία 2.
Ποια η πιθανότητα
να είναι γειτονικά?

n διακεκριμένα στοιχεία: $1, 2, \dots, n$

$$\begin{array}{l} \#\text{στοιχείων} = n \\ \#\text{επιλογών} = 2 \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{επαναλ.}} \text{ΟΧΙ} \\ \xrightarrow[\text{σειρά}]{} \text{ΟΧΙ} \end{array} \Bigg\| \longrightarrow \text{συνδυασμοί} \binom{n}{2}$$

$$\underset{\sim}{\Omega} = \left\{ (i,j) \ , \ 1 \le i < j \le n \right\}$$

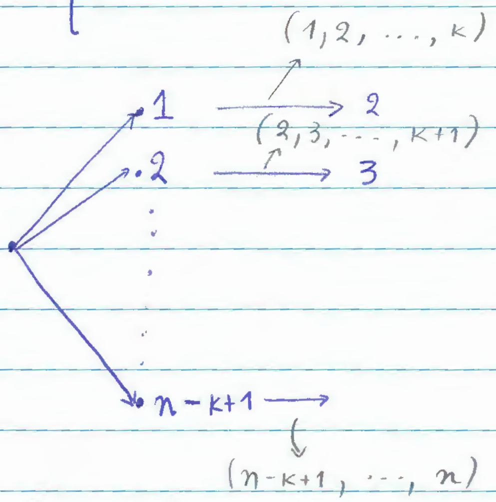


$$(n-1) \times 1 = \underbrace{n-1}$$

$$|A| = n-1$$

$$P(A) = \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n}$$

$$\underline{\Omega} = \left\{ (c_1, c_2, \dots, c_k) : 1 \le c_1 < c_2 < \dots < c_k \le n \right\}$$



$$\underbrace{(n-k+1)}_{1\text{-όρος}} \times \underbrace{1 \times \dots \times 1}_{k-1 \text{ όροι}}$$

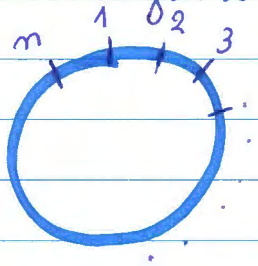
$$P(A) = \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k+1}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} =$$

$$= \frac{(n-k+1)!\ k!}{n!} = \frac{2 \cdot 3 \cdots k}{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+2)},$$

$$2 \le k \le n.$$

■

• Τι θα γινόταν αν τα σημεία είναι τοποθετημένα κυκλικά;



Επιλέγω 2 από αυτά.
Επιλέγω το $1^{\underline{o}}$ τυχαία.
Όποιο και να 'ναι, έχει 2 γείτονες.
Επιλέγω το $2^{\underline{o}}$. (κάθε φορά 2 γείτονες)

$$P(A) = \frac{\#\text{γειτόνων}}{\#\text{επιλογών}} = \frac{2}{n-1} \qquad \blacksquare$$

"Ανισότητα Bonferroni"

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{n} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - (n-1)$$

Λύση

(Επαγωγικά)

Για $n=2$, $P(E_1 E_2) \overset{\text{πρέπει}}{\geq} P(E_1) + P(E_2) - 1$.

Πράγματι,

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2)$$

$$\Longrightarrow P(E_1 E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2) \geq P(E_1) + P(E_2) - 1.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $1, 2, \dots, n-1$

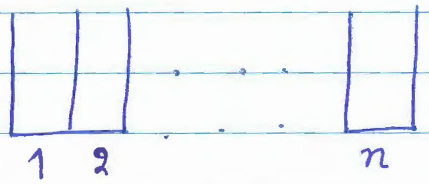
$$P(\underbrace{E_1 E_2 \dots E_{n-1}}_{1^{\underline{o}}} \underbrace{E_n}_{2^{\underline{o}}}) \geq P(E_1 E_2 \dots E_{n-1}) + P(E_n) - 1 \overset{n=2}{\geq}$$

$$\overset{\text{ισχύει για } n-1}{\geq} \sum_{i=1}^{n-1} P(E_i) - (n-2) + P(E_n) - 1 = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - (n-1) \qquad \blacksquare$$

④ Κατανομές σφαιριδίων σε κελιά

α)

i) χωρητικότητα κελιού = ∞



κ διακεκριμένα σφαιρίδια σε n κελιά

διακεκριμένα σφαιρίδια

⇓

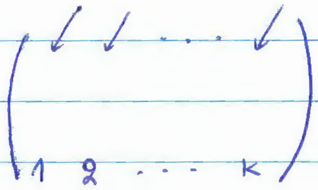
μας ενδιαφέρει η σειρά

άπειρη χωρητικότητα

⇓

έχουμε δυνατότητα επανάληψης.

τοποθέτηση σφαιριδίων σε κελιά $\{1, \dots, n\}$



$$\left.\begin{matrix}\text{στοιχεία κελιά } 1, 2, \dots, n \\ \#\text{ επιλογών } = \kappa\end{matrix}\right\} \longrightarrow \boxed{n^{\kappa}}$$

ii) χωρητικότητα κελιού = 1 → όχι επανάληψη

διατάξεις (χωρίς επαναλ.) , $(n)_{\kappa}$

β) i) όμοια σφαιρίδια → όχι σειρά

χωρητ. = ∞ , επαναλ. συνδ. $\left[\begin{matrix} n \\ \kappa \end{matrix}\right]$

ii) χωρητ. $\underset{i=1}{=}$ 1 συνδυασμ. $\binom{n}{\kappa}$

(όχι επαναλ.)

Μάθημα 5º - 15/10/2014

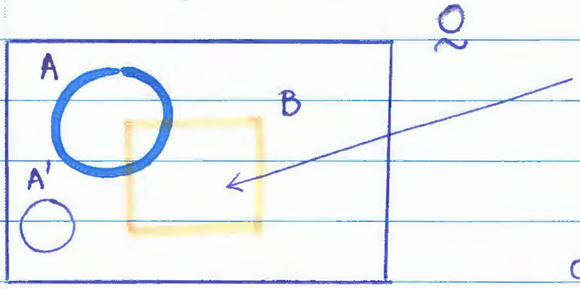
Δεσμευμένη Πιθανότητα

① Κίνητρο και Διαισθητικές ερμηνείες

Ας υποθέσουμε ότι:

i) έχουμε μοντελοποιήσει ένα π.τ. με ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. που εκφράζει την προσπάθεια μας να αποδώσουμε βαθμούς βεβαιότητας για ενδεχόμενα

ii) μια πληροφορία καταφθάνει, η οποία εκφράζεται μέσα από την πραγματοποίηση κάποιου ενδεχομένου B.
(το B έγινε γνωστό)



Ξέρω ότι B πραγματοποιήθηκε (το αποτέλεσμα του π.τ. βρίσκεται στο B).
άρα, το ενδιαφέρον μας πρέπει να περιορίζεται στο B.

Τότε, η πιθανότητα πραγματοποίησης κάποιου ενδεχομένου πρέπει να μεταβληθεί από $P(A)$ σε $P(A \backslash B)$
(δεσμευμένη πιθανότητα του A, δοθέντος του B)

Διαισθητικά: $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)=1} \longrightarrow P(A|B) = \frac{m(AB)}{m(B)}$

Παρατήρηση: Είτε η πραγματοποίηση του B, εκφράζει κάποιο πραγματικό γεγονος, είτε εκφράζει μια σκέψη (δυνητική πραγματοποίηση) η οποία θα με βοηθήσει να πάρω κάποια απόφαση.

Παραδείγματα:

i) P("ντόρτια" | "άθροισμα των 2 ενδείξεων είναι 8")

ii) P("μια μηχανή να λειτουργήσει >10 χρόνια" | "λειτούργησε ήδη 5 χρόνια")

iii) P("έγκυος" | "1ο τεστ εγκυμοσύνης είναι θετικό")

iv) P("να περάσω Πιθ. Ι" | "παρακολουθώ (ΚΑΙ ΔΙΑΒΑΖΩ!) συστηματικά")

v) P("ο κλέφτης να βρεθεί στο A" | "βρίσκεται στο B")

② Ορισμός και Σχόλια

Ορισμός: Έστω B ενδεχόμενο, με $P(B)>0$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Παρατηρήσεις:

1) Πρέπει $P(B)>0$

2) $(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{B:\, P(B)>0} (\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot|B))$ Είναι ένας καινούριος χώρος πιθανότητας.

Ικανοποιεί τα 3 αξιώματα μιας συν. πιθανότητας:

Αξ. 1) $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$

Αξ. 2) $P(\Omega|B) = \dfrac{P(B\Omega)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

Αξ. 3) (σ-προσθετικότητα)

Αν $(A_n)_{n\geq 1}$ $\overset{\text{ακολουθία}}{\text{ασυμβ.}}$ ενδεχομένων, τότε:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n | B\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n|B).$$

Πράγματι,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n | B\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n B\right)}{P(B)} \quad \underline{\underline{A_n B \subset A_n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(A_n B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n|B)$$

3) Όλες οι ιδιότητες της πιθανότητας ισχύουν και στις δεσμευμένες πιθανότητες.

4) $P(A|B) \overset{\text{γενικά}}{\neq} P(B|A) \mapsto \dfrac{P(A|B)}{P(B|A)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

(δεν έχουν συμμετρικό ρόλο τα A και B στη δεσμ. πιθανότητα)

③ Παραδείγματα

i) $P(\underset{\substack{\shortparallel \\ A}}{\text{"ντόρτια"}} \mid \underset{\substack{\shortparallel \\ B}}{\text{"άθροισμα 2 ενδεχ. = 8"}})$

$A = \{(4,4)\}$

$\underset{\sim}{\Omega} = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\} \rightarrow$ ισοπίθανα δ.σ.

$\Downarrow$

κλασ~~σ~~ική πιθανότητα.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{|AB|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{1}{5}$$

$A = \{(4,4)\}$, $B = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$

(ζάρι 1, ζάρι 2)

$\downarrow \quad \downarrow$

4   4

(2 , 6)

(6 , 2)

$$P(B|A) = \frac{|AB|}{|A|} = \underline{\underline{\textcircled{1}}}$$

$$P(A|B) = \frac{|AB|}{|B|}$$

ii) Στρίβουμε ένα νόμισμα 2 φορές.
Αν υποθέσουμε ότι και τα 4 δ.σ. του π.τ. είναι ισοπίθανα,
ποια η πιθανότητα να φέρουμε κορώνα και στις 2 ρίψεις
με δεδομένο ότι: α) στο 1^{o} στρίψιμο έχουμε κορώνα.
β) τουλάχιστον ένα στρίψιμο ήταν κορώνα.

$\Omega = \{(K,K), (K,\Gamma), (\Gamma,K), (\Gamma;\Gamma)\}$ → ισοπίθανα.

$A = \{(K,K)\}$

α) $B = \{(K,K),(K,\Gamma)\}$, $AB = \{(K,K)\}$

$$P(A|B) = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{1}{2}$$

β) $B = \{(K,K),(K,\Gamma),(\Gamma,K), \quad \}$, $AB = \{(K,K)\}$

$$P(A|B) = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{1}{3}$$

④ Υπολογιστικές Τεχνικές με δεσμευμένη πιθανότητα

Πολλαπλασιαστικός νόμος των Πιθανοτήτων

Αν $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, τότε

$$P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

$(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} \subseteq A_1 , A_1 A_2 , \ldots , A_1 A_2 \cdots A_{n-2}$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0 \Rightarrow P(A_1) , P(A_1 A_2) \cdots P(A_1 \cdots A_{n-2}) > 0$$

$$P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdots P A_n (A_1 \ldots A_{n-1}) =$$

$$= \cancel{P(A_1)} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 A_2 A_3)}}{\cancel{P(A_1 A_2)}} \cdot\cdot \cancel{\cdot} \frac{\boxed{P(A_1 A_2 \cdots A_n)}}{\cancel{P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1})}}$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (Θ.Ο.Π)

- Αν $\{B_i\}_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια ενδεχομένων, τότε λέγεται αριθμήσιμη διαμέριση του Ω, όταν είναι διαμέριση,

$$\Big(\underbrace{\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega}_{\text{Κάλυψη του } \Omega} , \underbrace{B_i B_j}_{\text{ασυμβ. ενδεχ.}} = \emptyset , i \neq j \Big)$$

και I είναι αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή αριθμησίμως άπειρο)

Έστω $(B_i)_{i \in I}$ μια αριθμήσιμη διαμέριση του Ω με $P(B_i) > 0$, $\forall i \in I$

Τότε αν A ενδεχόμενο : $\boxed{P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(A | B_i)}$

- Συνήθως $I = \{1, 2, \dots, n\}$

και $\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}$

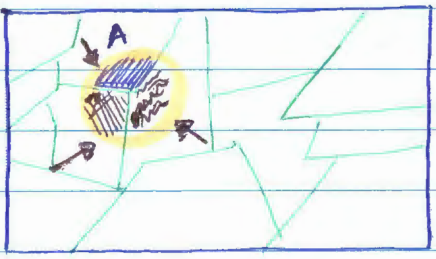
ή $I = \mathbb{N}^*$

$$\boxed{P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}$$

Θεώρημα Bayes

Αν A, B ενδεχόμενα με $P(A), P(B) > 0$, τότε

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}}$$



Απόδ. (Θ.Ο.Π.)

$$P(A) = P(A\Omega) = P(A(\bigcup_{i \in I} B_i)) =$$

$$= \underline{\underline{P(\bigcup_{i \in I} AB_i)}}$$

(B_i) ξένα ανά δύο

$\Downarrow$

(AB_i) ξένα ανά δύο.

$$= \sum_{i \in I} \underbrace{P(AB_i) = \sum_{i \in I} P(B_i)}_{\text{Πολ/κος Νόμος}} P(A \mid B_i)$$

Αποδειξη (Bayes)

$$\bullet\ P(A|B) \overset{\text{ορισμός}}{=} \frac{P(AB)}{P(B)} \overset{\text{πολ/κός Νόμος}}{=} \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Παράδειγμα - Εφαρμογή

Μια ασφ. εταιρεία μελετά ενδεχ. αλλαγή στα ασφάλιστρα: Αποτιμά τον κίνδυνο ατυχημάτων. ως συνάρτηση της παλαιότητας του διπλώματος οδήγησης.

- 20% των ασφαλισμένων έχουν το δίπλωμα λιγότερο από 5 χρόνια (≤ 5 χρόνια) ("νέος", "παλιός")
- Η μελέτη έδειξε ότι η πιθανότητα να έχει κάποιος ατύχημα σε 1 χρόνο όταν είναι "νέος" είναι 0,4 και όταν είναι "παλιός" 0,125.

Ζητάμε: i) P("σε 1 χρόνο να συμβεί κάποιο ατύχημα σε έναν ασφαλισμένο ~~που~~ και να είναι νέος")

ii) P("ατυχήματος σε κάποιον ασφαλισμένο σε 1 χρόνο")

iii) P("εφόσον συνέβη ατύχημα να είναι νέος")

Δεδομένα

P("νέος") = 0,2

P("παλιός") = 1 - P("νέος") = 0,8

P("ατύχημα"|"νέος") = 0,4

P("ατύχημα"|"παλιός") = 0,125

"νέος": A → "παλιός": A^c

"ατύχημα": B → "όχι ατυχ.": B^c

i) $P(\text{"νέος"}, \text{"ατύχημα"}) = P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$.

ii) $P(\text{"ατύχημα"}) \to P(B) \overset{\text{θοπ}}{=} P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)$

$P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}125 = 0{,}18$

iii) $P(A|B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}4}{0{,}18} = \dfrac{0{,}08}{0{,}18} = \dfrac{4}{9}$

Άσκηση 5 Φυλ. → Ασκ. 9 (Χελιώτης).

1000	σφαιρίδια
25	μαύρα
30	άσπρα
945	κόκκινα

Επιλέγουμε τυχαία 15 από την κάλπη

α) Ποια η πιθ. να έχουμε ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια.

$|\Omega| = ?$

στοιχεία $\underbrace{1, 2, \ldots, 945}_{\text{κόκκινα}}, \underbrace{946, \ldots, 970}_{\text{25 μαύρα}}, \underbrace{971, \ldots, 1000}_{\text{30 άσπρα}}$

\# στοιχείων = 1000 | $n = 1000$

\# επιλογών = 15 | $k = 15$

επαναλ. → ΟΧΙ

σειρά → ΟΧΙ (όχι κατ' ανάγκη)

} συνδυασμοί $\binom{1000}{15}$

A: "ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια"

"3 κόκκινα σφαιρίδια και 12 όχι κόκκινα"

$|A|$ πολ/κή αρχή

χωρίζω 2 διαδοχικές ~~διακριτές~~ φάσεις.

$\omega = (\alpha_1 , \alpha_2)$

3-άδες κόκκινων. $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$

12-άδες όχι κόκκινων. $\{\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2, \dots, \bar{\kappa}_{12}\}$

$$|A| = \binom{945}{3}\binom{55}{12} \Rightarrow$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{945}{3}\binom{55}{12}}{\binom{1000}{15}}$$

Μάθημα 6ο - 17/10/2014

Άσκηση 5, φυλλάδιο

1, 2, ... 945, 946 ... 970, 971 ... 1000

β) "ακριβώς 2 μαύρα και 3 άσπρα" = Β

$$|\underset{\sim}{\Omega}| = \binom{1000}{15}$$

Β: "2 μαύρα 3 άσπρα 10 κόκκινα"

"2 μαύρα από 25, 3 άσπρα από 30, 10 κόκκινα από 945"

πολ/κή αρχή: χωρίζουμε την απαρίθμηση του Β σε 3 διαδοχικές φάσεις.

$$\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$\{\mu_1\ \mu_2\} \qquad \{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\} \qquad \{k_1, \ldots, k_{10}\}$$

$$|B| = \binom{25}{2}\binom{30}{3}\binom{945}{10}$$

"άρνηση το πολύ ένα"

γ) Γ: "ακριβώς 4 κόκκινα και τουλ. 2 μαύρα"

$$\Gamma = \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \ldots \cup \Gamma_{11}$$

Γ_1: "ακριβώς 4 κόκκινα και i-μαύρα"

ένας τρόπος, αλλά πιο επίπονος. Διαφορετικά,

$\Gamma = \Delta E^c$

$\Delta =$ "ακριβώς 4 κόκκινα"

$E =$ "το πολύ 1 μαύρο" $\Longrightarrow$ $E^c =$ "τουλ. 2 μαύρα"

$$P(\Gamma) = P(\Delta E^c) = P(\Delta \setminus E) = P(\Delta) - P(\Delta E) \quad (*)$$

ΔE : "ακριβώς 4 κοκκινα κ' το πολύ 1 μαύρο"

Ορίζουμε,

E_i : "ακριβώς i-μαύρα" $(i=0,1\ldots)$

Τότε $\Delta E = \Delta(E_0 \cup E_1) = \Delta E_0 \cup \Delta E_1$

$P(\Gamma) = P(\Delta) - P(\Delta E)$ απο $(*)$.

Άρα $P(\Gamma) = P(\Delta) - P(\Delta E) = P(\Delta) - P(\overbrace{\Delta E_0 \cup \Delta E_1}^{\text{ξένα}}) =$

$$= P(\Delta) - P(\Delta E_0) - P(\Delta E_1) \quad ①$$

$P(\Delta) = P($" 4 κόκκινα κ' 11 όχι κόκκινα"$)$

$$P(\Delta) = \frac{\binom{945}{4}\binom{55}{11}}{|\Omega|} \quad ②$$

$P(\Delta E_0) = P($"4 κόκκινα (και 0-μαύρα) και 11 άσπρα"$)$

$$P(\Delta E_0) = \frac{\binom{945}{4}\binom{30}{11}}{|\Omega|} \quad ③$$

$P(\Delta E_1) = P($"4 κόκκινα και 1-μαύρο και 10 άσπρα"$)$

(Συνέχεια πίσω)

$$P(\Delta E_1) = P(\text{"4 κόκκινα ϗ' 1 μαύρο ϗ' 10 άσπρα"}) = \frac{\binom{945}{4}\binom{25}{1}\binom{30}{10}}{|\Omega|} \qquad (4)$$

Από (1) - (4),

$$P(\Gamma) = \frac{\binom{945}{4}\left[\binom{55}{11} - \binom{30}{11} - \binom{25}{1}\binom{30}{10}\right]}{\binom{1000}{15}}$$

(*) (Επιπλέον ερώτημα)

δ) "$\underbrace{\text{μόνο κόκκινα}}_{A}$ αν ξέρουμε ότι $\underbrace{\text{δεν επιλέχθηκαν μαύρα}}_{B}$".

$P(A|B)$

A: "μόνο κόκκινα" = "15 κόκκινα από 945"

B: "0-μαύρα" = "15 κόκκινα ή άσπρα"

AB: "μόνο κόκκινα ϗ' 0-μαύρα" = "μόνο κόκκινα" = A

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \overset{\text{κλασσική πιθαν.}}{=} \frac{|A|}{|B|} = \frac{\binom{945}{15}}{\binom{975}{15}}$$

■

α*) ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια
Ας υποθέσουμε ότι τα επιλέγω ένα-ένα, άρα εδώ έχει σημασία η σειρά που τα διαλέγω.

$$P(\text{"3 κόκκινα και 12 όχι κόκκινα"})$$

$$= \sum_{\substack{\{L_1, L_2, L_3\} \\ \subseteq \{1,2,\dots,15\}}} P\left(\begin{array}{c}\text{"3 κόκκινα στις } L_1, L_2, L_3 \text{ επιλογές} \\ \text{και 12 όχι κόκκινα στις υπόλοιπες"}\end{array}\right)$$

Παράδειγμα με 4 επιλογές σφαιριδίων που τα 3 είναι κόκκινα ανάμεσα σε 10 κόκκινα και 10 όχι κόκκινα

1η	2η	3η	4η
K	K	K	$\bar{K}$
K	K	$\bar{K}$	K
K	$\bar{K}$	K	K
$\bar{K}$	K	K	K

$$P(\text{"}KKK\bar{K}\text{"}) = P(\text{"}K\text{"})\, P(\text{"}K\text{"}|\text{"}K\text{"}) = P(\text{"}K\text{"}|\text{"}KK\text{"})\, P(\text{"}\bar{K}\text{"}|\text{"}KKK\text{"})$$

$$= \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} \cdot \frac{10}{17}.$$

$$P(\text{"}K\bar{K}KK\text{"}) = P(\text{"}K\text{"}) \cdot P(\text{"}\bar{K}\text{"} \mid \text{"}K\text{"}) \cdot P(\text{"}K\text{"} \mid \text{"}K\bar{K}\text{"}) \cdot P(\text{"}K\text{"} \mid K\bar{K}K)$$

$$= \frac{10}{20} \times \frac{10}{19} \times \frac{9}{18} \times \frac{8}{17} = P(\text{"}KKK\bar{K}\text{"})$$

Παρατηρουμε ότι :

$$P(\text{"3 κόκκινα στις } L_1, L_2, L_3 \text{ επιλογές και 12 όχι κόκκινα στις υπόλοιπες"}) =$$

$$= P(\text{"3 κόκκινα στις πρώτες 3 θέσεις και 12 όχι κόκκινα στις υπόλοιπες"}) =$$

$$= \binom{15}{3} \cdot P(\text{"}\underbrace{KKK}_{\text{3 πρώτες}}\underbrace{\bar{K}\bar{K}\cdots\bar{K}}_{\text{12 τελευταίες}}\text{"})$$

$$= \binom{15}{3} \cdot P(\text{"}K\text{"}) \cdot P(\text{"}K\text{"} \mid \text{"}K\text{"}) \cdot P(\text{"}K\text{"} \mid \text{"}KK\text{"}) \cdot$$

$$\cdot P(\text{"}\bar{K}\text{"} \mid \text{"}KKK\text{"}) \cdots P(\text{"}\bar{K}\text{"} \mid \text{"}\underbrace{KKK\bar{K}\cdots\bar{K}}_{14}\text{"})$$

$$= \binom{15}{3} \cdot \frac{945}{1000} \cdot \frac{944}{999} \cdot \frac{943}{998} \times \frac{55}{997} \times \frac{54}{996} \times \cdots \times \frac{44}{986}$$

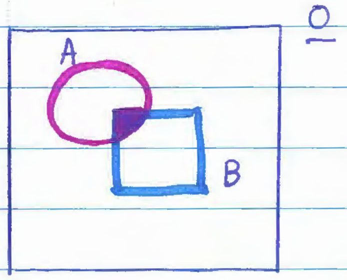
=

$$= \binom{15}{3}\frac{(945)_3\cdot(55)_{12}}{(1000)_{15}} = \frac{15!}{3!\,12!}\,\frac{(945)_3\cdot(55)_{12}}{(1000)_{15}} =$$

$$= \frac{\dfrac{(945)_3}{3!}\cdot\dfrac{(55)_{12}}{12!}}{\dfrac{(1000)_{15}}{15!}} = \frac{\binom{945}{3}\binom{55}{12}}{\binom{1000}{15}} \quad \blacksquare$$

Στοχαστική Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

$$\underset{\substack{\parallel\!| \\ \text{αρχικός χώρος} \\ \text{πιθανότητας}}}{(\underset{\sim}{\Omega}, \mathcal{A}, P)} \xrightarrow[B:\,P(B)>0]{\text{πληροφορία } B} \underset{\substack{\parallel \\ \text{καινούριος} \\ \text{χώρος πιθανότητας}}}{(\underset{\sim}{\Omega}, \mathcal{A}, P(\cdot\mid B))}$$



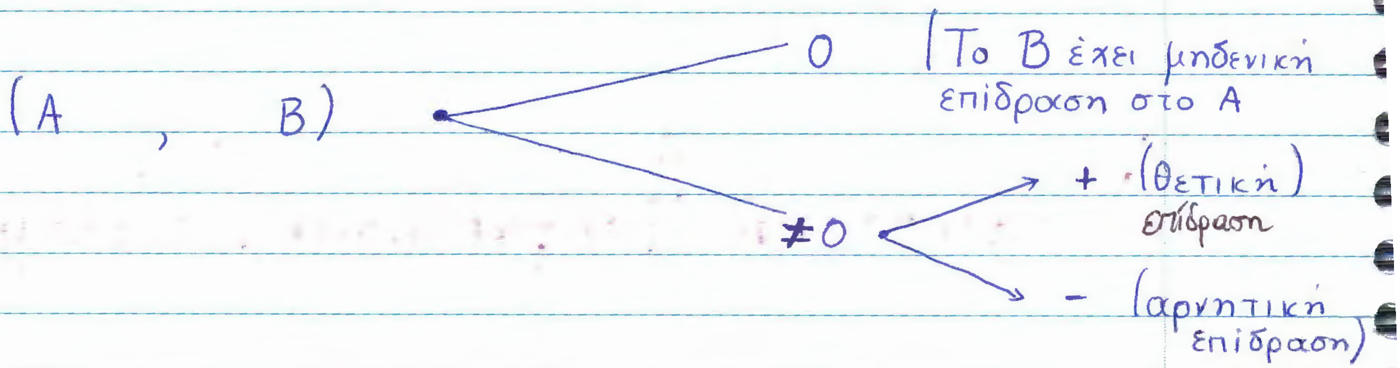
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] & P(A\mid B) \arrow[d] \arrow[dr] & & \\ & \binom{945}{4} & \binom{25}{2} & \binom{53}{7} \end{tikzcd}$$

Παρατηρήσεις

1) Συνολικά, οποιαδήποτε ύπαρξη πληροφορίας είναι σημαντική, διότι περιορίζει το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων (ψάχνουμε σε μικρότερη περιοχή)

2) Σε κάθε ένα από τα ενδεχόμενα Α, μία πληροφορία Β, επιδρά διαφορετικά στην πιθανότητα πραγματοποίησης (του Α).

(ενδεχόμενο , πληροφορία) $\Delta P = P(A|B) - P(A)$



Λέμε, λοιπόν, ότι: το Α δεν εξαρτάται από το Β, όταν $\Delta P = 0$.

3) Ειδική περίπτωση που $\Delta P = 0$

Τότε $P(A|B) = P(A) \Longleftrightarrow \dfrac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$

αν $P(A)>0$ $\Longleftrightarrow \dfrac{P(AB)}{P(A)} = P(B) \Longleftrightarrow P(B|A) = P(B)$.

Δηλ. το Β δεν εξαρτάται από το Α.

Άρα μπορούμε να λέμε ότι αν $P(A|B) = P(A)$ ή

$P(B|A) = P(B)$,

τότε τα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

Όμως εκεί όπου οι πιθανότητες είναι μηδενικές, δεν μπορούμε να ορίσουμε προς το παρόν την ανεξαρτησία.

4) Με έμπνευση από τις δεσμευμένες πιθανότητες, θέλουμε να ορίσουμε την ανεξαρτησία παντού.

$$P(A|B)=P(A) \Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

(Στοχαστική) Ανεξαρτησία 2 ενδεχομένων

Ορισμός: Δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα αν $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Παράδειγμα:

i) τυχαία ρίψη 2 νομισμάτων (δίκαια νομίσματα)

$\Omega = \{(K,K), (K,\Gamma), (\Gamma,K), (\Gamma,\Gamma)\}$ → ισοπίθανα δ.σ.

A: "$1^{η}$ ρίψη είναι K" $= \{(K,K),(K,\Gamma)\}$

B: "$2^{η}$ ρίψη είναι K" $= \{(\Gamma,K),(K,K)\}$

Γ: "και οι 2 ρίψεις είναι K" $= \{(K,K)\}$

Α και Β είναι ανεξάρτητα!

$AB=\{(K,K)\}$, $P(AB)=(\{K,K\})=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)\cdot P(B)$

$A\Gamma=\{(K,K)\}$, $P(A\Gamma)=\frac{1}{4} \neq P(A)\cdot P(\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

Άρα A και Γ **ΔΕΝ** είναι ανεξάρτητα. ■

Παρατηρήσεις - Ιδιότητες

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ : ($A \perp\!\!\!\perp B \overset{\text{σμβ.}}{=}$ A και B ανεξάρτητα)

1.

$$\begin{tikzcd}
 & & P(A|B)=P(A) \arrow[dd, Leftrightarrow, "{P(A),\, P(B)>0}"] \\
A \perp\!\!\!\perp B \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{ορσ.}"] & P(AB)=P(A)\cdot P(B) \arrow[ur, Leftrightarrow, "P(B)>0"] \arrow[dr, Leftrightarrow, "P(A)>0"'] & \\
 & & P(B|A)=P(B)
\end{tikzcd}$$

2. $A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow A \perp\!\!\!\perp B^c \Leftrightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

$\boxed{A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B^c}$. Πράγματι,

- $P(AB^c) = P(A \setminus B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)\cdot P(B) =$

$$= P(A)\cdot\big(1-P(B)\big) = P(A)\cdot P(B^c).$$

- $\boxed{A \perp\!\!\!\perp B} \xRightarrow{\text{ιδιοτ.}} \boxed{A \perp\!\!\!\perp B} \xRightarrow{\text{συμμετρία}} B^c \perp\!\!\!\perp A \xRightarrow{\text{ιδιοτ.}} \boxed{B^c \perp\!\!\!\perp A^c} \xRightarrow{\text{συμ.}}$

$\longrightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B^c \xRightarrow{\text{ιδ.}} \boxed{A^c \perp\!\!\!\perp B} \xRightarrow{\text{συμ.}} B \perp\!\!\!\perp A^c \xRightarrow{\text{ιδ.}} \boxed{B \perp\!\!\!\perp A}$

3. Αν $P(A)$ ή $P(B) \in \{0,1\} \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B$

Αν $P(A)=0$, τότε

$$AB \subset A \Rightarrow 0 \leq \underbrace{P(AB)} \leq P(A) = \underbrace{P(A)\cdot P(B)} = 0$$

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B)$$

Αν $P(A) = 1 \Longrightarrow P(A^c) = 0 \Longrightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B \Longrightarrow A \perp\!\!\!\perp B$

4. Αν $P(A), P(B) \notin \{0,1\}$

$$AB = \emptyset \Longrightarrow \cancel{A \perp\!\!\!\perp B}$$

Προσοχή !

Γίνεται συχνά το λάθος!

Συγχέουμε "ανεξάρτητα" και "ασυμβίβαστα".

- Αν $A : P(A) = 0$, τότε $A \perp\!\!\!\perp A^c$ (A κ' A^c : ανεξάρτητα)

όμως $AA^c = \emptyset$ [Βρήκαμε ασυμβίβαστα και ανεξάρτητα ενδεχόμενα]

Απόδειξη

- $AB = \emptyset \Longrightarrow P(AB) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \Longrightarrow$ A και B δεν είναι ανεξάρτητα ενδεχ.

$$\left(\underbrace{P(A) \cdot P(B) \notin \{0,1\}}_{\text{υπόθεση}} \Rightarrow 0 < P(A)P(B) < 1 \right)$$

$$(\cancel{A \perp\!\!\!\perp B})$$

5. Αν $P(A), P(B) \notin \{0,1\}$ $\left(p \Rightarrow q \overset{(\Leftrightarrow)}{/} \bar{q} \Rightarrow \bar{p} \right)$

$$A \perp\!\!\!\perp B \Longrightarrow AB \neq \emptyset$$

6. $A \perp\!\!\!\perp A$? Μόνο αν $P(A) \in \{0,1\}$ ⟵ Αντίθετα, αν Αν $P(A) \notin \{0,1\}$ $A \not\perp\!\!\!\perp A$

Απόδειξη :

$$P(AA) = P(A) \overset{\text{πρέπει}}{=\!=} P(A)P(A) \Longleftrightarrow P(A)(1 - P(A)) = 0$$

$$\Longleftrightarrow P(A) \in \{0,1\}$$

Μάθημα 7º - 20/10/2014

Άσκηση 5, Φυλλάδιο 1

γ) "ακριβώς 4 κόκκινα και τουλάχιστον 2 μαύρα".

$$P(\Gamma) = \frac{\binom{945}{4}\left[\binom{55}{11} - \binom{30}{11} - \binom{25}{1}\binom{30}{10}\right]}{\binom{1000}{15}}$$

Γιατί δεν δουλεύει να επιλέξουμε τα 2 μαύρα ως 2η φάση και τα υπόλοιπα ως 3η φάση;

$\textcircled{25}$ $\textcircled{30}$

$$\underbrace{1\ 2 \cdots 945}_{\text{κόκκινα}} \quad \underbrace{946 \cdots 970}_{\text{μαύρα}} \quad \underbrace{971 \cdots 1000}_{\text{άσπρα}}$$

$$\cancel{\frac{\binom{945}{4}\binom{25}{2}\binom{53}{9}}{\binom{1000}{15}}}$$

ίδια δ.σ. που τα πήραμε διαφορετικές διαδρομές (Πρόβλημα!)

$\{\mu_1 = 946,\ \mu_2 = 947\}\ \{\mu_3 = 948, \ldots\}$

$\Updownarrow$

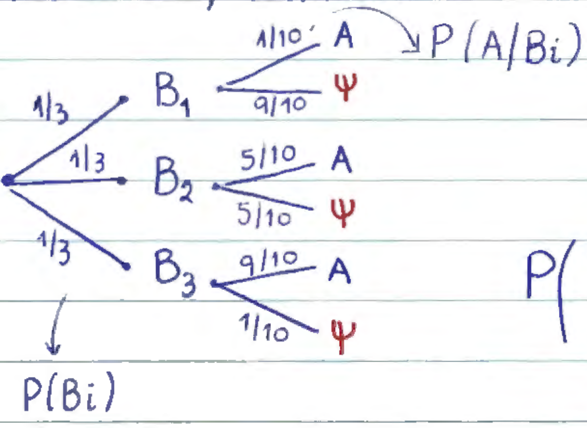
$\{\mu_1 = 946,\ \mu_2 = 948\}\ \{\mu_3 = 947, \ldots\}$

$\{K_1, K_2, K_3, K_4\}\ \{\overset{\textcircled{946}}{\mu_1}\ \overset{\textcircled{947}}{\mu_2}\}$

Υπενθύμιση

- Πολ/κός νόμος : $P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \cdots P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1})$
- Θ.Ο.Π. : $(B_i)_{i \in I}$: $P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i)\, P(A | B_i)$ ①
- Bayes : $P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{\underbrace{P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)}_{① \quad ②}}$

Άσκηση 3, Φυλλάδιο 2



$$\frac{4i-3}{10} \quad , i = 1,2,3$$

P("να έχει απευθυνθεί στον Bi δεδομένου ότι πήρε το σωστό δρόμο") =

$$= P(B_i \mid A) \quad , i=1,2,3$$

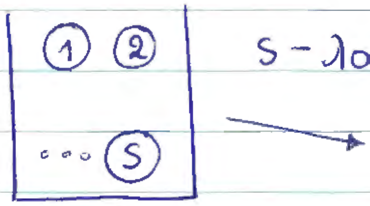
$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)\cdot P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

Για $i=1$ $$= \frac{\cancel{P(B_1)}\cdot P(A \mid B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)\,P(A \mid B_i)} = \frac{P(A \mid B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{5}{10}+\frac{9}{10}} = \frac{1}{15}$$

Για $i=2$ $$= \frac{P(A \mid B_2)}{\frac{15}{10}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{15}{10}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Για $i=3$ $$= \frac{P(A \mid B_3)}{\frac{15}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{15}{10}} = \frac{3}{5}$$ ■

Άσκηση 4, Φυλλάδιο 2 (ΘΕΜΑ - Ιούλιος 2011)



s - λαχνούς

Ρίχνω i-φορές το δίκαιο νόμισμα

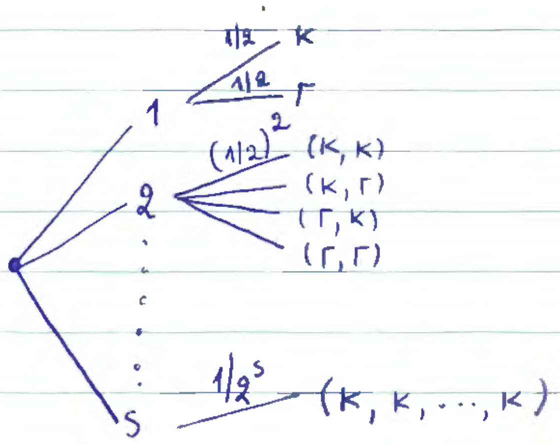
Έστω i

i) P("εμφάνισης τουλάχιστον 1 φορά γράμματα")

A^c: "εμφάνιση τουλάχιστον 1 φορά γράμματα".

A : "καμία φορά γράμματα". = "όλες κορώνες"

$P(A^c) = 1 - P(A)$



Έστω $Λ_i$: "επιλέγεται ο λαχνός i-στο 1ο βήμα".

$$P(A) = \sum_{i=1}^{s} P(Λ_i)\cdot P(A|Λ_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{s}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i =$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^s}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{s}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^s\right]$$

Γενικά: $\sum_{i=0}^{n}\theta^i = \frac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta}$, $|\theta| < 1$

Άρα: $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{s}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^s\right]$

ii) P("να έγιναν κ-ρίψεις του νομίσματος , k=1,2,...,s αν σε μια επανάληψη του π.τ. δεν εμφανίστηκε γράμματα")

Λ_i = "ο λαχνός να είναι i"

$P(\Lambda_k | A)$, $k=1,2,\dots,s$, $P(\Lambda_k|A) \longrightarrow$ Bayes

$$P(\Lambda_k|A) = \frac{P(\Lambda_k)\cdot P(A|\Lambda_k)}{P(A)} = \frac{\overset{\frac{1}{s}}{\overset{\shortparallel}{P(\Lambda_k)}} \cdot \overset{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\overset{\shortparallel}{P(A|\Lambda_k)}}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{s} P(\Lambda_i)\cdot P(A|\Lambda_i)}_{\frac{1}{s}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^s\right]}} \quad (i)$$

Πότε $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι ανεξάρτητα?

Ορισμός: Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$, n: ενδεχόμενα.

Τότε είναι αμοιβαία ανεξάρτητα αν $\forall\ 2 \leq k \leq n$, και

$L_1, L_2, \dots, L_k$, k-διακεκριμένους δείκτες ισχύει:

$$P(A_{L_1} A_{L_2} \cdots A_{L_k}) = P(A_{L_1})\cdot P(A_{L_2}) \cdots P(A_{L_k})$$

ή ισοδύναμα

αν $\forall\ J \subset I = \{1, 2, \dots, n\}$

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

Ορισμός: Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ μια ακολουθία ενδεχομένων.

Τότε είναι ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων

αν $\forall k\geq 2$, και $L_1, L_2, \ldots, L_k$, k-διακεκριμένους δεικτες

ισχύει : $P(A_{L_1} A_{L_2} \ldots A_{L_k}) = P(A_{L_1})\cdot P(A_{L_2})\cdots P(A_{L_k})$

ή ισοδύναμα

αν $\forall J\subset\mathbb{N}$ με J:πεπερασμένο

$$P(\bigcap_{i\in J} A_i) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

Ειδικά :

Έστω A, B, Γ 3 ενδεχόμενα. Τα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα αν :

$P(AB) = P(A)\cdot P(B)$ $(A \perp\!\!\!\perp B)$

$P(A\Gamma) = P(A)\cdot P(\Gamma)$ $(A \perp\!\!\!\perp \Gamma)$

$P(B\Gamma) = P(B)\cdot P(\Gamma)$ $(B \perp\!\!\!\perp \Gamma)$

$P(AB\Gamma) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma)$

$A \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp \Gamma$, $B \perp\!\!\!\perp \Gamma$, τότε

(ανά δύο)

A, B, Γ λέγονται κατά ζεύγη ανεξάρτητα

$\left(A, B, \Gamma , \begin{array}{l} AB = \emptyset \\ B\Gamma = \emptyset \\ A\Gamma = \emptyset \end{array} \middle| \Rightarrow AB\Gamma = \emptyset \right)$

π.χ. η ιδιότητα μεταφέρεται και στα 3 αν ισχύει ανά δυο

$\begin{pmatrix} (1,0) \text{ γραμ. } (0,1) \\ (1,0) \quad '' \quad (1,1) \end{pmatrix}$

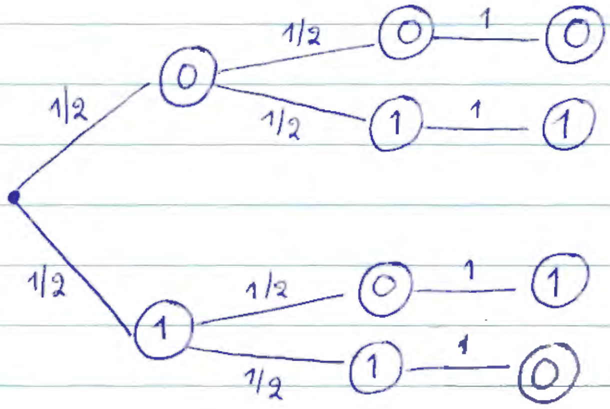
(0,1) '' (1,1)

π.χ. η ιδιότητα δεν μεταφέρεται και στα 3 ανα ισχύει ανα δυο

(0,1), (1,0), (1,1) ΔΕΝ είναι γραμ ανεξ

γιατί (1,1) = (0,1) + (1,0)

- Γιατί είναι ανεξάρτητα ανά δυο $\not\Rightarrow$ (αμοιβαία ανεξ) ανεξαρτ. ανά 3.



