ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2015 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

Θέμα 1: (2 βαθμοί) Ένα πολεμικό αεροσκάφος με φορτίο τουλάχιστον δύο βομβών βάλει κατά ενός στόχου μέχρι να τον καταστρέψει. Η πιθανότητα να χτυπηθεί ο στόχος απο μία βόμβα είναι ίση με p_1. Άν μία βόμβα χτυπήσει το στόχο, η πιθανότητα να τον καταστρέψει είναι ίση με p_2. Οι διαδοχικές βολές θεωρούνται ανεξάρτητες. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

(i) μία βόμβα να καταστρέψει το στόχο,

(ii) να χρειαστούν το πολύ δύο βόμβες για την ολοκλήρωση της αποστολής.

Θέμα 2: α) (2.5 βαθμοί) Έστω X, I και Z τυχαίες μεταβλητές με $X = (2-3I)Z$, όπου I και Z είναι ανεξάρτητες, η $I \sim \text{Bernoulli}(1/2)$, και η Z είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F_Z(x)$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Z(x)$.

(i) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ ως συνάρτηση της $F_Z(x)$.

(ii) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ ως συνάρτηση της $f_Z(x)$.

(iii) Αν η Z ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathcal{N}(2, 2/5)$, βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X.

β) (1.5 βαθμός) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $E(X_n) = n/2$ και $Var(X_n) = \sqrt{n}$. Αν $\overline{X_n}$ είναι ο δειγματικός μέσος των $X_1, X_2, \ldots, X_n$, να δειχθεί ότι η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $4\,\overline{X_n} - (n+1)$ συγκλίνει στοχαστικά (ή κατα πιθανότητα) στο 0.

Θέμα 3: (3 βαθμοί) Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c & \text{αν } |x| + |y| \leq 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν:

(α) η σταθερά c,

(β) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των X και Y.

(γ) η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$ της X δοθέντος ότι $Y = y$.

(δ) η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X|Y = y]$ της X δοθέντος ότι $Y = y$.

(ε) η πιθανότητα $P(X < Y)$.

Θέμα 4: α) (1.5 βαθμός) Έστω $X_1, X_2, ..., X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή για την οποία ισχύει $P(X_i > x) = x^{-a}$, για κάθε $x > 1$ (όπου $a > 0$). Θέτουμε $Y_n = n^{-1/a} X_{(n)}, n = 1, 2, \ldots,$ όπου $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$. Βρείτε την οριακή κατανομή της $(Y_n)_{n\geq 1}$ καθώς το $n \to +\infty$ (υπόδειξη: Βρείτε το $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leq x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

β) (1.5 βαθμός) Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα $P(S_n > \frac{n}{a})$, όπου $S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ και $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι οι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ορίστηκαν στο ερώτημα α).

Για τη συνάρτηση κατανομής της τυπικής Κανονικής $\mathcal{N}(0, 1)$ δίνονται:
$\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$, $\Phi(2) = 0.9772, \Phi(2.5) = 0.9938$.

Μπορείτε να απαντήσετε σε όλα τα θέματα. Το άθροισμα των βαθμών όλων των θεμάτων είναι 12. Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες. Καλή επιτυχία.