Στοιχεία συνδυαστικής για υπολογισμούς πιθανοτήτων
Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

27 Μαρτίου 2010

Άσκηση 1 (Ross, Exer. 2.16): Το πόκερ με ζάρια παίζεται ρίχνοντας ταυτόχρονα 5 ζάρια. Βρείτε τις πιθανότητες:

1. P(όλες οι ρίψεις διαφορετικές),
2. P(υπάρχει ένα ζευγάρι ίδιων ρίψεων και τρεις διαφορετικές ρίψεις),
3. P(υπάρχουν δυο ζευγάρια ίδιων ρίψεων και μια διαφορετική),
4. P(υπάρχει μια τριάδα ίδιων ρίψεων και δυο διαφορετικές),
5. P(υπάρχει μια τριάδα ίδιων ρίψεων και ένα ζευγάρι ίδιων ρίψεων (φουλ)),
6. P(υπάρχει μια τετράδα ίδιων ρίψεων και μια διαφορετική (καρέ)),
7. P(όλες οι ρίψεις όμοιες).

Άσκηση 2 (Ross, Exer. 2.28): Μια κάλπη περιέχει 5 κόκκινα, 6 μπλε και 8 πράσινα σφαιρίδια. Αν επιλεγούν τυχαία 3 σφαιρίδια, υπολογίστε τις παρακάτω πιθανότητες:

1. P(όλα τα σφαιρίδια είναι του ίδιου χρώματος), αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται δεν μπαίνει ξανά στην κάλπη (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση),
2. P(όλα τα σφαιρίδια είναι διαφορετικών χρωμάτων), αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται δεν μπαίνει ξανά στην κάλπη (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση),
3. P(όλα τα σφαιρίδια είναι του ίδιου χρώματος), αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται ξαναμπαίνει στην κάλπη πριν επιλεγεί το επόμενο (δειγματοληψία με επανάθεση),
4. P(όλα τα σφαιρίδια είναι διαφορετικών χρωμάτων), αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται ξαναμπαίνει στην κάλπη πριν επιλεγεί το επόμενο (δειγματοληψία με επανάθεση).

Άσκηση 3 (Ross, Exer. 2.32): Τα άτομα μιας ομάδας που αποτελείται από b αγόρια και g κορίτσια παρατάσσονται στην τύχη σε μια γραμμή (δηλαδή οποιαδήποτε μετάθεση τους είναι εξίσου πιθανή). Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

1. P(το άτομο στην i-οστη θέση να είναι κορίτσι), $1 \leq i \leq b+g$,
2. P(δεν υπάρχουν στη γραμμή διαδοχικά κορίτσια).

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 2.35): 30 ψυχίατροι και 24 ψυχολόγοι λαμβάνουν μέρος σε ένα συνέδριο. Από αυτά τα 54 άτομα επιλέγονται 3 στην τύχη για να πάρουν μέρος σε μια συζήτηση στρογγυλής τραπέζης σχετικά με το θέμα του συνεδρίου. Ποια είναι η πιθανότητα ότι επιλέχθηκε τουλάχιστον ένας ψυχολόγος;

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 2.38): Σε ένα συρτάρι υπάρχουν n κάλτσες, εκ των οποίων ακριβώς 3 είναι κόκκινες. Ποιά είναι η τιμή του n, αν γνωρίζουμε ότι όταν επιλεγούν 2, η πιθανότητα να είναι και οι 2 κόκκινες είναι $\frac{1}{2}$;

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 2.43a): Μεταξύ N ανθρώπων περιλαμβάνονται και τα άτομα A και B. Αν μπουν τα N άτομα κατά τύχη σε σειρά (δηλαδή όλες οι $N!$ μεταθέσεις τους είναι ισοπίθανες), ποια είναι η πιθανότητα οι A, B να βρεθούν δίπλα ο ένας στον άλλο;

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 2.44): Τα άτομα A, B, C, D και E μπαίνουν στην τύχη σε μια γραμμή (δηλαδή οποιαδήποτε από τις 5! μεταθέσεις τους είναι εξίσου πιθανή). Να βρεθούν οι πιθανότητες:

1. P(να υπάρχει ακριβώς ένα άτομο μεταξύ των A και B),
2. P(να υπάρχουν ακριβώς δυο άτομα μεταξύ των A και B),
3. P(να υπάρχουν ακριβώς τρία άτομα μεταξύ των A και B).