$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (0,0,0) , (0,1,1) \\ (1,0,1) , (1,1,0) \end{array} \right\}$

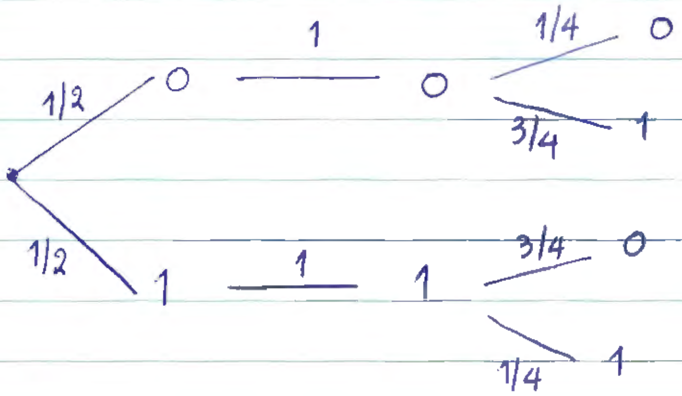
$\left. \begin{array}{l} A: \text{"1 στην } 1^{η} \text{ θέση"} \\ B: \text{"1 στη } 2^{η} \text{ θέση"} \\ \Gamma: \text{"1 στην } 3^{η} \text{ θέση"} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} AB = \{(1,1,0)\} \\ A\Gamma = \{(1,0,1)\} \\ B\Gamma = \{(0,1,1)\} \end{array}$

$$P(AB) = P(A\Gamma) = P(B\Gamma) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)\,P(B) = P(B)\,P(\Gamma) =$$
$$= P(A) \cdot P(\Gamma)$$

Ειδικά εδώ: $AB\Gamma = \emptyset$

$$P(AB\Gamma) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma)$$

- Γιατί $P(AB\Gamma) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma)$ δεν αρκεί για ανεξαρτησία?



A = "1 στην 1η θέση"

B = "1 στη 2η θέση"

Γ = "1 στην 3η θέση"

$\underset{\sim}{\Omega} = \{(0,0,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$

$AB\Gamma = \{(1,1,1)\}$

$$P(AB\Gamma) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A)P(B)P(\Gamma) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(AB) = P\left(\left\{(1,1,0)\right\}\right) = \frac{1}{2} \neq P(A)\ P(B) = \frac{1}{4}$$

$\{1,1,1\}$

Παρατηρήσεις

1) A, B, Γ ανεξάρτητα τότε $A \perp\!\!\!\perp B\cup\Gamma$, $A \perp\!\!\!\perp B\Gamma$

$A \perp\!\!\!\perp B\Gamma^c$

$$P\left[A(B\cup\Gamma)\right] = P\left[AB \cup A\Gamma\right] = P(AB) + P(A\Gamma) - P(AB\Gamma) =$$

$$P(A)\left[P(B) + P(\Gamma) - P(B\Gamma)\right] = P(A)\,P(B\cup\Gamma).$$

$$A\cup B = \left[(A\cup B)^c\right]^c = (A^c B^c)^c$$

άλλος τρόπος

$$\left(P(A\cup B) = 1 - P(A^c B^c) = 1 - P(A^c)\cdot P(B^c)\right)$$

$$P\left[A(B\cup\Gamma)\right] = P\left[A(B^c\Gamma^c)^c\right] = P\left[A \setminus B^c\Gamma^c\right] =$$

$$= P(A) - P(AB^c\Gamma^c) =$$

$$P(A) - P(A)P(B^c)P(\Gamma^c) =$$

$$P(A)\left[1 - P(B^c)P(\Gamma^c)\right] =$$

$$P(A)\left[1 - (1-P(B))(1-P(\Gamma))\right] =$$

$$P(A)\left[P(B) + P(\Gamma) - P(B\Gamma)\right] = P(A)\;P(B\cup\Gamma)$$

Μάθημα 8ο - 22/10/2014

Εφαρμογές της Ανεξαρτησίας

① Ανεξάρτητα πειράματα τύχης

Ορισμός : Έστω ότι ένα π.τ. Π μπορεί να αναλυθεί ως μία σειρά από -n- επιμέρους π.τ. Π_i, όπου τα αποτελέσματά τους δεν αλληλοεπηρεάζονται ($\Pi_i \longrightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$)

Τότε, λέμε ότι το π.τ. Π αναλύεται σε n διαδοχικά ανεξάρτητα π.τ. και μπορούμε να πάρουμε. ως δ.χ του π.τ. Π

- $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ και τότε

αν $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i=1,2,\dots,n$ (όπου τα A_i είναι ενδεχόμενα στο πείραμα Π_i)

τότε: $P(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P(A_1)\,P(A_2) \dots P(A_n)$

(όπου καταχρηστικά γράφουμε P αντί για P_i)

Παρατηρήσεις

1) Οι ιδέες αυτές επεκτείνονται σε ακολουθίες πειραμάτων τύχης, κατά φυσιολογικό τρόπο.

π.χ. αν $L_1, L_2, \ldots, L_n$ διακεκριμένοι δείκτες

$$P(A_{L_1}\times A_{L_2}\times\ldots\times A_{L_n}) = P(A_{L_1})\cdot P(A_{L_2})\cdots P(A_{L_n})$$

2) Αν $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1) = (\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2) = \ldots = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$

Τότε μιλάμε για -n- επαναλήψεις του ιδίου π.τ. και κάθε επανάληψη λέγεται και δοκιμή.

Παραδείγματα

1) "Διαδοχικές ρίψεις 3 νομισμάτων"

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \{K, \Gamma\}^3$$

$$P(\{(K,K,K)\}) = P^3(\{K\})$$ (λόγω ανεξαρτησίας δοκιμών)

2) "Διαδοχικές ρίψεις 2 ζαριών"

P("πρώτα άρτιο και μετά περιττό") = P("πρώτα άρτιο) · P("μετά περιττός)

$\neq$

P(να έχω ένα άρτιο και ένα περιττό)

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

3) Σε μια ακολουθία ρίψεων ενός κύβου

P("να φέρω για πρώτη φορά 6 , στη 10^{η} ρίψη") =

= P("όχι 6 στην 1^{η} ρίψη") ⋯ P("όχι 6 στην 4^{η} ρίψη) P("6 στην 10^{η} ρίψ

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^9 \cdot \frac{1}{6}$$

② Δεσμευμένη Ανεξαρτησία

Ορισμός: Έστω A, B, Γ 3 ενδεχόμενα, με $P(\Gamma) > 0$.

Τα A και B λέγονται δεσμευμένα ανεξάρτητα δοθέντος του Γ , αν ισχύει:

$$P(AB|\Gamma) = P(A|\Gamma) \cdot P(B|\Gamma)$$

Παρατηρήσεις

1) Αν το Γ : $P(\Gamma) = 1$ ή τα A, B και Γ είναι αμοιβαία ανεξάρτητα , τότε η ανεξαρτησία των A και B και η δεσμευμένη ανεξαρτησία των A και B δοθέντος του Γ είναι ισοδύναμες.

Ισχυει δηλαδή :

$$P(AB|\Gamma) = P(A|\Gamma)\cdot P(B|\Gamma) \overset{P(\Gamma)>0}{\Longleftrightarrow} P(AB)=P(A)\,P(B)$$

2) α) δεσμευμένα ανεξάρτητα $\overset{\text{γενικά}}{\not\Rightarrow}$ ανεξάρτητα

και β) ανεξάρτητα $\overset{\text{γενικά}}{\not\Rightarrow}$ δεσμευμένα ανεξάρτητα

* Αντιπαράδειγμα *

Αν A, B, Γ ενδεχόμενα με $0 < P(A), P(B), P(\Gamma) < 1$

και $A, B \subset \Gamma$, τότε

αν A και B ανεξάρτητα $\Rightarrow$ A και B <u>ΔΕΝ</u> είναι δεσμευμ. ανεξάρτητα. δοθέντος του Γ.

Τότε το α) έχει δειχτεί.

\+ με αντιθετοαντιστροφή ,

Αν A και B δεσμευμ. ανεξάρτητα δοθέντος του Γ, τότε A και B όχι ανεξάρτητα , άρα και το β) ισχύει.

$$P(AB|\Gamma) \overset{o\rho\sigma.}{=} \frac{P(AB\Gamma)}{P(\Gamma)} \overset{AB\subset\Gamma}{=} \frac{P(AB)}{P(\Gamma)} \overset{A\perp\!\!\!\perp B}{=} \frac{P(A)\,P(B)}{P(\Gamma)} =$$

$$= P(\Gamma)\cdot\frac{P(A)}{P(\Gamma)}\cdot\frac{P(B)}{P(\Gamma)} \overset{A\subset\Gamma}{\underset{B\subset\Gamma}{=}} P(\Gamma)\cdot P(A|\Gamma)\cdot P(B|\Gamma) <$$

$$< 1\cdot P(A|\Gamma)\cdot P(B|\Gamma)$$

$\Rightarrow$ Άρα, A και B όχι δεσμευμ. ανεξάρτητα δοθέντος του Γ.

Εφαρμογές

Σε 2 ρίψεις νομίσματος

A : "K στην 1η ρίψη" $A = \{(K,K),(K,\Gamma)\}$
B : "K στην 2η ρίψη" $B = \{(\Gamma,K),(K,K)\}$
Γ : "τουλάχιστον ένα K στις 2 ρίψεις". $\Gamma = \{(K,\Gamma),(\Gamma,K),(K,K)\}$

$A \perp\!\!\!\perp B$, $P(AB|\Gamma) = \frac{1}{3} \neq P(A|\Gamma)\cdot P(B|\Gamma) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

Άρα A, B όχι δεσμευμένα ανεξάρτητα δοθέντος του Γ.

Σε 3 ρίψεις νομίσματος

A : "K στις 2 πρώτες ρίψεις"
B : "K στις 2 τελευταίες ρίψεις"
Γ : "τουλ. 2 K"

Α και Β είναι δεσμ. ανεξ. δοθέντος του Γ ενώ δεν είναι ανεξ. ενδεχόμενα.

2) Για περισσότερα ενδεχόμενα, η δεσμευμ. ανεξαρτησία γενικεύεται όπως και η απλή ανεξαρτησία ενδεχομένων, αφού αντιστοιχεί σε ανεξαρτησία στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot|\Gamma))$

Άσκηση 1, Φυλ. 2 : Ένας φίλος βρίσκεται με πιθανότητα $\frac{p}{7}$ στον όροφο i ενός εμπορικού κέντρου. Ψάξαμε μάταια στους 6 από αυτούς. Ζητάμε την πιθανότητα να βρίσκεται στον όροφο που δεν ψάξαμε. $(0 \leq p \leq 1)$

Λύση

Αν Β: "να μη βρίσκεται στους ορόφους που ψάξαμε" =
="να βρίσκεται στον όροφο που υπολείπεται ή εκτός εμπορικού κέντρου".

Αν Α: "να βρίσκεται στον όροφο που υπολείπεται".

$$P(A|B) \overset{\text{ορσ.}}{=} \frac{P(AB)}{P(B)} \overset{A\subset B}{=} \frac{P(A)}{P(B)} \overset{\text{B: ένωση 2 ξένων ενδεχ.}}{=} \frac{\frac{p}{7}}{\frac{p}{7}+1-\left(\sum_{i=1}^{7}\frac{p}{7}\right)}$$

$$= \frac{\frac{p}{7}}{\frac{p}{7}+1-p} = \frac{p}{p+7(1-p)} = \boxed{\frac{p}{7-6p}}$$

Άσκηση 2, Φυλ 2

Ριχνουμε 2 τίμια ζάρια (ανεξ. ριψεις). Το ένα ζάρι ειναι μαύρο και το άλλο άσπρο. Έστω:

A: "το ψηφίο του μαύρου ζαριού ειναι άρτιος".
B: "το ψηφίο του άσπρου ζαριού είναι περιττός".
Γ: "τα ψηφία και των 2 ζαριών ειναι και τα 2 άρτιοι
ή και τα 2 περιττοί".

Νδο $A \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp \Gamma$ και $B \perp\!\!\!\perp \Gamma$, όμως

A, B και Γ δεν είναι αμοιβαια ανεξάρτητα.

Λυση

Από ανεξαρτησια ριψεων

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

ΑΓ = "το ψηφίο του μαύρου είναι άρτιος"
και το ψηφίο του άσπρου είναι άρτιος".

$$P(A\Gamma) = P(\text{"μαυρο άρτιος"}) \cdot P(\text{"άσπρο άρτιος"}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A)\,P(\Gamma)$$

Ομοίως $P(B\Gamma) = P(B)\,P(\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, αφού

$$P(\Gamma) = P(\text{"και τα 2 ζάρια άρτιος"})$$

$$+ P(\text{"και τα 2 ζάρια περιττός"})$$

$$= P^2(\text{"άρτιος"}) + P^2(\text{"περιττός"}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

■

- $AB\Gamma = \varnothing \Rightarrow P(AB\Gamma) = 0 \neq \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(B)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(\Gamma)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$

Άσκηση 5, [ΘΕΜΑ Εξ. Ιούνιος 2013]

10 κάλπες αριθμημένες από 1 ... 10.
Τις ονομάζουμε $K_1, K_2, \dots, K_{10}$ και
K_i : "να επιλέξουμε την K_i"

- Κάθε μία περιέχει 11 σφαιρίδια
  - $K_1, K_2, \dots, K_7$: 3 λευκά και 8 μαύρα σφαιρίδια
  - K_8, K_9, K_{10} : 5 λευκά και 6 μαύρα σφαιρίδια

Επιλέγεται τυχαία μια κάλπη $\left(P(K_i) = \frac{1}{10}\right)$

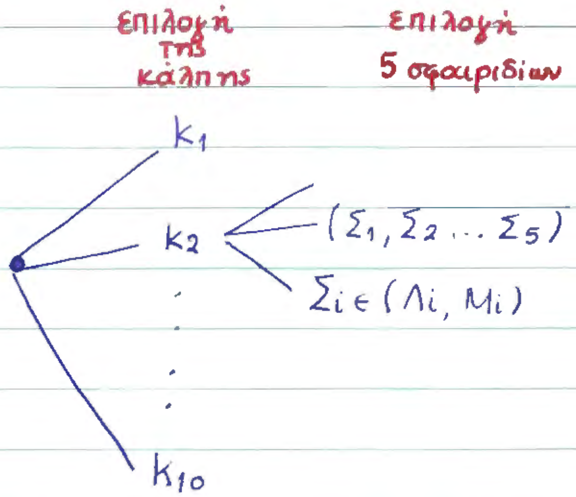
και επιλέγουμε με επανάθεση 5 σφαιρίδια.

⇒

1) P("να επιλεγεί η κάλπη K_3, τα πρώτα 3 σφαιρίδια λευκά και τα 2 τελευταία μαύρα.").

2) P("να επιλεγεί η κάλπη K_3 και να έχουμε συνολικά 3 λευκά και 2 μαύρα").

Ονομάζουμε Λ_i : "να επιλεγεί λευκό σφαιρίδιο στην i-επιλογή"
M_i : " -''- μαύρο -''- "



$$P(K_3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 M_4 M_5) \overset{\text{πολ|κος νόμος}}{=} P(K_3) \cdot P(\Lambda_1 | K_3) \cdot P(\Lambda_2 | K_3 \Lambda_1) \cdot P(\Lambda_3 | K_3, \Lambda_1, \Lambda_2) \cdot$$
$$\cdot P(M_4 | K_3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3) \cdot P(M_5 | K_3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 M_4) =$$

$$= P(K_3) \cdot P(\Lambda_1 | K_3) \cdot P(\Lambda_2 | K_3) \cdot P(\Lambda_3 | K_3) \cdot P(M_4 | K_3) \cdot P(M_5 | K_3)$$

$$= \frac{1}{10} \left(\frac{3}{11}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{11}\right)^2$$ εφόσον $P(\Lambda_i | K_3) = \frac{3}{11}$

$P(M_i | K_3) = \frac{8}{11}$

$$P\left(K_3 \cap \{\text{συνολικά 3 λευκές και 2 μαύρες}\}\right)$$

$$= P\Big(K_3 \cap \big(\bigcup_{1\le i_1<i_2<i_3\le 5} \Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_3}M_{j_1}M_{j_2}\big)\Big) \quad \text{, όπου}$$

$$\{j_1, j_2\} = \{1,2,\dots,5\} \setminus \{i_1, i_2, i_3\}$$

$$= P\Big(\bigcup_{1\le i_1<i_2<i_3\le 5} K_3\Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_3}M_{j_1}M_{j_2}\Big) =$$

$$= \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le 5} P\left(K_3\Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_3}M_{j_1}M_{j_2}\right) =$$

$$= \binom{5}{3} P\left(K_3\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3M_4M_5\right) \text{ ,}$$

$$\text{αφού } P\left(K_3\Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_3}M_{j_1}M_{j_2}\right) = P\left(K_3\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3M_4M_5\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3}{11}\right)^3\cdot\left(\frac{8}{11}\right)^2$$

$$\text{Τελικά} \quad P = \binom{5}{3}\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3}{11}\right)^3\left(\frac{8}{11}\right)^2$$

(3) $P(\text{"όλα τα σφαιρίδια λευκά"})$

στα $K_i, i=1,\dots 10.$

A' Τρόπος (θ.ο.π) $= P\left(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5\right) = \sum_{i=1}^{10} P(K_i)\cdot P\left(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5 \mid K_i\right)$

B' Τρόπος (θ.ο.π) στα $\bigcup_{i=1}^{7} K_i$ και $\bigcup_{i=8}^{10} K_i$

$$P\left(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5\right) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{7} K_i\Big)P\cdot\Big(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5 \,\Big|\, \bigcup_{i=1}^{7} K_i\Big)$$

$$+ P\Big(\bigcup_{i=8}^{10} K_i\Big)P\Big(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5 \,\Big|\, \bigcup_{i=8}^{10} K_i\Big).$$

⟶

$$= \frac{7}{10} \prod_{i=1}^{5} P(\Lambda_i \mid \bigcup_{i=1}^{7} K_i) + \frac{3}{10} \prod_{i=1}^{5} P(\Lambda_i \mid \bigcup_{i=8}^{10} K_i)$$

$$= \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^5 + \frac{3}{10} \left(\frac{5}{11}\right)^5$$

(4) $$P(K_3 \mid \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4 \Lambda_5) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(K_3) \cdot P(\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4 \Lambda_5 \mid K_3)}{\underbrace{P(\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4 \Lambda_5)}_{(iii)\ \varepsilon\rho\omega\tau.}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^5}{\frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^5 + \frac{3}{10} \left(\frac{5}{11}\right)^5} = \dots$$

Μάθημα 9ο - 24/10/2014

Άσκηση 2.8

- 0,1 % ενός πληθυσμού πάσχει από ασθένεια Χ.
- ένα τεστ κάνει λάθος διάγνωση 5% όταν κάποιος έχει ασθένεια και 1% όταν κάποιος είναι υγιής.

Δεδομένου ότι το τεστ δείχνει ασθένεια σε κάποιο άτομο που επιλέχθηκε στην τυχη, ποια η πιθανότητα το άτομο αυτό να έχει όντως την ασθένεια;

A_1, Y_1 : "το άτομο που επιλέχθηκε στην τυχη να έχει όντως την ασθένεια ή όχι αντίστοιχα".

A_2, Y_2 : "το τεστ να δείξει ότι το άτομο είναι ασθενής ή υγιής αντίστοιχα".

πραγματική κατάσταση υγείας

κατάσταση υγείας που δείχνει το τεστ.

$$P(A_1 | A_2) \overset{Bayes}{=\!=} \frac{P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)}{P(A_2)} =$$

$$= \frac{P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)}{P(A_1)\cdot P(A_2|A_1) + P(Y_1)\cdot P(A_2|Y_1)} =$$

$$= \frac{0.001 \times 0.95}{0.001 \times 0.95 + 0.999 \times 0.01} = \frac{95}{95+999} = \frac{95}{1094}$$

■

Άσκηση 2.6.

K_1: 5 άσπρα και 7 μαύρα σφαιρίδια
K_2: 3 άσπρα και 5 μαύρα σφαιρίδια

Επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την K_1 και το τοποθετούμε στην K_2.
Έπειτα, επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο τυχαία από την K_2.

- P("2ο σφαιρίδιο να είναι άσπρο ?")

A_1 : "το 1ο σφαιρίδιο να είναι άσπρο"
M_1 : "το 1ο σφαιρίδιο να είναι μαύρο"
A_2 : "το 2ο σφαιρίδιο να είναι άσπρο"

$$P(A_2) \overset{Θ.Ο.Π}{=\!=} P(A_1)\cdot P(A_2|A_1) + P(M_1)\cdot P(A_2|M_1) =$$

$$= \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{9} + \frac{7}{12}\cdot\frac{3}{\underset{8+1}{\underset{\Downarrow}{\boxed{9}}}} = \frac{41}{108}$$

■

Άσκηση 2.9

Πείραμα τύχης: ακολουθία (ανεξάρτητων) ρίψεων 2 ζαριών μέχρι να φέρω άθροισμα ενδείξεων 6 ή 7.

1) $P(\text{"να σταματήσουμε στη δοκιμή -}n\text{-"})$, $n \geq 1$

2) $P(\text{"να φέρουμε άθροισμα 6 πριν φέρουμε άθροισμα 7"})$.

~

E: "να φέρουμε άθροισμα 6 ή 7 σε 1 ρίψη"
E_i: "να φέρουμε άθροισμα i σε 1 ρίψη"

$E = E_6 \cup E_7$, $A = E^c$ (να μη φέρουμε άθροισμα 6 ή 7 σε 1 ρίψη)

$\Omega = \{E, AE, AAE, \dots\}$

Λύση

(1): $P(\text{"να σταματήσουμε στη δοκιμή } n\text{"}) =$

$$= P(\underbrace{AA\dots A}_{n-1} E) \overset{\text{ανεξαρτησία ρίψεων}}{=} (P(A))^{n-1} \cdot P(E)$$

- $P(E) = P(E_6 \cup E_7) = P(E_6) + P(E_7)$

$E_6 = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$E_7 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

$$P(E_6)=\frac{|E_6|}{36}=\frac{5}{36}\quad,\quad P(E_7)=\frac{|E_7|}{36}=\frac{6}{36}$$

$$P(E)=P(E_6)+P(E_7)=\frac{5}{36}+\frac{6}{36}=\frac{11}{36}\qquad(2)$$

$$P(A)=1-P(E)=1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}\qquad(3)$$

Από (1),(2),(3) : $P(\underbrace{AA\cdots A}_{n-1}E)=\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}\cdot\frac{11}{36}\quad , n\geq 1$

(2) $P(\text{"να φέρω άθροισμα 6 πριν φέρω άθροισμα 7"}) =$

Α'ΤΡΟΠΟΣ ; (Θ.Ο.Π)

$$=\sum_{n=1}^{+\infty} P(\text{"να σταματήσουμε στη δοκιμή } n\text{"})$$

✱ $P\left(\text{"να φέρουμε 6" στη δοκιμή -}n\text{-} \,\middle|\, \text{"σταματάμε στη δοκιμή -}n\text{-"}\right) =$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty} P_n\cdot P\left(\begin{matrix}\text{"να φέρουμε άθροισμα"}\\ \text{6 στη δοκιμή -}n\text{-}\end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix}\text{"φέρνουμε άθροισμα}\\ \text{6 ή 7 στη δοκιμή -}n\text{-"}\end{matrix}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty} P_n\cdot\frac{P(\text{"να φέρουμε άθροισμα 6"})}{P(\text{"να φέρουμε άθροισμα 6 ή 7"})}=\sum_{n=1}^{+\infty} P_n\,\frac{P(E_6)}{P(E)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}\frac{11}{36}\;\frac{\frac{5}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{5}{36}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}=\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{1-\frac{25}{36}}$$

$$=\frac{5}{11}.$$

Β' Τροπος: P("να φέρω άθροισμα 6 πριν από 7") =

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(\underbrace{AA\cdots A}_{n-1}E_6) = \dots = \dots = \frac{5}{11}$$

Γ' Τροπος: (Πιο έξυπνος?)

B_1 = "να φέρω αθρ. 6 στην $1^{η}$ δοκιμή"

B_2 = "να φερω αθρ. 7 στην $1^{η}$ δοκιμή"

B_3 = "δεν φέρνω αθρ 6 ή 7 στην $1^{η}$ δοκιμή".

$$r \overset{(θοπ)}{=} P(B_1)\cdot P\left(\text{"να φέρω 6 πριν από 7"} \middle| B_1\right) + P(B_2)\cdot P\left(\text{"."} \middle| B_2\right) + P(B_3)\cdot P\left(\text{"."} \middle| B_3\right) =$$

$$= \frac{5}{36}\cdot 1 + \frac{6}{36}\cdot 0 + \frac{25}{36}\cdot r \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r = \frac{5}{36} + \frac{25}{36}r \Longrightarrow \frac{11}{36}r = \frac{5}{36} \Longrightarrow r = \frac{5}{11}$$

(3): όπως πριν $p = \frac{6}{11}$

(4): P("να σταματησουμε το παιχνίδι") =

= P("να φέρω αθρ 6 πριν από 7") + P("να φέρω αθρ 7 πριν από 6").

$$= \frac{5}{11} + \frac{6}{11} = \boxed{1}$$

Τυχαίες Μεταβλητές

① Ορισμός τ.μ. και παραδείγματα.

Τυχαια μεταβλητή : αριθμητικό χαρακτηριστικό που αντιστοιχίζεται στα δ.σ. (δυνατά αποτελέσματα) ενός π.τ.

Π.χ. 1) π.τ. : 100 (ανεξαρτ.) ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος.
τ.μ. : # φορών που φέραμε κορώνα
ή # φορών που είχαμε διαδοχή Κορώνα-Γράμματα.

2) π.τ. : ακολουθια (ανεξαρτ.) ρίψεων 2 ζαριών
τ.μ. : # φορών που είχαμε εξάρες στις 1000 πρώτες δοκιμές.

ή # φορών που οι ενδείξεις των ζαριών συμπίπτουν.

φορών μέχρι να φέρουμε πρώτη φορά ασόδυο.

3) π.τ. : παρατήρηση του χρόνου λειτουργίας μιας μηχανής/λαμπτήρα
τ.μ. : ο χρόνος λειτουργίας της μηχανής ($t \geq 0$, συνεχής χρόνος)
ή πόσες μέρες λειτούργησε η μηχανή?

4) π.τ. : Τυχαία επιλογή ενός σημείου M σε ένα ευθ. τμήμα AB

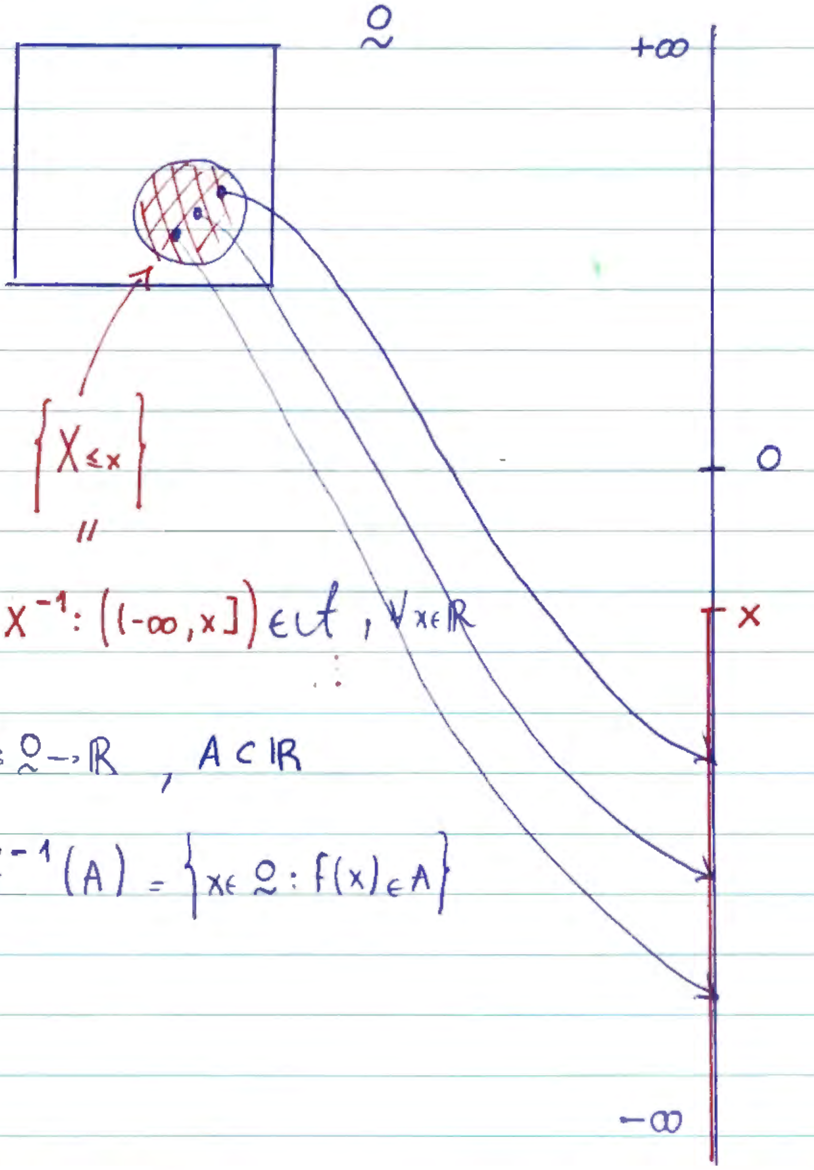
τ.μ. : η απόσταση του M από το A, δηλ. το μήκος (AM) ή ο λόγος $\frac{(AM)}{(MB)}$, όταν $M \neq B$.

Ορισμός: Έστω $(\underset{\sim}{\Omega}, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π.

Τότε μια συνάρτηση $X: \underset{\sim}{\Omega} \to \mathbb{R}$, λέγεται τυχαία μεταβλητή αν:

$$\{X \leq x\} \overset{\text{ορσ.}}{=} \{\omega \in \underset{\sim}{\Omega} : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x])$$

$\in \mathcal{A}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (δηλ. $\{X \leq x\}$ είναι ενδεχόμενο $\forall x \in \mathbb{R}$)



$\{X \leq x\}$

$\parallel$

$X^{-1}: ((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$f: \underset{\sim}{\Omega} \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$

$f^{-1}(A) = \{x \in \underset{\sim}{\Omega} : f(x) \in A\}$

Παρατήρηση

Αν ο Ω είναι διακριτός δ.χ. (πεπερασμένος ή αριθμησίμως άπειρος), τότε μπορούμε να επιλέξουμε

$\mathcal{A} = P(\Omega)$ και τότε κάθε συνάρτηση $X:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι τ.μ.

Αντίθετα, σε συνεχείς δ.χ. αυτό δεν είναι πάντα εφικτό.

Όμως αυτό δεν θα μας απασχολήσει, αφού στο μάθημα αυτό κάθε συνάρτηση $X:\Omega\to\mathbb{R}$ θα είναι τ.μ.

② Κατανομή μιας τ.μ.

Όταν θεωρούμε τ.μ. τότε το ενδιαφέρον μιας συνήθως φεύγει από τον αρχικό δ.χ. Ω και υπολογισμούς πιθανοτήτων τύπου $P(A)$ και εστιάζεται στο $\mathbb{R}$ και σε υπολογισμούς πιθανοτήτων τύπου $P(X\in A)$.

Αρχικός χ.π. $\qquad\qquad$ Επαγόμενος χ.π.

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X:\Omega\to\mathbb{R}\ \text{τ.μ.}} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$$

δ.χ. ενδεχομ. συναρτ. πιθαν.

δ.χ (ενδεχόμενα) (Borel υποσύνολα) επαγόμενη συνάρτηση πιθανότητας

όπου $P_X(A) \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X\in A) = P(\underset{\in\mathcal{A}}{\{w\in\Omega : X(w)\in A\}})$

περιέχει {ανοικτά, κλειστά, διαστήματα του $\mathbb{R}$, ...}

* $B(\mathbb{R}) = \sigma\begin{pmatrix}\text{ανοικτά}\\ \text{υποσύνολο}\\ \text{του } \mathbb{R}\end{pmatrix}$

ελάχιστη
σ-άλγεβρα
που περιέχει τα ανοικτά σύνολα

Ορισμός: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π. και

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ μια τ.μ.

Τότε η επαγόμενη συνάρτηση πιθανότητας
$P_X : B(\mathbb{R}) \to [0,1]$ λέγεται κατανομή (πιθανότητας) της τ.μ. X.

Ερώτηση: Υπάρχει κάποιος πιο οικονομικός τρόπος να χαρακτηρίσουμε την κατανομή μιας τ.μ.;

Απάντηση: Ναι, είναι η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ.

Ορισμός: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π. και $X:\Omega \to \mathbb{R}$ μία τ.μ.

Τότε η συνάρτηση $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, όπου

$F_X(x) \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X \le x)$, λέγεται συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X.

Μάθημα 10ο - 27/10/

① Συνάρτηση Κατανομής μιας τ.μ.

Υπενθύμιση: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π. και $X: \Omega \to \mathbb{R}$ μια τ.μ. Η συνάρτηση $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$, με $F_X(x) = P(X \leq x)$ λέγεται (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X.

Παρατηρήσεις.

1) Η συνάρτηση κατανομής F_X καθορίζει μονοσήμαντα (χαρακτηρίζει) την κατανομή (πιθανότητας) P_X της τ.μ. X. Δηλ., αν X και Y είναι τ.μ. και $F_X = F_Y$, τότε: $P_X = P_Y$

2) Αν X και Y είναι 2 τ.μ., με $F_X = F_Y$, τότε θα λεμε ότι οι X και Y είναι ισόνομες και γράφουμε

$$X \overset{d}{=} Y \quad (d: \text{distribution})$$

Επίσης: αν $X = Y \implies X \overset{d}{=} Y$. Όμως

$$X \overset{d}{=} Y \not\Rightarrow X = Y.$$

② Παραδείγματα

#1 π.τ. : 3 (ανεξάρτητες) ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος

τ.μ. X : # ρίψεων που έχουμε κορώνα.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \Omega = \{ (\Gamma,\Gamma,\Gamma), & (\Gamma,\Gamma,K), & (\Gamma,K,\Gamma), & (\Gamma,K,K), & (K,\Gamma,\Gamma), & (K,\Gamma,K), & (K,K,\Gamma) & (K,K,K \\
X:\Omega\to\mathbb{R} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
X(\omega) & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3
\end{array}
$$

Βλέπουμε $X(\omega) \in \{0,1,2,3\}$

Υπενθύμιση

$$\{X\in A\} \overset{\text{ορσ.}}{=} \{\omega\in\Omega : X(\omega)\in A\} = X^{-1}(A)$$

Ειδικά: $\{X\in\{x\}\} \overset{\text{ορσ.}}{=} \{X=x\}$

$$\{X\in(-\infty,x)]\} \overset{\text{ορσ.}}{=} \{X\le x\}$$

Έστω $A_0 \overset{\text{ορσ.}}{=} \{X=0\} = \{(\Gamma,\Gamma,\Gamma)\}$

$$A_1 \overset{\text{ορσ.}}{=} \{X=1\} = \{(\Gamma,\Gamma,K),(\Gamma,K,\Gamma),(K,\Gamma,\Gamma)\}$$

$$A_2 \overset{\text{ορσ.}}{=} \{X=2\} = \{(\Gamma,K,K),(K,\Gamma,K),(K,K,\Gamma)\}$$

$$A_3 \overset{\text{ορσ.}}{=} \{X=3\} = \{(K,K,K)\}$$

Αντίστοιχα :

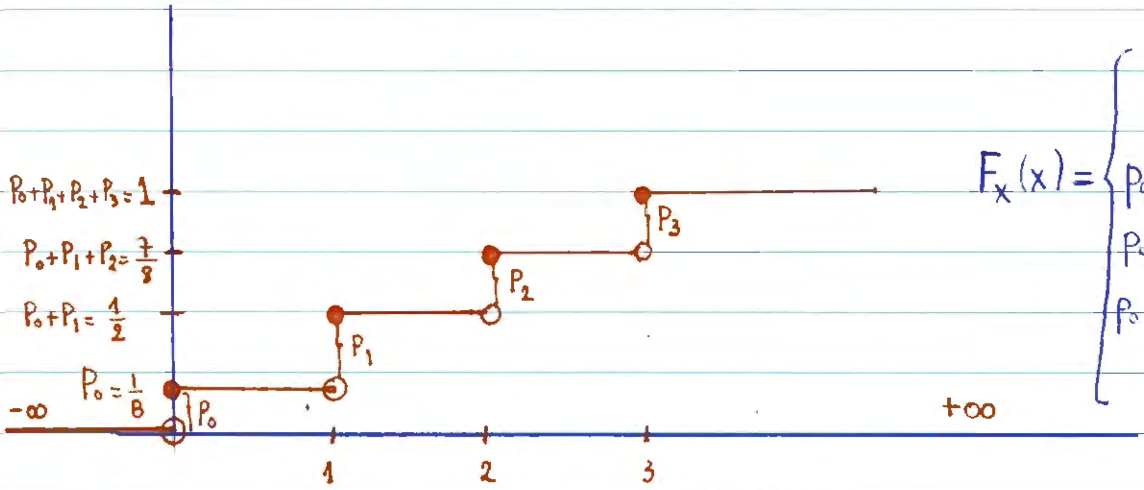
$$P_0 \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X=0) = P(A_0) = \frac{|A_0|}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$$

$$P_1 \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X=1) = P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

$$P_2 \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X=2) = P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

$$P_3 \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X=3) = P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$$

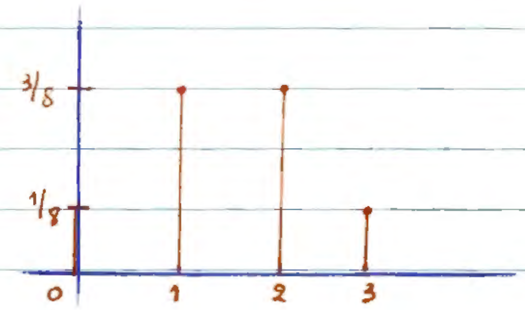
X	$-\infty$	0		1		2		3	$+\infty$
$\{X=x\}$	$\cdots \emptyset \cdots$	$\boxed{A_0}$	$\cdots \emptyset \cdots$	$\boxed{A_1}$	$\cdots \emptyset \cdots$	$\boxed{A_2}$	$\cdots \emptyset \cdots$	$\boxed{A_3}$	$\emptyset$
$\{X\le x\}$	$\cdots \emptyset \cdots$	$\boxed{A_0}$	$\cdots A_0 \cdots$	$\boxed{\bigcup_{i=0}^{1} A_i}$	$\bigcup_{i=0}^{1} A_i$	$\boxed{\bigcup_{i=0}^{2} A_i}$	$\bigcup_{i=0}^{2} A_i$	$\bigcup_{i=0}^{3} A_i = \Omega$	
$P(X=x)$	$\cdots 0 \cdots$	$\boxed{P_0}$	$\cdots 0 \cdots$	$\boxed{P_1}$	0	$\boxed{P_2}$	0	$\boxed{P_3}$	0
$P(X\le x)$	$\cdots 0 \cdots$	$\boxed{P_0}$	$\cdots P_0 \cdots$	$\boxed{\sum_{i=0}^{1} P_i}$	$\sum_{i=0}^{1} P_i$	$\boxed{\sum_{i=0}^{2} P_i}$	$\sum_{i=0}^{2} P_i$	$\sum_{i=0}^{3} P_i = 1$	1



$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & , x<0 \\ P_0=\frac{1}{8} & , 0\le x<1 \\ P_0+P_1=\frac{1}{2} & , 1\le x<2 \\ P_0+P_1+P_2=\frac{7}{8} & , 2\le x<3 \\ 1 & , x\ge 3 \end{cases}$$

Συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας της τ.μ. X

$$f_X(x) \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X=x)$$



$$f_X(x)=\begin{cases}1/8, & x=0\\ 3/8, & x=1\\ 3/8, & x=2\\ 1/8, & x=3\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

Παρατηρήσεις

1) Η συνάρτηση κατανομής F_X είναι $\overset{(i)}{\text{αύξουσα}}$, $\overset{(ii)}{\text{δεξιά συνεχής}}$ και (iii) $F_X(-\infty) \overset{\text{ορσ.}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $F_X(+\infty) \overset{\text{ορσ}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$

2) Η F_X είναι ασυνεχής, εκεί όπου $P(X=x)>0$, και μάλιστα το άλμα ασυνέχειας είναι $P(X=x)=F(x)-F(x-)$, όπου: $F(x-)=\lim\limits_{y\to x^-} F(y)$

3) Η $f_X(x)=P(X=x)$ μας δίνει όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε την F_X:

$$F_X(x)=\sum_{k\ x_k\le x} f_X(x_k) \qquad \text{εδώ, } \underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{x_0},\ \underset{\substack{\shortparallel\\ 1}}{x_1},\ \underset{\substack{\shortparallel\\ 2}}{x_2},\ \underset{\substack{\shortparallel\\ 3}}{x_3}$$

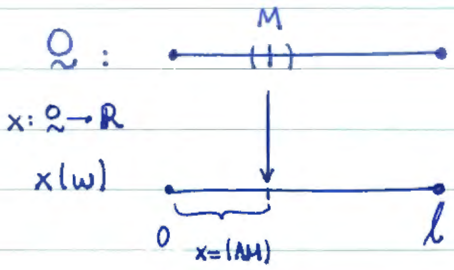
Αντίστροφα, αν έχουμε την F_X, μπορούμε να υπολογίσουμε την f_X, $f_X(x)=P(X=x)=F_X(x)-F_X(x-)$

4) Αν πάρουμε Y = #ριψεων που έχουμε γράμματα.

Τότε: $X \overset{d}{=} Y$, ενώ $X+Y=3$ $\left(\forall \omega \in \Omega : X(\omega)+Y(\omega)=3\right)$

#2 Π.Τ. : τυχαία επιλογή ενός σημείου M από ευθ. τμήμα AB μήκους ℓ.

Τ.μ. X : η απόσταση του σημείου M από το A, δηλ. το μήκος (AM).

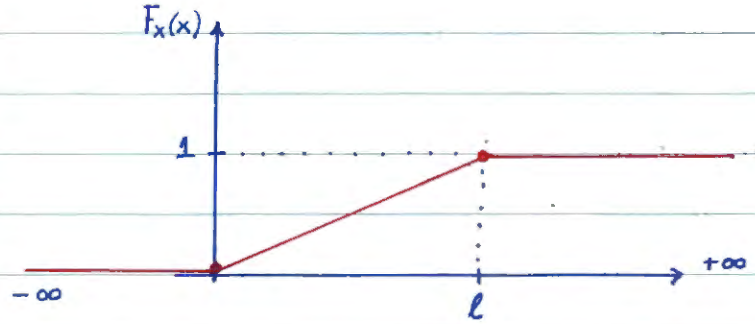


Αν Γ ενδεχόμενο, $P(\Gamma) = \frac{\text{μήκος}(\Gamma)}{\text{μήκος}(\Omega)}$.

(έχουμε γεωμετρική πιθανότητα σε 1 διάσταση)

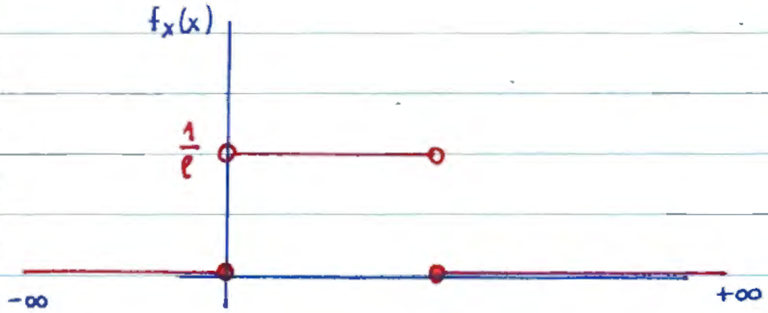
$$\{X \le x\} = \begin{cases} \emptyset & , x<0 \\ AM_x, \ (M_x : (AM_x)=x) & , 0 \le x \le \ell \\ AB = \Omega & , x > \ell \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , \; x<0 \\ \dfrac{(AM_x)}{(AB)} = \dfrac{x}{\ell} & , \; 0 \le x \le \ell \\ 1 & , \; x>\ell \end{cases}$$



$$P(X=x) = F_X(x) - F_X(x-) \overset{\text{λόγω συνέχειας}}{=} 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ορίζουμε: $f_X(x) = F_X'(x)$ (εκεί που ορίζεται) η f_X λέγεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X.



$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & , \; 0<x<\ell \\ 0 & , \; \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Εκεί που η F_X δεν είναι παραγωγίσιμη, μπορούμε να ορίζουμε αυθαίρετα την τιμή της f_X. Παρ' όλα αυτά προτιμάμε να την ορίζουμε ίση με μηδέν.

Παρατηρήσεις

1) Η F_X είναι αύξουσα , είναι συνεχής και $F(-\infty)=0$
και $F(+\infty)=1$

2) Η F_X δεν έχει ασυνέχειες και επομένως η συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας : $P(X=x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Άρα δεν μας δίνει καμία πληροφορία για τον υπολογισμό της F_X.

3) Αντίθετα, Η $f_X(x) = F_X'(x)$ εκεί που ορίζεται μας δίνει όλη την πληροφορία που θέλουμε για τον υπολογισμό της F_X.

Πράγματι, $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

Και αντίστροφα, από την F_X , μπορούμε να παίρνουμε την f_X με παραγώγιση.

③ Ιδιότητες συνάρτησης κατανομής.

Βασικές Ιδιότητες

1) Η F_X είναι αύξουσα

2) Η F_X είναι δεξιά συνεχής

3) $F(-\infty)=0$ και $F(+\infty)=1$

* Αποδείξεις ιδιοτήτων

1. Η F_X είναι αύξουσα

$$\{X\le x\}\subset\{X\le y\}$$

Αν $x<y$, $F_X(x) = P(X\le x)\le P(X\le y) = F_X(y)$

2. Η F_X είναι δεξιά συνεχής

Πρέπει αν $x_0\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

Κάθε αύξουσα συνάρτηση έχει πάντα πλευρικά όρια, άρα υπάρχει το όριο από τα δεξιά.
Βρίσκουμε την τιμή παίρνοντας οποιαδήποτε ακολουθία με $x_n \to x_0^+$

Άρα : $\lim\limits_{x\to x_0^+} F_X(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_X(x_n)$

Παίρνουμε : $x_n = x_0 + \frac{1}{n} \longrightarrow x_0^+$

Ορίζουμε : $A_n = \{X\le x_n\}$, $n\ge 1$

Η $A_n\downarrow$ και $\bigcap\limits_n A_n = \{X\le x_0\}$. Τότε :

$$\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X\le x_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \overset{A_n\downarrow}{\overset{\text{ιδ. πιθαν.}}{=\!=}} P\left(\bigcap_n A_n\right) =$$

$$\left(\text{Τελικά: η } F_X \text{ είναι δεξιά συνεχής}\right) = P(X\le x_0) = F_X(x_0)$$

3. $F(-\infty)=0$

$\swarrow$

Υπόδειξη: $x_n = -n$, $A_n = \{X \leq -n\}$

$F(+\infty)=1$

$\swarrow$

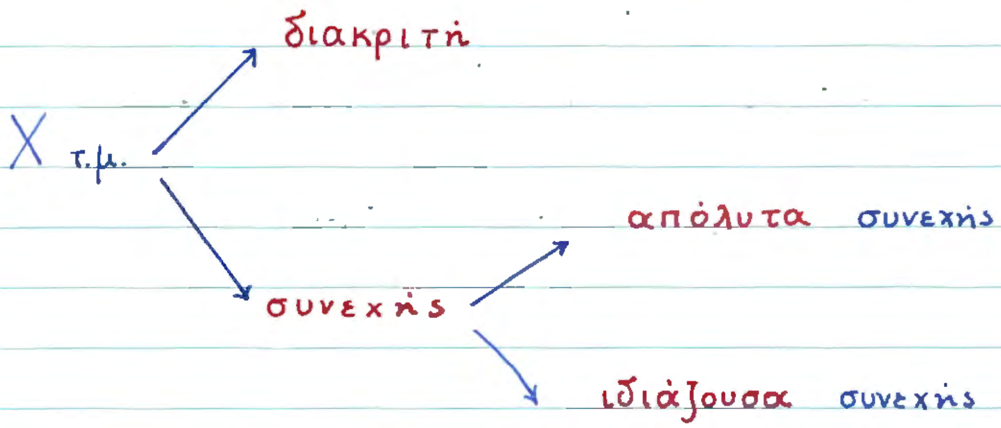
Υποδειξη: $x_n = n$, $A_n = \{X \leq n\}$

και $A_n \nearrow$ και όριο $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cup A_n)$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ και ικανοποιεί τις ιδιότητες 1) - 3) (αύξουσα, δεξιά συνεχής και $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$), τότε υπάρχει χ.π. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και τ.μ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$, όπου $F_X = F$.

Μια F που ικανοποιεί τις ιδιότητες 1) - 3) λέμε ότι είναι μία συνάρτηση κατανομής.

④ Κατηγορίες τ.μ.



- **διακριτή** : υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$, ώστε $P(X \in A) = 1$

- **συνεχής** : αν η σ.κ. F_X είναι συνεχής

- **απόλυτα συνεχής** : υπάρχει μια μη αρνητική συνάρτηση f, $(f \geqslant 0)$ και επιπλέον ολοκληρώσιμη με $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, όπου $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

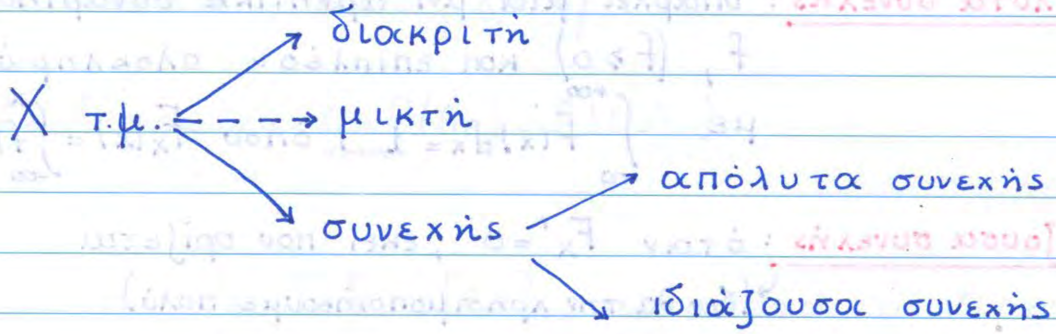
*
- **ιδιάζουσα συνεχής** : όταν $F_X' = 0$, εκεί που ορίζεται
  ↳(δεν θα την χρησιμοποιήσουμε πολύ)

Υπολογισμός $P(X \in I)$ ως συνάρτηση F_X , για I: διάστημα.

I	$P(X \in I)$ σμβ	$P(X \in I)$ ως συνάρτηση της F_X
$(-\infty, b]$	$P(X \leq b)$	$F_X(b)$
$(-\infty, b)$	$P(X < b)$	$F_X(b-)$
$[\alpha, +\infty)$	$P(X \geqslant \alpha)$	$1 - F_X(\alpha-)$
$(\alpha, +\infty)$	$P(X > \alpha)$	$1 - F_X(\alpha)$
$[\alpha, b]$	$P(\alpha \leq X \leq b)$	$F_X(b) - F_X(\alpha-)$
$(\alpha, b]$	$P(\alpha < X \leq b)$	$F_X(b) - F_X(\alpha)$
$[a, b)$	$P(a \leq X < b)$	$F_X(b-) - F_X(a-)$
(a, b)	$P(a < X < b)$	$F_X(b-) - F_X(a)$

Μάθημα 11º – 29/11/2014

① Κατηγορίες τυχαίων μεταβλητών (συνέχεια)



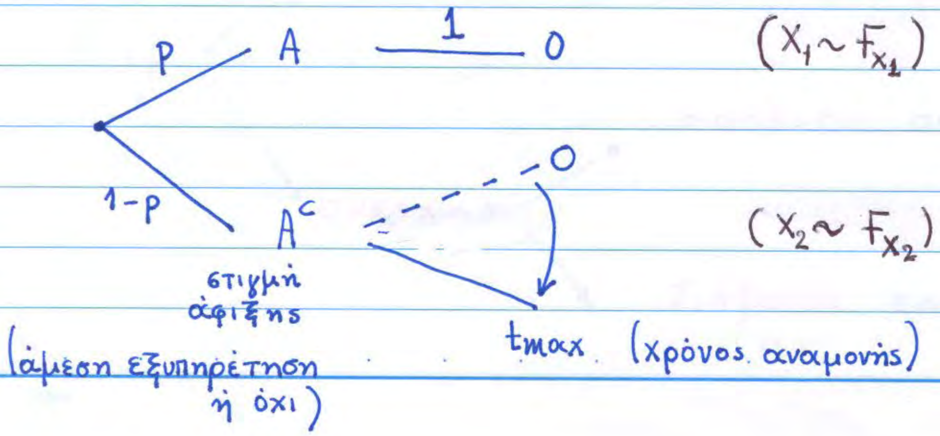
μικτή τ.μ. : συνδυάζει ένα διακριτό και ένα συνεχές κομμάτι.

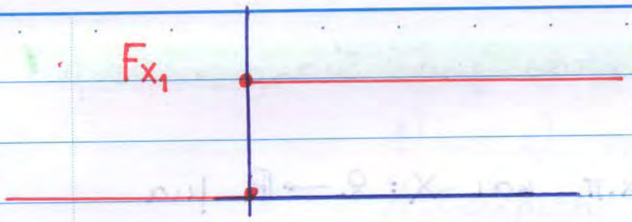
αναπαράσταση της σ.κ. της X : $F_X(x) = p\,F_{X_1}(x) + (1-p)\,F_{X_2}(x)$

όπου X_1 : διακριτή τ.μ.
και X_2 : συνεχής τ.μ. (ειδικά εδώ, απόλυτα συνεχής)

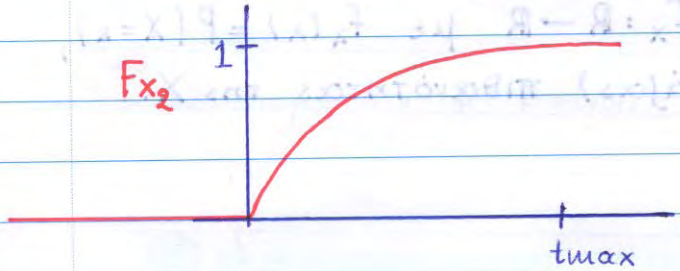
Παράδειγμα

Ο χρόνος αναμονής σε ένα οδοντιατρείο





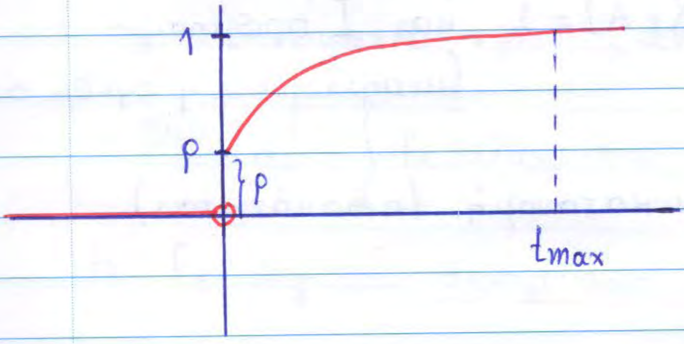
$X_1 = 0$, με πιθ 1



$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad F_X(x) = P(X \leq x) \overset{\text{Θ.Ο.Π}}{=} P(A)\cdot P(X \leq x \mid A) + P(A^c)\cdot P(X \leq x \mid A^c)$$

$$= p \cdot P(X_1 \leq x) + (1-p)\, P(X_2 \leq x)$$

$$= p \cdot F_{X_1}(x) + (1-p)\cdot F_{X_2}(x)$$



$$X = \begin{cases} X_1 & \text{, με πιθ. } p \\ X_2 & \text{, με πιθ. } 1-p \end{cases}$$

Προσοχή! (Ποτε)

$$\cancel{X = pX_1 + (1-p)X_2}$$

② Συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τ.μ.

Ορισμός: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π. και $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ μια διακριτή τ.μ.
Τότε η συνάρτηση $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_X(x) = P(X=x)$, λέγεται συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας της X.

Ιδιότητες

1) $f_X(x) \geqslant 0$

2) $\sum_{i\in I} f_X(x_i) = 1$, όπου $A = \{X_i\}_{i\in I}$ είναι τέτοιο ώστε $P(X\in A) = 1$, και I αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή αριθμ. άπειρο).

3) Η σ.π. f_X χαρακτηρίζει την κατανομή (πιθανότητας) της τ.μ. X.

4) σύνδεση με συνάρτηση κατανομής

σ.π. $f_X(x) = F_X(x) - F_X(x-)$

σ.κ. $F_X(x) = \sum_{i : X_i \leq x} f_X(x_i)$

Πρόταση : Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες 1) και 2) τότε υπάρχει χ.π. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και X διακριτή τ.μ. που έχει την f ως συνάρτηση πιθανότητάς της, δηλ. $f_X = f$.

- Τότε λέμε ότι η f είναι συνάρτηση πιθανότητας.

③ Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας (απόλυτα) συνεχούς τ.μ.

Ορισμός : Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και $X: \Omega \to \mathbb{R}$ μια τ.μ. . Τότε η X είναι απόλυτα συνεχής τ.μ. , αν υπάρχει $f_X \geq 0$, όπου :

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$$

Η f_X λέγεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X.
(σ.π.π)

$^*(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Ιδιότητες

1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

2) Η σ.π.π f_X, χαρακτηρίζει την κατανομή (πιθανότητας) της τ.μ. X.

3) Σύνδεση με τη σ.κ. F_X.

$$f_X(x) = F_X'(x) \text{ ,όταν το } x \text{ σημείο συνεχείας της } f_X.$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

4) $P(\alpha \leq X \leq b) = P(\alpha < X \leq b) = P(\alpha \leq X < b) = P(\alpha < X < b) =$

$$= \int_{\alpha}^{b} f_X(x)\,dx \quad , \underline{\alpha \leqslant b}$$

5) $P(X=x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (ειδική περίπτωση του 4, για $a=b$)

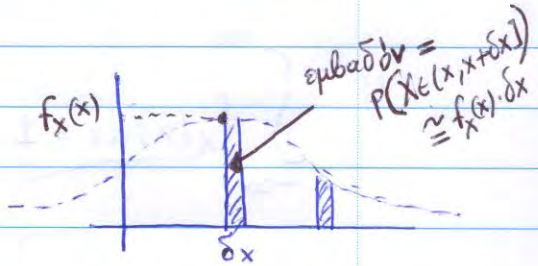
6) $P(x < X \leq x+\delta x) \cong f_X(x)\,\delta x$, όταν $\delta x \to 0^+$ και όταν x, σ.σ. της f_X.

όταν x σ.σ. της f_X

$$f_X(x) = F_X'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{F_X(x+\delta x) - F_X(x)}{\delta x} =$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{P(X \leq x+\delta x) - P(X \leq x)}{\delta x} =$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{P(x < X \leq x+\delta x)}{\delta x}$$



Άρα $f_X(x) \cong \dfrac{P(x < X \leq x+\delta x)}{\delta x}$,όταν $\delta x \to 0^+$

π.χ. αν $f_X(1)=2$, και πάρω $\delta x = 0,01$

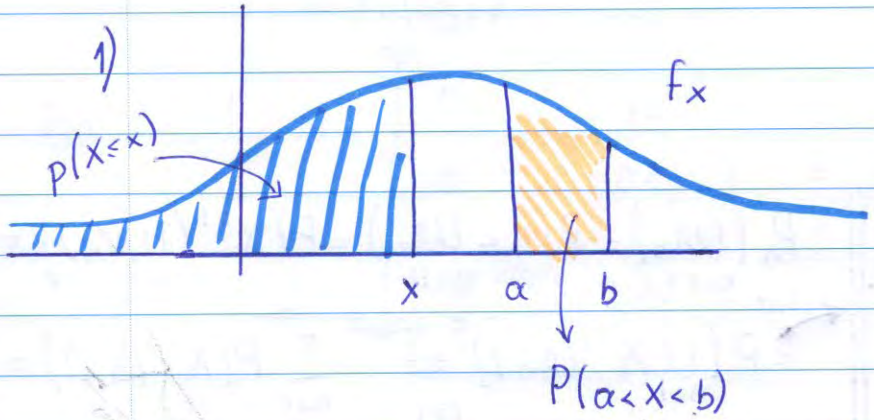
τότε $P(1<X\le 1,01) \cong f_X(1)\delta_x = 2\times 0.01 = 0,02$

Πρόταση: Όταν έχουμε μια $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, τότε υπάρχει χ.π. $(\underset{\sim}{\Omega}, \mathcal{A}, P)$ και τ.μ. $X:\underset{\sim}{\Omega}\to\mathbb{R}$: η f είναι σ.π.π. της τ.μ. X

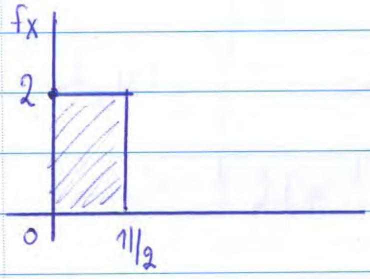
- Αν μια f ικανοποιεί τις παραπάνω 2 ιδιότητες τότε λέμε ότι η f είναι σ.π.π.

Παρατηρήσεις

1)



2) Η f_X μπορεί να παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 1.



ομοιόμορφη

↑

$P(0<X<\frac{1}{2})=1$

εμβαδόν = 1

④ Ασκήσεις

3.2 Ν.δ.ο. $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$, όπου $P_X(A) = P(X \in A)$ είναι πράγματι συνάρτηση πιθανότητας.

i) $P_X(A) \geq 0$, προφανές αφού $P(X \in A) \geq 0$

ii) $P_X(\mathbb{R}) = 1$, $P_X(\mathbb{R}) = P(X \in \mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$

iii) Αν $(A_n)_{n \geq 1}$, ακολουθία ασυμβίβαστων ενδεχομένων τότε:

$$P_X\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_X(A_n)$$

! Παρατήρηση !

$f : \Omega \to \mathbb{R}$

$f^{-1}\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(A_n)$

$f^{-1}\Big(\bigcap_{n \geq 1} A_n\Big) = \bigcap_{n \geq 1} f^{-1}(A_n)$

$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

$$P_X\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\Big) = P\Big(X \in \bigcup_{n \geq 1} A_n\Big) = P\Big(X^{-1}\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\Big)\Big) =$$

ιδιότ.

$$= P\Big(\bigcup_{n \geq 1} X^{-1}(A_n)\Big) \underset{(*)}{\overset{\sigma\text{-προσθ.}}{=}} \sum_{n \geq 1}^{+\infty} P(X^{-1}(A_n)) =$$

$$= \sum_{n \geq 1}^{+\infty} P_X(A_n)$$

(*) Αν $(A_n)_{n \geq 1}$ είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα τότε $(X^{-1}(A_n))_{n \geq 1}$ είναι ασυμβίβαστα.

Ασκ. 3.4 Έστω X τ.μ. με σ.κ. $F_X(t) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } t<0 \\ 1-e^{-t^2} & , \text{αν } t\geq 0 \end{cases}$

α) Ποια είναι η σ.κ. της τ.μ. $Y=e^X$

β) Βρείτε σ.π.π. για τις X και Y.

Λύση

Αν $y\leq 0$, τότε $F_Y(y)=P(Y\leq y)=0$, αφού $Y=e^x\geq 0$

Αν $y>0$, $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(e^X\leq y)\underset{\text{λόγω μονοτονίας}}{\underset{\downarrow}{=}}P(X\leq \log y)=$

$=F_X(\log y)$.

Άρα

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & , y\leq 0 \\ 0 & , 0<y\leq 1 \\ 1-e^{-(\log y)^2} & , y>1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , y\leq 1 \\ 1-e^{-(\log y)^2} & , y>1 \end{cases}$$

$f_X(t)=F'(t)$, $t\neq 0$

$$f_X(t)=\begin{cases} 0 & , t\leq 0 \\ 2te^{-t^2} & , t>0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \leq 1 \\ 2(\log y) \cdot \frac{1}{y} \cdot e^{-(\log y)^2} & , y > 1 \end{cases}$$

Ασκ. 3.6

(α)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

απόλυτα συνεχής

(β)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<-1 \\ x^2 & , -1 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

όχι (δεν είναι αυξ)

(γ)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<-1 \\ \frac{1}{2} & , -1 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

διακριτή τ.μ.

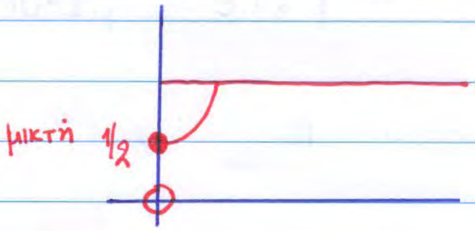
$$X = \begin{cases} -1 & , \text{με πιθ } \frac{1}{2} \\ 1 & , \text{με πιθ } \frac{1}{2} \end{cases}$$

(δ)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \boxed{\frac{x^2+1}{2}} & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

μικτή τ.μ.

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2$$



Μάθημα 12ο – 31/10/2014

① Παράδειγμα

διακριτή τυχαία μεταβλητή (εφαρμογή)

Έστω X = # τηλεφωνικών κλήσεων σε τηλεφωνικό κέντρο σε 1 μέρα.

ή # πελατών σε 1 τράπεζα σε 1 μέρα

Δίνεται $f_X(x) = P(X=x) = c \cdot \dfrac{\lambda^x}{x!} \longrightarrow$ γνωστό ($\lambda>0$), $x=0,1,2,\ldots$

(Κατανομή Poisson(λ))
$\lambda>0$

(α): $c = ?$

(β): $P(X=0)=?$

(γ) $P(X\geq 2) = ?$

(δ) $P(X=2 \mid X\geq 2) = ?$

(ε) $P(X\geq 3 \mid X\geq 2) = ?$

Λύση

(α) $\sum\limits_{x=0}^{+\infty} P(X=x) = 1$, άρα $\sum\limits_{x=0}^{+\infty} c\cdot\dfrac{\lambda^x}{x!} = 1 \Rightarrow c\cdot\underbrace{\sum\limits_{x=0}^{+\infty}\dfrac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda}} = 1$

$\Rightarrow c\cdot e^{\lambda} = 1 \Rightarrow c = e^{-\lambda}$

(β) $P(X=0) = e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

(γ) $P(X\geq 2) \overset{\text{α' τρόπος}}{=} \sum\limits_{x=2}^{+\infty} P(X=x) = \ldots$

β' τρόπος: $P(X\geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) =$

$= 1 - e^{\lambda}(1+\lambda)$

(δ) $P(X=2 \mid X\geqslant 2) = \dfrac{P(X=2\,,X\geqslant 2)}{P(X\geqslant 2)} = \dfrac{P(X=2)}{P(X\geqslant 2)} = \dfrac{e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^2}{2}}{1-e^{-\lambda}(1+\lambda)}$

(ε) $P(X\geqslant 3 \mid X\geqslant 2) = \dfrac{P(X\geqslant 3\,,X\geqslant 2)}{P(X\geqslant 2)} = \dfrac{P(X\geqslant 3)}{P(X\geqslant 2)}$

=

Α'τρόπος

Υπολογίζω σειρές

Β' τρόπος

$\underbrace{1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)}_{\text{γνωστό}}$

Γ' τρόπος

(∗)

(∗) $P(X\geqslant 3 \mid X\geqslant 2) = 1-P(X=2\mid X\geqslant 2) = 1-\dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^2/2}{1-e^{-\lambda}(1+\lambda)}$,

διότι $P(X\geqslant 3\mid X\geqslant 2)+P(X=2\mid X\geqslant 2) = P(X\geqslant 2\mid X\geqslant 2) = 1$ ■

② Μέση τιμή τ.μ. – Διαισθητικές ερμηνείες

ⓐ Μέσος όρος (σε πεπερασμένο δ.χ. με ισοπίθανα δειγματικά σημεία)

Έστω $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, με $X(\omega)\in\left\{\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_k}_{\text{οι διακεκριμένες τιμές.}}\right\}$

Περιμένω : $\boxed{\text{Μέση Τιμή = Μέσος όρος των τιμών της } X}$

$E(X) = \dfrac{X(\omega_1)+X(\omega_2)+\cdots+X(\omega_N)}{N}$, N: πλήθος δ.σ. =

όπου : $N_0+N_1+\dots+N_k=N$

$$= \frac{\overbrace{x_0+x_0+\dots+x_0}^{N_0} + \overbrace{x_1+x_1+\dots+x_1}^{N_1} + \dots + \overbrace{x_k+x_k+\dots+x_k}^{N_k}}{N}$$

$$= x_0\cdot\frac{N_0}{N} + x_1\cdot\frac{N_1}{N} + \dots + x_k\cdot\frac{N_k}{N} =$$

$$= x_0\cdot P(X=x_0) + x_1\cdot P(X=x_1) + \dots + x_k\cdot P(X=x_k)$$

Άρα γενικότερα, περιμένω : $E(X)=\sum_{x\in A} x\cdot P(X=x)$,

όπου $A=\{x\in\mathbb{R} : P(X=x)>0\}$

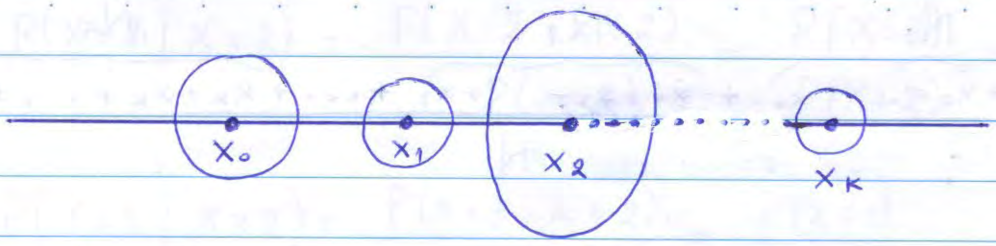
π.χ. X : ο βαθμός στη Γραμμική Άλγεβρα 1 των φοιτητών στο αμφιθέατρο.

$E(x)=\sum_{x=0}^{10} x\cdot P(X=x)$. (= μέσος όρος των βαθμών) ■

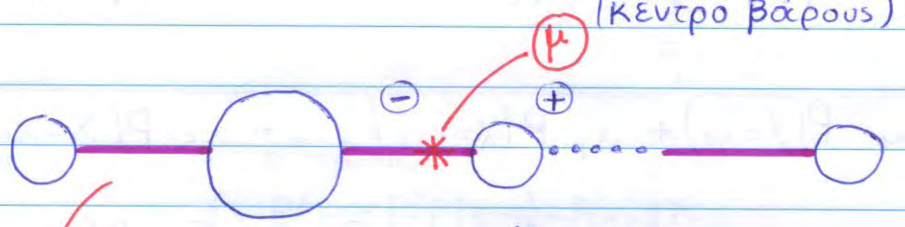
Ⓑ Κέντρο βάρους (Μάζας) – Σημείο ισορροπίας

Έστω $X:\Omega\to\mathbb{R}$ με $X(\omega)\in\{x_0,x_1,\dots,x_k\}$
Φανταστείτε τα x_i ως συντεταγμένες του κέντρου βάρους αντίστοιχων σφαιρών με κέντρο το x_i,
και $P(X=x_i)=\frac{m_i}{m}$,

$m=m_0+m_1+\dots+m_k$



$$P(X=x_i) = \frac{m_i}{m}$$



Είναι σημείο ισορροπίας με την έννοια ότι αν αναρτήσω τη ράβδο από αυτό το σημείο, αυτή θα ισορροπήσει.

$$\sum_{i=0}^{k} (\underbrace{x_i-\mu}_{y_i}) P(X=x) = 0 \iff \sum_{i=0}^{k} x_i \cdot P(X=x_i) = \mu \underbrace{\sum_{i=0}^{k} P(X=x_i)}_{①}$$

Τελικά $\mu = \sum_{i=0}^{k} \cdot x_i \cdot P(X=x_i)$

$$\Downarrow$$

Περιμένω, $E(x) = \sum_{x \in A} x \cdot P(X=x)$ ■

(γ) Οριακός μέσος όρος σε επαναλαμβανόμενα πειράματα (μέσος όρος ανά επανάληψη)

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ⟹

$$E(x) \simeq \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$, για πολύ μεγάλο n.

$$\overset{\text{πεπερ. δ.χ.}}{=} x_0 \cdot \underbrace{\frac{N_0(n)}{n}}_{P(X=x_0)} + x_1 \cdot \underbrace{\frac{N_1(n)}{n}}_{P(X=x_1)} + \ldots + x_k \cdot \underbrace{\frac{N_k(n)}{n}}_{P(X=x_k)}$$

③ Μέση τιμή – Ορισμός

Διακριτές τ.μ.

Έστω X διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X=x)$.
Τότε αν $\sum_{x\in A} |x| f_X(x) < \infty$ (η σειρά συγκλίνει απόλυτα),

τότε λέμε ότι η μέση τιμή της X υπάρχει και είναι

$$E(X) = \sum_{x\in A} x \cdot f_X(x) \quad , \text{ όπου } A = \{x : f_X(x) > 0\}$$

Απόλυτα συνεχείς τ.μ.

Έστω X απόλυτα συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.
Τότε αν $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)\, dx < +\infty$

τότε λέμε ότι υπάρχει η μέση τιμή της τ.μ. X και είναι

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx .$$

Μικτές τ.μ.

Έστω X μικτή τ.μ. με αναπαράσταση $X = \begin{cases} X_1 & \text{, με πιθ. } p \text{ ,} \quad X_1 \text{ διακριτ} \\ X_2 & \text{, με πιθ. } 1-p \quad X_2 \text{ απολ. συνεχής} \end{cases}$

Τότε $E(x) = p\, E(X_1) + (1-p) \cdot E(x_2)$

αν $E(X_1)$ και $E(X_2)$ υπάρχουν.

$$\left(\begin{array}{l} X \overset{d}{=} Y \Rightarrow P_X = P_Y \\ \qquad P_X((-\infty, x]) = P_Y((-\infty, x]) \xrightarrow{\quad} , \boxed{x \in \mathbb{R}} \\ \qquad \quad \downarrow \\ \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{array} \right)$$

④ Ιδιότητες Μέσης Τιμής

1) $E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x \in A} g(x) f_X(x) & \text{, όταν υπάρχει} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx \end{cases}$

$\uparrow$

LOTUS : Law Of The Unconscious Statistician

αντί $Y = g(X) = g \circ X$

$$\left. \begin{array}{l} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ X : \Omega \to \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow Y = g \circ X \text{ είναι } \Omega \to \mathbb{R} \left(\begin{array}{l} \sum\limits_{y \in B} y\, f_Y(y) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \end{array} \right)$$

2) $E(\alpha X + b) = \alpha E(X) + b$ (γραμμικότητα της μέσης τιμής)

3) Αν $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

4) Αν $X \overset{d}{=} Y \Rightarrow E(x) = E(Y)$

Παρατηρήσεις

1. Αν $g(x) = |x|$, τότε οι συνθήκες ύπαρξης μέσης τιμής αναδιατυπώνονται ως $E|X| < +\infty$.

Όταν $E|X| < +\infty$, τότε $E(X)$ υπάρχει.

2. Ισχύει $-|x| \leq x \leq |x| \underset{\left(\substack{\text{όταν} \\ E|x|<+\infty}\right)}{\xrightarrow{\text{ιδιοτ. 3)}}} E(|x|) \leq E(x) \leq E|x|$

$$\Rightarrow |E(x)| \leq E|x| \quad \left(\begin{matrix}\text{ανισότητα} \\ \text{που ισχύει}\end{matrix}\right)$$

Επιπλέον, προφανώς $E|x| < +\infty \Rightarrow E(X) \in \mathbb{R}$

3. Για $X \geq 0$ (με πιθ. 1) η $X \leq 0$ (με πιθ. 1) ορίζεται πάντα η μέση τιμή της X χωρίς απαραίτητα να υπάρχει. (ενδεχομένως $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα)

4. Αν $1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & , \omega \in A \\ 0 & , \omega \notin A \end{cases}$ δείκτρια τ.μ.

$A \subset \Omega$

$$E(1_A) = 0 \cdot P(1_A = 0) + 1 \cdot P(1_A = 1) = P(1_A^{-1}\{1\}) = P(A)$$

⑤ Παραδείγματα

i) συνέχεια για Poisson(λ)

$$X \longrightarrow \text{σ.π. } f_X(x) = P(X=x) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!} \quad , x=0,1,2,\dots$$

$$E(x) \overset{X:\text{διακρ.}}{=\!=} \sum_{x=0}^{+\infty} x\cdot f_X(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{+\infty} x\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!} =$$

$$= \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot\underbrace{\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}}_{e^\lambda} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda$$

ii) π.τ. ακολουθια ρίψεων ενός ζαριού

X = ένδειξη της 1ης ζαριάς
Y = # ρίψεων μέχρι 1η φορά 6.

$E(x) = ?$, $E(Y) = ?$

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , x=1 \\ \frac{1}{6} & , x=2 \\ \vdots & \\ \frac{1}{6} & , x=6 \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$$

$$E(x) = \sum_{x=1}^{6} x P(X=x) = \sum_{x=1}^{6} x\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\cdot\sum_{x=1}^{6} x = \frac{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{6\cdot 7}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$P(Y=y)=\left(\frac{5}{6}\right)^{y-1}\cdot\frac{1}{6}\quad ,y\geq 1$$

$$E(y)=\sum_{y=1}^{+\infty} y\cdot P(Y=y)=\frac{1}{6}\sum_{y=1}^{+\infty}\cdot y\left(\frac{5}{6}\right)^{y-1}\quad (*)$$

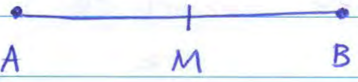
$$\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{y=0}^{+\infty}\lambda^{y}=\frac{1}{1-\lambda}\ ,|\lambda|<1\ \xRightarrow{d/d\lambda}\left(\sum_{y=0}^{+\infty}\lambda^{y}\right)'=\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)'\Rightarrow\\ \displaystyle\qquad\qquad\sum_{y=1}^{+\infty}y\cdot\lambda^{y-1}=\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^{2}\end{array}\right]$$

Άρα από (*), $E(Y)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\frac{5}{6}}\right)^{2}=\frac{1}{6}\cdot 6^{2}=6$

θέτω $\lambda=\frac{5}{6}$

- **Πείραμα τύχης:** τυχαία επιλογή ενός σημείου Μ σε ευθ. τμήμα μήκους ℓ.

$X=(AM)\ ,\ Y=\frac{(AM)}{(MB)}$,



$E(x)=?$ Ξέρουμε $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\ell} & ,0<x<\ell\\ 0 & ,\text{διαφορετικά}\end{cases}$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_X(x)dx=\cancelto{0}{\int_{-\infty}^{0}x f_X(x)dx}+\int_{0}^{\ell}x f_X(x)dx+\cancelto{0}{\int_{\ell}^{+\infty}x f_X(x)dx}$$

$$=\frac{1}{\ell}\int_{0}^{\ell}x\,dx=\frac{1}{\ell}\left.\frac{x^{2}}{2}\right|_{0}^{\ell}=\frac{1}{\ell}\left(\frac{\ell^{2}}{2}-0\right)=\frac{\ell}{2}$$

Αν $X = (AM)$

$$Z = \ell - (AM) = (MB)$$

$$X \overset{d}{=} Z = \ell - X$$

$$E(X) = E(\ell - X) = \ell - E(X) \Rightarrow E(X) = \frac{\ell}{2}$$

$$Y = \frac{(AM)}{(MB)} = \frac{X}{\ell - X} = g(X)$$

$$E(Y) = \underset{(u=\ell-x)}{E(g(X))} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx = \underset{du=-dx}{\int_0^{\ell}} \frac{x}{\ell - x} \cdot \frac{1}{\ell}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\ell} \int_{\ell}^{0} \frac{\ell - u}{u} (-du) = \frac{1}{\ell} \left(\int_0^{\ell} \frac{\ell}{u} \cdot du - \int_0^{\ell} 1\,du \right) =$$

$$= \int_0^{\ell} \frac{1}{u}\,du - 1 = \boxed{+\infty}$$

$$(*) \rightarrow \int_0^{\ell} \frac{1}{u}\,du = \int_0^{\ell} (\ln u)'\,du = \ln u \Big|_0^{\ell} = \ln \ell - \lim_{u \to 0^+} \ln u =$$

$$= \ln \ell - (-\infty) = +\infty$$

$E(Y)$ δεν υπάρχει, αλλά ορίζεται και είναι $\underline{\underline{+\infty}}$.

$$W = \frac{(MB)}{(AM)} \overset{d}{=} \frac{(AM)}{(MB)} = \frac{\ell}{\ell - x}$$

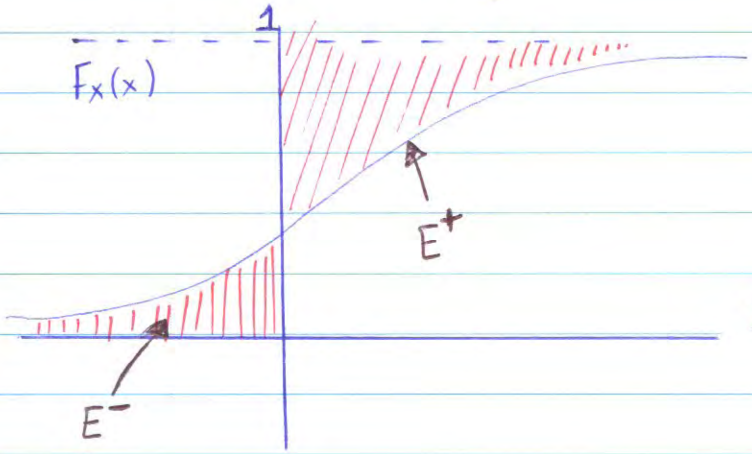
($E(Y)$ δεν υπάρχει, αλλά ορίζεται και είναι $+\infty$.)

$$W = \frac{\ell - x}{x}, \quad E(Y) = E(W) = E\left(\frac{\ell}{x} - 1\right) = E\left(\frac{\ell}{x}\right) - 1 =$$

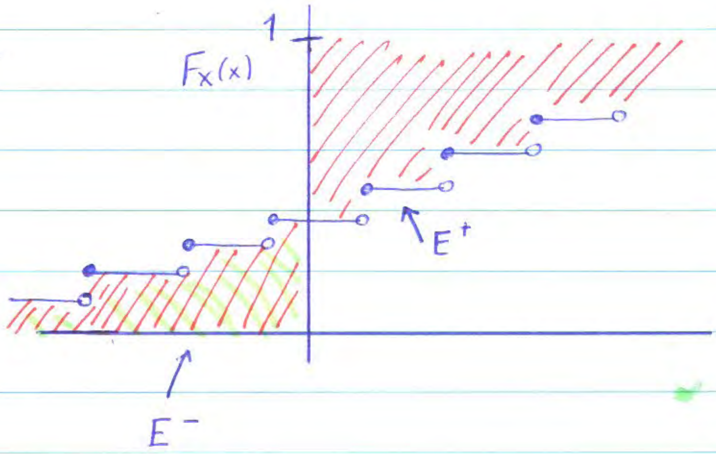
$$= \ell\, \underbrace{E\left(\frac{1}{x}\right)}_{\shortparallel \atop +\infty} - 1$$

Μάθημα 13ο
3/11/2014

① Εναλλακτικός Ορισμός της Μέσης Τιμής
Μια γεωμετρική ερμηνεία



X: απόλυτα συνεχής τ.μ.



X διακριτή τιμή .μ.

$E(X) = E^+ - E^-$, όταν ορίζεται

i) Όταν $E^+ < +\infty$, $E^- < \infty$, τότε η $E(X)$ υπάρχει ($E(X) \in \mathbb{R}$) (ισοδ. $E|X| < +\infty$)

ii) Όταν $E^+ = +\infty$, $E^- < +\infty$, τότε $E(X) = +\infty$

iii) Όταν $E^+ < +\infty$, $E^- < +\infty$, τότε $E(X) = -\infty$

iv) Όταν $E^+ = +\infty$ και $E^- = +\infty$, τότε $E(X)$ δεν ορίζεται

Άρα για διακριτές, για απόλυτα συνεχείς και για μικτές τ.μ.