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 2.53): Θεωρούμε 4 παντρεμένα ζευγάρια. Αν τα 8 αυτά άτομα παραταχθούν τυχαία σε σειρά (δηλαδή οποιαδήποτε από τις 8! μεταθέσεις τους είναι εξίσου πιθανή) να βρεθεί η πιθανότητα όπως κανένας άντρας να μη βρίσκεται δίπλα στη γυναίκα του.

Άσκηση 9 (Tijms, Example 7.13): Θεωρούμε 15 οικογένειες που συμμετέχουν σε μια εκδρομή και πρόκειται να διαλέξουν ένα από τέσσερα προτεινόμενα ξενοδοχεία για να διανυκτερεύσουν. Κάθε ξενοδοχείο έχει αρκετό χώρο ώστε να φιλοξενήσει και τις 15 αν χρειαστεί. Κάθε οικογένεια διαλέγει ξενοδοχείο εντελώς τυχαία (με πιθανότητα 1/4 το καθένα) και ανεξάρτητα από τις άλλες οικογένειες. Ποια είναι η πιθανότητα να μη χρησιμοποιηθούν και τα 4 ξενοδοχεία (δηλαδή να υπάρχει τουλάχιστον ένα ξενοδοχείο που δεν το επέλεξε καμιά οικογένεια);

Άσκηση 10 (Tijms, Prob. 7.21): Από μια συνηθισμένη τράπουλα με 52 φύλλα που χωρίζονται σε 4 'χρώματα' ($\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ και $\spadesuit$) από 13 φύλλα το καθένα $(A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K)$ επιλέγονται τυχαία 13 φύλλα (χέρι μπριτζ). Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα 'χρώμα' που δεν εμφανίζεται καθόλου.

Απαντήσεις

Άσκηση 1 (Ross, Exer. 2.16): Είναι:

1. $P(\text{όλες οι ρίψεις διαφορετικές}) = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6^5} = \frac{\binom{6}{5}\frac{5!}{1!1!1!1!1!}}{6^5} = 0.0926$,
2. $P(\text{υπάρχει ένα ζευγάρι ίδιων ρίψεων και τρεις διαφορετικές}) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{3}\frac{5!}{2!1!1!1!}}{6^5} = 0.4630$,
3. $P(\text{υπάρχουν δυο ζευγάρια ίδιων ρίψεων και μια διαφορετική}) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}\frac{5!}{2!2!1!}}{6^5} = 0.2315$,
4. $P(\text{υπάρχει μια τριάδα ίδιων ρίψεων και δυο διαφορετικές}) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}\frac{5!}{3!1!1!}}{6^5} = 0.1543$,
5. $P(\text{υπάρχει μια τριάδα ίδιων ρίψεων και ένα ζευγάρι ίδιων ρίψεων (φουλ)}) = \frac{6\cdot5\cdot\binom{5}{3}}{6^5} = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}\frac{5!}{3!2!}}{6^5} = 0.0386$,
6. $P(\text{υπάρχει μια τετράδα ίδιων ρίψεων και μια διαφορετική (καρέ)}) = \frac{6\cdot5\cdot\binom{5}{4}}{6^5} = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}\frac{5!}{4!1!}}{6^5} = 0.0193$,
7. $P(\text{όλες οι ρίψεις όμοιες}) = \frac{6}{6^5} = \frac{\binom{6}{1}\frac{5!}{5!}}{6^5} = 0.0008$.