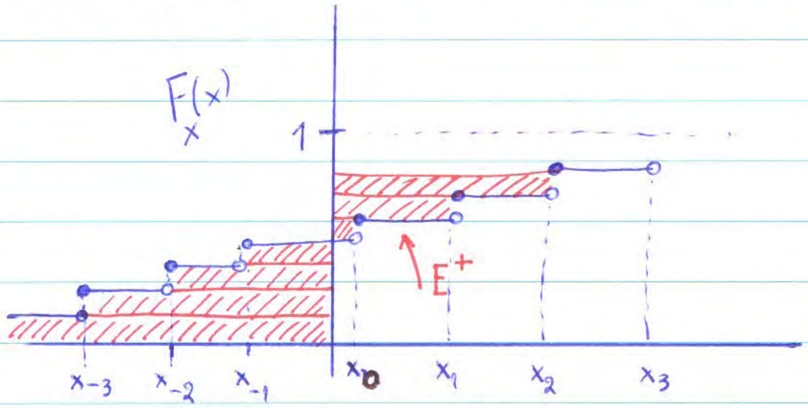
(συνέχεια πίσω) ⟹

Αρα για διακριτες, για απόλυτα συνεχεις και για μεικτές τ.μ.

$$E(x) = \int_{0}^{+\infty} \underbrace{(1 - F_X(x)}_{F_X^{c}(x) = P(X>x)} dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x) dx$$

(συναρτηση επιβιωσης ή αξιοπιστιας για τυχαιες μεταβλητες μη αρνητικες)

② Γεωμετρική Απόδειξη της (*) για διακριτες τ.μ.

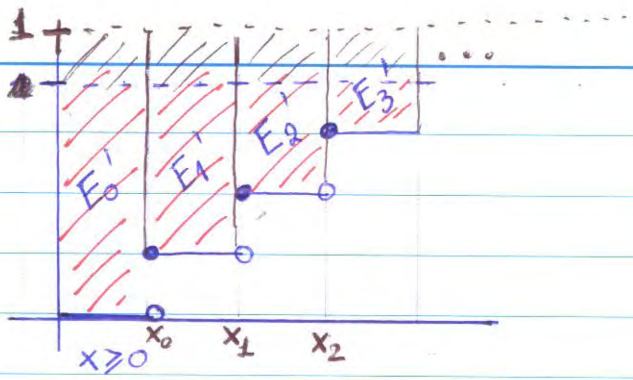


Θδο : $E = E^+ - E^-$

$$E^+ = \sum_{i=0}^{+\infty} E_i = \sum_{i=0}^{+\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{μήκος}}}{x_i} \; \underset{\substack{\searrow \\ \text{πλάτος}}}{P(X=x_i)} \qquad (1)$$

$$E^- = \sum_{i<0} E_i = \sum_{i<0} (-x_i) P(X=x_i) \qquad (2)$$

Από (1),(2): $E^+ - E^- = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i P(X=x_i) - \left[-\sum_{i<0} x_i P(X=x) \right] \boxed{= \sum_{i\in\mathbb{Z}} x_i P(X=x) = E(X)}$



Ειδικα για μη αρνητικες τ.μ. $(X \geqslant 0)$

$$E(x) = E^+ \quad (\text{αφού } E^- = 0)$$

$$E(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} E_i' = x_0 \cdot P(X \geqslant x_0) + (x_1 - x_0) \cdot P(X \geqslant x_1) + (x_2 - x_1) P(X \geqslant x_2) \ldots$$

$$\boxed{E(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} (x_i - x_{i-1}) P(X \geqslant x_i) \ , \quad x_{-1} = 0}$$

$x = 0, 1, 2, \ldots$

$$\boxed{E(x) = \sum_{x=1}^{+\infty} P(X \geqslant x)}$$

$x = 1, 2, \ldots$

$$\boxed{E(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} P(X \geqslant x)}$$

∎

③ Αναλυτική Απόδειξη

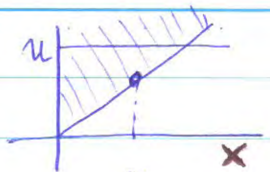
για X απόλυτα συνεχη τ.μ.

Θδο $E(x) = \int_0^{+\infty} (1 - F_x(x))\,dx - \int_{-\infty}^{0} F_x(x)\,dx$

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_x(x))\,dx = \int_0^{+\infty} (1 - P(X \leqslant x))\,dx = \int_0^{+\infty} P(X > x)\,dx = \int_0^{+\infty} \int_{*}^{+\infty} f_x(u)\,du\,dx$$

$\left(* \Rightarrow P(X \in A) = \int_A f_x(u)\,du \right)$ ⟶

$0 \le x < +\infty$	$0 \le u < +\infty$
$x \le u < +\infty$	$0 \le x \le u$



$$(\text{συνεχεια}) = \int_0^{+\infty}\int_0^{u} f_X(u)\,dx\,du = \int_0^{+\infty} f_X(u)\left(\int_0^{u} 1\,dx\right)du = \int_0^{+\infty} u\,f_X(u)\cdot du \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du\,dx = \int_{-\infty}^{0}\int_{u}^{0} f_X(u)\,dx\,du = \int_{-\infty}^{0} f_X(u)\left(\int_{u}^{0} 1\,dx\right)du =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} u f_X(u)\,du \quad (2)$$

Από (1) και (2)

$$\int_0^{+\infty}(1-F_X(u))du - \int_{-\infty}^{0} F_X(u)du = \int_0^{+\infty} u f_X(u)du - \left[-\int_{-\infty}^{0} u f_X(u)du\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u f_X(u)du = E(X)$$

④ Διασπορά μιας τ.μ.

Ορισμός: Έστω X τ.μ. με $E|X|<+\infty$.
Ορίζουμε διασπορά της X να είναι
η ποσότητα.

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 \text{ , όπου } \mu := E(X)$$

Γράφουμε και $\sigma_x^2 = Var\, X$

Παρατηρήσεις

1) Η $Var(X)$ είναι καλά ορισμένη ποσότητα
Πράγματι, εφόσον $E|X| < +\infty \Longrightarrow E(X) \in \mathbb{R}$

Επιπλέον $(X-\mu)^2 \geq 0$, άρα ορίζεται η μέση τιμή

2) $Var(X) \geq 0$
Άμεσο, εφόσον $(X-\mu)^2 \geq 0 \Longrightarrow E(X-\mu)^2 \geq 0$

3) Πολλές φορές η $Var(X)$ ορίζεται για $E(X^2) < +\infty$
Τότε $Var(X) < +\infty$.

Ιδιότητες

1) $Var(X) = EX^2 - E^2X \quad \left(E(X^2) - (E(X))^2\right)$

2) $Var(aX+\beta) = a^2\, Var\, X$

Αποδείξεις

1) $$\mathrm{Var}X = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - \underbrace{2\mu}_{\sigma\tau\alpha\theta.} X + \underbrace{\mu^2}_{\sigma\tau\alpha\theta.}) = E(X^2) - 2\mu \underbrace{E(x)}_{\mu} + \mu^2 =$$

$$= E(X^2) - (E(x))^2$$

2) $$E\left[(\alpha X + \beta - E(\alpha X + \beta))^2\right] = E\left[(\alpha X + \beta - \alpha E(x) - \beta)^2\right] =$$

$$= E(\underbrace{\alpha^2}_{\sigma\tau\alpha\theta.}(X - E(x))^2) = \alpha^2 \cdot E((X - E(x))^2) = \alpha^2 \mathrm{Var}X.$$

Παρατηρήσεις

1) $\mathrm{Var}X < +\infty \Leftrightarrow EX^2 < +\infty$ (γιατί $\mathrm{Var}X = E(X^2) \underbrace{- E^2(x)}_{\in \mathbb{R}}$)

2) Υπολογισμός διασποράς για
- διακριτές
- απόλυτα συνεχείς

και
- μικτές τμ.

$$\mathrm{Var}X = \begin{cases} \sum\limits_{x\in A} x^2 P(X=x) - \left(\sum\limits_{x\in A} x P(X=x)\right)^2 & ,\text{αν } X: \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx\right)^2 & ,\text{αν } X: \text{απόλυτα συνεχής} \\ \mathrm{Var}X = E(X^2) - E^2(X) = \rho\left(\sum\limits_{x\in A} \underbrace{x^2 \cdot P(X_1=x)}_{E(x_1^2)}\right) + (1-\rho)\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^2 f_{X_2}(x)dx}_{E(x_2^2)} \\ \quad - \left(\rho \underbrace{\sum\limits_{x\in A} x\, \rho(X_1=x)}_{E(x_1)} + (1-\rho)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{x_2}(x)dx}_{E(x_2)}\right)^2 & ,\text{αν } X: \text{μικτή} \end{cases}$$

3) $\text{Var} X = 0 \Longleftrightarrow X = c$ με πιθανότητα 1.

ισοδύναμα $P(X=c)=1$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$

(⇐) $P(X=c) = 1$,

$$\text{Var} X = EX^2 - E^2(X)$$
$$= c^2 P(X=c) - (c \cdot P(X=c))^2 = c^2 - c^2 = 0$$

4) Η $E(X)$ είναι ένα μετρο θεσης της κατανομης της τμ X.
Η $\text{Var}(X)$ είναι ένα μετρο μεταβλητοτητας ή διακύμανσης ή διασποράς της κατανομης της τ.μ. X.

⑤ Τυπική Απόκλιση μιας τμ.

Τυπική απόκλιση μιας τμ. X :

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var} X} \quad , \text{ όταν ορίζεται η } \text{Var}(X)$$

Ιδιότητα

$$SD(aX+\beta) = |a| SD(X)$$

Απόδειξη

$$SD(aX+b) = \sqrt{\text{Var}(aX+\beta)} = \sqrt{a^2 \text{Var} X} = |a| \sqrt{\text{Var}(x)} = |\alpha| \, SD(x)$$

SD : standard deviation
η sd(X) ή σ_X (συμβολισμοί)

⑥ Παραδείγματα

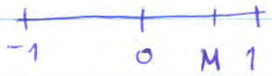
- X_1 : χρόνος αναμονής ενός ανυπόμονου ασθενή οδοντιατρείου
  ↙
  $x_1 = 0$, με πιθ 1.

- X_2: κέρδος από ένα στοίχημα 1 €

$$X_2 = \begin{cases} -1 & \text{, με πιθ. } \frac{1}{4} \\ 0 & \text{, με πιθ } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{, με πιθ } \frac{1}{4} \end{cases}$$

- X_3 : όπου: $$X_3 = \begin{cases} -1 & \text{, με πιθ } \frac{3}{8} \\ 0 & \text{, με πιθ. } \frac{1}{4} \\ 1 & \text{, με πιθ. } \frac{3}{8} \end{cases}$$

- X_4 , τυχαία επιλογή σημείου στο $[-1, 1]$



- X_5 ,

$$X_5 = \begin{cases} -100 & \frac{1}{2.000.000} \\ 0 & \frac{999.999}{1000.000} \\ 100 & \frac{1}{2.000.000} \end{cases}$$

Υπολογισμός Μέσιων τιμών + Διασπορών.

- συμμετρική κατανομή γυρω από το 0:
  - διακριτή $P(X=-x) = P(X=x), \forall x>0$
  - συνεχής $f(-x) = f(x)$, $\forall x>0$ (σ.π.π.)

Τότε $E(X)=0$

$$-X \overset{d}{=} X \Rightarrow -E(X) = E(X) \Rightarrow E(X)=0$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

i) $X_1 = 0$, πιθανότητα 1 $\Rightarrow Var(X_1)=0$

ii) $E(X_2^2) = \underbrace{(-1)^2}_{①} \cdot P(X_2=-1) + 0^2 P(X_2=0) + 1^2 \cdot P(X_2=1) = 2\,P(X_2=1) =$

$$= 2\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow Var(X_2) = \frac{1}{2}$$

iii) $Var\,X_3 = EX_3^2 = (-1)^2\,P(X_3=-1) + 0^2\,P(X_3=0) + 1^2 \cdot P(X_3=1)$

$$= 2P(X_3=1) = 2\,\frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

iv) $Var\,X_4 = EX_4^2 = \int_{-1}^{1} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\,\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx =$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

v) $Var(X_5) = EX_5^2 = (-100)^2 \cdot P(X_5=-100) + 0 \cdot + 100^2 \cdot P(X_5=100)$

$$= 2 \cdot 100^2 \cdot P(X_5=100) = \frac{20\,000}{2\,000\,000} = \frac{1}{100}$$

Μάθημα 14ο
5/11/2014

① Κατανομές Γραμμικών Μετασχηματισμών τ.μ.

α) Κατανομή της $Y=\alpha X+b$, για X διακριτή

$$f_Y(y) = P(Y=y) = P(\alpha X+b = Y) = P\left(X = \frac{y-b}{\alpha}\right) = f_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)$$

συνάρτηση πιθανότητας: $\boxed{f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)}$

β) Κατανομή της $Y=\alpha X+b$, για X απόλυτα συνεχής

$$F_Y(y) = P(Y=y) = P(\alpha X+b \leq y) = \begin{cases} P\left(X \leq \frac{y-b}{\alpha}\right) & , \alpha>0 \\ P\left(X \geq \frac{y-b}{\alpha}\right) & , \alpha<0 \end{cases}$$

συνάρτηση κατανομής: $\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right) & , \alpha>0 \\ 1-F_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right) & , \alpha<0 \end{cases}}$

αφού $P\left(X \geq \frac{y-b}{\alpha}\right) \overset{X \text{ συνεχής}}{=} P\left(X > \frac{y-b}{\alpha}\right) = 1-P\left(X \leq \frac{y-b}{\alpha}\right) =$

$= 1-F_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)$

της F_Y

$$f_Y(y) \overset{\sigma.\delta.}{=} F_Y'(y) = \begin{cases} F_X'\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha} & ,\alpha>0 \\ -F_X'\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha} & ,\alpha<0 \end{cases}$$

συνάρτηση πυκν. πιθανότητας : $\boxed{f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)\cdot\left|\frac{1}{\alpha}\right|}$

Παρατήρηση

Αν θέσουμε $y=g(x)=\alpha x+b$

$y=g(x) \Leftrightarrow x=g^{-1}(y)$, όπου $g^{-1}(y)=\frac{y-b}{\alpha}$

Γενικότερα: μπορεί να δειχθεί για μια g αντιστρέψιμη και διαφορίσιμη:

$$\boxed{f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \text{, για } y\in \text{σύνολο τιμών της } g}$$

$\Longrightarrow$

Ειδικές Κατανομές

② Ομοιόμορφη κατανομή

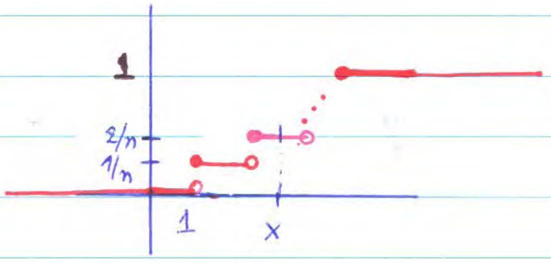
α) Διακριτή Ομοιόμορφη Κατανομή

Συμβ. discrete Uniform(n), $n \geq 1$ είτε: $d\,Unif(n)$
είτε: $d.Uni(n)$

Π.Τ. : Τυχαία επιλογή ενός αριθμού στο $\{1, 2, \ldots, n\}$
τ.μ. X : ο επιλεγμένος αριθμός.

συνάρτηση πιθανότητας $\boxed{f_X(x) = \frac{1}{n} \quad , x = 1, 2, \ldots, n}$ $\left(\frac{1}{\#\,\delta.\sigma.}\right)$

συνάρτηση κατανομής:



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{\lfloor x \rfloor}{n} & , 1 \leq x < n \\ 1 & , x \geq n \end{cases}$$

Μέση τιμή: $\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}$

$$\hookrightarrow E(X) = \sum_{x \in A} x \cdot P(X = x) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Διασπορά : $\boxed{\operatorname{Var} X = \frac{n^2 - 1}{12}}$

$$E(X^2) = \sum_{x \in A} x^2 P(X = x) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} =$$

$$= (n+1)\cdot\frac{\left[2(2n+1)-3(n+1)\right]}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

Παρατήρηση - Παράδειγμα :

τ.μ. X : ένδειξη του ζαριού σε 1 ρίψη τίμιου ζαριού

$$f_X(x) = P(X=x) = \frac{1}{6} \quad , \quad x = 1, 2, \dots, 6$$

Τότε: $X \sim$ discrete Uniform (6)

~ Γενίκευση ~

discrete Uniform (α, b) *2 παράμετροι

$$f_X(x) = P(X=x) = \frac{1}{b-\alpha+1} \quad , \quad x = \alpha, \alpha+1, \dots, b \quad \left(\frac{1}{\#\delta.\sigma.}\right)$$

Προφανώς, η discrete Uniform $(1, n) \equiv$ discrete Uniform (n)

- Έστω $X \sim$ d. Unif (a, b). Τότε:

$$X \overset{d}{=} (\alpha-1) + u \quad , \text{ όπου } u \sim \text{discrete Uniform } (b-\alpha+1)$$

Πράγματι: $f_X(x) = f_u(x-\alpha+1) = \dfrac{1}{b-a+1}$, $x = a, \alpha+1, \dots, b$

β) Συνεχής Ομοιόμορφη Κατανομή

Συμβ. Uniform(α, b) , $\alpha<b$ ή Unif(α,b) ή $\mathcal{U}_{(\alpha,b)}$

Π.Τ. : Τυχαία επιλογή ενός σημείου στο (α, b)

Τ.μ. X. : το σημείο επιλογής

συνάρτηση πυκνότητας:
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-\alpha} & ,\ \alpha<x<b\\[2ex] 0 & ,\ \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

$$\frac{1}{\text{μήκος διαστήματος}}$$

συνάρτηση κατανομής:

$$\text{Για } \alpha<x<b \ : \ F_X(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du=\int_{-\infty}^{\alpha}\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f_X(u)}}du\ +$$

$$+\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{b-\alpha}du=\frac{1}{b-\alpha}\,u\Big|_{\alpha}^{x}=\frac{x-\alpha}{b-\alpha}$$

$$\Longrightarrow F_X(x)=\begin{cases}0 & ,\ x<\alpha\\[2ex] \dfrac{x-\alpha}{b-\alpha} & ,\ \alpha\leq x<b\\ 1 & ,\ x\geq b\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\alpha}x\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f_X(x)}}dx+\int_{\alpha}^{b}x f_X(x)dx+\int_{b}^{+\infty}x\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f_X(x)}}dx=$$

$$=\frac{1}{b-\alpha}\int_{\alpha}^{b}x\,dx=\frac{1}{b-\alpha}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{\alpha}^{b}=\frac{b^2-\alpha^2}{2(b-\alpha)}=\frac{\alpha+b}{2}$$

Μέση τιμή : $\boxed{E(X) = \frac{\alpha+b}{2}}$

Για "διασπορά": $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{\alpha}^{b} x^2 \frac{1}{b-\alpha}\,dx =$

$$= \frac{1}{b-\alpha} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{\alpha}^{b} = \frac{1}{b-\alpha} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{\alpha^2+\alpha b+b^2}{3}$$

Άρα: $Var(x) = E(X^2) - E^2(x) = \frac{a^2+\alpha b+b^2}{3} - \frac{(\alpha+b)^2}{4} =$

$$= \frac{4(\alpha+b)^2 - 4\alpha b - 3(\alpha+b)^2}{12} = \frac{(\alpha+b)^2-4\alpha b}{12} = \frac{(b-\alpha)^2}{12}$$

Διασπορά : $\boxed{Var(x) = \frac{(b-\alpha)^2}{12}}$ ■

Παρατήρηση

Αν $U \sim Unif(0,1)$, τότε:

$$f_U(u) = \begin{cases} 1 & , 0<u<1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Έστω: $Y \sim Unif(\alpha,b)$. Τότε:

$$Y \overset{d}{=} \alpha + (b-\alpha)U$$

$$f_Y(y) \overset{\text{γραμμ. μετ.}}{=} f_X\left(\frac{y-\alpha}{b-\alpha}\right)\left|\frac{1}{b-\alpha}\right| = f_X\left(\frac{y-\alpha}{b-\alpha}\right)\frac{1}{b-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{b-\alpha} & , 0<\frac{y-\alpha}{b-\alpha}<1 \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b-\alpha} & , \alpha<y<b \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$, που είναι πράγματι η σ.π.π. της $Unif(a,b)$

$$E(Y) = \alpha + (b-\alpha)E(U) = \alpha + \frac{b-\alpha}{2} = \frac{\alpha+b}{2}$$

$$Var(Y) = Var\big(\alpha + (b-\alpha)U\big) = (b-\alpha)^2\, Var\, U = \frac{(b-\alpha)^2}{12} \quad ■$$

③ Ακολουθία Δοκιμών Bernoulli

π.τ.: ανεξάρτητες επαναλήψεις ενός π.τ.
που συνδέονται με την πραγματοποίηση ή όχι
κάποιου ενδεχομένου

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών
οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.

$$P(X_i = x) = \begin{cases} p, & x=1 \text{ (επιτυχία)} \\ 1-p, & x=0 \text{ (αποτυχία)} \end{cases}, \ \cancel{i=1,2,\ldots,n}, \ i \geq 1$$

$$X_i \overset{d}{=} X_j$$

ανεξαρτησία: $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$, $\forall n \geq 1$, $x_i \in \{0,1\}$

X_i : # επιτυχιών στην i-δοκιμή $\overset{\text{ορσ.}}{\Longrightarrow} X_i \sim Bernoulli(p)$

S_n : # επιτυχιών μέχρι n-οστή δοκιμή $\overset{\text{ορσ.}}{\Longrightarrow} S_n \sim \overset{\text{Διωνυμική}}{Binomial}(n,p)$

T_1 : # δοκιμών μέχρι 1^{η} επιτυχία $\overset{\text{ορσ.}}{\Longrightarrow} T_1 \sim \overset{\text{Γεωμετρική}}{Geom}(p)$

T_n : # δοκιμών μέχρι n-οστή επιτυχία $\overset{\text{ορσ.}}{\Longrightarrow} T_n \sim \overset{\text{Αρνητ. Διωνυμική}}{N.Bin}(n,p)$

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$S_1 = 0$, $S_4 = 2$, $S_{10} = 4$

$T_1 = 2$

$T_2 = 3$, $T_3 = 7$, $T_4 = 9$ ■

④ Κατανομή Bernoulli

Συμβ: Bernoulli(p) ή Be(p)

X: # επιτυχιών σε κάποια δοκιμή Bernoulli

σ.π. : $\boxed{f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad , x = 0,1}$

ή $P(X=x) = \begin{cases} p & , x=1 \\ 1-p & , x=0 \end{cases}$

Συνάρτηση Κατανομής: $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ 1-p & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}}$

Μέση τιμή : $\boxed{E(x) = p}$

Πράγματι : $E(x) = 0 \cdot \overset{=0}{P}(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = p$

$$E(x^2) = 0^2 \cdot \overset{=0}{P}(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) = p$$

$$Var(x) = E(x^2) - E^2(x) = p - p^2 = p(1-p) \quad \blacksquare$$

Διασπορά : $\boxed{Var X = p \cdot (1-p)}$

(Ιδιότητες κατανομής Bernoulli
Διωνυμική κατανομή
Γεωμετρική κατανομή
Αρνητ. Διων. κατανομή)

Μάθημα 15ο - 10/11/'14

① Παρατηρήσεις - Ιδιότητες Bernoulli

Υπενθύμιση : $X \sim Be(p)$, $0<p<1$, αν $P(X=x) = \begin{cases} p & , x=1 \\ 1-p & , x=0 \end{cases}$

1) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χώρος πιθαν., $A \in \mathcal{A}$ (ενδεχόμενο) με $P(A)=p$. Τότε $X = 1_A \sim Be(p)$ (δεικτρια τ.μ.)

Πράγματι, $P(X=1) = P(1_A=1) = P(1_A^{-1}\{1\}) = P(A) = p$
$P(X=0) = 1 - P(X=1) = 1-p$

2) $X \sim Be(p) \Rightarrow X^n \sim Be(p)$ $\quad (X^n \overset{d}{=} X)$

Πράγματι, $P(X^n=1) = P(X=1) = p$
$P(X^n=0) = P(X=0) = 1-p$

3) $X \sim Be(p) \Rightarrow 1-X \sim Be(1-p)$

Πράγματι, $P(1-X=1) = P(X=0) = 1-p$
$P(1-X=0) = P(X=1) = p$

4) $Be\left(\frac{1}{2}\right) = d.Unif(0,1)$

② Διωνυμικη Κατανομή

Συμβ : Binomial(n,p) ή Bin(n,p) , $n=1,2,\ldots,\ 0<p<1$

π.τ. : ακολουθία δοκιμών Bernoulli $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$
X : # επιτυχιών στις n-πρώτες δοκιμές

αναπαράσταση της X : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Τότε, $X \sim \text{Bin}(n,p)$

• σ.π. : $\boxed{f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad , x=0,1,\ldots,n}$

Απόδειξη

Έστω $x \in \{0,1,\ldots,n\}$, $i_1, i_2, \ldots, i_x$ τους δείκτες που αντιστοιχούν στον αριθμό της δοκιμής που έχουμε την $1^{\underline{η}}, 2^{\underline{η}}, \ldots, x^{\underline{η}}$ επιτυχία και $j_1, j_2, \ldots, j_{n-x}$ οι δείκτες των αποτυχιών αντίστοιχα, τότε:

$$\{X=x\} = \bigcup_{1 \le i_1 < i_2 \ldots < i_x \le n} \{X_{i_1}=1, X_{i_2}=1, \ldots, X_{i_x}=1, X_{j_1}=0, X_{j_2}=0, \ldots, X_{j_{n-x}}=0\}$$

Άρα : $$P(X=x) \overset{\text{ξένα}}{=} \sum_{\bullet} P(X_{i_1}=1, X_{i_2}=1, \ldots, X_{i_x}=1, X_{j_1}=0, X_{j_2}=0, \ldots, X_{j_{n-x}}=0)$$

$$\overset{\text{ανεξαρτησία}}{=} \sum_{\bullet} \underbrace{P(X_{i_1}=1) P(X_{i_2}=1) \ldots P(X_{i_x}=1)}_{x-\text{όροι}} \underbrace{P(X_{j_1}=0) \ldots P(X_{j_{n-x}}=0)}_{n-x \text{ όροι}}$$

<u>ισονομία</u> $\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_x\le n} p^x(1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

- Μέση τιμή : $\boxed{E(X) = np}$

Πράγματι, $E(x) = \sum_{x=0}^{n} x\, P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{x=1}^{n} x\, \frac{n}{x} \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x} = n\cdot \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{(n-1)-(x-1)} \underset{x-1\to x}{=} np\, \underbrace{\sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{(n-1)-x}}_{\overset{\shortparallel}{1}}$$

$= np$

$(*)$: $\binom{n}{x} = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x(x-1)\cdots 1} = \frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1}$

~∘~

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x^2 \frac{n}{x} \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x} = np \sum_{x=1}^{n} x \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{(n-1)-(x-1)} =$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} (x-1+1) \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-1-(x-1)} =$$

$$= np \Bigg[\underbrace{\sum_{x=0}^{n-1} x \underbrace{\binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{n-1-x}}_{\text{σ.π. } Bin(n-1,p)}}_{\text{Μέση τιμή } Bin(n-1,p)} + \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{n-1-x} \Bigg] =$$

$$= np\big[(n-1)p + 1\big] = n(n-1)p^2 + np$$

Επομένως, $Var(X) = EX^2 - E^2(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 =$
$= np - np^2 = np(1-p)$

Άρα διασπορά : $\boxed{Var(X) = np(1-p)}$

③ Γεωμετρική Κατανομή

Συμβ: $\text{Geometric}(p)$ ή $\text{Geo}(p)$, $0<p<1$

π.τ. : ακολουθία δοκιμών Bernoulli $X_1, X_2, \dots, X_n$

τ.μ. X : # δοκιμών μέχρι 1η επιτυχία.

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ : $X=\inf\{n : X_n = 1\}$

$$\boxed{\text{σ.π. : } f_X(x) = p(1-p)^{x-1} \ , x=1,2,\dots}$$

Απόδειξη

$$\{X=x\} = \{X_1=0,\ X_2=0,\ \dots,\ X_{x-1}=0,\ X_x=1\}$$

Άρα $P(X=x) \underset{\text{Bernoulli}}{\overset{\text{ανεξαρτ.}}{=\!=\!=}} p(1-p)^{x-1}$

$$\boxed{\text{σ.κ. : } F_X(x) = \begin{cases} 1-(1-p)^{[x]} & , x\geq 1 \\ 0 & , x<1 \end{cases}}$$

μέση τιμή : $\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$

Α΄ τρόπος

$$E(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} x\,P(X=x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x\,p(1-p)^{x-1} = p\sum_{x=1}^{+\infty} x(1-p)^{x-1} \xlongequal{u=1-p}$$

$$= p\sum_{x=1}^{+\infty} x\,u^{x-1} = \left(-p\sum_{x=1}^{+\infty}\left[(1-p)^x\right]' \xlongequal{u=1-p}\right) p\sum_{x=1}^{+\infty}(u^x)' =$$

$$= p\left(\sum_{x=1}^{+\infty} u^x\right)' = p\left(\frac{1}{1-u}\right)' = p\,\frac{1}{(1-u)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

B' Τρόπος

$$E(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} x\,P(X=x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x p (1-p)^{x-1} = \sum_{x=1}^{+\infty} (x-1+1) p (1-p)^{x-1} =$$

$$= \sum_{x=1}^{+\infty} (x-1) p (1-p)^{x-1} + \underbrace{\sum_{x=1}^{+\infty} \underbrace{p(1-p)^{x-1}}_{\sigma.\pi.\ Geo(p)}}_{1=} \underset{X-1\to X}{=} (1-p) \sum_{x=0}^{+\infty} x p (1-p)^{x} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(X) = (1-p)E(X) + 1 \Rightarrow p E(X) = 1 \Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$$

Γ' Τρόπος

$$E(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} P(X \geq x) = 1 + \sum_{x=2}^{+\infty} P(X \geq x) = 1 + \sum_{x=1}^{+\infty} P(X > x) =$$

$$1 + \sum_{x=1}^{+\infty}\left[1 - P(X \leq x)\right] = 1 + \sum_{x=1}^{+\infty}\left[1 - 1 + (1-p)^x\right] = 1 + \sum_{x=1}^{+\infty} (1-p)^x = \sum_{x=0}^{+\infty} (1-p)^x = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

Διασπορά: $\boxed{Var(X) = \frac{1-p}{p^2}}$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{+\infty} x^2 \cdot P(X=x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x^2 p (1-p)^{x-1} = \sum_{x=1}^{+\infty} (x^2 - x + x) p (1-p)^{x-1} =$$

$$= \sum_{x=1}^{+\infty} x(x-1) p (1-p)^{x-1} + \underbrace{\sum_{x=1}^{+\infty} x p (1-p)^{x-1}}_{E(Geo(p))} = p(1-p) \sum_{x=2}^{+\infty} x(x-1)(1-p)^{x-2} + \frac{1}{p}$$

$$E(x) \overset{u=1-p}{=\!=} p(1-p)\cdot\sum_{x=2}^{+\infty} x(x-1)u^{x-2} + \frac{1}{p} = p\,(1-p)\cdot\sum_{x=2}^{+\infty}(u^x)'' + \frac{1}{p} =$$

$$= \frac{1}{p} + p(1-p)\left(\sum_{x=0}^{+\infty} u^x\right)'' = p(1-p)\left(\frac{1}{1-u}\right)'' + \frac{1}{p} = p\cdot(1-p)\cdot\frac{2}{(1-u)^3} + \frac{1}{p} =$$

$$\overset{u=1-p}{=\!=} \frac{2\cancel{p}(1-p)}{p^{\overset{2}{\cancel{3}}}} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$\mathrm{Var}X = E(X^2) - E^2(x) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\mathrm{Var}\,X = E(X^2) - E^2(x) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

<u>άλλος τρόπος</u>

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{+\infty} x^2 p(1-p)^{x-1} = \sum_{x=1}^{+\infty}\left[(x-1)^2 + 2(x-1) + 1\right]p\,(1-p)^{x-1} =$$

$$= \sum_{x=1}^{+\infty}(x-1)^2\, p\,(1-p)^{x-1} + 2\sum_{x=1}^{+\infty}(x-1)p\,(1-p)^{x-1} + \underbrace{\sum_{x=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{x-1}}_{=\,1}$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$(1-p)\sum_{x=2}^{+\infty}(x-1)^2 p(1-p)^{x-2} \qquad \text{σχεση } E(x)$$

$$\|$$

$$(1-p)\underbrace{\sum_{x=1}^{+\infty} x^2 p(1-p)^{x-1}}_{E(X^2)} \qquad \vdots$$

Παρατηρήσεις

1) Η αμνήμονη ιδιότητα της γεωμ. κατανομής
δηλ. $P(X>s+t \mid X>s) = P(X>t)$, $\forall s,t \geq 0$

Απόδειξη

$$P(X>s+t \mid X>s) = \frac{P(X>s+t\ , X>s)}{P(X>s)} = \frac{P(X>s+t)}{P(X>s)} =$$

$$= \frac{1-F_X(s+t)}{1-F_X(s)} = \frac{1-(1-(1-p)^{s+t})}{1-(1-(1-p)^{s})} = \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^{s}} =$$

$$= (1-p)^{t} = P(X>t)$$

2) Αν X: # αποτυχιών μέχρι την $1^{η}$ επιτυχία
$X = Y-1$, όπου $Y \sim Geo(p)$ στο $\{1,2,...\}$, και Y: # δοκιμών μέχρι την $1^{η}$ επιτυχία

$X \sim Geo(p)$, στο $\{0,1,2,...\}$

$P(X=x) = pq^{x}$, $x=0,1,2,...$

$$E(X) = E(Y-1) = E(Y)-1 = \frac{1}{p}-1 = \frac{1-p}{p}$$

$$Var(X) = Var(Y-1) = Var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$

④ Αρνητική Διωνυμική Κατανομή

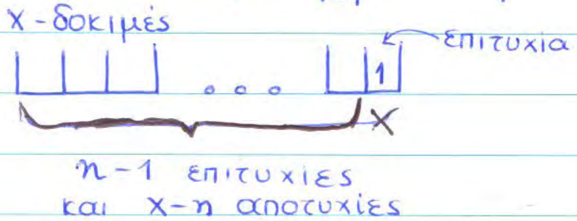
Συμβ: Negative Binomial (n,p) ή NegBin(n,p)

π.τ. ακολουθία δοκιμών Bernoulli $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$

τ.μ. X : # δοκιμών μέχρι την n^{η} επιτυχία.

αναπαράσταση $X = \inf\left\{ k : \sum_{i=1}^{k} x_i = n \right\}$

$\{X = x\}$,



$$\boxed{P(X=x) = \binom{x-1}{n-1} p^{n} (1-p)^{x-n} \quad , x = n, n+1, \dots}$$

Βγαίνει : Μέση Τιμή : $\boxed{E(X) = \frac{n}{p}}$

Διασπορά : $\boxed{Var(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}}$

Παρατηρήσεις

Αν X: # αποτυχιών μέχρι n^{η} επιτυχία τότε $X = Y - n$, στο $\{n, n+1, \dots\}$ $Y \sim$ NegBin(n,p) (# δοκιμών μέχρι n^{η} επιτυχία)

και $X \sim$ NegBin(n,p) στο $\{0, 1, 2, \dots\}$

$$E(X) = E(Y) - n = \boxed{\frac{n(1-p)}{p}}$$

$$Var(X) = Var(Y) = \boxed{\frac{n(1-p)}{p^2}}$$

(Κατανομή Poisson - Ιδιότητα
Ασκήσεις με διακρ. κατανομές
Εκθετική κατανομή

Μάθημα 16ο - 12/11/2014

① Κατανομή Poisson

Συμβ. Poisson(λ) ή P(λ), λ>0

σ.π. $\boxed{f_X(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} \quad , x = 0, 1, 2, \ldots}$

- Μέση Τιμή: $\boxed{E(X) = \lambda}$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} x\, P(X=x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{+\infty} x \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} =$$

$$= \lambda \cdot \sum_{x=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \xlongequal{x-1 \to x} \lambda \cdot \underbrace{\sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}}_{\overset{\shortparallel}{1}} = \lambda.$$

σ.π Poisson

- Διασπορά: $\boxed{Var(X) = \lambda}$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{+\infty} x^2 P(X=x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} =$$

$$= \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{x\, e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-1)!} = \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{(x-1+1) \cdot e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-1)!} =$$

$$= \lambda \left[\sum_{x=1}^{+\infty} (x-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \right] = \lambda \left[\lambda \sum_{x=2}^{+\infty} (x-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-1)!} + \underbrace{\sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}}_{\overset{\shortparallel}{1}} \right] =$$

$$= \lambda \left[\lambda \cdot \underbrace{\sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}}_{\overset{\shortparallel}{1}} + 1 \right] = \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda.$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Εφαρμογές : # τηλεφωνικών κλήσεων σε ένα τηλ. κέντρο σε 1 μέρα
αφίξεων πελατών σε μία τράπεζα σε 1 μέρα.
τυπογραφικών λαθών σε ένα βιβλίο.

Ιδιότητα Poisson

- Προσέγγιση της $Bin(n,p)$, για n μεγάλο και p-μικρό

Αν $X_n \sim Bin(n, p_n)$: $\lim_{n\to+\infty} n\cdot p_n = \lambda > 0$

τότε $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!} = P(Y=x)$ όταν $Y \sim Poisson(\lambda)$

$x = 0, 1, 2, \dots$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = x) = \lim_{n\to+\infty}\binom{n}{x} P_n^x (1-P_n)^{n-x} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\cdot\left(\frac{P_n}{1-P_n}\right)^x (1-P_n)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}\,\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-x+1)}{n}\cdot\frac{(nP_n)^x}{x!(1-P_n)^x}\left(1-\frac{nP_n}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\underset{\underset{1}{\downarrow}}{1}\,\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdots\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}\,\underset{\downarrow}{\frac{(nP_n)^x}{x!(1-P_n)^x}}\cdot\left(1-\frac{nP_n}{n}\right)^n$$

$$\frac{\lambda^x}{x!\cdot 1}\cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},$$

όπου, $P_n = (nP_n)\dfrac{1}{n} \longrightarrow \lambda\cdot 0 = 0 \implies (1-P_n)^x \longrightarrow 1$

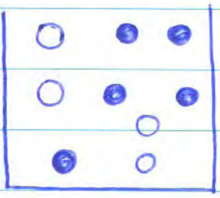
και $\left(1-\dfrac{nP_n}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-\lambda}$

Πράγματι αν $u_n \to u$, τότε $\left(1+\dfrac{u_n}{n}\right)^n \to e^u$ άρα

για $u_n = -nP_n \longrightarrow -\lambda$ (έχουμε το ζητούμενο)

② Ασκήσεις με Διακριτές Κατανομές

1) Δειγματοληψία με επανάθεση από κάλπη με N-σφαιρίδια



Κάλπη με N-σφαιρίδια, m: λευκά και $N-m$: μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγουμε n σφαιρίδια με επανάθεση.

Έστω X: # λευκών σφαιριδίων

Να βρεθεί $P(X=x)$, $x=0,1,\dots,n$

Α' Τρόπος (Συνδυαστική)

$A_x \overset{op}{=} \{X=x\}$, $P(A_x) = \dfrac{|A_x|}{|\Omega|}$

$|A_x| \overset{\text{πολ/κη αρχή}}{=}$ # τρόπων που επιλέγονται οι x-θέσεις ανάμεσα στις n, για τα λευκά · διαφορετικές λευκές επιλογές · διαφορετικές μαύρες επιλογές

$$= \binom{n}{x} \cdot m^x \cdot (N-m)^{n-x}$$

Άρα $P(A_x) = \dfrac{|A_x|}{|\Omega|} = \dfrac{\binom{n}{x} m^x \cdot (N-m)^{n-x}}{N^n} = \binom{n}{x}\left(\dfrac{m}{N}\right)^x \left(1-\dfrac{m}{N}\right)^{n-x}$

Άρα $X \sim Bin\left(n, \dfrac{m}{N}\right)$

⟹

B' Τρόπος

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ , όπου } X_i=\begin{cases}1, & \text{με πιθ. } \frac{m}{N} \text{ (αν τραβήξω στην } i\text{-δοκιμή λευκο)}\\ 0, & \text{με πιθ. } 1-\frac{m}{N} \text{ (αν τραβήξω στην } i\text{-δοκιμή μαυρο)}\end{cases}$$

με X_i ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli $\left(\frac{m}{N}\right)$

Άρα, $X\sim Bin\left(n,\ p=\frac{m}{N}\right)$ και $P(X=x)=\binom{n}{x}\left(\frac{m}{N}\right)^{x}\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-x}, x=0,1,\dots,n$

2) Έστω X διακριτή τ.μ. με σ.π. $P(X=i)=c(1+i)$, $i=0,1,\dots,n$

i) $c=?$

ii) $E(x)=?$

iii) $Var(X)=?$

iv) $P(X=1\mid X\leq 2)=?$

Λύση

i) Έχουμε:

$$\sum_{i=0}^{n}P(X=i)=1$$, εφόσον X έχει σ.π. (*)

Άρα $$\sum_{i=0}^{n}P(X=i)=\sum_{i=0}^{n}c(1+i)=c\sum_{i=0}^{n}(1+i)=c\left((n+1)+\sum_{i=1}^{n}i\right)=$$

$$=c\left[(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}\right]=c(n+1)\left[1+\frac{n}{2}\right]=c(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)=$$

$$=\frac{c(n+1)(n+2)}{2}\xRightarrow{(*)}c=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

ii) $$E(X)=\sum_{i=0}^{n}iP(X=i)=\sum_{i=0}^{n}i\cdot c(1+i)=c\sum_{i=0}^{n}i(1+i)=$$

$$=c\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}i^2\right)=c\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=$$

$$= \frac{2n\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)\cancel{2}} + \frac{2n\cancel{(n+1)}(2n+1)}{\cancel{(n+1)}(n+2)\cdot \cancel{6}3} =$$

$$= \frac{3n}{3(n+2)} + \frac{n(2n+1)}{3(n+2)} = \frac{n[3+2n+1]}{3(n+2)} = \frac{n(4+2n)}{3(n+2)} = \frac{2n}{3}$$

iii) $E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2 P(X=x) = \sum_{i=0}^{n} i^2 c(1+i) = c\cdot\sum_{i=0}^{n}(i^2+i^3) =$

$$= c\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i^3\right] = c\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \overset{c=\frac{2}{(n+1)(n+2)}}{=}$$

$$= \frac{n(2n^2+8n+3)}{6(n+2)}$$

- $Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \circ\circ\circ$

iv) $P(X=1 \mid X\leq 2) = \frac{P(X=1, X\leq 2)}{P(X\leq 2)} = \frac{P(X=1)}{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)} =$

$$= \frac{c\cdot 2}{c(1+2+3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

③ Εκθετική κατανομή

Συμβ: Exponential(θ), ή Exp(ϑ), $\vartheta > 0$

Παρατήρηση: Η εκθετική κατανομή είναι στις απόλυτα συνεχείς κατανομές, ό,τι η γεωμετρική κατανομή στις διακριτές κατανομές.

Βασικό χαρακτηριστικό: $\boxed{\text{Αμνήμονη Ιδιότητα}}$

τ.μ. X: χρόνος ζωής, παραμονής, αναμονής ή λειτουργίας που ικανοποιεί την αμνήμονη ιδιότητα $(X \geq 0)$, τότε:

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t) \quad , \forall t, s \geq 0$$

- σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} \theta \cdot e^{-\theta x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

- σ.κ. $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Πράγματι, για $x \geq 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \int_{0}^{x} f_X(u)du = \int_{0}^{x} \underset{\overset{\|}{-(e^{-\theta u})'}}{\theta e^{-\theta u}} du = -\left[e^{-\theta u}\right]_0^x =$$

$$= -(e^{-\theta x} - 1) = 1 - e^{-\theta x}.$$

- Υπολογίζουμε $E(X^n)$

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx = \int_{0}^{+\infty} x^n \theta e^{-\theta x} dx = -\int_{0}^{+\infty} x^n (e^{-\theta x})' =$$

$$= -\left\{ \left[x^n e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} n \cdot x^{n-1} e^{-\theta x} dx \right\} = n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-\theta x} dx = \frac{n}{\theta} \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{n-1} \theta e^{-\theta x} dx}_{E(X^{n-1})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(X^n) = \frac{n}{\theta} E(X^{n-1}) = \frac{n(n-1)}{\theta^2} E(X^{n-2}) = \ldots =$$

$$= \frac{n!}{\theta^n} \underset{\overset{\|}{1}}{E(X^0)} = \frac{n!}{\theta^n} \quad , n \geq 1$$

Άρα : Μέση Τιμή : $\boxed{E(x) \overset{n=1}{=\!=} \frac{1}{\theta}}$

$$E(X^2) \overset{n=2}{=\!=} \frac{2!}{\theta^2} = \frac{2}{\theta^2}$$

$$Var(x) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$$

Διασπορά : $\boxed{Var(x) = \frac{1}{\theta^2}}$

Ιδιότητες

1) Αμνήμονη Ιδιότητα

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

Πράγματι, $P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} =$

$$= \frac{1 - P(X \leq s+t)}{1 - P(X \leq s)} = \frac{1 - F_X(s+t)}{1 - F_X(s)} = \frac{1 - (1 - e^{-\theta(s+t)})}{1 - (1 - e^{-\theta s})} =$$

$$= \frac{e^{-\theta(s+t)}}{e^{-\theta s}} = e^{-\theta t} = P(x > t)$$

2) Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας

$X \sim Exp(\theta)$ και $\alpha > 0 \Longrightarrow \alpha X \sim Exp\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)$

Θέτουμε : $Y = \alpha X$ $\Longrightarrow$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y}{\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\alpha} \quad , f_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & , x>0 \\ 0 & ,\text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\theta}{\alpha}.e^{-\theta\frac{y}{\alpha}} & , \frac{y}{\alpha}>0 \\ 0 & ,\text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\theta}{\alpha}\, e^{-\frac{\theta}{\alpha}y} & , y>0 \\ 0 & ,\text{διαφορετικά} \end{cases} \implies Y \sim \underline{E}xp\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)$$

Άσκηση: Μια εταιρεία κατασκευής αεροπλάνων φτιάχνει 2-κινητήρια και 4-κινητήρια αεροσκάφη. Η πιθανότητα βλάβης ενός κινητήρα κατά την πτήση είναι p. Το αεροπλάνο δεν πέφτει όταν λειτούργησαν τουλάχιστον οι μισοί κινητήρες. Ποιο είναι πιο ασφαλές; (το 2-κιν. ή το 4-κιν.).

Λύση

Έστω $X_2 = X_{2,1} + X_{2,2}$

$X_4 = X_{4,1} + X_{4,2} + X_{4,3} + X_{4,4}$

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & ,\text{με πιθ. } 1-p \\ 0 & ,\text{με πιθ } p \end{cases}$$

$X_{i,j} \sim Be(1-p)$ και ανεξάρτητες, Άρα $X_2 \sim Bin(2, 1-p)$

$X_4 \sim Bin(4, 1-p)$

Το 2-κινητήριο πιο ασφαλές από το 4-κινητήριο $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\text{"πτώσης του 2-κιν"}) < P(\text{"πτώσης του 4-κιν"}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(X_2=0) < P(X_4 \le 1) \Leftrightarrow p^2 < p^4 + 4p^3(1-p) \overset{p\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 1 < p^2 + 4p(1-p) \Leftrightarrow p^2 - 1 + 4p(1-p) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p-1)(p+1) + 4p(1-p) > 0 \Leftrightarrow (1-p)(4p-1-p) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3p > 1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{3}$ Άρα $\frac{1}{3} < p < 1$

(Κατανομή Gamma
(τυποποιημ.) Κανονική κατανομή
+ Ιδιοτητες, Αποδ.
ΚΟΘ de Moivre-Laplace)

Μάθημα 17ο - 19/11/2014

① Κατανομή Γάμμα

Συμβ: Gamma(α,θ) $,\alpha>0,\theta>0$ ή $G(\alpha,\theta)$

Λέμε ότι η απόλυτα συνεχής τ.μ. X ακολουθεί κατανομή Gamma(α,θ), αν έχει σ.π.π.

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\theta x} & ,x>0\\[2ex] 0 & ,\text{διαφορετικά}\end{cases}$$

όπου $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ (συνάρτηση Γαμμα)

- Μέση τιμή : $\boxed{E(X)=\dfrac{\alpha}{\theta}}$

- Διασπορά : $\boxed{Var(X)=\dfrac{\alpha}{\theta^2}}$

Απόδειξη

$$E(X^n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n f_X(x)dx=\int_0^{+\infty}x^n\frac{\theta^a}{\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-\theta x}dx=-\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^{n+\alpha-1}\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(a)}(e^{-\theta x})'dx$$

$$=-\frac{1}{\theta}\left[x^{n+a-1}\cdot\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(a)}\cdot e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty}+\frac{n+\alpha-1}{\theta}\cdot\int_0^{+\infty}x^{n+\alpha-2}\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-\theta x}dx=$$

$$= \frac{n+\alpha-1}{\theta} \int_0^{+\infty} x^{n-1} \underbrace{\frac{\theta^a}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x}}_{\sigma.\pi.\pi.\ G(\alpha,\theta)} dx = \frac{n+\alpha-1}{\theta} E(X^{n-1}) =$$

$$= \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)}{\theta^2} \cdot E(X^{n-2}) = \cdots = \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\cdots(n+\alpha-n)\overset{E(X^0)}{E(}}{\theta^n}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{\theta^n}, \quad n \geq 1$$

- Για $n=1$, $E(X) = \frac{a}{\theta}$
- Για $n=2$, $E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\theta^2}$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\theta^2} - \frac{\alpha^2}{\theta^2} = \frac{a}{\theta^2}$$

Παρατηρήσεις

1) $Gamma(1,\theta) \equiv Exp(\theta)$ (η κατανομή Γάμμα γενικεύει την εκθετική)

όπου $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

2) Αν $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε $Gamma(n,\theta) \equiv Erlang(n,\theta)$

όπου:

η σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\theta^n}{(n-1)!} x^{n-1} \cdot e^{-\theta x} & , x>0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

3) $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, $\alpha > 1$

Αποδ

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (e^{-x})' dx = -\underbrace{\left[x^{\alpha-1} e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} (\alpha-1) x^{\alpha-2} e^{-x} dx$$

$$=$$

$$= (\alpha-1)\int_0^{+\infty} x^{(\alpha-1)-1} e^{-x}\,dx = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

4) $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \dots =$
$= (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!$

② Κανονική Κατανομή

Συμβ: $N(\mu,\sigma^2)$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$

Μια απόλυτα συνεχής τ.μ. X ακολουθεί $N(\mu,\sigma^2)$, αν έχει σ.π.π.:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , x\in\mathbb{R}$$

Θα δείξουμε αργότερα ότι: Μέση τιμή: $\boxed{E(X)=\mu}$

Διασπορά: $\boxed{Var(X)=\sigma^2}$

Απόδειξη (ότι η $f_X(x)$ είναι σππ)

! Πρέπει νδο i) $f_X(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

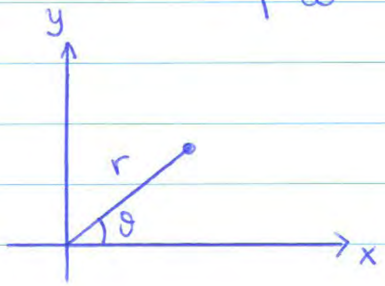
ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$

Θέτουμε: $y = \frac{x-m}{\sigma} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$

Θέτουμε $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy$

• Αλλαγή σε "πολικές συντεταγμένες".

↪ $$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\,dy$$



$$x(r,\theta) = r\cos\theta$$
$$y(r,\theta) = r\sin\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{array}{l} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{array}$$

Τότε: $I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2/2}|J|\,dr\,d\theta$ όπου: $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

$\Longrightarrow |J| = r$ και έχουμε λοιπόν ότι:

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} -\left(e^{-r^2/2}\right)' dr\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\left[e^{-r^2/2}\right]_0^{+\infty} d\theta =$$

$$= -2\pi(0-1) = 2\pi$$

Τελικά $I \overset{I>0}{=\!=} \sqrt{2\pi}$ και επομένως η $f_X(x)$ είναι σ.π.π. ■

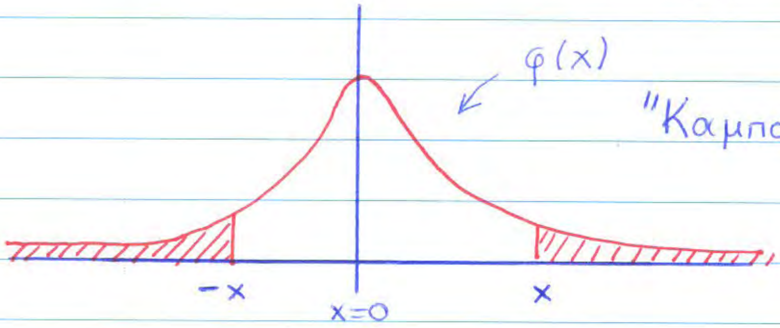
③ Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

- Αν $Z \sim N(0,1)$, τότε λέμε ότι η Z ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή

Έχει σ.π.π $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$

και σ.κ.

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad , x \in \mathbb{R}$$



σ.π.π.

- Η $\varphi(x)$ είναι συμμετρική ως προς άξονα y ή η $\varphi(x)$ είναι άρτια συνάρτηση $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

σ.κ.

- Η $\Phi(x)$ ικανοποιεί: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (από εμβαδά)

Η σ.κ. $\Phi(x)$ δίνεται σε πίνακες
Ισχύει $\phi(0) = \frac{1}{2}$, $\phi(3) \simeq 0,999$

Για $x > 3$, προσεγγίζουμε $\phi(x) \cong 1$
και για $x < 0$, $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$.

- Μέση τιμή: $\boxed{E(Z)=0}$

- Διασπορά: $\boxed{\mathrm{Var}\, Z = 1}$

Πράγματι,

- $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\varphi(x)} dx = 0$,

αφού η

$g(x) = x \cdot \varphi(x)$ είναι περιττή συνάρτηση. Πράγματι,
$g(-x) = -g(x)$ σε συμμετρικό διάστημα γύρω από το 0.

- $E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx$

$$= -\left[\underbrace{x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\overset{\shortparallel}{0}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\varphi(x)} dx = 1$$

Άρα $\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - \underbrace{E^2(Z)}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 1$

④ Ιδιότητες Κανονικής Κατανομής

1) $Z \sim N(0,1) \Rightarrow \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

2) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X \overset{d}{=} \mu + \sigma Z$, όπου $Z \sim N(0,1)$

3) (τυποποίηση μιας κανονικής τ.μ.)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

4) $X \sim N(\mu,\sigma^2) \Longrightarrow E(X)=\mu \ , \ Var(X)=\sigma^2$

5) (γραμμικός μετασχηματισμός κανονικών τ.μ.) | $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ και

$Y=\alpha X+b \Rightarrow Y\sim N(\alpha\mu+b,\alpha^2\sigma^2)$

⑤ Αποδείξεις Ιδιοτήτων

1) Θέτω $X=\mu+\sigma Z \ , \ Z\sim N(0,1)$

Προφανώς X απόλυτα συνεχής.

$$f_X(x) = f_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\cdot\left|\frac{1}{\sigma}\right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Άρα $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

2) Εφόσον $Z\sim N(0,1) \xrightarrow{\text{Ιδ. 1)}} \mu+\sigma Z\sim N(\mu,\sigma^2)$

Άρα εφόσον $X\sim N(\mu,\sigma^2) \Longrightarrow X \overset{d}{=} \mu+\sigma Z$

3) $X\sim N(\mu,\sigma^2) \xrightarrow{\text{Ιδ. 2)}} X \overset{d}{=} \mu+\sigma Z \ , \ Z\sim N(0,1) \Longrightarrow \frac{x-\mu}{\sigma} \overset{d}{=}$

$= Z\sim N(0,1)$

4) $X\sim N(\mu,\sigma^2) \xrightarrow{\text{Ιδ. 2)}} X \overset{d}{=} \mu+\sigma Z \Longrightarrow E(X) \overset{E(Z)=0}{=} \mu$

και $Var(X) = Var(\mu+\sigma Z) = \sigma^2\cdot Var(Z) = \sigma^2$

5) $X\sim N(\mu,\sigma^2) \xrightarrow{\text{Ιδ.}} X \overset{d}{=} \mu+\sigma Z \ , \ Z\sim N(0,1) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \alpha X+b \overset{d}{=} \alpha(\mu+\sigma Z)+b = \underbrace{\alpha\mu+b}_{c}+\overbrace{\alpha\sigma}^{\delta} Z \Longrightarrow$

$$\overset{\text{Ιδ.1}}{\Longrightarrow} \quad \alpha X + b \sim N(\alpha\mu + b, \ \alpha^2\sigma^2)$$

Παρατήρηση

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε $X = \mu + \sigma \cdot \overset{\sim N(0,1)}{\boxed{\frac{X-\mu}{\sigma}}} = \underbrace{\mu + \sigma Z}$ όπου $Z \sim N(0,1)$

⑥ Κεντρικό Οριακό Θεώρημα de Moivre-Laplace

de Moivre (1733) : $Bin\left(n, \frac{1}{2}\right) \cong N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)$, για μεγάλο n.

Laplace (1812) : $Bin(n, p) \cong N(np, np(1-p))$

Δηλ. αποδεικνύεται ότι αν $X_n \sim Bin(n,p)$ και

$Y_n \sim N(np, np(1-p))$

τότε:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot np(1-p)}} \cdot e^{-\frac{(x-np)^2}{2np(1-p)}}} = 1$$

δηλ. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{P(X_n = x)}{f_{Y_n}(x)} = 1$

Πιο χρήσιμη μορφή :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le t\right) = P(\overset{\sim N(0,1)}{Z} \le t) = \Phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Θέτουμε $t = \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}$

Τότε: $\lim_{n\to+\infty} P(X_n \leq x) = \Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

Άρα για μεγάλο n:

$$P(X_n \leq x) \cong \Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

και επομένως αν $X_n \sim Bin(n,p)$

$$P(a < X_n < b) \overset{\text{μεγάλο } n}{\cong} \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Η προσέγγιση είναι καλή όταν $np(1-p) \geq 10$

Παράδειγμα

Αν $X \sim Bin\left(40, \frac{1}{2}\right)$, τότε

$$P(10 \leq X \leq 25) = P\left(\frac{10-20}{\sqrt{10}} \leq \overset{\cong N(0,1)}{\frac{X-20}{\sqrt{10}}} \leq \frac{25-20}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(x) = 20 \\ Var(x) = 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 10 \end{array}}$$

$$\cong \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) + \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{10}}\right) - 1$$

$^*\left(\phi(-x) = 1 - \phi(x)\right)$

■

Μάθημα 18ο - 28/11/2014

① Κατανομές Μετασχηματισμών τ.μ. - Αλλαγή Μεταβλητής

- Γενικεύουμε αυτά που έχουμε δει για κατανομές γραμμικών μετασχηματισμών τ.μ.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

1) $Y=g(X)$, όπου X : διακριτή τ.μ.. Τότε η Y θα είναι διακριτή τ.μ. και επομένως έχει σ.π.

Μ.Ε.Κ (Μέθοδος Εύρεσης Κατανομής)

i) Βρίσκουμε το στήριγμα της κατανομής της Y.

- $A_Y = g(A_X)$, όπου $A_X \overset{\text{ορ}}{=} \{x\in\mathbb{R} : P(X=x)>0\}$

ii) Βρίσκουμε τη σ.π. της Y

$\forall y\in A_Y$

- $f_Y(y) = P(Y=y) = P(g(X)=y) = \sum\limits_{\substack{x\in A_X \\ g(x)=y}} P(X=x)$

αφού $P(g(X)=y) = P(X=g^{-1}(\{y\})) = P(X\in g^{-1}(\{y\})\cap A_X)$

2) $Y=g(X)$, X απόλυτα συνεχής τ.μ. και Y είναι διακριτή τ.μ.

i) Βρίσκουμε το στήριγμα της κατανομής της Y

$A_Y = g(S_X)$, όπου $S_X \overset{\text{ορσ}}{=} \{x\in\mathbb{R} : f_X(x)>0\}$

ii) Βρίσκουμε τη σ.π. της Y

$\forall y\in A_Y$, $f_Y(y) = P(Y=y) = P(g(X)=y) = \int\limits_{\substack{x\in S_X \\ g(x)=y}} f_X(x)\,dx$

3) $Y=g(X)$ όπου X, Y απόλυτα συνεχείς τ.μ.

i) Βρίσκουμε το στήριγμα της κατανομής της Y

- $S_y = g(S_x)$, όπου $S_x \overset{ορσ}{=} \{x\in\mathbb{R} : f_X(x)>0\}$

ii) Βρίσκουμε τη σ.κ. της Y ως συνάρτηση της σ.κ. της X.

$\forall y\in S_y$

$F_y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\dots=$ (φτάνουμε σε συνάρτηση της F_X)

iii) Βρίσκουμε τη σ.π.π της Y

$\forall y\in S_y' \subset S_y$

$f_y(y)=F_y'(y)=\dots=$ (προκύπτει σχέση ως συνάρτηση της f_X)

Μη παραγωγισιμότητα συνήθως σε συνοριακά σημεία

• Ειδική περίπτωση

$Y=g(X)$, με g μονότονη και παραγωγίσιμη στο S_X

$$\forall y\in S_y' \quad f_y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \text{, και } 0 \text{ : διαφορετικά}$$

② Ασκήσεις

① Έστω X: τ.μ. με σ.π.π

$$f_X=\begin{cases} cx^{-3}\cdot e^{x^{-2}} & , x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Να βρεθούν:

(i) η σταθερά c

(ii) η σ.π.π της $y=\frac{1}{x^2}$

(iii) η μέση τιμή και η διασπορά της y

Πρέπει το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} c \cdot x^{-3} \cdot e^{x^{-2}} dx = c \cdot \int_{2^{-1/2}}^{1} \left(-\frac{1}{2}\right)(x^{-2})' \cdot e^{x^{-2}} dx =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_{2^{-1/2}}^{1} \left(e^{x^{-2}}\right)' dx = -\frac{c}{2}\left[e^{x^{-2}}\right]_{2^{-1/2}}^{1} = -\frac{c}{2}\left(e - e^{\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}}\right) = -\frac{c}{2}(e - e^2) =$$

$$= \frac{c}{2}(e^2 - e)$$

Άρα: $\frac{c}{2}(e^2 - e) = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{e^2 - e}$

Έχουμε: $Y = g(X)$, όπου $g(x) = \frac{1}{x^2}$

Άρα, X και Y απόλυτα συνεχείς τμ. (περίπτωση 3)

α) Βρίσκουμε το στήριγμα της κατανομής της Y.

$$S_X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \quad g(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow S_Y = g(S_X)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 < x^2 < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{x^2} < 2 \Rightarrow S_Y = (1, 2)$$

β) Βρίσκουμε τη σ.κ. της Y.

$\forall y \in (1,2)$, έχουμε: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X^2} \leq y\right) \overset{y>0}{=\!=} P\left(X^2 \geq \frac{1}{y}\right) =$

$$= P\left(\sqrt{X^2} \geq \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \underset{\text{με πιθ.} 1}{\overset{X>0}{=\!=}} P\left(X \geq y^{-1/2}\right) \overset{X:\text{ συνεχής}}{=\!=\!=} P\left(X > y^{-1/2}\right) = 1 - F_X\left(y^{-1/2}\right)$$

γ) Βρίσκουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y.

$\forall y \in S_Y = (1,2)$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \left(1 - F_X(y^{-1/2})\right)' = -F_X'(y^{-1/2})(y^{-1/2})' = -f_X(y^{-1/2})\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-3/2} =$$

$$= \frac{c}{2}(y^{-1/2})^{-3} \cdot e^{(y^{-1/2})} \cdot y^{-3/2} = \frac{c}{2}e^{Y} = \frac{2}{2(e^2 - e)}e^{Y} = \frac{1}{e^2 - e}e^{Y}$$

Τελικά: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{e^2 - e} e^{Y}, & 1 < y < 2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

B' Τρόπος

$S_X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, και g: μονότονη και παραγωγίσιμη στο S_X.

Άρα, αφού βρούμε το S_Y, τότε $\forall y \in S_Y$, $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$ και 0: διαφορετικά.

Για $g^{-1}(y)$: $y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-1/2}$, άρα, $g^{-1}(y) = y^{-1/2}$ και εφαρμόζω την παραπάνω σχέση.

(iii) $E(Y)$
- → είτε από σ.π.π της Y
- → είτε $E(Y) = E[g(x)]$ $(= \text{Lotus})$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_1^2 y \frac{1}{e^2-e} e^y = \frac{1}{e^2-e}\int_1^2 y e^y dy = \frac{1}{e^2-e}\int_1^2 y (e^y)' dy =$$

$$= \frac{1}{e^2-e}\left[\left[ye^y\right]_1^2 - \int_1^2 e^y dy\right] = \frac{1}{e^2-e}\left[2e^2 - e - (e^2-e)\right] = \frac{1}{e^2-e}(e^2) =$$

$$= \frac{e^2}{e^2-e} = \frac{e}{e-1}\left(= 1 + \frac{1}{e-1}\right)$$

$Var(Y) = ?$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy = \int_1^2 y^2 \frac{1}{e^2-e} e^y dy = \frac{1}{e^2-e}\int_1^2 y^2 e^y dy \quad (2)$$

Έχουμε: $\int_1^2 y^2 e^y dy = \int_1^2 y^2 (e^y)' dy = \left[y^2 e^y\right]_1^2 - 2\int_1^2 \underbrace{ye^y}_{\overset{\shortparallel}{e^2}} dy = 4e^2 - e - 2e^2 = 2e^2 - e$

Άρα από σχέση (2)

$$E(Y^2) = \frac{2e^2-e}{e^2-e} = \frac{2e-1}{e-1} = 1 + \frac{e}{e-1}$$

Άρα: $Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 1 + \frac{e}{e-1} - \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 = 1 + \frac{e}{e-1}\left(1 - \frac{e}{e-1}\right) =$

$$= 1 + \frac{e}{e-1}\left(\frac{e-1-e}{e-1}\right) = 1 - \frac{e}{(e-1)^2} \quad \blacksquare$$

② Όπως πριν με $f(x) = \begin{cases} c\,|x|^{-3} \cdot e^{x^{-2}} & , |x| \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(i) Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Έχουμε ότι η X έχει συμμετρική κατανομή

Πράγματι: $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (η f: άρτια συνάρτηση)

Επομένως: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{-2^{-1/2}} f(x)dx + \int_{2^{-1/2}}^{1} f(x)dx \overset{\text{λόγω}}{\underset{\text{συμμετρίας}}{=}} 2\int_{2^{-1/2}}^{1} f(x)dx \quad (1)$

$$\int_{2^{-1/2}}^{1} f(x)dx = \int_{2^{-1/2}}^{1} c\cdot|x|^{-3}e^{x^{-2}}dx = c\underbrace{\int_{2^{-1/2}}^{1} x^{-3}\cdot e^{x^{-2}}dx}_{\text{το υπολογίσαμε πριν}} = c\cdot\frac{e^2-e}{2}$$

Άρα, από (1): $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{2c}{2}(e^2-e) = c(e^2-e)$

Και καταλήγουμε ότι: $c(e^2-e) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{e^2-e}$.

(ii) Κατανομή της $Y = \frac{1}{X^2}$

(α) Στήριγμα κατανομής της Y

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < x^2 < 1 \Rightarrow 1 < x^2 < 2 \Rightarrow S_Y = (1,2)$$

(β) σ.κ. της Y

$\forall y \in (1,2)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P\left(\frac{1}{X^2} \leq y\right) \overset{y>0}{=\!=} P\left(X^2 \geq \frac{1}{y}\right) = P\left(|X| \geq y^{-1/2}\right) =$$
$$= P(X \geq y^{-1/2}) + P(X \leq -y^{-1/2}) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{X}{=\!=}} 1 - F_X(y^{-1/2}) + F_X(-y^{-1/2}) =$$
$$= 1 - F_X(y^{-1/2}) + 1 - F_X(y^{-1/2}) = 2\left(1 - F_X(y^{-1/2})\right)$$

(γ) σ.π.π. της Y

$$\forall y \in S'_Y = S_Y \quad , \quad f_Y(y) = F'_Y(y) = -2F'_X(y^{-1/2})(y^{-1/2})' = -2f_X(y^{-1/2})(-1/2)y^{-3/2} =$$
$$= (y^{-1/2})^{-3}e^{(y^{-1/2})^{-2}}\cdot y^{-3/2} = \frac{1}{e^2-e}e^y$$

E(Y) και Var(Y) όπως πριν αφού $f_Y(y)$ είναι ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα ∎

(Ασκ. 3.1.1 ~ Χελιώτη)

③ (Παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης) - Nicolas Bernoulli

• Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται διαδοχικά και αν η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται για πρώτη φορά στην κ-ρίψη, τότε κερδίζουμε 2^k €.

(α) Ποιο είναι το μέσο κέρδος του παιχνιδιού;

(β) Θα έδινες 50€ για να παίξεις το παιχνίδι;

Έστω:

(α) K = # ρίψεων μέχρι 1^{η} φορά κορώνα

Τότε K είναι τ.μ. και $K \sim Geom\left(\frac{1}{2}\right)$, αφού αν πούμε επιτυχία την εμφάνιση κορώνας έχουμε #δοκιμών με 1^{η} επιτυχία σε ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, P("επιτυχίας") = P("κορώνας") = 1/2

Το κέρδος από το παιχνίδι είναι η τ.μ. $X = 2^K = g(K)$

Άρα το Μέσο κέρδος

$$E(X) = E(g(K)) = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k) f(K=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

(β) P("να χάσαμε (παίζοντας 1 φορά)") $= P(X<50) = P(2^K<50) = P(2^K \leq 50)$

$= P(2^K \leq 2^5) = P(K \leq 5) = 1 - P(K>5)$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boxed{\frac{31}{32}}$ //

■

④ Δύο παίχτες παίζουν συνεχώς το εξής παιχνίδι.

(Ασκ. 3.10 Χελιώτη)

Ρίχνουν συνεχώς ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για 1^{η} φορά 1 κ' 2. Έστω:

X # δοκιμών που απαιτούνται:

Αν ο X είναι περιττός, τότε ο A κρδίζει και παίρνει β € από τον B, ενώ αν ο X είναι άρτιος τότε ο B κερδίζει και παίρνει α € από τον A.

⟹

(α) Ποια είναι η $P(X=x)$, $x=1,2,\dots$

Καταρχήν, σε 1 ρίψη (δοκιμή), $P(\text{"επιτυχία"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

X: # δοκιμών μέχρι 1η φορά επιτυχία, σε ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli$\left(\frac{1}{3}\right)$

$$X \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{3}\right) \text{ στο } \mathbb{N}^*$$

Άρα $P(X=x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$, $x=1,2,\dots$

(β) $P(\text{"να κερδίσει ο A"}) = ?$ $= P(\text{"x περιττός"}) = P(x \in \{1,3,5,\dots\}) =$

$$= \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-2} \underset{x-1\to x}{=\!=\!=} \frac{1}{3}\sum_{x=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{x} = \frac{1}{3}\sum_{x=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{x} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

(γ) Τι σχέση συνδέει τα α και β για να είναι δίκαιο το παιχνίδι?

Έστω Y το κέρδος του A

$$Y = \begin{cases} \beta & \text{με πιθ } 3/5 \\ -\alpha & \text{με πιθ } 2/5 \end{cases}$$

Παιχνίδι δίκαιο $E(Y)=0$

$$E(Y)=0 \iff \frac{3}{5}\beta - \alpha\cdot\frac{2}{5} = 0 \iff$$

$$\iff 3\beta = 2\alpha \iff$$

$$\iff \boxed{\beta = \frac{2}{3}\alpha}$$

Μάθημα 19ο - 1/12/2014

Πολυδιάστατες τ.μ. - Τυχαία Διανύσματα

① Εισαγωγή

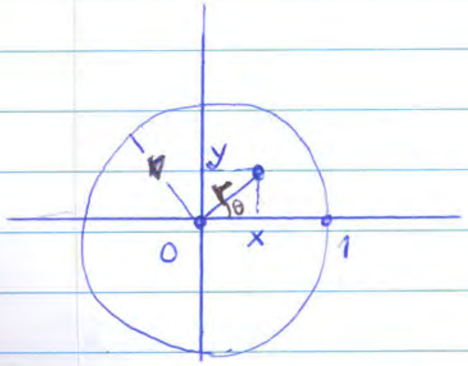
2-διάστατη τ.μ. ή **τυχαίο διάνυσμα** (τ.δ) **διάστασης 2.** : Ζεύγος αριθμητικών χαρακτηριστικών που αντιστοιχίζεται στα δ.σ. ενός πειράματος τύχης

Παραδείγματα

i) π.τ. : 10 ρίψεις ενός τίμιου ζαριού

τ.δ. : $\begin{pmatrix} \#\text{ ρίψεων με ένδειξη } 1 \\ \#\text{ ρίψεων με ένδειξη } 6 \end{pmatrix}$

ii) π.τ. : τυχαία επιλογή ενός σημείου μέσα στο μοναδιαίο κύκλο.



τ.δ. : (X, Y) καρτεσιανές συντεταγμ. του Μ.

(R, Θ) πολικές συντεταγμένες του Μ.

iii) π.τ. : παρατήρηση χρόνου ζωής 1000 λαμπτήρων

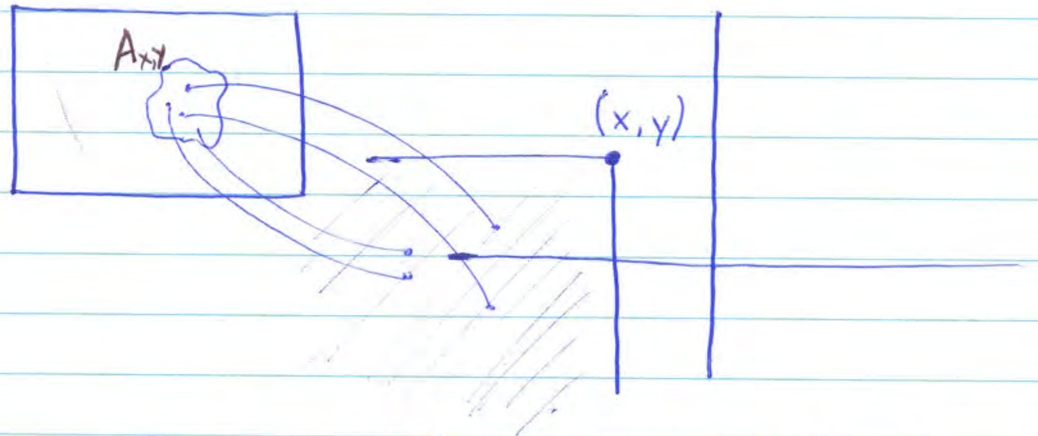
$$\text{τ.δ.} \begin{pmatrix} \text{" \# λαμπτήρων που δε λειτούργησαν καθόλου "} \\ \text{\# λαμπτήρων που λειτούργησαν} > 1000 \text{ ώρες} \end{pmatrix}$$

② Ορισμός 2-διάστατης τ.μ.

Ορισμός : Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π.
Μια (διανυσματική) συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ λέγεται 2-διάστατη τ.μ. ή τυχαίο διάνυσμα (τ.δ.) διάστασης 2, αν

$$\{X \leq x,\ Y \leq y\} \overset{\text{ορσ.}}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y\} \in \mathcal{A},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Omega \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R}^2$$



$$\begin{gathered} A_{x,y} \overset{\text{ορσ.}}{=} (X,Y)^{-1}((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \in \mathcal{A},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \parallel \\ X^{-1}((-\infty, x]) \cap Y^{-1}((-\infty, y]) \end{gathered}$$

Παρατήρηση

Αν (X,Y) : ένα τ.δ. , τότε οι X και Y είναι (μονοδιάστατες) τμ. , αλλά και αντίστροφα αν X και Y είναι 2 τμ. ορισμένες στον ίδιο χ.π , τότε το (X,Y) είναι τ.δ.

$$\left[\{X\le x\} = \{X\le x, Y\in\mathbb{R}\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\{\underset{\underset{\mathcal{A}\text{ (από ορισμό)}}{\uparrow}}{X\le x}, Y\le n\}\right]\in\mathcal{A}$$

(ιδιότητα σ-Αλγεβρας [κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις])

③ Κατανομή 2-διάστατης τ.μ.

Το ζεύγος (X,Y) μας οδηγεί φυσιολογικά σε ένα καινούριο χ.π.

αρχικός χ.π. — επαγόμενος χ.π

$$\left(\underset{\sim}{\Omega}, \mathcal{A}, P\right)\xrightarrow{(X,Y):\underset{\sim}{\Omega}\to\mathbb{R}^2}\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), P_{X,Y}\right)$$

$\underset{\sim}{\Omega}$ ↓ δ.σ.

$\mathcal{A}$ ↓ ενδεχόμενα

P ↓ αρχική συνάρτηση πιθανότητας

όπου $P_{X,Y}(A) = P\Big((X,Y)\in A\Big)\Big(=P\Big(\{w\in\underset{\sim}{\Omega} : (X(w),Y(w))\in A\}\Big)\Big)$

$$,\ A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \underset{\underset{\text{ελάχιστη σ-αλγεβρα}}{\swarrow}}{\sigma}\Big(\{\text{ανοικτά υποσύνολα του } \mathbb{R}^2\}\Big)$$

- Η $P_{X,Y}$ λέγεται κατανομή (πιθανότητας) της (X,Y)

④ Συνάρτηση Κατανομής 2-διάστατης τ.μ.

Ορισμός: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π. και $(X, Y): \underset{\sim}{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ένα τ.δ.

Τότε, η συνάρτηση $F_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$

με $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, λέγεται:

(από κοινού)(αθροιστική) συνάρτηση κατανομής της (X, Y)

Παρατήρηση

Η συνάρτηση κατανομής $F_{X,Y}$ της (X, Y) καθορίζει μονοσήμαντα την κατανομή (πιθανότητας) της (X, Y)

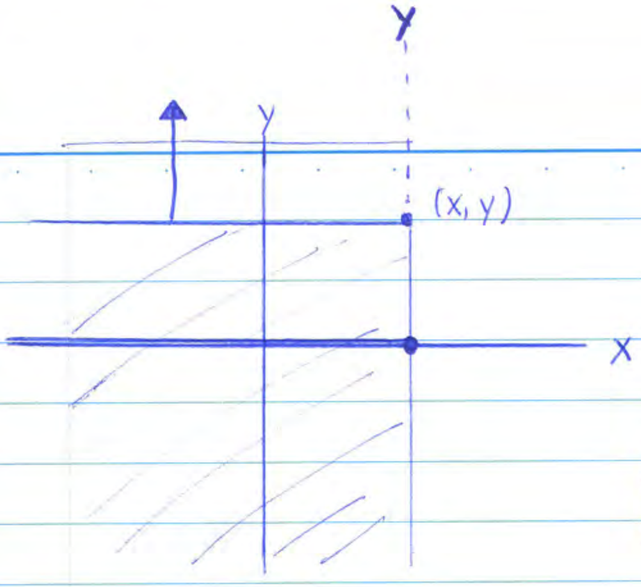
Δηλ., αν $F_{X_1, Y_1} = F_{X_2, Y_2} \Longrightarrow P_{X_1, Y_1} = P_{X_2, Y_2}$ ή

$$(X_1, Y_1) \overset{d}{=} (X_2, Y_2)$$

⊙ Σύνδεση με τις σ.κ. των μονοδιάστατων τ.μ.

- $F_X(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (περιθώρια σ.κ. της X)

- $F_Y(y) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x,y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$ (περιθώρια σ.κ. της Y)



$$\{X \le x\} = \{X \le x,\ Y \in \mathbb{R}\}$$

⑤ Ιδιότητες της από κοινού σ.κ.

Βασικές Ιδιότητες

1) Η $F_{X,Y}$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς x, y (κατά συντεταγμένη)

π.χ. για x : αν $x_1 < x_2$, τότε $F_{X,Y}(x_1, y) \le F_{X,Y}(x_2, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$

2) Η $F_{X,Y}$ είναι δεξιά συνεχής ως προς x, y (κατά συντεταγμένη)

π.χ. για x : $\lim\limits_{u \to x^+} F_{X,Y}(u, y) = F_{X,Y}(x, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$

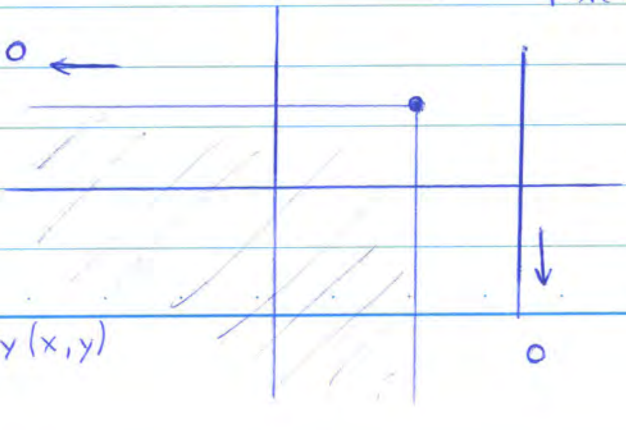
3) (Οριακές Ιδιότητες)

i) $F_{X,Y}(-\infty, y) = F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} F_{X,Y}(-\infty, y) \\ \parallel \\ \lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x, y) \end{array}$$

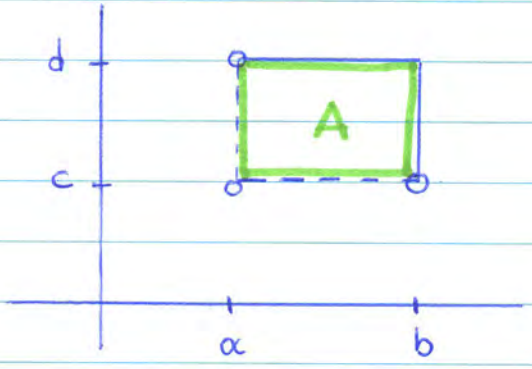
ii) $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$

$$\begin{array}{c} F_{X,Y}(+\infty, +\infty) \\ \parallel \\ \lim\limits_{x, y \to +\infty} F_{X,Y}(x, y) \end{array}$$



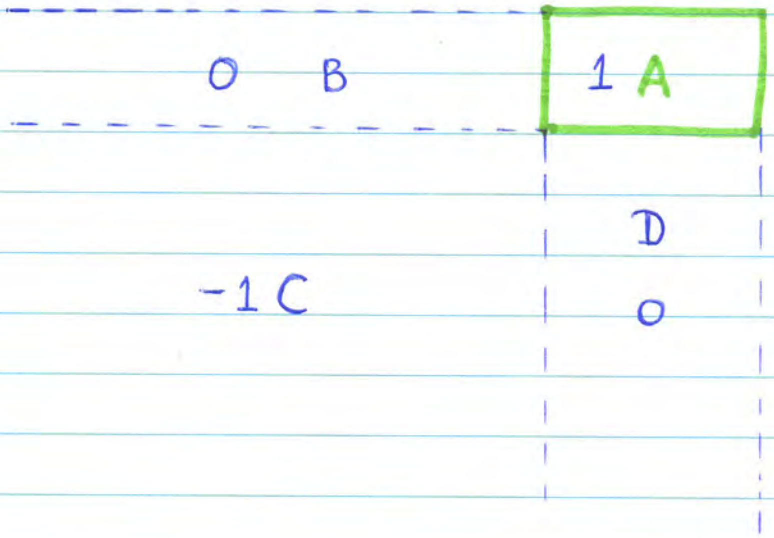
4) $P(\alpha < X \leq b\ ,\ c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(\alpha,d)$

$- F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(\alpha,c)$



Διάσταση 1

$P(\alpha < X \leq b) = F_X(b) - F_X(\alpha)$



⑥ Κατηγορίες 2-διαστατων τ.μ.

(X, Y) τ.μ.
- → διακριτή: $\exists A \subset \mathbb{R}^2$, αριθμήσιμο, όπου $P\big((X,Y) \in A\big) = 1$
- → (✱) μικτή (συνδυάζει ένα διακριτό και ένα συνεχές κομμάτι).
- → συνεχής
  - → απόλυτα συνεχής
  - → ιδιάζουσα συνεχής

συνεχής: όταν $F_{X,Y}$ είναι συνεχής $(\mathbb{R}^2 \to [0,1])$

απόλυτα συνεχής: $\exists f_{X,Y} \geq 0 : \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

$$P\Big((X,Y) \in A\Big) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Τότε λέμε ότι η $f_{X,Y}$ είναι σ.π.π. της (X,Y)

Ισοδύναμος Ορισμός (απόλυτης συνέχειας)

Αν $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ με εμβαδόν $(A) = 0 \longrightarrow$

$$P\big((X,Y) \in A\big) = 0$$

Ιδιάζουσα συνεχής: $\exists A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$: εμβαδόν $(A) = 0$ και

$$P\big((X,Y) \in A\big) = 1$$ και ταυτόχρονα

$$P\big((X,Y) = (x,y)\big) = 0 \;, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

π.χ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; $Y \equiv 0$ (με πιθ. 1)

ή γενικότερα (X, Y)

απόλυτα συνεχής

διακριτή

άλλο παράδειγμα

π.χ. (X, X)

X: συνεχής

⑦ Ιδιότητες διακριτών 2-διάστατων τ.μ.