Άσκηση 2 (Ross, Exer. 2.28): Είναι:

1. $P(\text{όλα τα σφαιρίδια είναι του ίδιου χρώματος}) = \frac{\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{8}{3}}{\binom{19}{3}}$, αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται δεν μπαίνει ξανά στην κάλπη (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση),
2. $P(\text{όλα τα σφαιρίδια είναι διαφορετικών χρωμάτων}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{8}{1}}{\binom{19}{3}}$, αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται δεν μπαίνει ξανά στην κάλπη (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση),
3. $P(\text{όλα τα σφαιρίδια είναι του ίδιου χρώματος}) = \frac{5^3+6^3+8^3}{19^3}$, αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται ξαναμπαίνει στην κάλπη πριν επιλεγεί το επόμενο (δειγματοληψία με επανάθεση),
4. $P(\text{όλα τα σφαιρίδια είναι διαφορετικών χρωμάτων}) = \frac{3!\cdot5\cdot6\cdot8}{19^3}$, αν κάθε σφαιρίδιο που εξάγεται ξαναμπαίνει στην κάλπη πριν επιλεγεί το επόμενο (δειγματοληψία με επανάθεση).

Άσκηση 3 (Ross, Exer. 2.32): Είναι:

1. $P(\text{το άτομο στην } i\text{-οστη θέση να είναι κορίτσι}) = \frac{g(b+g-1)!}{(b+g)!} = \frac{g}{b+g}$, $1 \le i \le b+g$,
2. $P(\text{δεν υπάρχουν στη γραμμή διαδοχικά κορίτσια}) = \frac{b!\binom{b+1}{g}g!}{(b+g)!}$, $1 \le g \le b+1$. Αν $g > b+1$ η πιθανότητα είναι προφανώς 0, αφού είναι αδύνατον να μην υπάρχουν διαδοχικά κορίτσια.

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 2.35): Η πιθανότητα ότι επιλέχθηκε τουλάχιστον ένας ψυχολόγος είναι

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\binom{24}{k}\binom{30}{3-k}}{\binom{54}{3}} = 1 - \frac{\binom{30}{3}}{\binom{54}{3}} \simeq 0.8363.$$

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 2.38): Έχουμε την εξίσωση

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{n-3}{0}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n(n-1) = 12 \Leftrightarrow n = 4.$$

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 2.43a): Η πιθανότητα να βρεθούν οι A και B δίπλα ο ένας στον άλλο είναι

$$\frac{2(N-1)!}{N!} = \frac{2}{N}.$$

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 2.44): Έχουμε

1. P(να υπάρχει ακριβώς ένα άτομο μεταξύ των A και B) $= \frac{2 \cdot 3 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}$,
2. P(να υπάρχουν ακριβώς δυο άτομα μεταξύ των A και B) $= \frac{2 \cdot 2 \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{5}$,
3. P(να υπάρχουν ακριβώς τρία άτομα μεταξύ των A και B) $= \frac{2 \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$.

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 2.53): Ορίζουμε το ενδεχόμενο A_i όπως τα άτομα του i ζευγαριού να κάθονται δίπλα-δίπλα, $i = 1, 2, 3, 4$. Εφαρμόζουμε αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A_1^c A_2^c A_3^c A_4^c) = 1 - 4\frac{2 \cdot 7!}{8!} + 6\frac{2^2 \cdot 6!}{8!} - 4\frac{2^3 \cdot 5!}{8!} + \frac{2^4 \cdot 4!}{8!}.$$

Άσκηση 9 (Tijms, Example 7.13): Ορίζουμε το ενδεχόμενο A_i όπως το ξενοδοχείο i να μην επιλεγεί από καμιά οικογένεια, $i = 1, 2, 3, 4$. Εφαρμόζουμε αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k+1} \binom{4}{k} \frac{(4-k)^{15}}{4^{15}} = 0.0533.$$

Άσκηση 10 (Tijms, Prob. 7.21): Ορίζουμε τα ενδεχόμενα $A_\clubsuit$, $A_\diamondsuit$, $A_\heartsuit$, $A_\spadesuit$ να μην εμφανίζονται τα 'χρώματα' $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ και $\spadesuit$ αντίστοιχα. Εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A_\clubsuit \cup A_\diamondsuit \cup A_\heartsuit \cup A_\spadesuit) = 4\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} - 6\frac{\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}} + 4\frac{\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}} = 0.051.$$

Πηγές

1. Ross, S. (2002) *A First Course in Probability, 6th Edition.* Prentice-Hall.
2. Tijms, H. (2007) *Understanding Probability: Chance Rules in Everyday Life.* Cambridge University Press.