- Έχει συνάρτηση πιθανότητας $f_{X,Y}(x,y) = P(X=x\ ,\ Y=y)$

Χαρακτηριστικές Ιδιότητες

(i) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(ii) $\sum\limits_{x} \sum\limits_{\substack{y \\ (x,y) \in A}} f_{X,Y}(x,y) = 1$, για A αριθμήσιμο , $P((X,Y) \in A) = 1$

Παρατήρηση

Αν μια $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις (i) και (ii) τότε υπάρχει ζεύγος (X, Y): η f να είναι σ.π. της (X, Y)

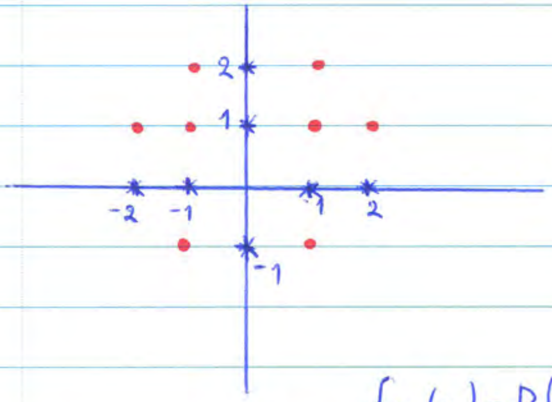
Επιπλέον Ιδιότητες

- <u>σύνδεση με τις μονοδιάστατες</u>

Όταν (X,Y) είναι διακριτή, τότε X και Y είναι διακριτές τ.μ.

$$f_X(x) = \sum_{\substack{y:\\(x,y)\in A}}' f_{X,Y}(x,y)$$ (περιθώρια συναρτηση πιθανοτητας της X)

$$f_Y(y) = \sum_{\substack{x\\(x,y)\in A}}' f_{X,Y}(x,y)$$ (περιθώρια συναρτηση πιθανότητας της Y)



$A_{X,Y}$: στήριγμα της (X,Y)

$$A_{X,Y} = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad P\big((X,Y)=(x,y)\big)>0 \right\}$$

$$f_X(x) = P(X=x) = \sum' f_{X,Y}(x,y)$$

$$f_X(-2) = f_{X,Y}(-2,1)$$

$$f_X(-1) = f_{X,Y}(-1,-1) + f_{X,Y}(-1,1) + f_{X,Y}(-1,2)$$

⑧ Παράδειγμα διακριτής 2-διαστ. τ.μ.

Σε μια δειγματολ. έρευνα σε οικογένειες καταγράψαμε ∀ οικογένεια # μελών και τον τύπο του διαμερίσματος της βασικής κατοικίας. Το 100% του δείγματος χωρίστηκε ως εξής:

# μελών \ τύπος διαμ.	$2^{\text{αρι}}$	$3^{\text{αρι}}$	$4^{\text{αρι}}$	$5^{\text{αρι}}$
2	30%	9%	1%	0%
3	4%	15%	1%	0%
4	3%	15%	10%	2%
5	1%	4%	4%	1%

π.τ. Τυχαία επιλογή μιας οικογένειας στο δείγμα

Έστω X: # μελών της οικογένειας

Y: τύπος διαμερίσματος

Να βρεθεί η σ.π. της (X, Y) και οι περιθώριες σ.π. της X και Y.

$P(X=x, Y=y) = ?$

Φτιάχνουμε πίνακα πιθανοτήτων της από κοινού σ.π..

$X \backslash Y$	2	3	4	5	$f_X(x)$
2	0,3	0,09	0,01	0	0,4
3	0,04	0,15	0,01	0	0,2
4	0,03	0,15	0,1	0,02	0,3
5	0,01	0,04	0,04	0,01	0,1
$f_Y(y)$	0,38	0,43	0,16	0,03	1

⑨ Ιδιότητες απόλυτα συνεχών 2-διάστατων τ.μ.

– Έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y}$

Χαρακτηριστικές ιδιότητες.

(i) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

Παρατήρηση: Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις (i) και (ii) τότε υπάρχει τ.δ. (X,Y): η f να είναι σ.π.π. του (X,Y).

Επιπλέον ιδιότητες

• <u>Σύνδεση με σ.π.π. των X και Y</u>

Οι X και Y είναι απόλυτα συνεχείς τ.μ. και έχουμε.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$ (περιθώρια σ.π.π. της X)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \quad \forall y \in \mathbb{R}$$ (περιθώρια σ.π.π. της Y)

Μάθημα 20ο - 5/12/2014

① Ιδιότητες απόλυτα συνεχών 2-διάστατων τ.μ.

(Επιπλέον Ιδιότητες-συνέχεια)

- **Σύνδεση της σ.κ. της (X,Y) με την σ.π.π.** (σ.μ. = συνάρτηση κατανομής)

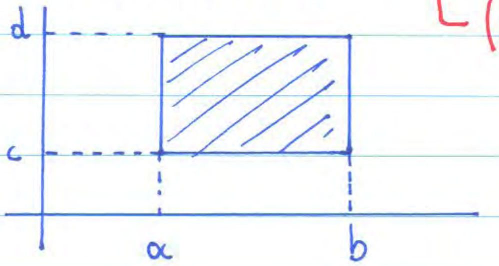
$$- F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du \quad \forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$- f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}$$, όταν $f_{X,Y}$ είναι συνεχής στο (x,y)

- **Πιθανότητα σε ορθογώνια**

$$P(\alpha (\leq) X (\leq) b\ ,\ c (\leq) Y (\leq) d) = \int_{\alpha}^{b}\int_{c}^{d} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

$\uparrow$ (μικρότερο ή μικρότερο ή ίσο)

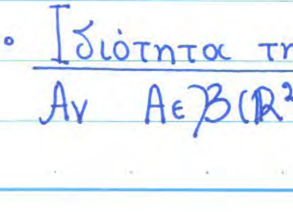


όπου μπορούμε να συμπεριλάβουμε τις πλευρές ή όχι

- **Πιθανότητα σε στοιχειώδη ορθογώνια**

$$P(x (\leq) X (\leq) x+\delta x\ ,\ y (\leq) Y (\leq) y+\delta y) \cong f_{X,Y}(xy)\cdot\delta x\,\delta y \quad , \delta x, \delta y \to 0$$

όταν $f_{X,Y}$ είναι συνεχής στο (x,y)



- **Ιδιότητα της απόλυτης συνέχειας** (ισοδύναμος ορισμός της ασ. τ.μ (X,Y))

Αν $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$: εμβαδόν$(A)=0 \implies P((X,Y)\in A)=0$

Ισοδύναμη διατύπωση (αντιθετοαντιστροφή).

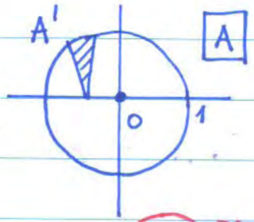
$P((X,Y)\in A) > 0 \Rightarrow$ εμβαδόν$(A) > 0$

Εφαρμογή: $P(X=x) = P(X=x,\ c \le Y \le d) = P(X=x,\ Y=y) = P(X=x,\ Y \le y) =$
$= P(Y=y) = P(\alpha \le X \le b,\ Y=y) = P(X \le x,\ Y=y) = 0$

$P(X=2)=0$, λόγω εμβαδού (ευθείας) $=0$
$P(X=1, Y=1)=0$, λόγω εμβαδού (σημείου) $=0$
$P(-1 \le X \le 1, Y=0)=0$ λόγω εμβ (ευθ τμημ) $=0$

Προσοχή: Όταν εμβαδόν$(A) > 0 \;\cancel{\Rightarrow}\; P((X,Y)\in A) > 0$

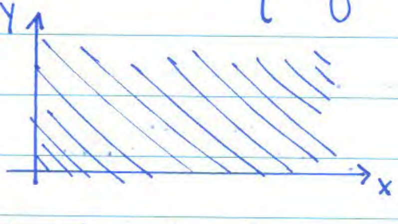
Αντιπαράδειγμα: π.τ. τυχαία επιλογή ενός σημείου στον μοναδιαίο κυκλικό δίσκο D.
τ.δ.: (X,Y) καρτεσιανές συντεταγμένες του M.
Έχουμε εμβαδόν $(A) > 0$ αλλά $P((X,Y)\in A) = 0$, αφού $AD = \emptyset$ (A, D είναι ξένα)
και $D = S_{X,Y} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x,y) > 0\}$
(όταν (X,Y) είναι απόλυτα συνεχής τ.μ.)



Αν $A \subseteq S_{X,Y} = D$ τότε Εμβαδόν$(A) > 0 \xrightarrow{A \subseteq S_{X,Y}}$
$\Rightarrow P((X,Y)\in A) > 0$
π.χ. το A' που σχεδιάσαμε εδώ.

② Παράδειγμα απόλυτα συνεχούς 2-διαστ. τ.μ.

Έστω (X,Y) με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot e^{-x} e^{-2y}, & x,y > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



(i) $c =$ [illegible] ?
(ii) $f_X(x) = ?$
(iii) $f_Y(y) = ?$
(iv) $P(X>1, Y<1)$, (v) $P(X<1)$, (vi) $P(X<Y)$ ⟶

Λύση

(i) Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = 1$.

Έχουμε: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(X,Y)\,dy\,dx \left(= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(X,Y)\,dy\,dx\right) = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} c\cdot e^{-x}\cdot e^{-2y}\,dy\,dx =$

$$= \int_0^{+\infty} c\cdot e^{-x}\left(\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy\right)dx = c\left(\underset{\substack{\| \\ \Gamma(1)=1 \\ \text{σππ Exp(1)}}}{\int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot dx}\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy\right) = c\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\cdot \underset{\substack{\| \\ 1 \\ \text{σππ Exp(2)}}}{\int_0^{+\infty} 2e^{-2x}dy} = \frac{c}{2}$$

Άρα $\frac{c}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{c=2}$

(1) $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}\cdot e^{-x}\,dx$, $\Gamma(1)=1$ (2) $f_X(x) = \theta\cdot e^{-\theta x}$, $x>0$ $0 \to$ διαφορετ.

Άρα για $\theta=1$, $f_X(x) = e^{-\theta}$

(ii) Προβάλλουμε το $S_{X,Y} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : F_{X,Y}(x,y)>0\}$ στον $x'x$

Για $x>0$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{+\infty} 2\cdot e^{-x}e^{-2y}\cdot dy = e^{-x}\cdot\int_0 \underbrace{2\cdot e^{-2y}dy}_{=1 \text{ σππ Exp(2)}} = e^{-x}$$

Τελικά: $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x>0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(iii) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} 2\cdot e^{-x}e^{-2y}\,dx = 2\cdot e^{-2y}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 2\cdot e^{-2x}$

Τελικά $f_Y(y) = \left\{\begin{array}{ll} 2e^{-2y} & , y>0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{array}\right\}$ Έχουμε $Y \sim Exp(2)$

$f_Y(y) = 2e^{-2y}$

(iv) $P(X>1 \;, Y<1) = \int_1^{+\infty}\int_0^{1} 2e^{-x}e^{-2y}\,dy\,dx = \left(\int_1^{+\infty} \overset{-(e^{-x})'}{e^{-x}}dx\right)\cdot\left(\int_0^{1} \overset{-(e^{-2y})'}{2\cdot e^{-2y}}dy\right) =$

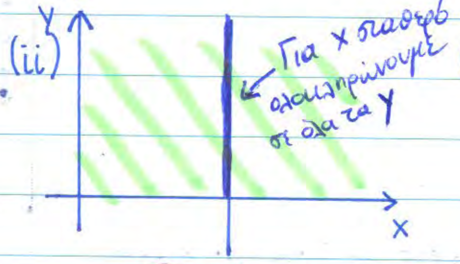
$= [e^{-x}]_1^{+\infty}\cdot[e^{-2y}]_0^{1} = e^{-1}(1-e^{-2})$

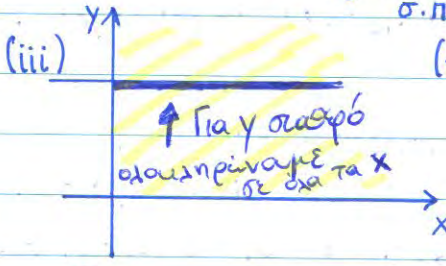
(v) $P(X<1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx = \int_0^1 e^{-x}dx = -[e^{-x}]_0^1 = 1-e^{-1}$

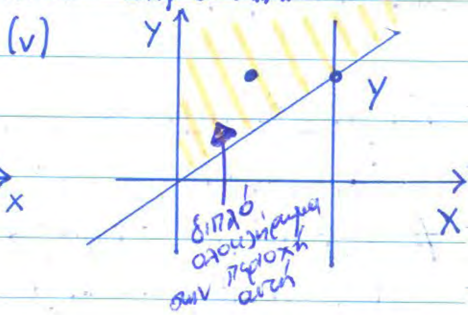
$$P(X<Y) = \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} 2\cdot e^{-x}\cdot e^{-2y}dy\,dx = 2\left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\int_x^{+\infty} 2e^{-2y}dy\right)dx\right) =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}[-e^{-2y}]_x^{+\infty}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot e^{-2x}dx = \frac{1}{3}\cdot\int_0^{+\infty} \underbrace{3e^{-3x}dx}_{\overset{\text{σ.π.π.}}{} \overset{\|}{1}\ \text{Exp}(3)} = \frac{1}{3}$$

σ.π.π. Exp(3)







③ Ανεξαρτησία 2 τ.μ.

Υπενθύμιση: 2 ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα αν $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$

Ορισμός: 2 τ.μ. (ορισμένες στον ίδιο χ.π.) λέγονται ανεξάρτητες αν $P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$, $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ισοδύναμα: Αν $\{x\in A\}$ και $\{y\in B\}$ είναι ανεξάρτητα, $\forall A, B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε γράφουμε $X \perp\!\!\!\perp Y$

Παρατηρήσεις

1) Αν χρησιμοποιήσουμε επαγόμενες συναρτήσεις πιθανότητας $P_{X,Y}(A\times B) = P_X(A)\cdot P_Y(B)$, $\forall A, B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

2) $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

Αν $A = (-\infty, X]$ και $B = (-\infty, y]$

$P[X\in(-\infty,x], Y\in(-\infty,y]) = P(X\leq x, Y\leq y) = F_{X,Y}(x,y) \overset{\text{υποθ.}}{=}$

$= P[X\in(-\infty,x])\cdot P(Y\in(-\infty,y]) =$ [illegible] $\cdot P(X\leq x)\cdot P(Y\leq y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$

Π.χ. (όπως και πριν) απόλυτα συνεχής (X,Y), $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2\cdot e^{-x}\, e^{-2y} & , x>0, y>0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

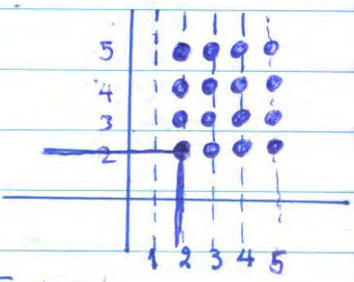
Για $x>0,\ y>0$: $F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du=\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} 2e^{-u}e^{-2v}\,dv\,du=$

$=\int_0^x e^{-u}\left(\int_0^y 2e^{-v}dv\right)du=\left(\int_0^x e^{-u}du\right)\cdot\left(\int_0^y \underbrace{2\cdot e^{-y}dv}_{\text{ανεξ του } u}\right)=\left(\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du\right)_{X\sim Exp(1)}\cdot\left(\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv\right)_{Y\sim Exp(2)}$

$=F_X(x)\cdot F_Y(y)$ Άρα $X \perp\!\!\!\perp Y$

(Για $x<0$ ή $y<0$, $0=F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$.)

(ii) Παράδειγμα με ~~δειγματική επιλογή~~ διακριτή τ.μ. (παράδ. με δειγματολ. έρευνα)



$F_{X,Y}(2,2)=P(X\le 2,\ Y\le 2)=P(X=2,\ Y=2)=0{,}3$

$\neq 6{,}4\times 0{,}38=P(X=2)\cdot P(Y=2)=P(X\le 2)\cdot P(Y\le 2)=F_X(2)\cdot F_Y(2)$

Άρα, λοιπόν, $X \not\perp\!\!\!\perp Y$ αφού δεν ισχύει η ισότητα στο $(2,2)$.

④ Συνθήκες Ανεξαρτησίας με σ.π. ή σ.π.π.

- Αν (X,Y) τ.δ. με σ.π/σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$, τότε $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y)=$ $=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ (με πιθ 1).

Με πιθανότητα 1: $\exists\ S\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, όπου η σχέση ισχύει στο S με $P((X,Y)\in S)=1$

Ισοδύναμα: Αν $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)\}$, τότε $P((X,Y)\in A)=0$.

Παρατηρήσεις

1. Αν (X,Y) διακριτή και $\exists\ (x,y) : F_{X,Y}(x,y)=P(X=x,\ Y=y)\neq P(X=x)\cdot P(Y=y)$, τότε οι X,Y δεν είναι ανεξάρτητες (αρκεί ένα σημείο).
2. Ικανή Συνθήκη Ανεξαρτησίας: για X και Y όταν (X,Y) είναι α.σ. ~~είναι~~ και $f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$ μόνο σε σύνολο A τ.ω εμβ.$(A)=0$.

π.χ. (Όπως πριν)(i) (X,Y): απολ. συνεχής $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 2\cdot e^{-x}\cdot e^{-2y}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{διαφορ.}\end{cases}$

$f_{X,Y}(x,y)=e^{-x}\cdot 2e^{-2y}\cdot 1_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)}(x,y)$

$=\underbrace{e^{-x}\cdot 1_{(0,+\infty)}(x)}_{f_X(x)}\cdot\underbrace{2\cdot e^{-2y}1_{(0,+\infty)}(y)}_{f_Y(y)}=f_X(x)\cdot f_Y(y)\quad\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Άρα $X \perp\!\!\!\perp Y$.

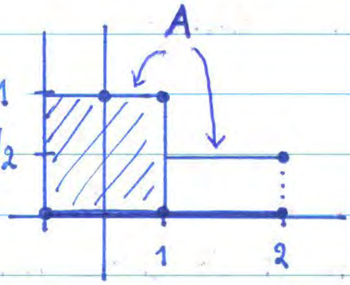
(ii) (X, Y) διακριτή (δειγμ. έρευνα)

$f_{X,Y}(2,2) = P(X=2, Y=2) = 0,3 \neq 0,4 \times 0,38 = P(X=2)\cdot P(Y=2) =$

$= f_X(2)\cdot f_Y(2)$

Άρα, λοιπόν, $X \not\perp\!\!\!\perp Y$ (διαφέρουν σε ένα σημείο)

(iii) Έστω (X, Y) απόλυτα συνεχής: $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & , (x,y)\in A \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$



Είναι X, Y: ανεξάρτητες?

$S_{X,Y} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x,y) > 0\}$

Κατ' αρχήν $f_X(x) = 0$ για $x \notin [0,2]$

Για $0 \le x \le 1$, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) = \int_0^1 1\,dy = 1$

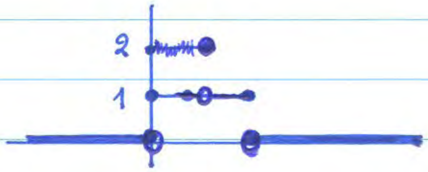
Για $1 < x \le 2$, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) = \int_{1/2}^{1/2} 1\,dy = 0$

Άρα:

$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

• Για $y = 1/2$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(X,Y)\,dx = \int_0^2 1\,dx = 2$

$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , y\in[0,1]\setminus\{1/2\} \\ 2 & , y = 1/2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$



$f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , 0 \le x \le 1 \quad y\in[0,1]\setminus\{1/2\} \\ 2 & , 0 \le x \le 1 \quad y = 1/2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & , x\in A \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Αν $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y)\} = [0,2]\times\{\frac{1}{2}\}$ άρα Εμβ$(B) = 0$

$\xRightarrow{(X,Y)}$ $P((X,Y)\in B) = 0$ $\Rightarrow$ η ισότητα ισχύει με πιθ. 1 και άρα $X \perp\!\!\!\perp Y$.

⑤ Δεσμευμένες Κατανομές τ.μ.

- Μερική γνώση ή πληροφορία σε κάποιο π.τ. μας οδήγησε στην έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας $P(A) \xrightarrow{\text{γνωση} B} P(A|B)$, $P(B)>0$.

- Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των κατανομών των τ.μ. όταν "έχουμε γνώση" των τιμών κάποιων άλλων τ.μ. που σχετίζονται με αυτήν.

Περιθώρια κατανομή $\xrightarrow{\text{πληροφορία}}$ Δεσμευμένη κατανομή
της X ή της Y — της X ή της Y δοθείσας πληροφορίας

Συνήθως: $P(X \le x) \xrightarrow{Y=y} P(X \le x \mid Y=y)$

$$P(Y \le y) \xrightarrow{X=x} P(Y \le y \mid X=x) \quad ■$$

Μάθημα 21ο – 8/12/2014

① Δεσμευμένες Κατανομές τμ. (συνέχεια)

Ορισμός: Έστω (X,Y) 2-διάστατη τ.μ. με σ.π./σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$

Ορίζουμε $\forall y: f_Y(y)>0$ (περιθώρια σ.π./σ.π.π. της Y)

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

(συνάρτηση του X, για σταθ. Y)

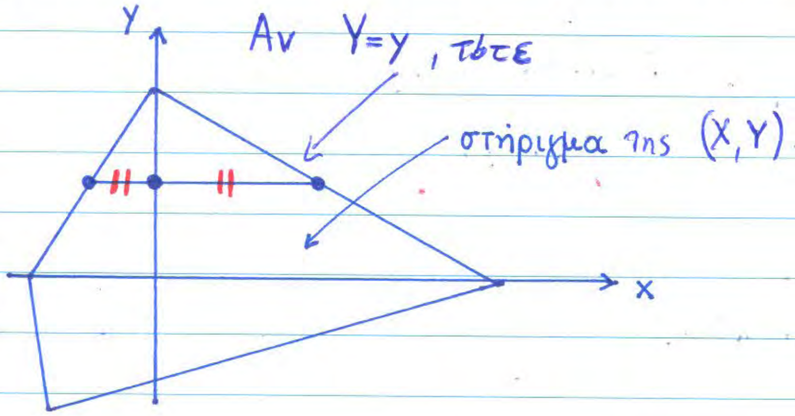
και τη λέμε δεσμευμένη σ.π./σ.π.π. της X δοθέντος ότι $Y=y$

Ανάλογα: Ορίζουμε $\forall x: f_X(x)>0$ (περιθώρια σ.π./σ.π.π. της X)

$$\boxed{f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}}$$

(συνάρτηση του Y, για σταθ. X)

και τη λέμε δεσμευμένη σ.π./σ.π.π της Y δοθέντος ότι $X=x$.



Ιδιότητες

1. Η $f_{X|Y}(x|y)$ είναι πράγματι σ.π./σ.π.π. κάποιας τ.μ.
(μη αρνητική, αθροίζει/ολοκληρώνει στο 1)

Καμιά φορά, γράφουμε άτυπα : την $\underset{\downarrow\ \text{τυχαίας μεταβλητής}}{\text{τ.μ.}}$ $X|Y=y$

- Όμοια για $f_{Y|X}(y|x)$ και αντίστοιχα την τ.μ. $Y|X=x$.

2. Δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της $X|Y=y$

$$F_{X|Y}(x|y) \overset{\text{ορσ.}}{=} P(X\le x \mid Y=y) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{u\le x\\(u,y)\in A}} f_{X|Y}(u|y), & \text{όταν } (X,Y) \text{ είναι διακριτ} \\ & \text{και } P((X,Y)\in A)=1 \\ \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,du, & \text{όταν } (X,Y) \text{ είναι απόλυτα συνεχής} \end{cases}$$

Προσοχή !

Για (X,Y) απόλυτα συνεχής :

$$P(X\le x \mid Y=y) = \xcancel{\frac{P(X\le x, Y=y)}{P(Y=y)=0}}$$

ενώ για (X,Y) διακριτή
όταν $P(Y=y)>0$ (ισχύει)

$$\boxed{f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}}$$

② Ισοδύναμες Συνθήκες Ανεξαρτησίας

Αν (X,Y) 2-διάστατη τ.μ. με σ.π./σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$, τότε:

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\cdot P(Y\in B), \ \forall A,B\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \quad F_{X,Y}(X,Y) = F_X(x)\cdot F_Y(y) \quad , \forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \quad , (\text{με πιθ. } 1)$$

$$\overset{f_Y(y)>0}{\Leftrightarrow} \quad f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \quad , (\text{με πιθ. } 1)$$

$$\overset{f_X(x)>0}{\Leftrightarrow} \quad f_{Y|X}(Y/X) = f_Y(y) \quad , (\text{με πιθ. } 1)$$

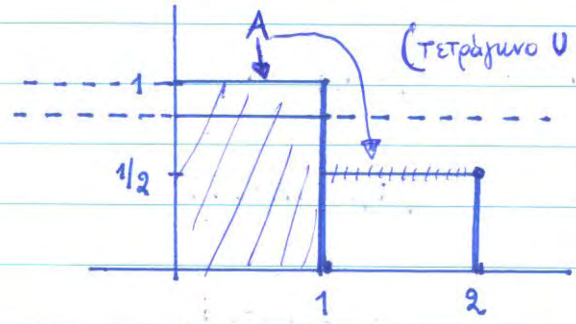
$$\overset{f_Y(y)>0}{\Leftrightarrow} \quad F_{X|Y}(X|Y) = F_X(x) \quad , (\text{με πιθ. } 1)$$

$$\overset{f_X(x)>0}{\Leftrightarrow} \quad F_{Y|X}(Y|X) = F_Y(y) \quad , (\text{με πιθ. } 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad f_{X,Y}(x,y) = h(x)\cdot g(y) \quad (\text{με πιθ. } 1)\ (X \text{ και } Y \text{ ανεξάρτητες})$$

Παράδειγμα

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & , (x,y) \in A \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



(τετράγωνο ∪ ευθυγρ. τμήμα)

(α) $f_{X|Y}(x|y) = ?$ (β) $F_{X|Y}(x|y) = ?$

(γ) $f_{Y|X}(y|x) = ?$ (δ) $F_{Y|X}(y|x) = ?$

(ε) $f_{X,Y}(x,y) = h(x) \cdot g(y) = ?$

Έχουμε βρει ότι η περιθώρια της X είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \Bigg\| \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , y \in [0,1] \setminus \{1/2\} \\ 2 & , y = 1/2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

α) $f_Y(y) > 0 \Leftrightarrow y \in [0,1]$

- Για $y \notin [0,1]$ δεν ορίζεται.
- Για $y \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \\ 0 & , x \notin [0,1] \end{cases}$

• Για $y=\frac{1}{2}$, $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x \in [0,2] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

β) Απο α) $X|Y=y \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ (Για $y \in [0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1]$)

$X|Y=\frac{1}{2} \sim \mathcal{U}_{[0,2]}$ Άρα

$F_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x & , 0 \le x \le 1 \\ 1 & , x>1 \end{cases}$, $y \in [0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1]$

και $F_{X|Y}(x|Y=\frac{1}{2}) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x/2 & , 0 \le x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$; $(y=\frac{1}{2})$

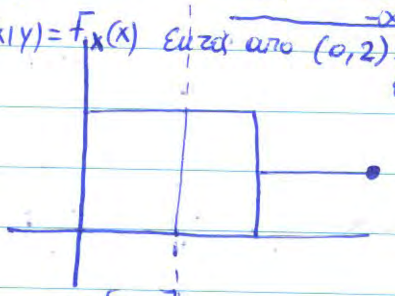
(Διαφορετικά με ολοκλήρωση)

$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,du$

$F_{X|Y}(x|y) = F_X(x)$ εκτός απο $(0,2) \times \{\frac{1}{2}\}$ με εμβαδόν 0.

$\Downarrow$

$X \perp\!\!\!\perp Y$



γ) $f_{Y|X}(y|x) = ?$

$f_X(x) > 0 \iff x \in [0,1]$

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 1 & , y \in [0,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Άρα $Y|X=x \sim \mathcal{U}[0,1]$, (για $x \in [0,1]$) ενώ για $x \notin [0,1]$ δεν ορίζεται

δ) $F_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ y & , 0 \le y < 1 \\ 1 & , y \geq 1 \end{cases} = F_Y(y)$ $(0 \le x \le 1)$

(παντού ίσες)

ε) $f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x,y)$ (με πιθ. 1) (εξαιρούμε το ενδ. τμήμα που έχει εμβαδόν 0).

$f_{X,Y}(x,y) = \underbrace{\mathbb{1}_{[0,1]}(x)}_{\overset{\shortparallel}{g(x)}} \underbrace{\mathbb{1}_{[0,1]}(y)}_{\overset{\shortparallel}{h(x)}}$ (με πιθ. 1)

③ Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Ορισμός: Έστω (X, Y) 2-διάστατη τ.μ. με σ.π./σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$
Ορίζουμε $\forall y: f_Y(y) > 0$ (περιθώρια σ.π./σ.π.π. της Y)
και εφόσον υπάρχει:

$$E[X|Y=y] = \begin{cases} \sum\limits_{x:(x,y)\in A} x\, f_{X|Y}(x|y) & ,\text{αν } (X,Y) \text{ διακριτή με } P((X,Y)\in A)=1 \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx & ,\text{αν } (X,Y) \text{ είναι απόλυτα συνεχής} \end{cases}$$

Αντίστοιχα: ορίζουμε $E[Y|X=x]$ με εναλλαγή του ρόλου των X και Y.

Παρατηρήσεις

1) Η δεσμευμένη μέση τιμή ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που ικανοποιεί η απλή μέση τιμή, π.χ. (LOTUS) (αν (X,Y) διακριτή)

$$E\left[g(x) \mid Y=y\right] = \sum_{\substack{x:\\(x,y)\in A}} g(x)\cdot f_{X|Y}(x|y)$$

2) Η $E(X|Y=y)$ είναι μια συνάρτηση του y, για εκείνα το $y: f_Y(y)>0$
τέτοια ώστε
και η μέση τιμή υπάρχει.

Αν ορίσουμε $g(y) = E(X|Y=y)$, τότε η $g(Y)$ είναι τ.μ.

Τη συμβολίζουμε $E[X|Y]$ ή $E(X|Y)$

Πρόταση : $E(X) = E\left[\underbrace{E(X|Y)}_{g(Y)}\right]$

(τύπος της δεσμευμένης μέσης τιμής)

Απόδειξη (για διακριτές)

$$E\left(\underbrace{E[X|Y]}_{\overset{\shortparallel}{g(Y)}}\right) = \sum_{y} g(y) P(Y=y) = \sum_{y} E[X|Y=y] P(Y=y)$$

$$= \sum_{y} \sum_{x} x P(X=x|Y=y) P(Y=y)$$

$$= \sum_{x}{}' x \underbrace{\sum_{y}{}' P(X=x, Y=y)}_{\overset{\shortparallel}{P(X=x)}} = \sum_{x}{}' x P(X=x) = E(X)$$

Παρατήρηση: Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της X δεσμεύοντας ως προς κάποια άλλη τ.μ.

④ Δεσμευμένη Διασπορά (διακύμανση)

Ορισμός: Έστω (X, Y) 2-διάστατη τ.μ. με σ.π / σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$. Ορίζουμε $\forall y : f_Y(y) > 0$ και $E(X^2|Y=y) < +\infty$

$$Var[X|Y=y] = E\left[(X - E[X|Y=y])^2 | Y=y\right]$$

Πρόταση: (όπως και με την απλή διασπορά)

$$Var(X\,|\,Y=y) = E\left(X^2\,|\,Y=y\right) - E^2(X\,|\,Y=y)$$

Παίρνοντας τ.μ. : $\boxed{Var(X|Y) = E(X^2|Y) - E^2(X|Y)}$

Πρόταση: (τύπος δεσμευμένης διασποράς)

$$\boxed{Var(X) = E\left(Var(X|Y)\right) + Var\left(E(X|Y)\right)}$$

Απόδειξη: Θέτουμε $g(Y) = E(X|Y)$. Έχουμε $E[g(Y)] = E\left[E(X|Y)\right] =$

$\overset{\text{ιδιοτ. δεσμ.}}{\underset{\text{μεσης τιμης}}{=}} E(X)$ (1)

$$E\left[Var(X|Y)\right] = E\left[E(X^2|Y) - E^2(X|Y)\right] = E\left[E(X^2|Y)\right] - E\left(g^2(Y)\right) =$$

$$= E(X^2) - E\left[g^2(Y)\right] \quad (2)$$

$$Var\left(E(X|Y)\right) = Var(g(Y)) = E\left(g^2(Y)\right) - E^2(g(Y)) \overset{(1)}{=} E(g^2(Y)) - E^2(X) \quad (3)$$

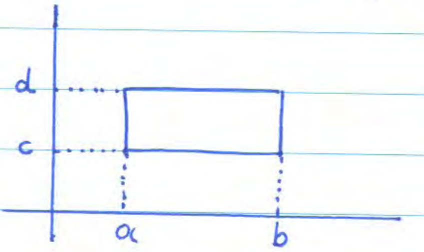
Προσθέτουμε (2) και (3)

$$E\left(Var(X|\underset{\sim}{Y})\right) + Var\left(E(X|\underset{\sim}{Y})\right) = E(X^2) - E^2(X) = Var(X)$$

⑤ Ασκήσεις

1. Να ελεγχθεί η ανεξαρτησία των X και Y όταν (X, Y) είναι απόλυτα συνεχής. με σ.π.π.

(i) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C\dfrac{x^2}{y^2} & , a \le x \le b \quad , 0 < c \le y \le d \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

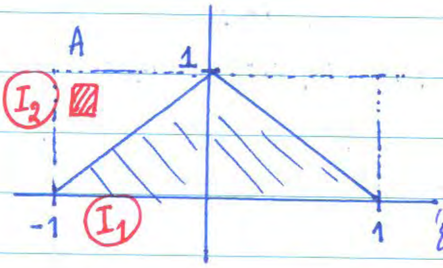


$$f_{X,Y}(x,y) = C \cdot \frac{x^2}{y^2} \cdot 1_{[a,b]\times[c,d]}(x,y)$$

$$= \underbrace{C x^2 1_{[a,b]}(x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{y^2} 1_{[c,d]}(y)}_{h(y)}$$

Άρα $X \perp\!\!\!\perp Y$ ■

(ii) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c|x|y & , -1 \le x \le 1 \quad , 0 \le y \le 1 - |x| \\ 0 & ; \text{διαφορετικά} \end{cases}$



$f_{X,Y}(x,y) = c|x| \cdot y \cdot \underset{\text{τρίγωνο}}{1}(x,y)$ δε σπάει σε γινόμενο δεικτριών.

Έστω $A = I_1 \times I_2$

$$0 = P\big((X,Y) \in A\big) = P\big((X,Y) \in I_1 \times I_2\big) =$$

$$= P(X \in I_1, Y \in I_2) \ne P(X \in I_1)\, P(X \in I_2) > 0$$

διότι μήκος $(I_1) > 0$, μήκος $(I_2) > 0$ με $I_1 \subset S_X$, $I_2 \subset S_Y$ $\Longrightarrow P(X \in I_1) \cdot P(X \in I_2) > 0$

2. (X,Y) με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c|x|\cdot y & , \quad -1 \le x \le 1 \\ & \quad\;\; 0 \le y \le 1-|x| \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(i) $c = ?$ (ii) $f_X(x) = ?$ (iii) $f_Y(y) = ?$

(iv) $f_{X|Y}(x|y) = ?$ (v) $f_{Y|X}(y|x) = ?$ (vi) $E(X|Y) = ?$

(vii) $Var(X|Y) = ?$ (viii) $P(X<Y)$

Λύση

(i) Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$ ή $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = 1$

|| α' τρόπος

$$\int_0^1\int_{y-1}^{1-y} c|x|\cdot y\,dx\,dy$$

|| β' τρόπος

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{1-|x|} c|x|\,y\,dy\,dx$$

γ' τρόπος : Παρατηρούμε : $f_{X,Y}(-x,y) = f_{X,Y}(x,y)$ (η $f_{X,Y}$ άρτια ως προς x)

$$= 2\int_0^1\int_0^{1-y} c\,x\,y\,dx\,dy = 2c\int_0^1 y\left(\int_0^{1-y} x\,dx\right)dy =$$

$$= 2c\int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y} dy = 2c\int_0^1 y\,\frac{(1-y)^2}{2}\,dy \overset{y\to 1-y}{=} c\int_0^1 (1-y)\,y^2\,dy =$$

$$= c\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = c\cdot\frac{1}{12}$$

Άρα πρέπει $\frac{c}{12} = 1 \Rightarrow c = 12$

Πιθανότητες Ι

Μάθημα 22ο - 10/12/2014

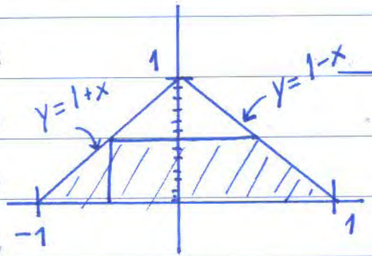
① Ασκήσεις

1) Ασκ. 2 (Συνέχεια) (X, Y) τ.δ. με σ.π.π.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12|x|y & , \begin{matrix} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-|x| \end{matrix} \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(ii) $f_X(x) = ?$

(iii) $f_Y(y) = ?$



Λύση

$\forall x : |x| \leq 1$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{1-|x|} 12|x|y\,dy = 12|x|\,\frac{(1-|x|)^2}{2} = 6|x|(1-|x|)^2$$

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} 6|x|(1-|x|)^2 & , |x| \leq 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικός} \end{cases}}$$

$\forall y : 0 \leq y \leq 1$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{y-1}^{1-y} 12|x|y\,dx \overset{\text{άρτια } \%x}{=} 24y \int_0^{1-y} x\,dx = 12y(1-y)^2$$

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2 & , 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}}$$

$\longrightarrow$

(iv) $f_{X|Y}(x|y) = ?$ (v) $f_{Y|X}(y|x) = ?$

1º Βήμα : Πού ορίζεται η $f_{X|Y}(x|y)$

Αναζητώ $y : f_Y(y) > 0$

↳ Άρα πρέπει ταυτόχρονα $0 \leq y \leq 1$

και $12\underset{0}{y}\underset{1}{(1-y)^2} > 0$ άρα $y \in (0,1)$

Για $y \in (0,1)$ ορίζεται και $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{12|x|\cancel{y}}{12\cancel{y}(1-y)^2} =$

$$= \frac{|x|}{(1-y)^2} \quad , \boxed{y-1 \leq x \leq 1-y}$$

Άρα : $f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{(1-y)^2} & , y-1 \leq x \leq 1-y \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(v) $f_{Y|X}(y|x) = ?$

Πρέπει : $f_X(x) > 0 \iff -1 \leq x \leq 1$ και $6\underset{0}{|x|}\underset{-1,\,1}{(1-|x|)^2} > 0 \iff |x| \in (0,1)$

Για $x \in (-1,0) \cup (0,1)$ ορίζεται και $f_{Y/X}(y/x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} =$

$$= \frac{12|x|y}{6|x|(1-|x|)^2} = \frac{2y}{(1-|x|)^2} \quad , \quad 0 \leq y \leq 1-|x|$$

ΤΕΛΙΚΑ : $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{2y}{(1-|x|)^2} & , 0 \leq y \leq 1-|x| \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(vi) $E(X|Y)=?$ $E(X|Y=y)=?$ Ορίζεται $y\in(0,1)$

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx = 0$$

διότι $f_{X|Y}(x|y)$ είναι άρτια % x (ή $X|Y=y$) → έχει συμμετρική κατανομή

Τελικά $E(X|Y)=0$ (μηδενική τ.μ.)

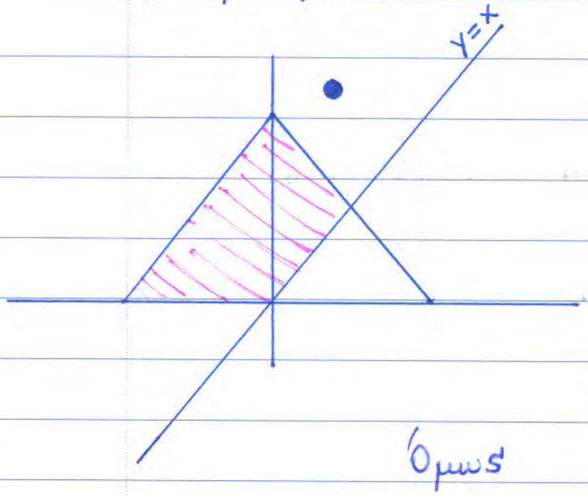
(vii) $Var(X|Y)=?$ $Var(X|Y)=E(X^2|Y)-\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{E^2(X|Y)}=\boxed{E(X^2|Y)}$

$$E(X^2|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X|Y}(x|y)\,dx=\int_{y-1}^{1-y} x^2\frac{|x|}{(1-y)^2}\,dx \overset{\text{άρτια \% x}}{=\!=}$$

$$=\frac{2}{(1-y)^2}\int_0^{1-y} x^3\,dx=\frac{(1-y)^2}{2}$$

Τελικά $Var(X|Y)=E(X^2|Y)=\dfrac{(1-Y)^2}{2}$

(viii) $P(X<Y)$



Καταρχήν, λόγω συμμετρίας ισχύει ότι: $P(X<0)=P(X>0)=\frac{1}{2}$

$P_T(X<Y)=P(0<X<Y)+P(X<0,\ X<Y)=$

$P(Y>0)=1$ $\overset{*}{=} P(0<X<Y)+P(X<0)=$

$=\frac{1}{2}+P(0<X<Y)$

($f(x,y)=12|x|y$, αν $(x,y)\in$ τρίγωνο)

Όμως $f(y,x)=f(x,y)$, $x,y>0$

άρα συμμετρική % την ευθεία $y=x$, για $x,y>0$ $\Rightarrow$

$$P(0<X<Y)+P(0<Y<X) = P(X>0, Y>0) = P(X>0) = \frac{1}{2}$$

και ΜΕ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ $P(0<X<Y)=P(0<Y<X)$

Τελικά $P(0<X<Y)=\frac{1}{4}$ και $P(X<Y)=\frac{3}{4}$

■

② Κατανομή αθροίσματος 2 τ.μ.

• Έστω (X,Y) τ.δ. με σ.π/σ.π.π $f_{X,Y}(x,y)$

Αν $Z = X+Y$, τότε η Z είναι διακριτή/απόλυτα συνεχής και η σ.π./σ.π.π. δίνεται από τον τύπο:

$$f_Z(z)=\begin{cases} \sum\limits_{x} f_{X,Y}(x,z-x) = \sum\limits_{y} f_{X,Y}(z-y,y) & \text{, αν } (X,Y) \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(z-y,y)\,dy & \text{, αν } (X,Y) \text{ είναι απόλυτα συνεχής} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις

Αν χρειαστεί με δεσμευμένες σ.π./σ.π.π, τότε π.χ

$$f_Z(z)=\sum_{x} f_X(x) f_{Y|X}(z-x|x) \text{ κτλ}$$

* Ειδική περίπτωση *

Αν $X \perp\!\!\!\perp Y$, τότε:

$$f_Z(z)=\begin{cases} \sum\limits_{x} f_X(x) f_Y(z-x) = \sum\limits_{y} f_X(z-y) f_Y(y) & \text{, αν } (X,Y) \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy & \text{, αν } (X,Y) \text{ απόλυτα συνεχής} \end{cases}$$

③ Παραδείγματα με απόλυτα συνεχείς

(i) Έστω $X, Y \sim Unif([0,1])$ με $X \perp Y$
Αν $Z = X+Y$, να βρεθεί η σ.π.π. $f_Z(z)$.

$0 \leq X \leq 1$ και $0 \leq Y \leq 1 \Rightarrow 0 \leq Z = X+Y \leq 2$

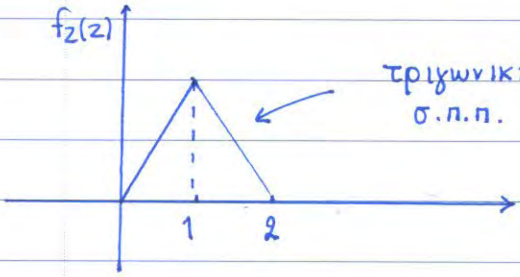
Αν $z: 0 \leq z \leq 2$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \quad , \quad f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \ \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Περιορισμοί : $\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z-x \leq 1 \end{array} \Big| \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ z-1 \leq x \leq z \end{array} \Big| \Leftrightarrow \begin{array}{c} \max(0, z-1) \\ \leq \\ x \\ \leq \\ \min(1,z) \end{array}$

$$f_Z(z) = \int_{\max(0,z-1)}^{\min(1,z)} 1 \, dx = \min(1,z) - \max(0, z-1)$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & , \ 0 \leq z \leq 1 \\ 1-(z-1) = 2-z & , \ 1 < z \leq 2 \\ 0 & , \ \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



ii) Έστω $X \sim Gamma(\alpha,\theta)$, $Y \sim Gamma(\beta,\theta)$ και $X \perp\!\!\!\perp Y$

Αν $Z = X+Y$ να βρεθεί η σ.π.π. $f_Z(z)$.

Λύση.

$X>0$, $Y>0 \Rightarrow Z = X+Y > 0$.

Για $z>0$,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx.$$

Όμως $f_X(x)>0 \iff x>0$ και $f_Y(z-x)>0 \iff z-x>0$.

Τελικά, $\left.\begin{matrix} x>0 \\ z-x>0 \end{matrix}\right| \iff 0<x<z$ και έτσι έχουμε.

Άρα για $z>0$

$$\cdot\ f_Z(z) = \int_0^z \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x} \cdot \frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-\theta(z-x)}\,dx =$$

$$= \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot e^{-\theta z} \int_0^z x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1}\,dx \overset{u=\frac{x}{z}}{=} \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-\theta z} \int_0^1 (uz)^{\alpha-1}(z-zu)^{\beta-1} z\,du$$

$$= \underbrace{\frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}}_{\text{σταθερά}} \underbrace{\boxed{z^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta z}}}_{g(z)} \cdot \underbrace{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du}_{\text{σταθ.}} =$$

$$= C \cdot z^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta z}$$

Ξέρω ότι $\delta \cdot g(z)$ είναι σ.π.π. της $Gamma(\alpha+\beta,\theta)$

$$\delta = \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \Big\| \Longrightarrow \quad Z \sim Gamma(\alpha+\beta,\theta) \quad \boxed{C=\delta}$$

④ Γνωστές Κατανομές αθροισμάτων
2 - ανεξ. τ.μ.

Αν X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Γενικευση: • $X \sim Be(p)$, $Y \sim Be(p) \xRightarrow{X \perp\!\!\!\perp Y} X+Y \sim Bin(2,p)$

• $X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(m,p) \xRightarrow{X \perp\!\!\!\perp Y} X+Y \sim Bin(n+m,p)$

Γενικευση • $X \sim Geo(p)$, $Y \sim Geo(p) \xRightarrow{X \perp\!\!\!\perp Y} X+Y \sim NegBin(2,p)$

• $X \sim NegBin(n,p)$, $Y \sim NegBin(m,p) \xRightarrow{X \perp\!\!\!\perp Y} X+Y \sim NegBin(n+m,p)$

• $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu) \xRightarrow{X \perp\!\!\!\perp Y} X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$

Γενικευση • $X \sim Exp(\theta)$, $Y \sim Exp(\theta) \xRightarrow{X \perp\!\!\!\perp Y} X+Y \sim Gamma(2,\theta) \equiv Erlang(2,\theta)$

• $X \sim Gamma(\alpha,\theta)$, $Y \sim Gamma(\beta,\theta) \xRightarrow{X \perp\!\!\!\perp Y} X+Y \sim Gamma(\alpha+\beta,\theta)$

• $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \xRightarrow{X \perp\!\!\!\perp Y} X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

→ $[Bin(1,p) \equiv Be(p)$, $NegBin(1,p) \equiv Geo(p)$, $Gamma(1,\theta) \equiv Erlang(1,\theta) \equiv Exp(\theta)]$

⑤ Πολυδιάστατες τ.μ. $(n \geq 2)$

Ορισμός: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χ.π. Μια συνάρτηση $(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται n-διάστατη τ.μ. ή τυχαίο διάνυσμα διάστασης n αν

$$\left\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\right\} \underset{=}{\overset{\text{ορσ.}}{=}} \left\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\right\} \in \mathcal{A}$$

$$\forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

- Όπως για $n=2$, παρόμοια ορίζουμε:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\left(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\right)$$

$\left(\forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\right.$ (από κοινού συναρτ. κατανομής της $\left.(X_1, X_2, \dots, X_n)\right)$

$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ τη σ.π. / σ.π.π. αν $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι διακριτή / απόλυτα συνεχής.

Ορισμός: Οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες $\Longleftrightarrow$

$$P\left(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n\right) =$$

$$= P(X_1 \in A_1)\, P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n), \quad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Κριτήριο Ανεξαρτησίας

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες $\Leftrightarrow F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$, $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$ (με πιθ. 1)

⑥ Επιπλέον Ιδιότητες της Μέσης Τιμής

Αν (X, Y) τ.δ. και $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τότε (LOTUS)

$$E\left[g(X, Y)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} \sum\limits_{y} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) & , \text{αν } (X, Y) \text{ διακριτή} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy & , \text{αν } (X, Y) \text{ απόλυτα συνεχής} \end{cases}$$

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Γενίκευση

- $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$

- $E(XY) \neq E(X) E(Y)$ γενικά

Γενίκευση

- $E\left(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i\right) \neq \prod\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$

- Αν $X \perp Y$, τότε $E(XY) = E(X) E(Y)$ (δεν ισχύει το αντίστροφο)

Γενίκευση

- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες $E\left(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$ (δεν ισχύει το αντίστροφο)

Συνέπειες για τη Διασπορά

Αν $X \perp\!\!\!\perp Y$, τότε $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Γενικά: $Var(X+Y) \neq Var(X) + Var(Y)$

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

ενώ γενικά η σχέση (χωρίς ανεξαρτησία) δεν ισχύει.

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

- Κάποιες Αποδείξεις ... -

① $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

Αρκεί για διακριτές

$$E(\underbrace{XY}_{g(X,Y)}) = \sum_{x}\sum_{y} xy\, f_{X,Y}(x,y) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_{x}\sum_{y} xy\, f_X(x)\, f_Y(y) =$$

$$= \left(\sum_{x} x f_X(x)\right)\left(\sum_{y} y f_Y(y)\right) = E(X)E(Y)$$

② $X \perp\!\!\!\perp Y$, $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

$$Var(X+Y) = E\left[(X+Y)^2\right] - \left(\underbrace{E(X+Y)}_{E(X)+E(Y)}\right)^2 = E(X^2+2XY+Y^2) - \left(E(X)+E(Y)\right)^2$$

$$= E(X^2) - E^2(X) + E(Y^2) - E^2(Y)$$

$$+ 2E(XY) - 2E(X)E(Y)$$

$$\overset{X,Y \text{ ανεξ.}}{=} Var(X) + Var(Y) + \cancel{2E(X)E(Y)} - \cancel{2E(X)E(Y)}$$

Μάθημα 23ο - 12/12/2014

① Παράδειγμα - Matching Problem

- n άτομα βάζουν τα καπέλα τους στο κέντρο και διαλέγουν στην τύχη ένα.

Έστω $X = \#$ ατόμων που βρίσκουν το καπέλο τους.
$E(X) = ?$

Έστω A_i : "το άτομο i βρίσκει το καπέλο του".

Τότε $X = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(1_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ $\quad [E(1_A) = P(A)]$

$P(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, $\Omega = \{$δυνατών τοποθετήσεων των καπέλων$\}$

*Υπονοείται χωρίς επανάθεση (Το ίδιο βγαίνει και ΜΕ ΕΠΑΝΑΘΕΣΗ)

1 επιλογή καπέλων για τα n-άτομα → 1 μετάθεση του $\{1, 2, \ldots, n\}$

Τελικά : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$. ■

② Παράδειγμα - Coupon Collector Problem

- Υπάρχουν n-τύποι κουπονιών. Ένας πελάτης αγοράζει προϊόντα και κάθε προϊόν φέρει το κουπόνι i με πιθανότητα $\frac{1}{n}$.

Έστω X = # προϊόντων που αγοράζει συνολικά μέχρι να μαζέψει όλα τα κουπόνια.

$E(X) = ?$

~∘~

Έστω X_i = # προϊόντων που αγοράζει συνολικά από τη στιγμή που βρήκε το $(i-1)$ διαφορετικό κουπόνι, μέχρι το i (διαφορετικό).

Τότε : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (1)

$X_1 = 1$, (με πιθ. 1)

X_2 = # δοκιμών, σε ανεξ. δοκιμές Bernoulli $\left(p = \frac{n-1}{n}\right)$ μέχρι 1η επιτυχία

X_3 = # -״- -״- Bernoulli μεταξύ 1ης κ. 2ης επιτυχίας $\left(p = \frac{n-2}{n}\right)$

= " ooo " $Be\left(\frac{n-2}{n}\right)$ μέχρι 1η επιτυχία.

$X_1 = 1$ (με πιθ. 1)

$X_i \overset{d}{=}$ # δοκιμών μέχρι 1η επιτυχία σε ανεξ. δοκιμές Bernoulli $\left(p = \frac{n-i+1}{n}\right)$

(ισόνομη)

$\sim Geom\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} =$$

$$= n\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \underset{\text{για μεγάλο } n}{\cong} \boxed{n \cdot \log n} \quad \blacksquare$$

③ Εφαρμογές - Εύρεση Μέσης Τιμής και Διασποράς (γνωστών) κατανομών

• Έστω $X \sim Bin(n,p)$ (# επιτυχιών σε n-ανεξ. δοκιμές $Be(p)$)

Τότε, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, όπου $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξ. $Be(p)$.

*(ισχύει και το αντίστροφο)

$$E(X) \overset{\text{ΠΑΝΤΑ}}{=} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

• Έστω $X \sim NegBin(n,p)$ (# δοκιμών μέχρι n^{η} επιτυχία)

Τότε, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, όπου $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξ. $Geom(p)$

*(ισχύει και το αντίστροφο)

(X_i : # δοκιμών μεταξύ της $(i-1)$ και της (i-επιτυχίας) $\underline{\overset{d}{=}}$

δοκιμών μέχρι 1^{η} επιτυχία $\sim Geo(p)$ (ανεξ. μεταξύ τους))

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} = \frac{n}{p}$$

$$Var(x) \overset{\text{ανεξ}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-p}{p^2} = \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

*(Παρόμοια αντιμετωπίζεται η παραλλαγή $NegBin(n,p)$

→ # αποτυχιών μέχρι n^{η} επιτυχία.

• Έστω $X \sim Erlang(n,\theta) \equiv Gamma(n,\theta)$

Τότε μπορεί να δειχθεί ότι $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. $Exp(\theta)$

*(Ισχύει και το αντίστροφο)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} = \frac{n}{\theta}$$

$$Var(x) \overset{\text{ανεξ}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}$$

• Μέση τιμή και Διασπορά Γεωμετρικής με ανάλυση 1ου βήματος.

• Έστω $N \sim Geo(p)$, όπου N = # δοκιμών μέχρι 1^{η} επιτυχία (σε ανεξ. δοκιμές $Be(p)$)

(N, X_1) είναι διακριτή τ.μ. και η N εξαρτάται από τη X_1.

$E(N) = ?$, $Var(N) = ?$

$$E(N) = E\Big[\underbrace{E(N|X_1)}_{g(X_1)}\Big] = \sum_{x=0}^{1} P(X_1 = x) E(N | X_1 = x) =$$

$$= P(X_1 = 0) E(N | X_1 = 0) + P(X_1 = 1) E(N | X_1 = 1) \quad (1)$$

$$\Big[N \mid X_1 = 0\Big] = 1 + \#\text{δοκιμών } Be(p) \text{ μέχρι } 1^{\eta} \text{ επιτυχία} \begin{pmatrix} x_2, & x_3, & x_4 \\ \| & \| & \| \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix}$$

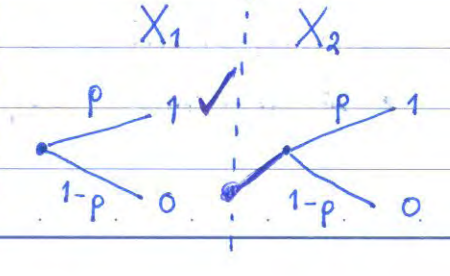
$1 + N'$, N' (#δοκ. $Be(p)$ μέχρι 1^{η} επιτυχία)

$1 + N' \overset{d}{=} 1 + N$

$$\Big[N \mid X_1 = 1\Big] = 1$$

Άρα: $\Big[N \mid X_1 = 0\Big] \overset{d}{=} 1 + N$

$\Big[N \mid X_1 = 1\Big] = 1$ $\quad (1)^{*}$



Από σχέση (1) : $E(N) = (1-p)E(1+N) + p.1 =$

$$= 1-p+p+E(N) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pE(N) = 1 \Rightarrow \boxed{E(N) = \frac{1}{p}}$$

$$\left(\hookrightarrow \boxed{\begin{array}{l} N|X_1=0 \overset{d}{=} 1+N \\ N|X_1=1 = 1 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} E(N|X_1=0) = 1+E(N) \\ E(N|X_1=1) = 1 \end{array}} \right)$$

* *Another Way...*

ενοποιούμε

$$\boxed{E(N|X_1) = 1 + E(N)(1-X_1)} \quad (= g(X_1))$$

$$E(N) = E\Big(\underbrace{E(N|X_1)}_{g(X_1)}\Big) = E\Big(1 + E(N)(1-X_1)\Big) =$$

$$= 1 + E(N)[1-E(X_1)] = 1 + E(N) - pE(N) =$$

$$= 1 + (1-p)E(N) \Rightarrow E(N) = \frac{1}{p}$$

Κλειδί: $\boxed{\begin{array}{l} N|X_1=0 \overset{d}{=} 1+N \\ N|X_1=1 \overset{d}{=} 1 \end{array}}$ $(*)$

Διασπορά : (α' τρόπος)

$$\boxed{Var(N) = E(Var(N|X_1)) + Var(E(N|X_1))} \quad (2)$$

έχουμε βρει: $E(N|X_1) = 1+E(N)(1-X_1)$

$$\left.\begin{array}{l} Var(N|X_1=0) \overset{(*)}{=} Var(1+N) = Var(N) \\ Var(N|X_1=1) \overset{(*)}{=} 0 \end{array}\right\| \overset{\text{ενοποίηση}}{\Rightarrow} \boxed{Var(N|X_1) = Var(N)(1-X_1)}$$

Άρα $Var(N) \overset{(2)+\text{παραπάνω}}{=} E\Big(Var(N)(1-X_1)\Big) + Var\Big(1 + E(N)(1-X_1)\Big) =$

$$= Var(N)(1-p) + E^2(N)\,Var(X_1) = (1-p)Var(N) + \frac{1}{p^2}p(1-p). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Var(N) = \frac{1-p}{p^2}$$

- Τι δεν μπορούμε να κάνουμε?

$$Var(N) = P(X_1=0)\cancel{Var(N|X_1=0)} + P(X_1=1)Var(N|X_1=1)$$

$$\Vert$$

$$E(Var(N|X_1)) \quad \left(+ \ \text{Το} \ \overset{\text{λείπει}}{Var}(E(\ )) \right)$$

β' τρόπος

$$Var(N) = E(N^2) - \left. E^2(N) \right) \checkmark \text{ το βρήκαμε}$$

$$E(N^2) = E\left[E(N^2|X_1)\right]$$

$$\left. \begin{array}{l} N|X_1=0 \overset{d}{=} 1+N \\ N|X_1=1 \overset{d}{=} 1 \end{array} \right| \Longrightarrow E(N^2|X_1=0) = E\left[(1+N)^2\right] = 1 + 2E(N) + E(N^2)$$

$$E(N^2|X_1=1) = 1 \quad ■ \qquad \Rightarrow \dots$$

④ Αθροίσματα με τυχαίο πλήθος προσθετέων

- Έστω $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ ή $\sum_{i=0}^{N} X_i$ με N διακριτή τ.μ. με ακέραιες τιμές.

π.χ. X = κέρδος σε 1 μέρα λειτουργίας ενός καταστήματος (N = # αφίξεων πελατών, X_i = κέρδος από τον i-πελάτη)

π.χ. X = # χελωνάκια που φτάνουν στη θάλασσα (σε περίοδο γεννήσεων)
(N = # γεννήσεων, $X_i = 1$ ("το i-χελωνάκι φτάνει στη θάλασσα"))

- Τι δεν ισχύει?

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{σταθερά}}}{E(X)} \overset{\checkmark}{=} E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) \cancel{=} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{τυχ. μεταβλητή}}}{\sum_{i=1}^{N} E(X_i)}$$

Όμως: Κατ' αρχήν : $E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E\left(\underbrace{E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right)}_{g(N)}\right) =$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)\, E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)\, E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| N=n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) \cdot \sum_{i=1}^{n} E(X_i | N=n)$$

Ειδικές περιπτώσεις

Ας υποθέσουμε ότι $N \perp\!\!\!\perp \{X_n\}_{n \geq 1}$, $E(X_i) = E(X_1)$, $\forall i \geq 1$.

α' τρόπος

$$E(X) = E\left[E(X|N)\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right]\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)\, E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| N=n\right) =$$

$$\overset{\text{ανεξ.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) \cdot \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \overset{E(X_1)=E(X_2)=\dots}{=\!=} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot P(N=n)\right) \cdot E(X) =$$

$$= \boxed{E(N)\, E(X_1)}$$

β' τρόπος

$$X | N=n = \sum_{i=1}^{N} X_i \,\Big|\, N=n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1$$

$$\boxed{E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right) = n \cdot E(X_1)}$$

αντικαθ. με τ.μ.

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right) = N \cdot E(X_1)$$

$$E(X) = E\left(E(X|N)\right) = E\left(N\, E(X_1)\right) = \boxed{E(N) \cdot E(X_1)}$$

διασπορά — Αν επιπλέον $\{N, X_1, X_2, \dots\}$ ανεξ. τ.μ. και $Var(X_i) = Var(X_1)$, $\forall i \geq 1$

$$Var(X|N=n) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n \cdot Var(X_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Var(x|N) = N \cdot Var(X_1)$$ (συνεχίζεται πίσω) ⇒

$$\mathrm{Var}(x) = E\big(\mathrm{Var}(x|N)\big) + \mathrm{Var}\big[E(X|N)\big] =$$

$$= E\big(\underbrace{\mathrm{Var}(X_1)}_{\text{σταθερά}} N\big) + \mathrm{Var}\big[\underbrace{E(X_1)}_{\text{σταθ.}} N\big] = \boxed{\mathrm{Var}(X_1)\, E(N) + E^2(X_1)\, \mathrm{Var}(N)}$$

• Συνδιακυμάνσεις 2 τ.μ. •

Μέτρο μεταβλητότητας μίας τ.μ. → $\mathrm{Var}(X) = E\left[\left(X - \overset{\to E(X)}{\mu_X}\right)^2\right]$
(διακύμανση)

Μέτρο συμμεταβλητότητας 2 τ.μ. → $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$
(συνδιακύμανση)

Ορισμός : Αν $\mathrm{Cov}(X,Y) > 0$, τότε οι X και Y είναι θετικά συσχετισμένες. $\left(\begin{matrix} X\nearrow, & Y\nearrow \\ X\searrow, & Y\searrow \end{matrix}\right)$

Αν $\mathrm{Cov}(X,Y) < 0$, τότε οι X και Y είναι αρνητικά συσχετισμένες. $\left(\begin{matrix} X\nearrow, & Y\searrow \\ X\searrow, & Y\nearrow \end{matrix}\right)$

Αν $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, τότε οι X και Y λέγονται ασυσχέτιστες.

Ιδιότητες

- $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- Αν X και Y ανεξάρτητες ⇒ X και Y ασυσχέτιστες $(\mathrm{Cov}(X,Y)=0)$
- Αν X και Y ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ X και Y ανεξάρτητες
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$ (Συμμετρικότητα)
- $\mathrm{Cov}(aX+b,\ cY+d) = ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)$
- $\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i,\ \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$

Συνέπειες για τη Διασπορά

- $Var(X) = Cov(X, X)$
- $X \perp\!\!\!\perp X \Rightarrow X = c'$, με πιθ. 1
- $Var(aX+b) = a^2 \cdot Var(X)$
- $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{1 \le i < j \le n} Cov(X_i, X_j)$

Ειδική περίπτωση: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$

- Αν $X_1, X_2, \dots, X_i$ είναι ανεξάρτητες $\Rightarrow Var(X_1+X_2+\dots+X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

Κάποιες αποδείξεις...

- $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = E\left(XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y\right) =$$
$$= E(XY) - \mu_X\mu_Y - \mu_Y\mu_X + \mu_X\mu_Y = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- X, Y ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ X, Y ανεξάρτητες

Πάρτε X με συμμετρική κατανομή $\left(f_X(x) = f_X(-x)\right)$

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\overset{\text{περιτ.}}{x^k}\ \overset{\text{άρτια}}{f_X(x)}}_{\text{περιττή συναρτ.}} dx = 0 \quad , k = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{όταν υπάρχουν})$$

Πάρτε $Y = X^2$

$$Cov(X,Y) = Cov(X, X^2) = \underset{0}{\underset{\parallel}{E(X^3)}} - \underset{0}{\underset{\parallel}{E(X)}}\,E(X^2) = 0,$$ Άρα X και $Y = X^2$ ασυσχέτιστες.

Όμως X και X^2 είναι γενικά εξαρτημένες $\left(X^2 = g(X)\right)$

Μάθημα 24ο - 13/12/2014

① Συντελεστής (Γραμμικής) Συσχέτισης

Ορισμός: Έστω X και Y 2 τ.μ. με $Cov(X,Y) \equiv \sigma_{X,Y}$.

$\sqrt{Var(x)} \equiv \sigma_X$ και $\sqrt{Var(Y)} \equiv \sigma_Y$. Τότε ορίζουμε το συντελεστή (γραμμικής) συσχέτισης $\rho(X,Y)$ των X και Y.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var X} \cdot \sqrt{Var Y}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

(ορίζεται για ΜΗ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΕΣ τ.μ.)

Παρατηρήσεις

1. Όπως θα δούμε και παρακάτω, ο σ.γ.σ. $\rho(X,Y)$ είναι ένα μέτρο γραμμικής εξάρτησης των τ.μ. X και Y.

2. $Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$ (μέση τιμή γινομένου των αντίστοιχων κεντροποιημένων τ.μ.)

$$\Downarrow$$

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = E\left[\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \cdot \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right] =$$

(μέση τιμή του γινομένου των αντίστοιχων τυποποιημένων τ.μ.)

$$= E[Z_X \cdot Z_Y] = Cov(Z_X, Z_Y) = \rho(Z_X, Z_Y)$$

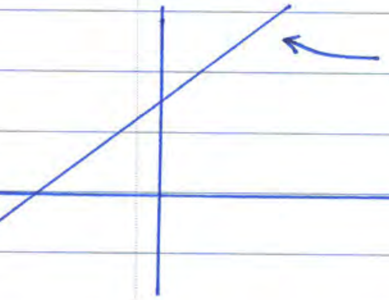
Ιδιότητες

- $\rho(\alpha X + c, bY + d) = \rho(\alpha X, bY) = \pm \rho(X,Y) \quad (ab \gtrless 0)$
  [δεν επηρεάζεται από αλλαγή στις μονάδες μέτρησης $\alpha, b > 0$]

- $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1 \iff |\rho(X,Y)| \leq 1$

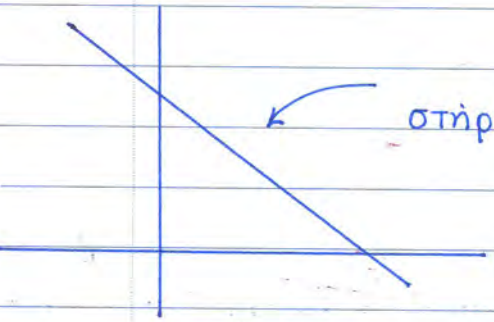
- $\rho(X,Y) = 0 \iff Cov(X,Y) = 0 \iff X, Y$ ασυσχέτιστες.

- $\rho(X,Y) = 1 \iff Y = \alpha X + b$, με $\alpha > 0$ (με πιθ. 1)



στήριγμα της κατανομής της (X,Y) είναι σε ευθεία με θετική κλίση

- $\rho(X,Y) = -1 \iff Y = \alpha X + b$, με $\alpha < 0$ (με πιθ. 1)



στήριγμα της κατανομής της (X,Y) είναι σε ευθεία με αρνητική κλίση.

→ Στις ακραίες τιμές της $\rho(X,Y)$, δηλ. $\{-1,1\}$ έχουμε πλήρη γραμμική εξάρτηση.

- $\rho(X+Y, Z) \neq \rho(X,Z) + \rho(Y,Z)$ (γενικά) ενώ

$Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

Πόρισμα : $|Cov(X,Y)| \le Var(X)^{1/2} \cdot Var(Y)^{1/2}$ $\quad (|\sigma_{X,Y}| \le \sigma_X \sigma_Y)$

Παρατήρηση : Η παραπάνω ανισότητα είναι ειδική περίπτωση της Cauchy-Schwarz για τ.μ.

$$\boxed{|\mathcal{E}(XY)| \le (\mathcal{E}X^2)^{1/2} \cdot (\mathcal{E}Y^2)^{1/2}}$$

Αν ισχύει αυτή, θέτουμε όπου $X \to X-\mu_X$ και $Y \to Y-\mu_Y$ οπότε:

$$|\mathcal{E}((X-\mu_X)(Y-\mu_X))| \le [\mathcal{E}(X-\mu_X)^2]^{1/2} \cdot [\mathcal{E}(Y-\mu_Y)^2]^{1/2}$$

$$\Downarrow$$

$$|Cov(X,Y)| \le (Var X)^{1/2} (Var Y)^{1/2}$$

Απόδειξη

- $\rho(aX+c, bY+d) = \dfrac{Cov(aX+c, bY+d)}{\sqrt{Var(aX+c) \cdot Var(bY+d)}} = \dfrac{Cov(aX, bY)}{\sqrt{Var(aX) \cdot Var(bY)}} =$

$$= \frac{ab\, Cov(X,Y)}{|ab| \sqrt{Var(X) Var(Y)}} = \pm \rho(X,Y) \qquad (ab \gtrless 0)$$

- $|\rho(X,Y)| \le 1$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ g(\lambda) = Var(\lambda Z_X + Z_Y) = \lambda^2 \cdot \overbrace{Var(Z_X)}^{\overset{1}{\shortparallel}} + 2\lambda \underbrace{Cov(Z_X, Z_Y)}_{\rho(X,Y)} + \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{Var}(Z_Y)$

$$= \lambda^2 + 2\rho(X,Y)\lambda + 1 \ge 0$$

Πρέπει $\Delta \le 0 \Rightarrow \Delta = 4\rho^2(X,Y) - 4 \le 0 \Rightarrow \rho^2(X,Y) \le 1 \Rightarrow |\rho(X,Y)| \le 1$

Απόδειξη πορίσματος:

$$|\rho(X,Y)| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX}\sqrt{VarY}} \right| \leq 1 \Rightarrow |Cov(X,Y)| \leq (VarX)^{1/2}(VarY)^{1/2}$$

Παρατήρηση

1. Αν $g(\lambda) = Var(\lambda X + Y)$, καταλήγω και πάλι στο ζητούμενο. (στην ανισότητα του πορίσματος)

2. Αν $g(\lambda) = \mathcal{E}((\lambda X + Y)^2) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (υπόδειξη για απόδειξη της Cauchy-Schwarz)
$\Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow \ldots$

---

3. $g(\lambda) = \lambda^2 + 2\rho(X,Y)\lambda + 1$ (απόδειξη για ακραίες τιμές)

($\Rightarrow$) Αν $\rho(X,Y) = 1 \Rightarrow g(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \Rightarrow g(-1) = 0$

αφού $g(\lambda) = Var(\lambda Z_x + Z_y)$

Αλλά! $g(-1) = Var(-Z_x + Z_y) = 0 \Rightarrow -Z_x + Z_y = c$: σταθερά (με πιθ. 1)

$$\Rightarrow -\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} + \frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} = c \quad (\text{με πιθ. } 1)$$

$\Rightarrow Y = \alpha X + b$ (με πιθ. 1) και $\alpha > 0$

Επιπλέον, (αν $\rho(X,Y) = -1 \Rightarrow g(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$)
τότε $0 = g(+1) = Var(Z_x + Z_y) \Rightarrow Z_x + Z_y = c$ (με πιθ. 1)
$\Rightarrow Y = \alpha X + b$, $\alpha < 0$ (με πιθ. 1)

($\Leftarrow$) $Y = \alpha X + b$ (με πιθ. 1)

$$\rho(X,Y) = \rho(X, \alpha X + b) = \begin{cases} \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\rho(X,X)}} & ,\alpha > 0 \\ \underset{-1}{\underset{\shortparallel}{-\rho(X,X)}} & ,\alpha < 0 \end{cases}$$

Ασκήσεις

$\boxed{1}$ i) Νδο αν X και Y τ.μ. και $Y=c$ (με πιθ. 1) τότε $X \perp\!\!\!\perp Y$

ii) Αν $X = \begin{cases} c \ , \text{με πιθ. } p \\ -c \ , \text{με πιθ. } 1-p \end{cases} \quad 0 \le p \le 1 \implies X \perp\!\!\!\perp X^2$

Λύση

i) $Y=c$, με πιθ. 1 τότε $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<c \\ 1, & y \ge c \end{cases} \left(= 1_{[c,+\infty)}(y) \right)$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y) \quad , \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \begin{cases} 0 & ,y<c \\ P(X \le x) & ,y \ge c \end{cases} =$$

$$= P(X \le x)\cdot 1_{[c,+\infty)}(y) = P(X \le x)P(Y \le y) = F_X(x)\cdot F_Y(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

ii) $X^2 = c^2$ με πιθ. 1 (εκφυλισμένη τ.μ.)

$$\xRightarrow[(i)]{} X \perp\!\!\!\perp X^2$$

$\boxed{2}$ Ένα κάλπικο νόμισμα ρίχνεται 3 φορές (ανεξάρτητα) και έστω $p = \frac{2}{3}$ η πιθανότητα να φέρουμε κεφαλή σε κάθε ρίψη.

Έστω X = # κεφαλών στην 1η ρίψη
Y = # κεφαλών συνολικά ϗ'στις 3 ρίψεις.

Να βρεθούν : (i) $f_{X,Y}(x,y)$ (iii) $f_{X|Y}(x|y)$
(ii) $F_{X,Y}(x,y)$ (iv) $f_{Y|X}(x|y)$

Λύση

- $Y = X + Z$, $Z = \#$ κεφαλών συνολικά στην $2^{η}$ και $3^{η}$ ρίψη ,

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(X=x, X+Z=y) = P(X=x, Z=y-x) \quad (1)$$

$Z = X_2 + X_3$, όπου X_2, X_3 ανεξ. $Be\left(p=\frac{2}{3}\right)$

$Z \sim Bin\left(2, \frac{2}{3}\right)$ (ως άθροισμα ανεξ. $Be\left(\frac{2}{3}\right)$)

X και Y είναι ανεξάρτητες

[$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ακολουθ. ανεξ. τ.μ.
$(X_1, X_2, \dots, X_k) \perp\!\!\!\perp (X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_n)$
$g(X_1, X_2, \dots, X_k) \perp\!\!\!\perp h(X_{k+1}, \dots, X_n)$

2 διοτ. $X \perp\!\!\!\perp Y$ τότε
$g(x) \perp\!\!\!\perp h(y)$]

$$(1) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} P(X=x)P(Z=y-x)$$

x \ y	0	1	2	3	$f_X(x)$
0	1/27	4/27	4/27	0	9/27
1	0	2/27	8/27	8/27	18/27
$f_Y(y)$	1/27	6/27	12/27	8/27	1

$P(X=0) \overset{X \sim Be(\frac{2}{3})}{=} \frac{1}{3}$, $P(X=1) = \frac{2}{3}$

$P(Z=0) \overset{Z \sim Bin(2,\frac{2}{3})}{=} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

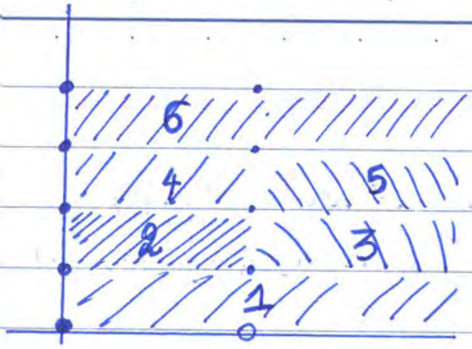
$P(Z=1) = \binom{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

$P(Z=2) = \frac{4}{9}$

$f_{X,Y}(0,0) = P(X=0)P(Z=0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$

$f_{X,Y}(0,1) = P(X=0) \cdot P(Z=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$

$f_{X,Y}(1,1) = P(X=1) \cdot P(Z=0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$ ...



$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 , & x<0 \text{ ή } y>0 \\ 1/27 , & x \geq 0 , \ 0 \leq y < 1 \\ 5/27 , & 0 \leq x < 1 , \ 1 \leq y < 2 \\ 7/27 , & x \geq 1 , \ 1 \leq y < 2 \\ 9/27 , & 0 \leq x < 1 , \ 2 \leq y \\ 19/27 , & x \geq 1 , \ 2 \leq y < 3 \\ 1 , & x \geq 0 , \ y \geq 3 \end{cases}$$

(iii) $f_{X|Y}(x|y)$, $f_Y(y) > 0$ (iv)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} , \qquad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

- ο πίνακας της $f_{X|Y}(x|y)$ (κάθε στήλη αντιστοιχεί σε συνάρτ. πιθανότ.).

x \ y	0	1	2	3
0	1	2/3	1/3	0
1	0	1/3	2/3	1

$f_{X|Y}(x|0) \cdot f_{X|Y}(x|1) \ldots$

- ο πίνακας της $f_{Y|X}(y|x)$ (κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε συνάρτ. πιθανότητας)

x \ y	0	1	2	3	
0	1/9	4/9	4/9	0	$f_{Y\|X}(y\|0)$
1	0	1/9	4/9	4/9	$f_{Y\|X}(y\|1)$

■

3 Το πλήθος των αυγών που γεννά ένα έντομο ακολουθεί Poisson(λ), $\lambda > 0$. Κάθε ένα απ' τα αυγά επιβιώνει (ανεξάρτητα απ' τα υπόλοιπα) με πιθανότητα p $(0<p<1)$

i) Ποια είναι η πιθανότητα να επιβιώσουν ακριβώς S-αυγά, $S = 0, 1, 2, \ldots$

ii) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των αυγών που θα επιβιώσουν;

Λύση

Έστω $N = \#$ γεννήσεων

$A_i =$ "το ενδεχόμενο το αυγό -i- να επιβιώσει"

$X_i = 1_{A_i}$. Τότε $X_i \sim Be(p)$, $p = P(A)$

$\{A_i\}_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξ. ενδεχ. $\Rightarrow$

$\{X_i\}_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξ. τ.μ.

$X = \#$ αυγών που επιβιώνουν συνολικά

i) $P(X=s)$, $s=0,1,2,\ldots$

$$X=\begin{cases}0 & , N=0\\ \sum_{i=1}^{n} X_i & , N=n\end{cases}$$

ή

(καταχρηστικά) $\sum_{i=1}^{N} (X_i)$ (όπου αν $N=0$ $\varnothing$ άθροισμα)

πιο συχνά χρησιμοποιούμενο

ή

$\sum_{i=0}^{N} X_i$, $X_0 = 0$

ή $[X \mid N=0] = 0$

$[X \mid N=n] = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$P(X=s) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)\,P(X=s \mid N=n)$$ (Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας)

$$\left\{\begin{array}{l} * \quad N\sim \text{Poisson}(\lambda),\ P(N=n)=e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^n}{n!},\ n=0,1,\dots \\ [x|N=n]=\sum_{i=1}^{n}x_i \sim \text{Bin}(n,p) \Rightarrow P(X=0|N=n)=(1-p)^n \quad n=1,2,\dots \end{array}\right\}$$

$$P(X=s)=\mathcal{E}\left(1_{\{X=s\}}\right)=\mathcal{E}\Big(\underbrace{\mathcal{E}(1_{\{X=s\}}|N)}_{g(N)}\Big)$$

- $\underline{s=0}$, $p(X=0)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(N=0)\,P(X=0|N=n)=P(N=0)\cdot P(X=0|N=0)+$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}P(N=n)\cdot P(X=0|N=n)=P(N=0)+\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}(1-p)^n=$$

$$=e^{-\lambda}+e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(1-p)^n=e^{-\lambda}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}\right)=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p}$$

- $\overset{s>0}{P(X=s)}=\sum_{n=0}^{+\infty}P(N=n)\cdot P(X=s|N=n)=\sum_{n=s}^{+\infty}P(N=n)P(X=s|N=n)=$

$$=\sum_{n=s}^{+\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^s\cdot p^s}{s!}\sum_{n=s}\frac{\lambda^{n-s}}{(n-s)!}(1-p)^{n-s}=$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^s}{s!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda s)^s e^{\lambda(1-p)}}{s!}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda s)^s}{s!}$$

Τελικά, $P(X=s)=e^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^s}{s!}$, $s=0,1,2,\dots$

(Παρατηρούμε οτι θα
μπορούσαμε να ενοποιήσουμε
$s=0$, $s>0$, σε ενιαία
σχέση με τό Θ.Ο.Π
να εφαρμόζεται για όλες τις
τιμές του s)

$\rightsquigarrow$ Άρα $X\sim \text{Poisson}(\lambda p)$

(ii) $\underline{\mathcal{E}(x)=\lambda p}$ (απο το γεγονός ότι $X\sim \text{Poisson}(\lambda)$). Άλλος τρόπος:

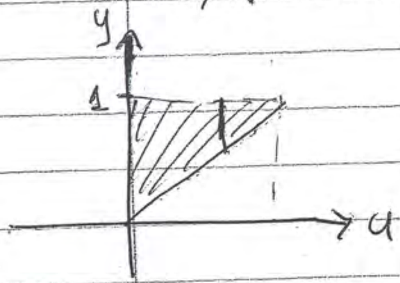
$\mathcal{E}(x)=\mathcal{E}[\mathcal{E}(X|N)]$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{E}[X|N=0]=0\\ \mathcal{E}(X|N=0)=np\end{array}\right| \Rightarrow \mathcal{E}(X|N)=Np \rightarrow E(X)=E(E(x|N)]=p\,E(N)=p\lambda$$

4] Ένας αριθμός U επιλέγεται τυχαία απ'το διάστημα $(0,1)$.
Αν $U=u$, ένας δεύτερος αριθμός Y επιλέγεται τυχαία από το διάστημα $(u,1)$.
Να βρεθεί η σ.π.π. της Y.

Λύση

(U,Y) δισδιάστατη τ.μ. και $f_X(y)$ είναι η περιθώρια σ.π.π.



Για $0 \leq y \leq 1$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,Y}(u,y)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(u) f_{Y|U}(y|u)\,du \quad (1)$$

- $U \sim Unif(0,1)$

$$f_U(u) = \begin{cases} 1 & , 0<u<1 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$$

- $[Y|U=u] \sim Unif(u,1)$

$$f_{Y|U}(y|u) = \begin{cases} \frac{1}{1-u} & , u<y<1 \\ 0 & , \text{διαφ.} \end{cases}$$

Πρέπει $f_U(u) > 0$ $f_{Y|U}(y|u) > 0 \iff$

$$\left.\begin{matrix} 0<u<1 \\ \text{και } u<y<1 \end{matrix}\right| \Rightarrow 0<u<y$$

$$(1) \Rightarrow f_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{1-u}\,du = \int_0^y -[\log(1-u)]'\,du =$$

$$= -[\log(1-u)]_0^y = -\log(1-y) = \log\frac{1}{1-y}$$

άρα
$$f_Y(y) = \begin{cases} \log\frac{1}{1-y} & , 0<y<1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

5] Έστω $Z \sim N(0,1)$ και $I \sim Be(1/2)$ με Z και I ανεξάρτητες.
Θεωρούμε
$$X = \begin{cases} Z & , I=1 \\ -Z & , I=0 \end{cases}$$

Να βρεθούν (i) $f_X(x)$, (ii) $Cov(Z,X)$, (iii) $\rho(Z,X)$

Λύση

(i) Πρώτα· βρίσκουμε συνάρτηση κατανομής.

$$F_X(x)=P(X\leq x)=P(I=0)P(X\leq x\mid I=0)+P(I=1)P(X\leq x\mid I=1)$$

$$=\frac{1}{2}\left[P(-Z\leq x)+P(Z\leq x)\right]=\frac{1}{2}\left[P(Z\geq -x)+P(Z\leq x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\Phi(-x)+\Phi(x)\right]=\frac{1}{2}\left[1-((1-\Phi(x))+\varphi(x))\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\Phi(x)\right]=\Phi(x)$$

Άρα, $X\sim N(0,1)$ και $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $x\in\mathbb{R}$

↳ σ.π.π. της τυπικής κανονικής

(ii) Παρατηρώ ότι $X=(2I-1)Z$

$$Cov(Z,X)=Cov(Z,(2I-1)Z)=E[(2I-1)Z^2]-E(Z)E((2I-1)Z)=$$

$[I \perp\!\!\!\perp Z \Rightarrow g(I) \perp\!\!\!\perp h(Z)]$

$$=E(2I-1)E(Z^2)-E(Z)E((2I-1))E(Z) \quad (1)$$

Όμως $E(2I-1)=2E(I)-1\overset{I\sim Be(1/2)}{=}2\frac{1}{2}-1=0$

Τελικά $Cov(Z,X)=0 \Leftrightarrow \rho(Z,X)=\frac{Cov(Z,X)}{\sqrt{VarX}\sqrt{VarZ}}=0$

(iii) Από ερωτ. (ii)

$\rho(Z,X)=0$

Τελικά, Z και X είναι ασυσχέτιστες.

Θ.Ε

$E(X^2)\mathrm{Var}(Y)$

6] Αν 2 τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X^2Y, Y) = E(X^2)\mathrm{Va}$

$\mathrm{Cov}(X^2Y,Y) = E(X^2)\mathrm{Var}(Y)$

Λύση

$\mathrm{Cov}(X^2Y, Y) = E(X^2Y^2) - E(X^2Y)E(Y)$

$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow g(x) \perp\!\!\!\perp h(Y)$

$= E(X^2Y^2) - E(X^2Y)E(Y)$

Άρα, $\mathrm{Cov}(X^2Y, Y) = E(X^2)E(Y^2) \overset{\shortparallel}{-} E(X^2)E(Y)E(Y)$

$= E(X^2)\left[E(Y^2) - E^2(Y)\right] = E(X^2)\mathrm{Var}(Y)$

① Γεννήτριες Συναρτήσεις

Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι τυπικές δυναμοσειρές (αλγεβρικά αντικείμενα) που αντιστοιχίζονται σε ακολουθίες (πραγματικών) αριθμών.

Γενικεύουν τα πολυώνυμα (από πεπερασμένα αθροίσματα, σε άπειρες σειρές).

Δύο σημαντικές κατηγορίες γεννητριών συναρτήσεων

(α) Συνήθεις Γεννήτριες Συναρτήσεις

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \left[G\left((a_n)_{n\geq 0}; x\right)\right] \longrightarrow (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

Παρ.: Οι συντελεστές της δυναμοσειράς μας πληροφορούν για τους όρους της ακολουθίας.

(β) Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις.

$$\mathcal{E}\text{-}G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \left[\mathcal{E}\text{-}G(a_n)_{n\geq 0}; x) \right]$$

$\downarrow$ Exponential

② Πιθανογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής

Έστω $X \in \mathbb{N}$ μια διακριτή τ.μ.

- Η πιθανογεννήτρια μιας τ.μ. X ορίζεται:

$$\boxed{P_X(z) = \mathcal{E}(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) z^n}$$

(συγκλίνει για $|z| \leq 1$)

Παρατήρηση

Η πιθανογεννήτρια της X είναι η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας των πιθανοτήτων της X (δηλ. της συνάρτησης πιθανότητάς της)

Ιδιότητες

1) $P(X=n) = \dfrac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

2) Κάθε διακριτή τ.μ. $X \in \mathbb{N}$ έχει πιθανογεννήτρια και
$X \overset{d}{=} Y \iff P_X(z) = P_Y(z)$
Άρα η $P_X(z)$ χαρακτηρίζει την κατανομή της X.

3) $E[(X)_n] = E[X(X-1)\dots(X-n+1)] = P_X^{(n)}(1)$ (εφόσον υπάρχουν)
Ειδικά: $E(X) \overset{n=1}{=} P_X(1)$, $Var(X) = P''_X(1) + P'_X(1) - (P'_X(1))^2$

Χρησιμοποιώντας ότι.

$$Var(X) = EX^2 - E^2 X = E[X(X-1)] + E(X) - E^2(X)$$

4) Αν $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{N}$ ανεξαρτ. τ.μ.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \boxed{P_{S_N}(z) = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \dots P_{X_n}(z)}$$

Αν επιπλέον $X_i \overset{d}{=} X \Rightarrow \boxed{P_{S_n}(z) = (P_X(z))^n}$

5) Αν $(X_n)_{n \geq 1}$, ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., με $X_n \overset{d}{=} X \in \mathbb{N}$, $\underset{\in \mathbb{N}}{N} \perp\!\!\!\perp \{X_n\}_{n \geq 1}$

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$$

Αποδείξεις

1) Καταρχήν $P_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) z^n$ $\overset{(1)}{,}$ $|z| \leq 1$

Είναι αναλυτική συνάρτηση (στο (-1,1))

Ιδιαιτέρως στο z=0, αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά
[σειρά MacLaurin: γύρω από το 0]
(Taylor)

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_X^{(n)}(0) z^n}{n!} \quad (2)$$

Από (1) και (2), Δυναμοσειρές ίσες ανν οι συντελεστές ταυτίζονται, άρα $P(X=n) = \frac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$

2) $X \overset{d}{=} Y \Leftrightarrow P(X=n) = P(Y=n)$, $\forall n \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) z^n \, , \quad \forall z \in [-1,1]$$

$$\Leftrightarrow P_X(z) = P_Y(z)$$

3) $E[(X)_n]$

$P_X(z) = E(z^X)$

στο διάστημα που είναι εφικτό

$P_X^{(n)}(z) = E(X(X-1)\dots(X-n+1) z^{X-n})$

$P_X^{(n)}(1) \overset{z=1}{=} E[(X)_n]$

4) $P_{S_N}(z) = E(z^{S_n}) = E(z^{X_1+X_2+\dots+X_n}) = E(z^{X_1}\cdot z^{X_2}\cdot\dots\cdot z^{X_n}) \overset{\text{ανεξ.}}{=}$

$= E(z^{X_1})\cdot E(z^{X_2})\cdot\dots\cdot E(z^{X_n}) = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z)\cdot\dots\cdot P_{X_n}(z)$

Αν επιπλέον $X_i \overset{d}{=} X$, $P_{S_N}(z) = \underbrace{P_X(z)\dots P_X(z)}_{n\text{-φορές}} = P_X^n(z)$

5) $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$P_{S_N}(z) = E(z^{S_N}) \overset{\text{(δέσμευση)}}{=} E[E(z^{S_N}|N)]$ ①

$E(z^{S_N}|N=n) = E(z^{S_N}|N=n) = E(z^{S_n}) = P_{S_N}(z) \overset{\text{ιδιοτ. 4}}{=}$

$= \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z) = (\underbrace{P_X(z)})^n$ → σημαντικό!

$\Rightarrow E(z^{S_N}|N) = (P_X(z))^N$ ②

Από ① και ② $\longrightarrow P_{S_N}(z) = E[(P_X(z))^N] = P_N(P_X(z))$

Παρατήρηση

Αν $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, (n σταθερά) , $X_i \overset{d}{=} X$

$\overset{d}{=} \sum_{i=1}^{N} X_i$ όταν $N=n$ (με πιθανότητα 1) .

Όμως $P_N(z) = \underset{\underset{1}{\|}}{P(X=n)} z^n \Rightarrow P_{S_n}(z) = \underset{\underset{n\,(\text{με πιθ. } 1)}{\|}}{P_N}(P_X(z)) = P_X^{n}(z)$

③ Κάποιες πιθανογεννήτριες τ.μ.

- $X \sim Be(p) \iff \boxed{P_X(z) = 1-p+p\cdot z}$

$P_X(z) = E(z^X) = P(X=0)z^0 + P(X=1)z = 1-p+p\cdot z$

- $X \sim Bin(n,p) \iff P_X(z) = (1-p+p\cdot z)^n$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, X_i ανεξ. $Be(p)$ $\xRightarrow[\text{ιδ.(4)}]{} P_X(z) = P_{X_1}^{n}(z) \overset{X\sim Be(p)}{=\!=}$

$= (1-p+pz)^n$

- $X \sim Poisson(\lambda) \iff P_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

$P_X(z) = E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} =$

$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^{z} = e^{-\lambda(1-z)}$

- $X \sim Geo(p) \iff P_X(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$

- $X \sim NegBin(n,p) \iff P_X(z) = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^n$, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

όπου X_i ανεξ. $Geo(p)$

④ Άσκηση με $P_{S_N}(z)$

- $S_N=\sum_{i=1}^{N} X_i$ (αν $N=0, S_N=0$), $N \sim Poisson(\lambda)$, $X_i \sim Be(p)$

= (π.χ. Άσκηση με αβγά που επιβιώνουν, ζητούσαν $P(X=s)$, $s=0,1,\dots$ όπου εδώ $X=S_N$)

$$P_{S_N}(z) \overset{ιδ.5}{=\!=} P_N(P_X(z))$$

$$N \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow P_N(z)=e^{-\lambda(1-z)}$$

$$X_i \sim Be(p) \Rightarrow P_X(z)=1-p+p\cdot z$$

$$X_i \overset{d}{=} X \sim Be(p)$$

$$\Rightarrow P_{S_N}(z)=e^{-\lambda(1-P_X(z))} = e^{-\lambda(1-[(1-p)+pz])} = e^{-\lambda(p-pz)} = e^{-\underset{\theta}{\underset{\shortparallel}{\lambda p}}(1-z)}$$

$$\Rightarrow S_N \sim Poisson(\theta=\lambda p)$$

$$\Rightarrow P(S_N=s)=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^s}{s!} \quad s=0,1,\dots$$

SOS Εφαρμογή

⑤ Εφαρμογές με κατανομές αθροισμάτων ανεξ. τ.μ.

- Αν $X_1,X_2,\dots,X_n \sim Be(p)$ + ανεξάρτητες $\Rightarrow S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,p)$ διωνυμική

$$P_{S_N}(z) \overset{ιδ.4}{=\!=} (P_{X_1}(z))^n \overset{X_1\sim Be(p)}{=\!=\!=} (1-p+pz)^n \Longrightarrow S_N \sim Bin(n,p)$$

είναι πιθανογεν. $Bin(n,p)$

- Αν $X_1,X_2,\dots,X_n \sim Poisson(\lambda_i)$, ανεξάρτητες

Αποδ.:

$$P_{S_n}(z) \overset{ιδ.4}{=\!=} \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z) \overset{X_i\sim Pois(\lambda_i)}{=\!=\!=\!=} \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(1-z)} = e^{-(\overset{=\lambda}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i})(1-z)} \Longrightarrow$$

(είναι πιθανογ. $Poisson(\lambda)$)

$$\Longrightarrow S_n \sim Poisson(\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\dots\lambda_n)$$

⑥ Ροπογεννήτρια τυχαίας μεταβλητής

Η πιθανογεννήτρια ορίζεται μόνο για διακριτές τ.μ., με ακέραιες μη αρνητικές τιμές.
Μπορούμε να έχουμε κάτι αντίστοιχο και για συνεχείς τ.μ.;
Το πρόβλημα λύνεται μερικώς από τις ροπογεννήτριες.

Η ροπογεννήτρια μιας τ.μ. X ορίζεται:

$$M_X(t) = E(\underbrace{e^{tX}}_{\overset{\shortparallel}{g(X)}}) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in A} P(X=x)e^{tx} \text{ αν } X \text{ διακριτή με } \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{P(X\in A)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \underset{\text{σ.π.π. της } X}{f_X(x)}\,dx, \text{ αν } X \text{ απόλυτα συνεχής τ.μ.} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις

1) Η $M_X(t)$ είναι καλά ορισμένη (με τιμές στο $[0,+\infty]$), αφού $e^{tx} \geq 0 \Rightarrow E(e^{tx})$ ορίζεται $\forall t \in \mathbb{R}$ (ενδεχομένως $+\infty$)

2) Λέμε ότι υπάρχει ροπογεννήτρια της X ή ότι η X έχει ροπογεννήτρια αν $M_X(t) < +\infty$ σ' ένα ανοιχτό διάστημα γύρω από το 0.
$(\exists\, \varepsilon > 0 : M_X(t) < +\infty, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$

3) Αν η X έχει ροπογεννήτρια, τότε η $M_X(t)$ είναι αναλυτική συνάρτηση, η X έχει ροπές οποιασδήποτε τάξης ($E(X^n) \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1$) και τα παρακάτω είναι επιτρεπτά.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n X^n}{n!}\Big) \overset{(*)}{=} \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} E(X^n)\frac{t^n}{n!}}$$

αυτό ισχύει ΠΑΝΤΑ!

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι είναι η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση των ροπών $(E(X^n))_{n\geq 0}$ της τ.μ. X.

Αυτό δικαιολογεί το όνομα της $M_X(t)$ ως ροπογεννήτριας.

Ιδιότητες ροπογεννήτριας

1) $E(X^n)=M_X^{(n)}(0)$, $n=0,1,2,\ldots$ (αν η X έχει ροπογεννήτρια)

2) Αν οι X και Y έχουν ροπογεν. τότε:

$$\boxed{X \overset{d}{=} Y \iff M_X(t)=M_Y(t)}$$

Άρα η $M_X(t)$ χαρακτηρίζει την κατανομή της X, στην περίπτωση που η X έχει ροπογεννήτρια.

Παρατηρήσεις:
(αδυναμίες της ροπογεννήτριας)

(i) Είναι φανερό ότι αν $\exists n\in\mathbb{N}: E|X|^n=+\infty$,

(δηλ $\nexists E(X^n)$ [δεν ορίζεται ή $E(X^n)\in\{-\infty,+\infty\}$])

τότε $\nexists$ η ροπογεννήτρια της $X \Rightarrow$ δεν χαρακτηρίζει την κατανομή της.

(ii) Όμως η $M_X(t)$ δεν χαρακτηρίζει την κατανομή ούτε και όλων των τ.μ. που έχουν ροπές οποιασδήποτε τάξης
π.χ. αν $X\sim \log N(\mu,\sigma^2)$ $[\log X\sim N(\mu,\sigma^2)]$ (λογαριθμοκανονική κατανομή).

τότε $E(X^n) = e^{n\mu + \frac{n^2\sigma^2}{2}} \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$ αλλά $\nexists$ η ροπογεννήτρια της τ.μ. X.

η $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} E(X^n)\frac{t^n}{n!}\right)$ δεν συγκλίνει (δεν αρκεί λοιπόν η ύπαρξη των ροπών).

Παρατήρηση: $E(X^n) = E(Y^n)\ \forall n \geq 1 \not\Rightarrow X \overset{d}{=} Y$

3) Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. τ.μ., $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

τότε $\Rightarrow \boxed{M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)}$

Αν επιπλέον $X_i \overset{d}{=} X \Rightarrow M_{S_n}(t) = M_X^{n}(t)$

4) Αν $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξαρτ. + ισόνομων τ.μ.

$X_n \overset{d}{=} X$, $\underset{\in \mathbb{N}}{N} \perp\!\!\!\perp \{X_n\}_{n\geq 1}$, $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$\Rightarrow M_{S_N}(t) = P_N(M_X(t))$

5) Σύνδεση ροπογεννήτριας-πιθανογεννήτριας

$M_X(t) = P_X(e^t)$, (αν $P(X \in \mathbb{N}) = 1$)

$\downarrow$

οπότε η X έχει και πιθανογεννήτρια.

Αποδείξεις Ιδιοτήτων

1) $E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$

α' τρόπος

$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(X^n)\frac{t^n}{n!}$ (1) $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$

Η $M_X(t)$ είναι αναλυτική συνάρτηση

$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_X^{(n)}(0)}{n!} t^n$ (2) (σειρά Taylor στο $t_0 = 0$).

(1) + (2) $\Rightarrow M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$, $n \geq 0$

β' τρόπος

$M_X(t) = E(e^{tX}) \Rightarrow M_X^{(n)}(t) = E((e^{tX})^{(n)}) = E(X^n e^{tX})$

$\xrightarrow{t=0} M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$

2) Αν $\exists M_X, M_Y$, τότε, $X \overset{d}{=} Y \iff M_X = M_Y$

$\Rightarrow$) Πράγματι εφ' όσον $\exists M_X$ και M_Y, έχουμε $E(X^n) = E(Y^n)$, $\forall n \geq 1$

$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(X^n)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} E(Y^n)\frac{t^n}{n!} = M_Y(t)$

$\Leftarrow$) Χρειάζεται Θεώρημα Αντιστροφής. (η απόδειξη παραλείπεται)

Προσοχή! (Υπενθύμιση)

Αν $E(X^n) = E(Y^n)$, $\forall n \geq 1 \not\Longrightarrow X \overset{d}{=} Y$

3) Αν $X_1, \dots, X_n$ $\left(S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ ανεξ. $M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$.

$$M_{S_n}(t) = E\left(e^{tS_n}\right) = E\left(e^{t(X_1 + \dots + X_n)}\right) = E\left(e^{tX_1} \dots e^{tX_n}\right) \overset{\text{ανεξ}}{=} E\left(e^{X_1 t}\right) \dots E\left(e^{X_n t}\right)$$

$$= M_{X_1}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

Ειδ. περίπτωση $X_i \overset{d}{=} X \Rightarrow M_{X_i}(t) = M_X(t)$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$

$$M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_X(t) = M_X^n(t)$$

4) $M_{S_N}(t) = P_N(M_X(t))$

$$M_{S_N}(t) = E\left(e^{tS_N}\right) = E\left[E\left(e^{tS_N} \mid N\right)\right] \qquad (1)$$

$$E\left(e^{tS_N} \mid N = n\right) = E\left(e^{tS_n} \mid N = n\right) \overset{\text{ανεξ.}}{=} E\left(e^{tS_n}\right)$$

$$= M_{S_n}(t) = M_X^n(t) \underset{\substack{\text{το κάνουμε} \\ \text{τ.μ.}}}{\Longrightarrow} E\left(e^{tS_N} \mid N\right) = M_X^N(t) \qquad (2)$$

Από (1) και (2), $M_{S_N}(t) = E\left[M_X^N(t)\right] = P_N(M_X(t))$

5) $M_X(t) = P_X(e^t)$ $\quad (P(X \in \mathbb{N}) = 1)$

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = E\left(\left(e^t\right)^X\right) = P_X(e^t).$$

② Κάποιες Ροπογεννήτριες γνωστών κατανομών

- $X \sim U(a,b) \iff M_X(t) = \dfrac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$, $t \neq 0$ $\left(M_X(0)=1 \text{, πάντα} \right)$

$$M_X(t) = E(\underbrace{e^{tX}}_{g(X)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx$$

$X \sim U(a,b) \Rightarrow f_X(x) = \dfrac{1}{b-\alpha}$, $x \in (a,b)$ και 0 διαφ.

Άρα $M_X(t) = \displaystyle\int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{(b-a)t}\int_a^b t e^{tx}\,dx =$

$$= \frac{1}{(b-a)t}\left[e^{tx}\right]_a^b = \frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}, \quad t \neq 0.$$

- $X \sim Gamma(a,\theta) \iff M_X(t) = \left(\dfrac{\theta}{\theta-t}\right)^a$, $t<\theta$

$M_X(t) = E(e^{tX})$

$X \sim Gamma(a,\theta)$, $f_X(x) = \dfrac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x}$, $x>0$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{tx} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x}\,dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-(\theta-t)x}\,dx \overset{t<\theta}{=} \frac{\theta^a}{(\theta-t)^a} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{(\theta-t)^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-(\theta-t)x}\,dx}_{1}$$

[σ.π.π. της Gamma $(a, \theta-t)$] $\left(\theta - t > 0 \iff t<\theta \right)$

Ειδικές περιπτώσεις

$X \sim Erlang(n,\theta) \equiv Gamma(n,\theta) <=> M_X(t) = \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^n \quad , \ t<\theta$

$X \sim \underset{\substack{\| \\ Gamma(1,\theta)}}{Exp(\theta)} <=> M_X(t) = \frac{\theta}{\theta-t} \quad , \ t<\theta$

- $X \sim \mathcal{N}(0,1) <=> M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[x^2-2tx]} dx = e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[x^2-2tx+t^2]} =$$

$$= e^{t^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx}_{\substack{\| \\ 1 \\ \sigma.\pi.\pi.\ \mathcal{N}(t,1)}} = e^{t^2/2}$$

- $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) <=> M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2}$

$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow X = \mu + \sigma Z \ , \ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{t(\mu+\sigma Z)}) = E(e^{t\mu+(\sigma t)Z})$$

$$E(e^{t\mu} e^{(\sigma t)Z}) = e^{t\mu} E(e^{(\sigma t)Z}) = e^{t\mu} M_Z(\sigma t) = e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2/2} = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2}$$

③ Εφαρμογή Ροπογεννήτριας με κατανομές αθροισμάτων ανεξ. τ.μ.

- Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξ. $N(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$

Θέτω $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$M_{S_n}(t) \overset{\delta.3)}{=} \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \text{ , Όμως } M_X(t) = e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2}{2} t^2} \Rightarrow$$

$$M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2}{2} t^2} = e^{\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right) t + \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 t^2}{2}}$$

(που είναι η η ροπογεννήτρια της $N(\mu, \sigma^2)$, όπου $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$,

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$)

④ Βασικές Ανισότητες στη Θεωρία Πιθανοτήτων

A) Concentration Inequalities

Οι ανισότητες αυτές δίνουν άνω φράγματα πιθανοτήτων ενδεχομένων που αφορούν αποκλίσεις μιας τ.μ. από κάποια τιμή.
Ισοδύναμα, μπορούν να ερμηνευθούν ως εύρεση κάτω φραγμάτων του βαθμού συγκέντρωσης της κατανομής μιας τ.μ. σε κάποιο διάστημα που συνήθως περιέχει τη μέση τιμή. (αφού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα)

Ανισότητα Markov

Αν $X \geq 0$, $a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Παρατήρηση: X οποιαδήποτε τ.μ., $a \in \mathbb{R}$, αν $h \uparrow$ και $h \geq 0$

(Γενικευμένη Markov)

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[h(X)]}{h(a)}$$

(αν $h(a) = 0$, τότε το άνω φράγμα δεχόμαστε ότι είναι $+\infty$, και δεν έχει ενδιαφέρον η ανισότητα)

{Ανισότητα Chebyshev}

Αν $E|X|<+\infty$, $\mu=E(X)$, $c>0$

$$P[|X-\mu|\geq c] \leq \frac{Var(X)}{c^2}$$

{Ανισότητα Chernoff}

Αν $t>0$, $a\in\mathbb{R}$

$$P(X\geq a) \leq e^{-ta} M_X(t)$$

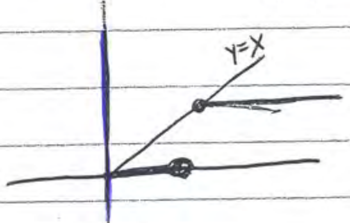
Αποδείξεις

Ανισότητα Markov

$$P[X\geq a] = P\left[\frac{X}{a}\geq 1\right] = P\left[\frac{X}{a}\in[1,+\infty)\right] =$$

$$= E\left[1_{[1,+\infty)}\left(\frac{X}{a}\right)\right] \overset{(*)}{\leq} E\left(\frac{X}{a}\right) = \frac{E(X)}{a}$$

(για $x\geq 0$)



$$1_{[1,+\infty)}(x) \leq x \Rightarrow 1_{[1,+\infty)}(Y) \leq Y$$

$Y\in[0,+\infty)$

$$\boxed{Y=\frac{X}{a}}$$

Γενικ. Markov

$$P(X\geq a) \leq \frac{E[h(X)]}{h(a)}$$

Πράγματι $P(X\geq a) \overset{h\uparrow}{=} P(h(x)\geq h(a)) \underset{h(x)\geq 0}{\overset{\text{ανισ. Markov}}{\leq}} \frac{E[h(X)]}{h(a)}$

$$\underset{(\text{όταν } h\nearrow)}{\leq}$$

Chebyshev

α' τρόπος $P[|X-\mu| \geq c] \leq E[\frac{h(Y)}{h(c)}] = \frac{E([X-\mu]^2)}{c^2} = \frac{Var(X)}{c^2}$

Θέτω $Y = |X-\mu|$, $h(x) = x^2$ στο $[0,+\infty)$

β' τρόπος

$$P[|x-\mu| \geq c] = P((x-\mu)^2 \geq c^2) \overset{Markov}{\leq} \frac{E(X-\mu)^2}{c^2} = \frac{Var(x)}{c^2}$$

Chernoff

$h = e^{tx}, t>0$
$(h \nearrow, h \geq 0)$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[h(X)]}{h(a)} = \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}} = e^{-ta} M_X(t)$$

B) Ανισότητες με μέσες τιμές

Cauchy-Schwarz

$$|E(XY)| \leq (EX^2)^{1/2} (EY^2)^{1/2}$$

(υποδ.: $g(x) = E[(\lambda X+Y)^2] \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Διακρίνουσα ≤ 0]

Ανισότητα Jensen

Αν f κυρτή, $f[E(X)] \leq E[f(X)]$

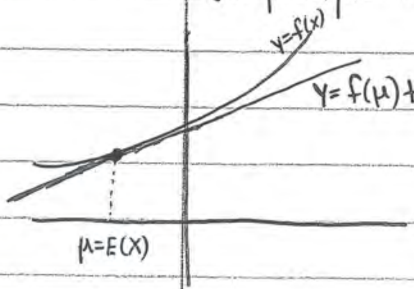
Ανισότητα Ροπών

$$E|X| \leq (EX^2)^{1/2} \leq (E(|X|^3))^{1/3} \leq \dots \leq [E(|X|^n)]^{1/n} \leq \dots$$

Παρατ. Αν $\exists n \in \mathbb{N}$ $E(|X|^n) < +\infty$ $\left(\overset{\delta\eta\lambda}{\exists} E(X^n)\right)$
τότε $E(|X|^k) < +\infty$, $\forall k: 1 \leq k \leq n$
(υπάρχουν οι ροπές μέχρι $n^{\eta\varsigma}$ τάξης)

Απόδειξη Jensen

(Χρησιμ. $\exists f'(\mu)$, μ: μέση τιμή της X $(E(X)=\mu)$)



Λόγω κυρτότητας : $f(x) \geq f(\mu) + f'(\mu)(x-\mu)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ $f(X) \geq f(\mu) + f'(\mu)(X-\mu)$ $\Rightarrow$

$$E[f(X)] \geq f(\mu) + f'(\mu)\underbrace{[E(X) - \overset{\mu}{\overset{\shortparallel}{E(X)}}]}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$\Rightarrow E[f(X)] \geq f(\mu) = f[E(X)]$$

(Για κοίλες συναρτήσεις, $E[f(X)] \leq f(E(X))$) → (υπόδειξη: αν f κυρτή $\Rightarrow$ −f είναι κοίλη)

Απόδειξη Ανισ. Ροπών.

(απόδειξη μόνο για $E|X| \leq \left(E|X^k|\right)^{\frac{1}{k}}$)

$E|X| \leq (E|X|^k)^{1/k}$
θέτω $Y=|X|$, $h(x)=x^k$
ορισμένη στο $[0,+\infty)$
Η $h(x)=x$ είναι κυρτή
Η $h(x)=x^k$, $k \geq 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h''(x)=k(k-1)x^{k-2} \geq 0$
$\Rightarrow$ h κυρτή

[redacted]

Άρα $E[|X|^k] =$
$= E(f(Y)) \underset{\text{κυρτότητα}}{\geq} f[E(Y)] = (E(Y))^k =$

$= (E|X|)^k \Rightarrow E|X| \leq (E|X|^k)^{1/k}$

Εφαρμογές με Ανισότητες

N.δ.ο. αν $Var(X) = 0 \Rightarrow X = c$ με πιθ. 1

Παίρνουμε $P[|X-\mu|>0] = P\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{|X-\mu|>\frac{1}{n}\right\}\right]$ (*)

Θέτω $\mu = E(X)$ (υπάρχει διότι $Var(X) = 0 < +\infty$)

Όμως $\left\{|X-\mu|>\frac{1}{n}\right\} \nearrow$ σαν ακολουθία ενδεχομένων.

Άρα $(*) = \lim_{n\to+\infty} P\left(|X-\mu|>\frac{1}{n}\right) \overset{Chebyshev}{\leq} \lim_{n\to+\infty} \frac{Var(x)}{\frac{1}{n^2}} \overset{Var(x)=0}{=} 0$

Άρα $P[|X-\mu|>0] = 0 \Rightarrow P[|X-\mu|=0] = 1 - P[|X-\mu|>0] = 1$

$\Rightarrow |X-\mu| = 0$ (με πιθ. 1)

$\Rightarrow X = \mu = E(X)$ με πιθ. 1.

Μάθημα 27ο - 19/12/2014

① Παρατηρήσεις από την προηγούμενη διάλεξη

(i) **Ανισότητα Chernoff**

Έστω $t>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Ροπογεννήτρια της X.

$$\boxed{P(X\geq\alpha) \leq \underbrace{e^{-t\alpha}M_x(t)}_{=\,g(t)}}$$

$$\Downarrow$$

$$P(X\geq\alpha) \leq \inf_{t>0}\left\{e^{-t\alpha}M_x(t)\right\}$$

έτσι εφαρμόζεται συνήθως

(ii) **Γενικευμένη ανισότητα Markov**

$\alpha\in\mathbb{R}$, $h\uparrow$, $h\geq 0$

$$P(X\geq\alpha) \leq \frac{E[h(x)]}{h(\alpha)}$$

Αρκετά γενική, για να παίρνουμε ειδικές επιλογές της h, και να βρίσκουμε αρκετά καλά άνω φράγματα.

(iii) Παίρνω την "απλή Markov", $X\geq 0$, $E(x)\in\mathbb{R}_+$

$$P(X\geq\alpha) \leq \frac{E(x)}{\alpha}$$

Αν επιλέξω $\underline{\underline{\alpha}} = kE(x)$, $k=1,2,3\ldots$

$$P(X\geq\alpha) \leq \frac{E(x)}{kE(x)} = \boxed{\frac{1}{k}}$$

για $h(x)=x^2$

$$P\left(X \geq k E(x)\right) \leq \boxed{\frac{E(X^2)}{k^2 E^2(x)}}$$

$\left(E(X^2) < +\infty\right)$: πεπερασμένη

Ας συγκρίνουμε τα 2

$$\frac{E(X^2)}{k^2 E^2(x)} \leq \frac{1}{k} \Leftrightarrow$$

$$k \geq \frac{E(X^2)}{E^2(x)} = \frac{Var(x) + E^2(x)}{E^2(x)} = \boxed{1 + \frac{Var X}{E^2(x)}}$$

② Ιδιότητες δειγματικού μέσου

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \left(\frac{S_n}{n}\right)$$

για μέση τιμή

$$E(\overline{X}_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n}$$ (στη γενική περίπτωση)

Όταν επιπλέον $(X_i)_{i\geq 1}$, είναι ισόνομες $E(X_i)=\mu$.

$$\boxed{E(\overline{X}_n) = \mu}$$

για διασπορά

$$Var(\overline{X}_n) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} Var(x_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j)\right]$$

* $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

Αν οι X_i είναι ανεξάρτητες : $Var(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

Όταν οι X_i, ανεξάρτητες και ισόνομες ($Var(X_i) = \sigma^2$)

$$\boxed{Var(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}}$$

③ Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (ΑΝΜΑ)

Λέμε ότι μια ακολουθία τ.μ. $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα ή συγκλίνει στοχαστικά σε μία τ.μ. X, αν

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\Big[|X_n - X| > \varepsilon\Big] = 0$$

Ειδικά θα το εφαρμόζουμε για $X = c$ (με πιθ. 1)

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\Big[|X_n - c| > \varepsilon\Big] = 0$$

[Τότε γράφουμε ότι $X_n \xrightarrow{P} X$ ή αντίστοιχα $X_n \xrightarrow{P} ς$]

[P : in probability
συγκλίνει κατά πιθανότητα]

Weak Law of Large Numbers (WLLN)

Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$, μια ακολουθία ανεξαρτ. κ' ισόνομων τ.μ. με $E(X_i) = \mu \in \mathbb{R}$

Τότε $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$, ή $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\Big[|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon\Big] = 0$

Απόδειξη

(υποθέτουμε ότι : ύπαρξη $Var(X_i) = \sigma^2 < +\infty$)

Έστω $\varepsilon > 0$: $P\left[\left|\bar{X}_n - \underset{\overset{\|}{E(\bar{X}_n)}}{\mu}\right| > \varepsilon\right] \overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \dfrac{Var(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \longrightarrow 0$

Δηλ.

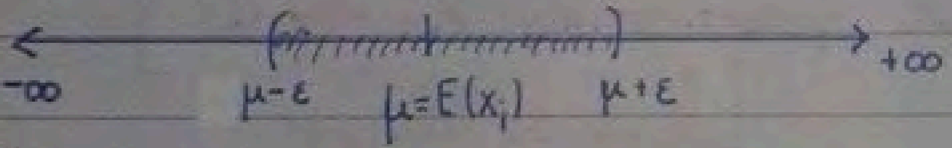
$\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n \to +\infty} P\left[\left|\bar{X}_n - \mu\right| > \varepsilon\right] = 0$ και επομένως $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

Παρατηρήσεις

Ισοδυναμίες

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu \overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} P\left[\left|\bar{X}_n - \mu\right| > \varepsilon\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} P\left[\left|\bar{X}_n - \mu\right| \leq \varepsilon\right] = 1$$



Δηλ η πιθανότητα το $\bar{X}_n$ (ο δειγμ. μέσος) να ανήκει σε μία γειτονιά του μ (σε ένα διάστημα γύρω από το μ) μπορεί να φτάσει να είναι όσο πιο κοντά στο 1 θέλω.

Προσοχή ↯ Αυτό δε σημαίνει ότι:

$$P(\bar{X}_n=\mu) \not\longrightarrow 1$$

π.χ. αν (x_n) ακολουθία συνεχών τ.μ.

Τότε $P(\bar{X}_n=\mu)=0$, $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow P(\bar{X}_n=\mu) \longrightarrow 0 \neq 1$

■

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ)

Λέμε ότι μια ακολουθία τ.μ. $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μία τ.μ. X αν

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x)$$

, ∀x που είναι σημείο συνεχείας της συνάρτησης κατανομής της X.

X_n έχει σ.κ. F_n

X έχει σ.κ. F

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

• Γράφουμε και $X_n \xrightarrow{d} X$

*d : in distribution
συγκλίνει κατά "κατανομή"

Central Limit Theorem (CLT)

Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με $0 < Var(X_1) = \sigma^2 < +\infty$

$$\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

(τυποποιημένη κανονική) ή τυπική

* Ισοδύναμες μορφές (με $\bar{X}_n$)

$$\lim_{n\to+\infty} P\left[\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \in A\right] = P(Z \in A), \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

και $Z \sim N(0,1)$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left[\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \leq x\right] = P(Z \leq x) = \phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ϕ η σ.κ. της $N(0,1)$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left[\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq x\right] = P(Z \leq x) = \phi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \phi \text{ η σ.κ. της } N(0,1)$$

* Ισοδύναμες μορφές (με S_n)

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \in A\right] = P(Z \in A), \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

και $Z \sim N(0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \leq x\right] = P(Z \leq x) = \phi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \phi \text{ η σ.κ της } N(0,1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}} \leq x\right] = P(Z \leq x) = \phi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \phi \text{ η σ.κ. της } N(0,1)$$

Στην πράξη ...

(προσεγγιστική κατανομή)

Για μεγάλο n, $\overline{X}_n \approx \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ $\left(\text{δηλ. } \mathcal{N}(E(\overline{X}_n), Var(\overline{X}_n))\right)$

$S_n \approx \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$ ▪ δηλ. $\left(\mathcal{N}(E(S_n), Var(S_n))\right)$

ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Έστω X, Z, I τυχ. μεταβλητές με $X = (2I-1)Z$, $I \sim Bernoulli(\frac{1}{2})$ ανεξάρτητη της Z και Z (απόλυτα) συνεχής με σ.π.π. $f_Z(x)$

(i) Να βρεθεί η σ.π.π. $f_X(x)$ ως συνάρτηση της $f_Z(x)$

(ii) Αν Z ακολουθεί εκθετική κατανομή με $E(Z) = \frac{1}{2}$, να υπολογιστούν $P(X < -1)$ και $P(X < Z)$

(iii) (Later)

Λύση

(i) $F_X(x) = P(X \leq x) = P(I=0) \cdot P(X \leq x \mid I=0) \overset{+P(I=1)\times}{} + P(X \leq x \mid I=1) =$

$$= \frac{1}{2}\left[P(-Z \leq x \mid I=0) + P(Z \leq x \mid I=1)\right] \overset{I \perp\!\!\!\perp Z}{=\!=}$$

$$= \frac{1}{2}\left[P(Z \geq -x) + P(Z \leq x)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - P(Z \leq -x) + P(Z \leq x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - F_Z(-x) + F_Z(x)\right] \quad (1)$$

$\Longrightarrow$

Παραγωγίζοντας έχω τα εξής: (από τη σχέση (1)).

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - F_Z(-x) + F_Z(x)\right]' = \frac{1}{2}\left(f_Z(-x) + f_Z(x)\right)$$

(ii) Α' Τρόπος : (δέσμευση)

$$P(X<-1) \overset{\text{δεσμ.}}{=\!=} P(I=0)\cdot P(X<-1 \mid I=0) + P(I=1)\cdot P(X<-1 \mid I=1) = \dots$$

Β' Τρόπος :

$$P(X<-1) \overset{X:\,\text{συνεχής}}{=\!=} F_X(-1) = \int_{-\infty}^{-1} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2}\left(f_Z(-x) + f_Z(x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{-1} f_Z(-x)\,dx + \int_{-\infty}^{-1} \underbrace{f_Z(x)\,dx}_{\overset{\shortparallel}{0}}\right] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1} \theta e^{-\theta(-x)}dx =$$

$*$ Όμως $E(Z) = \frac{1}{2}$ και $E(Z) = \frac{1}{\theta}$ $\Big\}$ άρα $\boxed{\theta = 2}$

$**$ $f_X(x) = \begin{cases} \theta\cdot e^{-\theta x} & , x>0 \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$

$\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1} \theta\cdot e^{\theta x}dx = \frac{1}{2}\left[e^{\theta x}\right]_{-\infty}^{-1} = \boxed{\frac{1}{2}e^{-\theta}} = \frac{1}{2}e^{-2}$$

- $P(X<Z) = P(I=0)\cdot P(X<Z \mid I=0) + P(I=1)\cdot P(X<Z \mid I=1) =$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} \frac{1}{2}\left[P(-Z<Z) + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{P(Z<Z)}\right] = \frac{1}{2}P\left[2Z>0\right] = \frac{1}{2}\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{P\left[Z>0\right]} = \frac{1}{2}$$

(iii) Ερώτημα σχετικά με το Κ.Ο.Θ.
Αν $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολ ανεξ + ισόνομων με τη X τμ., τότε αν $E(Z^2)=4$, να βρεθεί προσεγγιστικά το ελάχιστο $n \in N$: με πιθανότητα τουλ. $\gamma = 0.9$, η απόλυτη τιμή του δείγμ. μέσου $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, να μην υπερβαίνει το $c=0.1$.

ΛΥΣΗ

$P\left[\,|\bar{X}_n| \leq 0.1\,\right] \geq 0.9$ ← (Να βρεθεί το ελάχιστο n).

(($P\left[-0.1 \leq \bar{X}_n \leq 0.1\right]$

$E(\bar{X}_n) = \mu = E(x)$

$Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{Var(x)}{n}$

$E(x) = E\left((2I-1)Z\right) \overset{\text{ανεξ.}}{=} E(2I-1)\,E(Z) = \left(2E(I)-1\right)E(Z) =$

$\overset{I\sim Be(\frac{1}{2})}{=} \left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)E(Z) = 0$

$E(x^2) = E\left((2I-1)^2\cdot Z^2\right) \overset{\text{ανεξ.}}{=} E\left(4I^2-4I+1\right)E(Z^2) \overset{I^n \overset{d}{=} I \sim Be(\frac{1}{2})}{=\!=}$

άρα μπορώ να αντικαταστήσω όπου I^2 το I

$= E\left(\underbrace{4I-4I}_{0}+1\right)E(Z^2) = E(Z^2) = 4$

Άρα $Var(x) = E(X^2) - E^2(x) = 4-0 = 4$ $\left(\Rightarrow \sigma = \sqrt{Var(x)} = 2\right)$

$P\left[-0{,}1 \leq \bar{X}_n \leq 0{,}1\right] = P\left[-\frac{0{,}1\sqrt{n}}{2} \leq \frac{\sqrt{n}\cdot\bar{X}_n}{2} \leq \frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{}$

$\sqrt{n}\cdot\frac{(\bar{X}_n-\overset{0}{\mu})}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$

(μας υποδεικνύει το μετασχηματισμό της $\bar{X}_n$).

$$= P\left[-\frac{0,1\sqrt{n}}{2} \le \overset{\sim N(0,1)}{Z} \le \frac{0,1\sqrt{n}}{2}\right] =$$

$$\phi\left(\frac{0,1\sqrt{n}}{2}\right) - \phi\left(-\frac{0,1\sqrt{n}}{2}\right) = 2\phi\left(\frac{0,1\sqrt{n}}{2}\right) - 1$$

$$(\phi(-x) = 1 - \phi(x))$$

Δηλ. $P\left[|\bar{x}_n| \le 0,1\right] \cong 2\phi\left(\frac{0,1\sqrt{n}}{2}\right) - 1$

Αρκεί

$$2\phi(0,05\sqrt{n}) - 1 \geq 0,9 \leftrightarrow \phi(0,05\sqrt{n}) \geq \frac{1,9}{2} = 0.95 = \phi\underset{\text{από πίνακες}}{(1,65)}$$

$$\leftrightarrow 0.05\sqrt{n} \geq 1.65 \leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{165}{5} = 33 \Leftrightarrow n \geq 33^2 = \underset{\text{Το ελάχιστο } n}{\boxed{1089}} \quad ■$$